CAPUT III.

DE

INTEGRATIONE AEQUATIONUM HOMOGENEARUM UBI SINGULI TERMINI FORMULAS DIFFERENTIALES EJUSDEM GRADUS CONTINENT.

Problema 69.

416.

Aequationis homogeneae secundi gradus

$$A\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + B\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) = 0$$

integralem, seu indolem functionis z investigare, denotantibus litteris A, B, C quantitates quascunque constantes.

Solutio.

Hanc aequationem voco homogeneam, quia formulis differentialibus secundi gradus constat, neque praeterea alias quantitates variabiles involvit. Ad hanc resolvendam observo ei satisfacere hujusmodi aequationem homogeneam primi gradus

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \alpha\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f = \text{Const.}$$

hac enim duplici modo per x et y differentiata oritur

$$\text{I.}\quad \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + \alpha\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) = 0,$$

$$\text{II.}\quad \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) + \alpha\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Jam illa per A hac vero per $\frac{C}{\alpha}$ multiplicata junctim propositam producent, si fuerit

$$A\alpha + \frac{C}{\alpha} = B, \text{ seu}$$

$$A\alpha\alpha - B\alpha + C = 0;$$

unde duplex valor pro α resultat, quorum uterque per aequationem assumtam dabit partem functionis quaesitae z. Cum igitur sit

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f - \alpha\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \text{ erit}$$

$$\partial z = f\partial x + (\partial y + \alpha\partial x)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

patet $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ functionem esse debere ipsius $y - \alpha x$, qua posita $= \Gamma' : (y - \alpha x)$, erit

$$z = fx + \Gamma : (y - \alpha x),$$

denotante f constantem quamcunque. Quocirca aequationis propositae solutio ita se habebit. Formetur primo aequatio algebraica

$$Auu + Bu + C = 0,$$

cujus factores simplices sint

$$u + \alpha \text{ et } u + \beta,$$

ita ut sit

$$Auu + Bu + C = A(u + \alpha)(u + \beta),$$

tum integrale quaesitum erit

$$z = fx + \Gamma : (y - \alpha x) + \Delta : (y - \beta x),$$

ubi cum prima pars fx jam in binis functionibus indefinitis contineri sit censenda, ob

$$fx = \frac{f(y - \alpha x) - f(y - \beta x)}{\beta - \alpha},$$

succinctius ita exprimetur

$$z = \Gamma : (y - \alpha x) + \Delta : (y - \beta x),$$

quod ob binas functiones arbitrarias utique pro completo est habendum: unico casu excepto, quo est $\beta = \alpha$. Pro quo casu statuamus $\beta = \alpha + \partial\alpha$, et cum sit

$$\Delta : [y - (\alpha + \partial\alpha)\, x] = \Delta : (y - \alpha x) - x\partial\alpha\Gamma' : (y - \alpha\, x),$$

quia pars prior jam in membro priori continetur, et loco posterioris scribere licet $x\Gamma : (y - \alpha x)$, erit pro casu $\beta = \alpha$, seu $BB = 4\,AC$, integrale

$$z = \Gamma : (y - \alpha x) + x\Gamma : (y - \alpha x).$$

Corollarium 1.

417. Pro casu $\beta = \alpha$ manifestum est, integrale etiam hoc modo exprimi posse

$$z = \Gamma : (y - \alpha x) + y\Gamma : (y - \alpha x),$$

quae autem forma ab illa non discrepat.

Corollarium 2.

418. Si $C = 0$, ut sit

$$A \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + B \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right) = 0,$$

hincque

$$Auu + Bu = Au \left(u + \frac{B}{A}\right), \text{ fit}$$

$$\alpha = 0 \text{ et } \beta = \frac{B}{A},$$

et integrale

$$z = \Gamma : y + \Delta : \left(y - \frac{B}{A}\,x\right) = \Gamma : y + \Delta : (Ay - Bx).$$

Simili modo aequationis

$$B \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right) + C \left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) = 0$$

integrale est

$$z = \Gamma : x + \Delta : (Cx - By).$$

Corollarium 3.

419. Porro hujus aequationis

$$aa\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + 2ab\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) + bb\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) = 0, \quad \text{ob}$$

$$aauu + 2abu + bb = aa\left(u + \frac{b}{a}\right)^2,$$

est integrale

$$z = \Gamma : (ay - bx) + x\Delta : (ay - bx).$$

Scholion.

420. Harum integralium forma nulla laborat difficultate, quamdiu aequatio

$$Auu + Bu + C = 0$$

duas habet radices reales, sive sint inaequales sive aequales; quando autem hae radices fiunt imaginariae, ut sit

$$\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \beta = \mu - \nu\sqrt{-1};$$

tum functiones arbitrariae omni fere usu destituuntur. Etsi enim indoles functionum Γ et Δ lineis curvis utcunque ductis repraesentatur, ut $\Gamma : v$ et $\Delta : v$ denotent in iis applicatas abscissae v convenientes, nullo modo patet, quomodo valores

$$\Gamma : (p + q\sqrt{-1}) \quad \text{et} \quad \Delta : (p - q\sqrt{-1}),$$

exhiberi debeant, etiamsi imaginaria se mutuo tollant. In quo ingens cernitur discrimen inter functiones continuas et discontinuas, cum in illis semper valores ita expressi

$$\Gamma : (p + q\sqrt{-1}) + \Gamma : (p - q\sqrt{-1}) \quad \text{et}$$

$$\frac{\Delta : (p + q\sqrt{-1}) - \Delta : (p - q\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}},$$

realiter exhiberi queant, id quod si Γ et Δ significent functiones discontinuas nullo modo succedit. His igitur casibus solutio generalis hic inventa ad solas functiones continuas restringenda videtur, quandoquidem discontinuae applicationi et executioni adversantur.

Problema 70.

421. Proposita hac aequatione tertii gradus homogenea

$$A\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) + B\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right) + C\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\right) + D\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) = 0,$$

ejus integrale completum invenire.

Solutio.

Huic quoque aequationi, uti in praecedente problemate, satisfacere aequationem differentialem simplicem primi gradus, satis luculenter perspicitur, ex quo integrale particulare talem habebit formam

$$z = \Gamma : (y + nx).$$

Colligantur hinc singulae formulae differentiales tertii gradus, quae erunt

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) = + n^3 \Gamma''' : (y + nx), \quad \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right) = + n^2 \Gamma''' : (y + nx),$$

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\right) = + n \Gamma''' : (y + nx), \quad \left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) = + \Gamma''' : (y + nx),$$

quibus substitutis, quoniam divisio per

$$\Gamma''' : (y + nx),$$

succedit, nascitur ista aequatio

$$An^3 + Bn^2 + Cn + D = 0,$$

cujus tres radices si fuerint $n = \alpha$, $n = \beta$, $n = \gamma$, evidens est, aequationi propositae satisfacere hanc formam

$$z = \Gamma : (y + \alpha x) + \Delta : (y + \beta x) + \Sigma : (y + \gamma x),$$

quae cum tres functiones arbitrarias complectatur, dubium non est, quin ea sit integrale completum. Hoc tantum notetur, si duae radices sint aequales puta $\gamma = \beta$, integrale fore

$$z = \Gamma : (y + \alpha x) + \Delta : (y + \beta x) + x \Sigma : (y + \beta x),$$

sin autem adeo omnes tres fuerint inter se aequales

$$\gamma = \beta = \alpha,$$

tum erit integrale quaesitum

$$z = \Gamma : (y + \alpha x) + x \Delta : (y + \alpha x) + xx \Sigma : (y + \alpha x).$$

Quodsi duae radices fuerint imaginariae, eadem erunt tenenda, quae modo ante sunt observata.

Corollarium 1.

422. Ultimus casus, quo tres radices sunt aequales, etiam inde est manifestus, quodsi loco variabilium x et y binae novae

$$t = x \text{ et } u = y + \alpha x,$$

introducantur, aequatio proposita contrahatur in hanc formam $\left(\frac{\partial^3 z}{\partial t^3}\right) = 0$, cujus integrale manifesto est

$$z = \Gamma : u + x \Delta : u + xx \Sigma : u.$$

Corollarium 2.

423. Hinc ergo etiam intelligitur, quomodo in aequationibus homogeneis altioris gradus, si aequationes algebraicae inde formatae plures habeant radices aequales, integralia futura sint comparata. Ita ut etiam tum neque casus radicum aequalium neque integralium ulli difficultati sit obnoxius.

Scholion.

424. Casus autem binarum radicum imaginariarum, quibus functiones arbitrariae nullum usum habere videntur, ratione functionum continuarum quae satisfaciunt, uberiorem evolutionem merentur. Formulae autem his casibus in integrale ingredientes semper ad hanc formam reduci possunt

$$\Gamma : v(\cos.\Phi + \sqrt{-1}.\sin.\Phi) + \Delta : v(\cos.\Phi - \sqrt{-1}.\sin.\Phi),$$

unde primum si functiones sint potestates, hujusmodi valores colliguntur

$$A\, v^n \cos.\, n\Phi + B\, v^n \sin.\, n\Phi, \text{ seu}$$
$$A\, v^n \cos.\, (n\Phi + \alpha),$$

quotcunque enim hujusmodi valores, constantes A, n et α utcunque mutando adhiberi possunt. Deinde si functiones denotent logarithmos, prodeunt tales valores $A\, lv + B\Phi$. Tertio si functiones sint exponentiales, oriuntur hi

$$e^{v \cos.\Phi}\,[A \cos.\,(v \sin.\,\Phi) + B \sin.\,(v \sin.\,\Phi)]$$
$$= A\, e^{v \cos.\Phi} \cos.\,(v \sin.\,\Phi + \alpha).$$

et generalius

$$A\, e^{v^n \cos.\, n\Phi} \cos.\,(v^n \sin.\, n\Phi + \alpha).$$

Plurimae autem aliae hujusmodi formulae ex doctrina imaginariorum elici possunt, quae utcunque cum his combinatae, pro parte integrali ex binis radicibus imaginariis nata usurpari poterunt, unde infinita functionum multitudo nascitur, quae solutionem completam mentiri videtur, neque tamen pro completa perinde haberi potest, atque usu venit iis casibus, quibus omnes radices sunt reales. Hic autem observetur, nullum adhuc problema mechanicum seu physicum occurrisse, quod ab hujusmodi casu penderet.

Problema 71.

425. Proposita hujusmodi aequatione homogenea gradus cujuscunque

$$A\left(\frac{\partial^\lambda z}{\partial x^\lambda}\right)+B\left(\frac{\partial^\lambda z}{\partial x^{\lambda-1}\,\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial^\lambda z}{\partial x^{\lambda-2}\,\partial y^{2}}\right)+\text{etc.}=0,$$

ejus integrale invenire.

Solutio.

Formetur hinc aequatio algebraica ordinis λ

$$An^\lambda+B\,n^{\lambda-1}+Cn^{\lambda-2}+\text{etc.}=0,$$

cujus radices numero λ sint

$$n=\alpha,\ n=\beta,\ n=\gamma,\ n=\delta,\ \text{etc.}$$

quae si omnes fuerint inaequales, integrale completum aequationis propositae erit

$$z=\Gamma:(y+\alpha x)+\Delta:(y+\beta x)+\Sigma:(y+\gamma x).$$
$$+\Theta:(y+\delta x)+\text{etc.}$$

quarum functionum disparium numerus erit $=\lambda$. Sin autem eveniat, ut inter has radices duae pluresve reperiantur aequales, scilicet $\beta=\alpha$, $\gamma=\alpha$, tum functiones has radices aequales involventes respective multiplicari debent per terminos progressionis geometricae hujus $1, x, x^2$, etc. vel hujus $1, y, y^2$, etc. ita ut functionum arbitrariarum numerus non minuatur. De radicibus autem imaginariis perpetuo ea sunt notanda quae ante observavimus, nisi forte functiones arbitrarias formularum imaginariarum excludere nolimus.

Corollarium 1.

426. Casu radicum aequalium perinde est, utra serie geometrica utamur, siquidem functiones neque sint ipsius x neque ipsius y tantum. Sin autem hae functiones fuerint vel ipsius x vel ipsius y tantum, tum alterius variabilis diversae progressione geometrica uti oportet.

Corollarium 2.

427. Si in aequatione algebraica termini initiales A, B, C, etc. evanescant, ut radicum numerus exponente λ minor esse videatur, tum radices deficientes pro infinite magnis sunt habendae, quibus functiones ipsius x tantum respondebunt, in integrale introducendae.

Corollarium 3.

428. Ita si fuerit $A = 0$, $B = 0$ et $C = 0$, tres radices α, β, γ in infinitum excrescere sunt censendae, ex quibus nascetur pars integralis

$$\Gamma : x + y \Delta : x + y^2 \Sigma : x.$$

Scholion.

429. Quoniam haec pars calculi integralis vix excoli coepit, ideoque hujus generis investigationes adhuc prorsus sunt reconditae, de hac sectione plura proferre non licet, ideoque his partem primam libri secundi, quae in investigatione functionum binarum variabilium ex data quadam differentialium relatione versatur, concludere cogor. Multo autem pauciora circa partem al-

teram hujus libri in medium afferre conceditur, ubi calculus integralis ad functiones trium variabilium accommodatur, hancque ob causam ne operae quidem erit pretium, istam partem in sectiones subdividere multo minus sequentes partes attingere.