CAPUT III.

DE RESOLUTIONE AEQUATIONUM QUIBUS BINARUM FORMULARUM DIFFERENTIALIUM ALTERA PER ALTERAM UTCUNQUE DATUR.

Problema 10.

73.

Si z ejusmodi esse debeat functio binarum variabilium x et y, ut formulae differentiales $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ inter se fiant aequales, indolem istius functionis in genere determinare.

Solutio.

Ponatur $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p$ et $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q$, ut sit $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$, haecque formula $p\,\partial x + q\,\partial y$ integrationem sponte admittat. Quoniam igitur requiritur ut sit $q = p$, erit $\partial z = p\,(\partial x + \partial y)$, et posito $x + y = u$, fiet $\partial z = p\,\partial u$, quae formula cum debeat esse per se integrabilis, necesse est ut p sit functio quantitatis variabilis u, nullam praeterea aliam variabilem involuens; hincque integrando ipsa quantitas $z = \int p\,\partial u$ aequabitur functioni ipsius u, seu prodibit $z = f : u$, quae functio omnino arbitrio nostro relinquitur, ita ut pro z functio quaecunque ipsius u sive continua sive etiam discontinua assumta problemati satisfaciat. Quare cum sit $u = x + y$, erit pro solutione nostri problematis $z = f : (x + y)$. Quae forma, quo facilius appareat, quomodo conditioni praescriptae satisfaciat, fit $\partial\,.\,f : u = \partial u f' : u$, ideoque ob $u = x + y$ erit

erit $\partial z = (\partial x + \partial y)\, f' : (x+y) = \partial x\, f' : (x+y) + \partial y\, f' (x+y)$, ideoque et

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p = f' : (x+y) \text{ et } \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q = f' : (x+y),$$

ac propterea $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, seu $q = p$, omnino uti problema postulat.

Corollarium 1.

74. Quaecunque ergo functio quantitatis $x + y$ formetur, ea pro z assumta praescriptam habebit proprietatem, ut sit $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$. Talem autem functionem indicamus signo $f : (z + y)$, ita ut sit $z = f : (x + y)$.

Corollarium 2.

75. Geometrice haec solutio ita referri potest. Descripta super axe linea curva quacunque sive regulari sive irregulari, si abscissa exprimatur per $x + y$, applicata semper idoneum valorem pro functione z exhibebit.

Corollarium 3.

76. Universalitas hujus solutionis per integrationem erutae in hoc consistit, quod quantitatis $x + y$ functionem qualemcunque sive continuam sive etiam discontinuam pro z invenerimus; quippe quae conditioni problematis semper satitfacit.

Scholion 1.

77. Fundamentum solutionis hoc nititur principio, quod formula differentialis $p\, \partial u$ integrabilis esse nequeat, nisi quantitas p sit functio ipsius u, vel vicissim u functio ipsius p, ita ut nulla alia variabilis in computum ingrediatur. Quin etiam qualiscunque

fuerit p functio ipsius u, integrale nisi actu exhiberi, semper tamen concipi potest; si enim u denotet abscissam, et p applicatam curvae cujuscunque sive regularis sive irregularis, qua ratione utique functio quaecunque ipsius z in sensu latissimo repraesentari potest, ejus curvae area $\int p \partial u$ praebet valorem formulae integralis $\int p \partial u$, quae iterum ut functio ipsius u spectari potest; ex quo vicissim functio quaecunque ipsius u naturam formulae integralis $\int p \partial u$ exhaurit. Quod autem functio quaecunque quantitatis $x + y$ pro z assumta satisfaciat conditioni, ut in differentiali $\partial z = p \partial x + q \partial y$ fiat $p = q$, seu $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, ita per se est perspicuum, ut illustratione per exempla non egeat. Si enim verbi gratia ponatur

$$z = aa + b(x + y) + (x + y)^2 = aa + bx + by + xx + 2xy + yy,$$

erit differentiando

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = b + 2x + 2y \text{ et } \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = b + 2x + 2y,$$

qui valores inter se utique sunt aequales.

Scholion 2.

78. Cum z sit functio binarum variabilium x et y, ac ponatur $\partial z = p \partial x + q \partial y$, ut sit

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p \text{ et } \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q,$$

in hoc capite ejusmodi quaestiones evoluere est propositum, in quibus aequatio quaecunque inter p et q praescribitur, in quam reliquarum variabilium x, y et z nulla ingrediatur. Proposita ergo aequatione quacunque inter binas formulas p et q et constantes, quaeri oportet indolem functionis z binarum variabilium x et y, ut formulis inde per differentiationem natis $p = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ et $q = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ praescripta illa conditio conveniat. Quam tractationem quidem exorsi sumus ab exemplo simplicissimo $p = q$, cujus solutio etiam ope principii modo expositi confici potest. At vero idem principium sufficit problemati sequenti latius patenti resolvendo.

Problema 11.

79. Si z ejusmodi esse debeat functio binarum variabilium x et y, ut fiat $\alpha\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\beta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\gamma$, indolem istius functionis z in genere definire.

Solutio.

Posito $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$, requiritur ut sit $\alpha p + \beta q = \gamma$. Hinc cum sit $q = \frac{\gamma - \alpha p}{\beta}$, erit

$$\partial z = p\,\partial x + \frac{(\gamma - \alpha p)}{\beta}\partial y, \text{ seu}$$

$$\partial z = \frac{\gamma}{\beta}\partial y + \frac{p}{\beta}(\beta\,\partial x - \alpha\,\partial y),$$

quam formulam integrabilem esse oportet. Cum autem pars $\frac{\gamma}{\beta}\partial y$ per se sit integrabilis, altera pars etiam integrabilis sit necesse est; unde posito $\beta x - \alpha y = u$, ut altera pars fiat $\frac{p}{\beta}\partial u$, evidens est, p functionem esse debere ipsius u, indeque etiam integrale proditurum esse functionem ipsius $u = \beta x - \alpha y$. Quare ponamus

$$\int p(\beta\,\partial x - \alpha\,\partial y) = \mathrm{f}:(\beta x - \alpha y),$$

eritque

$$z = \frac{\gamma}{\beta} y + \frac{1}{\beta}\mathrm{f}:(\beta x - \alpha y),$$

seu aequatio quaesita indolem functionis z determinans erit

$$\beta z = \gamma y + \mathrm{f}:(\beta x - \alpha y),$$

denotante signo f: functionem quamcunque sive continuam sive discontinuam formulae suffixae $\beta x - \alpha y$. Atque indicando formulae $\mathrm{f}:u$ differentiale per $\partial u\,\mathrm{f}':u$, erit

**

$$p = f' : (\beta x - \alpha y) \text{ et } q = \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} f' : (\beta x - \alpha y),$$

unde manifesto resultat $\alpha p + \beta q = \gamma$.

Corollarium 1.

80. Eodem solutio redit, si pro p ejus valorem $p = \frac{\gamma - \beta q}{\alpha}$ substituamus, unde fit

$$\partial z = \frac{\gamma}{\alpha} \partial x + \frac{q}{\alpha} (\alpha \partial y - \beta \partial x),$$

hincque eodem modo

$$z = \frac{\gamma x}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} f : (\alpha y - \beta x).$$

Etsi enim haec forma a praecedente differre videtur, tamen facile eo reducitur, ponendo ibi

$$f : (\beta x - \alpha y) = \frac{\gamma (\beta x - \alpha y)}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \phi : (\alpha y - \beta x),$$

quae forma utique est functio ipsius $\beta x - \alpha y$.

Corollarium 2.

81. Si ergo in forma $\partial z = p \partial x + q \partial y$ debeat esse $p + q = 1$, ob $\alpha = 1$, $\beta = 1$ et $\gamma = 1$, solutio huc redit, ut fiat

$$z = y + f : (x - y).$$

Constructa ergo curva quacunque, si abscissae $x - y$ respondeat applicata v, erit $z = y + v$.

Scholion.

82. Si alia proponatur relatio inter p et q, eadem methodo solutionem obtinere non licet; sed alio principio uti convenit, cujus quidem veritas ex primis calculi integralis elementis est manifesta. Notari scilicet oportet esse

$$\int p \partial x = p x - \int x \partial p,$$

similique modo

$$\int q\,\partial y = qy - \int y\,\partial q,$$

ita ut cum sit

$$z = \int (p\,\partial x + q\,\partial y),$$

futurum sit

$$z = px + qy - \int (x\,\partial p + y\,\partial q).$$

Quomodo autem hoc principium ad solutionem hujusmodi quaestionum, quae ad hoc caput sint referendae, applicandum sit, in sequentibus problematibus docebitur.

Problema 12.

83. Si z ejusmodi esse debeat functio binarum variabilium x et y, ut posito $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$, fiat $pq = 1$, indolem istius functionis z in genere definire.

Solutio.

Ex principio ante stabilito notemus fore

$$z = px + qy - \int (x\,\partial p + y\,\partial q).$$

Cum jam ob $pq = 1$ sit $q = \frac{1}{p}$, erit

$$z = px + \frac{y}{p} - \int \left(x\,\partial p - \frac{y\,\partial p}{pp}\right).$$

Integrabilis ergo esse debet haec forma $\int \left(x - \frac{y}{pp}\right) \partial p$, at in genere formula $\int u\,\partial p$ integrationem non admittit, nisi sit u functio ipsius p. Quare in nostro casu necesse est sit quantitas $x - \frac{y}{pp}$ functio ipsius p tantum, unde etiam integrale $\int \partial p \left(x - \frac{y}{pp}\right)$ erit functio ipsius p tantum, quae si indicetur per $f:p$ ejusque differentiale per $\partial p\, f':p$, erit

$$z = px + \frac{y}{p} - f:p, \text{ et } x - \frac{y}{pp} = f':p.$$

Quare ad problema nostrum solvendum, nova variabilis p introduci debet, ex qua cum altera y conjuncta binae reliquae x et z determinentur. Sumta scilicet variabili p ejusque functione quacunque $f:p$, indeque per differentiationem derivata $f':p$, capiatur primo

$$x = \frac{y}{pp} + f':p, \text{ indeque erit}$$
$$z = \frac{2y}{p} + p\, f':p - f:p,$$

quae est solutio problematis quaesita generalis.

Corollarium 1.

84. Hic igitur functio quaesita z per ipsas variabiles x et y explicite evolui nequit; propterea quod quantitatem p ex aequatione $x - \frac{y}{pp} = f':p$ in genere per x et y definire non licet.

Corollarium 2.

85. Nihilo vero minus solutio pro idonea et completa est habenda, quoniam introducendo novam variabilem p, ex binis y et p a se invicem non pendentibus ambae reliquae x et z definiuntur.

Corollarium 3.

86. Si sumamus $f':p = \alpha + \frac{\beta}{pp}$, erit

$$f:p = \alpha p - \frac{\beta}{p} \text{ et } (x - \alpha) = \frac{\beta + y}{pp},$$

hinc $p = \sqrt{\frac{\beta + y}{x - \alpha}}$; unde functio quaesita z ita se habebit

$$z = \frac{2y\sqrt{(x-\alpha)}}{\sqrt{(\beta+y)}} + \frac{\alpha y + \beta x}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta+y)}} - \frac{\alpha y + \beta x - 2\alpha\beta}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta+y)}},$$

seu $z = 2\sqrt{(x-\alpha)(y+\beta)}$, quae est solutio particularis, et simplicissima est $z = 2\sqrt{xy}$.

Scholion 1.

87. Quemadmodum solutio hujus problematis ex alio principio est deducta, ita etiam forma solutionis a praecedentibus discrepat, quod hic aequationem inter x, y et z explicitam exhibere non liceat, sed nova variabilis p introducatur. Cum igitur ante una aequatio inter ternas variabiles x, y et z solutionem continuisset, nunc accedente nova variabili p, solutio geminam aequationem inter has quatuor variabiles postulat, sicque pro nostro casu invenimus

$$z = px + \frac{y}{p} - \mathrm{f} : p \quad \text{et} \quad x - \frac{y}{pp} = \mathrm{f}' : p,$$

existente

$$\partial \,.\, \mathrm{f} : p = \partial p \mathrm{f}' : p,$$

ubi functionis signum indefinitum f: quod etiam functiones discontinuas admittit, universalitatem solutionis praestat. Quod si hinc litteram p eliminare liceret, aequatio evoluta inter x, y et z obtineretur; haec autem eliminatio succedit, quoties pro $\mathrm{f}:p$ functio algebraica ipsius p assumitur, in genere autem nullo modo sperari potest. Nihilo vero minus ope curvae pro lubitu assumtae problema construi potest: sumta enim curva quacunque sive regulari sive irregulari, ponatur abscissa $= p$, sitque applicata $\mathrm{f}':p = r$, erit $\mathrm{f}:p = \int r\,\partial p$ area ejus curvae, quae si dicatur $= s$, aequationes binae

$$x - \frac{y}{pp} = r \quad \text{et} \quad z = px + \frac{y}{p} - s,$$

solutionem completam problematis praebebunt. Scilicet sumto pro x valore quocunque, erit $y = pp(x - r)$, hincque fit

$$z = 2px - pr - s,$$

in qua solutione nihil ad praxin spectans desiderari potest. Hinc patet etiam fortasse fieri posse, ut duae novae variabiles sint introducendae, ac tum solutio tribus aequationibus contineatur; neque etiam tum quicquam deerit ad usum practicum.

Scholion 2.

88. Cum pro formula $\partial z = p\partial x + q\partial y$ requiratur ut sit $pq = 1$, introducendo angulum indefinitum Φ alia solutio concinnior elici potest. Posito enim $p = \text{tang.}\Phi$ erit $q = \cot.\Phi$, et ob $\partial z = \partial x \,\text{tang.}\Phi + \partial y \cot.\Phi$, fiet per reductionem supra indicatam

$$z = x\,\text{tang.}\Phi + y\cot.\Phi - \int \partial\Phi \left(\frac{x}{\cos.\Phi^2} - \frac{y}{\sin.\Phi^2}\right),$$

unde patet formulam $\frac{x}{\cos.\Phi^2} - \frac{y}{\sin.\Phi^2}$ esse debere functionem ipsius Φ, quae si ponatur $f' : \Phi$, et formula integralis

$$\int \partial\Phi \,.\, f' : \Phi = f : \Phi,$$

binae aequationes solutionem continentes erunt

$$\frac{x}{\cos.\Phi^2} - \frac{y}{\sin.\Phi^2} = f' : \Phi \text{ et } z = x\,\text{tang.}\Phi + y\cot.\Phi - f : \Phi,$$

unde jam pro lubitu x vel y eliminare licet. Quin etiam utramque eliminare possumus, ac per binas variabiles z et Φ binae reliquae x et y ita exprimentur

$$x = \tfrac{1}{2}z\cot.\Phi + \tfrac{1}{2}\cot.\Phi \,.\, f : \Phi + \tfrac{1}{2}\cos.\Phi^2 \,.\, f' : \Phi,$$
$$y = \tfrac{1}{2}z\,\text{tang.}\Phi + \tfrac{1}{2}\text{tang.}\Phi \,.\, f : \Phi - \tfrac{1}{2}\sin.\Phi^2 \,.\, f' : \Phi.$$

Quodsi igitur hinc differentialia capiantur, ac ponatur $\partial y = 0$, ex posteriori dabitur relatio inter ∂z et $\partial\Phi$, unde si ipsius $\partial\Phi$ valor in priori substituatur, necesse est prodeat

$$\partial z = \partial x \text{ tang.}\Phi;$$

simili autem modo si ponatur $\partial x = 0$, ex altera orietur

$$\partial z = \partial y \cot.\Phi.$$

Problema 13.

89. Si z ejusmodi esse debeat functio binarum variabilium x et y, ut posito $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$ fiat $pp + qq = 1$, indolem istius functionis z in genere investigare.

Solutio.

Cum per reductionem fiat

$$z = px + qy - \int (x\,\partial p + y\,\partial q),$$

ut irrationalia evitemus, ponamus

$$p = \frac{1 - rr}{1 + rr} \text{ et } q = \frac{2r}{1 + rr},$$

siquidem hinc fit $pp + qq = 1$. Erit autem

$$\partial p = \frac{-4r\,\partial r}{(1 + rr)^2} \text{ et } \partial q = \frac{2\,\partial r(1 - rr)}{(1 + rr)^2},$$

hincque fit

$$z = \frac{(1 - rr)x + 2ry}{1 + rr} + 2\int \frac{2xr\,\partial r - y\,\partial r(1 - rr)}{(1 + rr)^2},$$

quae forma integralis cum sit functio ipsius r, statuatur ea $= \mathrm{f}:r$, ejusque differentiale $= \partial r\,\mathrm{f}':r$, ex quo obtinebimus

$$\frac{2xr - y(1 - rr)}{(1 + rr)^2} = \mathrm{f}':r \text{ et}$$

$$z = \frac{(1 - rr)x + 2ry}{1 + rr} + 2\,\mathrm{f}:r.$$

Unde si eliciamus

$$x = \frac{(1 - rr)y}{2r} + \frac{(1 + rr)^2}{2r}\mathrm{f}':r, \text{ erit}$$

$$z = \frac{(1 + rr)y}{2r} + \frac{1 - r^4}{2r}\mathrm{f}':r + 2\,\mathrm{f}:r.$$

Corollarium 1.

90. Si irrationalitatem non pertimescamus ob

$$q = \sqrt{(1 - pp)} \text{ et } \partial q = \frac{-p\,\partial p}{\sqrt{(1 - pp)}}, \text{ erit}$$

$$z = px + y\sqrt{(1 - pp)} - \int \partial p\left(x - \frac{py}{\sqrt{(1 - pp)}}\right).$$

Posito ergo $z = px + y\sqrt{(1-pp)} - \mathrm{f}:p$, erit

$$x - \frac{py}{\sqrt{(1-pp)}} = \mathrm{f}':p.$$

Corollarium 2.

91. Solutio simplicissima sine dubio prodit sumendo $\mathrm{f}:p = 0$, unde cum sit $x = \frac{py}{\sqrt{(1-pp)}}$, erit

$$p = \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}} \text{ et } \sqrt{(1-pp)} = \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}},$$

hincque

$$z = \frac{xx+yy}{\sqrt{(xx+yy)}} = \sqrt{(xx+yy)}.$$

Ex quo valore fit

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}} = p \text{ et } \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}} = q,$$

ideoque $pp + qq = 1$.

Corollarium 3.

92. Si ponamus $p = \sin.\Phi$, erit $q = \cos.\Phi$, hinc

$$z = x\sin.\Phi + y\cos.\Phi - \int\partial\Phi(x\cos.\Phi - y\sin.\Phi),$$

eritque hoc integrale $= \mathrm{f}:\Phi$, ejusque differentiale $\partial\Phi\,\mathrm{f}':\Phi$. Ex quo habebimus

$$z = x\sin.\Phi + y\cos.\Phi - \mathrm{f}:\Phi \text{ et } x\cos.\Phi - y\sin.\Phi = \mathrm{f}':\Phi$$

Problema 14.

93. Si z ejusmodi esse debeat functio binarum variabilium x et y, ut posito $\partial z = p\partial x + q\partial y$, quantitas q aequetur functioni datae ipsius p, indolem hujus functionis z in genere investigare.

Solutio.

Cum q sit functio data ipsius p, ponatur $\partial q = r\partial p$, eri quum r functio data ipsius p. Aequatio ergo nostra generalis solutionem suppeditans induet hanc formam

$$z = p\,x + q\,y - \int \partial p\,(x + r\,y),$$

ubi patet integrale $\int \partial p\,(x + r\,y)$ fore functionem ipsius p, quae generatim per $\mathrm{f}:p$ exponatur, ejusque differentiale per $\partial p\,\mathrm{f}':p$, habebimus

unde $z = p\,x + q\,y - \mathrm{f}:p$ et $x + r\,y = \mathrm{f}':p$,

quae duae aequationes solutionem problematis universalissime complectuntur, siquidem $\mathrm{f}:p$ functionem quamcunque ipsius p sive continuam sive discontinuam denotare potest.

Corollarium 1.

94. Cum sit q functio data ipsius p, indeque $r = \frac{\partial q}{\partial p}$, si functio indefinita ipsius p ponatur $\mathrm{f}:p = \mathrm{P}$, ob $\mathrm{f}'p = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial p}$, solutio his aequationibus continebitur

$$z = p\,x + q\,y - \mathrm{P} \text{ et } x\,\partial p + y\,\partial q = \partial \mathrm{P}.$$

Corollarium 2.

95. Si ad constructionem utamur curva quacunque, in qua si abscissa capiatur $= p$, applicata sit $= \mathrm{f}':p$, area ejus curvae dabit valorem ipsius $\mathrm{f}:p$. Sin autem applicata indicetur per $\mathrm{f}:p$, tum $\mathrm{f}':p$ exprimet tangentem anguli, quem tangens curvae faciet cum axe.

Scholion.

96. Duplici ergo modo curva quaecunque ad libitum descripta, sive sit continua seu aequatione quapiam analytica contenta, sive libero manus ductu utcunque delineata, ad constructionem problematis adhiberi potest. Vel enim abscissa per p indicata, applicata sumi potest ad $\mathrm{f}:p$ vel ad $\mathrm{f}':p$ exprimendum, nec facile dici potest, utrum ad praxin commodius sit futurum? Ubi autem hujusmodi

problemata realia occurrunt, reliquae circumstantiae solutionem determinare solent, unde pro quovis casu constructio maxime idonea facile colligetur. Problemata autem mechanica hanc calculi integralis partem postulantia semper ad formulas differentiales secundi altiorumque ordinum deducunt, quarum resolutio ne suscipi quidem posse videtur, quam methodus pro formulis differentialibus primi gradus fuerit patefacta. Hactenus quidem problemata proposita absolute resolvere licuit; nunc autem quando conditio praescripta relationem formularum $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ per reliquas variabiles x, y et z definit, negotium in genere non amplius succedit, nisi relatio praescripta unicam tantum variabilem cum binis formulis differentialibus conjungat.