CAPUT II.

DE RESOLUTIONE AEQUATIONUM QUIBUS ALTERA FORMULA DIFFERENTIALIS PER QUANTITATES FINITAS UTCUNQUE DATUR.

Problema 4.

33.

Investigare indolem functionis z binarum variabilium x et y, ut formula differentialis $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p$ sit quantitas constans $= a$.

Solutio.

Posito ergo $\partial z = p\partial x + q\partial y$, ea functionis z indoles quaeritur, ut sit $p = a$, seu $\partial z = a\partial x + q\partial y$: ad quam inveniendam sumatur y pro constante, erit $\partial z = a\partial x$, et integrando $z = ax +$ Const. ubi notari oportet hanc constantem utcunque involvere posse quantitatem y. Quare ut solutionem generalem exhibeamus, erit $z = ax + \mathrm{f}:y$, denotante $\mathrm{f}:y$ functionem quamcunque ipsius y, quae per se nullo modo determinatur, sed penitus ab arbitrio nostro pendet. Quod etiam differentiatio vicissim declarat; si enim hujus functionis $\mathrm{f}:y$ differentiale per $\partial y\,\mathrm{f}':y$ indicemus, erit utique

$$\partial z = a\partial x + \partial y\,\mathrm{f}':y;$$

ideoque $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = a$, prorsus uti quaestio postulat; unde patet hoc casu alteram formulam differentialem $q = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, functioni solius y aequari, cum sit $q = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

Corollarium 1.

34. Si ergo ejusmodi quaeratur functio z binarum variabilium x et y, ut sit $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = a$, erit $z = ax + f{:}y$, et altera formula differentialis $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ necessaria aequatur functioni ipsius y tantum.

Corollarium 2.

35. Si talis requiratur functio, ut sit $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$, ea necessario erit functio ipsius y tantum, seu quantitatem x plane non involvet; cum enim a variatione ipsius x nullam mutationem pati debeat, haec quantitas x quoque in ejus determinationem plane non ingredietur.

Corollarium 3.

36. Hinc etiam patet aequationem differentialem

$$\partial z = a \partial x + q \partial y$$

realem esse non posse, nisi q sit functio ipsius y tantum; quod etiam character supra expositus declarat, aequatione enim ad hanc formam $a\partial x + q\partial y - \partial z = 0$ reducta, ob $P = a$, $Q = q$, et $R = -1$, erit $L = \left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)$, $M = 0$, et $N = -\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$, ideoque realitas postulat, ut sit

$$a\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = 0.$$

At per hypothesin q non pendet a z, unde ob $\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right) = 0$, erit $\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = 0$, ideoque etiam q ab x non pendet.

Scholion 1.

37. Ex allatis satis patet hanc operationem, qua functionem z determinavimus, veram esse integrationem, qua uti in vulgaribus

integrationibus aliquid indeterminati introducitur. Hic scilicet ingressa est functio quaecunque ipsius y, cujus indoles per se nullo modo determinatur; eam quoque ita concipere licet, ut descripta curva quacunque, si ejus abscissae per y indicentur, applicatae exhibeant ejusmodi functionem ipsius y. Neque vero opus est, ut haec curva sit regularis et aequatione quapiam contenta; sed curva quaecunque libero manus ductu descripta eundem praestat effectum, etiamsi sit maxime irregularis, et ex pluribus partibus diversarum curvarum conflata. Hujusmodi functiones irregulares appellare licet discontinuas seu nexu continuitatis destitutas; unde hoc imprimis notatu dignum occurrit, quod cum prioris generis integrationes alias functiones praeter continuas non admittant, hic etiam functiones discontinuae calculo subjiciantur, quod pluribus insignibus Geometris adeo calculi principiis adversari est visum. Verum integrationum in hoc secundo libro tradendarum vis praecipua in eo consistit, quod etiam functionum discontinuarum sint capaces; ex quo per hunc quasi novum calculum fines Analyseos maxime proferri sunt censendi.

Scholion 2.

38. Quemadmodum deinde in vulgaribus integrationibus constans arbitraria ingressa, semper ex indole problematis, cujus solutio eo perduxerat, determinatur, ita etiam hic natura problematis, cujus solutio hujusmodi integratione absolvitur, semper indolem functionis arbitrariae per integrationem ingressae determinabit. Ita si cordae tensae figura quaecunque inducatur, eaque subito dimittatur, ut oscillationes peragat, ope principiorum mechanicorum ad quodvis tempus figura, quam corda tum sit habitura, definiri potest, hocque fit ejusmodi integratione, qua functio quaedam arbitraria introducitur; quam autem deinceps ita determinari convenit, ut pro ipso motus initio ipsa illa figura cordae inducta prodeat; et cum solutio debeat esse generalis, ut satisfaciat figurae cuicunque initiali,

necesse est, ut etiam ad eos casus pateat, quibus cordae initio figura irregularis nullo continuitatis nexu praedita inducatur, quod fieri non posset, nisi per integrationem ejusmodi functio arbitrio nostro relicta ingrederetur, quam etiam ad figuras irregulares adaptare liceret. Hujusmodi functiones arbitrarias, prouti hic feci, ejusmodi signandi modo $f:y$ indicabo, unde cavendum erit ne littera f pro quantitate habeatur, quocirca ipsi *colon* suffigere visum est. Simili modo in sequentibus haec scriptio $f:(x+y)$ denotabit functionem arbitrariam quantitatis $x+y$; ac ubi plures tales functiones in calculum ingredientur, praeter litteram f etiam his characteribus Φ, Ψ, Θ, etc. cum simili significatione utar.

Problema 5.

39. Investigare indolem functionis z binarum variabilium x et y, ut formula differentialis $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p$ aequalis fiat functioni datae ipsius x, quae sit X, ita ut sit $p = X$.

Solutio.

Posito $\partial z = p\partial x + q\partial y$, ob $p = X$ erit $\partial z = X\partial x + q\partial y$; quia jam hujus differentialis pars $X\partial x$ est data, ad integrale inveniendum accipiatur y constans, et cum sit $\partial z = X\partial x$, erit integrando $z = \int X\partial x +$ Const. quae constans cum etiam quantitatem y utcunque implicare possit, pro ea assumere licebit functionem quamcunque arbitrariam ipsius y, eritque ergo integrale quaesitum $z = \int X\partial x + f:y$, quae per differentiationem praebet

$$\partial z = X\partial x + \partial y f' : y,$$

ita ut sit $q = f':y$, atque $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = X$, plane ut requirebatur.

Corollarium 1.

40. Aequationis ergo $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = X$, existente z functione duarum variabilium x et y, integrale est $z = \int X\partial x + f:y$, ubi ob

X datum, formula integralis $\int X \partial x$ datam functionem ipsius x denotat; quandoquidem constans hac integratione ingressa in functione arbitraria $f : y$ comprehendi potest.

Corollarium 2.

41. Hinc sequitur aequationem differentialem

$$\partial z = X \partial x + q \partial y$$

realem esse non posse, nisi q sit functio ipsius y; quod quidem cum hac limitatione est intelligendum, nisi q etiam involvat quantitatem z; quem casum autem hinc removemus.

Scholion.

42. Si enim q etiam a z pendere queat, aequatio $\partial z = X \partial x + q \partial y$ realis erit, si q fuerit functio quaecunque binarum quantitatum $z - \int X \partial x$ et y; id quod hinc facillime patet, si ponatur $z - \int X \partial x = u$, ita ut jam q futura sit functio binarum quantitatum u et y. Tum enim aequatio differentialis, quae fit $\partial u = p \partial y$, duas tantum continet variabiles u et y, ideoque certo est realis; et quomodocunque ejus integrale se habeat, inde semper u aequabitur certae functioni ipsius y, unde fit $u = z - \int X \partial x = f : y$, prorsus ut ante. Quoties ergo esse debet $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = X$, etiam ne hoc quidem casu excepto, quo forte q ipsam quantitatem z implicat, integrale erit

$$z = \int X \partial x + f : y,$$

neque unquam alia solutio locum habere potest. Erit ergo hoc integrale completum, propterea quod functionem arbitrariam involvit, id quod pro certissimo criterio integralis completi est habendum. Hic igitur ad integrale completum requiritur, ut non tam constans quaedam arbitraria, sed functio adeo variabilis arbitraria ingrediatur; ita si quis pro casu $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = axx$ exhibeat hoc integrale

$$z = \tfrac{1}{3} a x^3 + A + By + Cy^2 + \text{etc.}$$

id tantum erit particulare, etiamsi plures constantes arbitrarias A, B, C, etc. ac fortasse infinitas complectatur; verum enim integrale completum

$$z = \tfrac{1}{3} a x^3 + f : y$$

infinite latius patet, id quod ad sequentia recte intelligenda probe notari oportet. Occurrent autem utique casus, quibus ob defectum methodi integrale completum investigandi, integralibus particularibus contenti esse debemus, quae etiamsi adeo infinitas constantes arbitrarias comprehendant, tamen pro solutionibus particularibus tantum sunt habenda. Hanc observationem in sequentibus perpetuo meminisse oportet, ne circa integralia particularia et completa unquam decipiamur.

Problema 6.

23. Si z debeat esse ejusmodi functio binarum variabilium x et y, ut formula differentialis $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p$ aequetur functioni cuipiam datae ipsarum x et y, definire in genere indolem functionis quaesitae z.

Solutio.

Sit V functio ista data ipsarum x et y, cui formula differentialis $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p$ aequalis esse debet, ac posito

$$\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$$

requiritur, ut sit $p = V$. Jam ad formam functionis z inveniendam consideretur quantitas y tanquam constans, eritque $\partial z = V \partial x$. Integretur igitur formula $\int V \partial x$ spectata sola x ut variabili, quia y pro constante sumitur, ita ut in hac formula unica insit variabilis x, ideoque ejus integratio nulli obnoxia sit difficultati, id tantum est tenendum, constantem integratione ingressam utcunque involvere posse alteram quantitatem y, sicque pro functione quaesita z haec habebitur expressio

$$z = \int V \partial x + f : y$$

integrali $\int V \partial x$ ita sumto, quasi quantitas y esset constans solaque x variabilis; at $f : y$ denotat functionem quamcunque arbitrariam ipsius y, ne exclusis quidem formis discontinuis, quae nullis expressionibus analyticis exhiberi queant; atque ob hanc ipsam functionem arbitrariam integratio pro completa est habenda.

Corollarium 1.

44. Cum V sit functio data ipsarum x et y, formula integralis $\int V \partial x$ erit etiam functio cognita et determinata earundem quantitatem x et y, quod enim per integrationem arbitrarii ingreditur, in altera parte $f : y$ comprehenditur.

Corollarium 2.

45. Hinc etiam differentialis ∂z altera pars $q \partial y$ ex variabilitate ipsius y oriunda definitur. Nam per §. 28. est formae $\int V \partial x$ differentiale ex utraque variabili x et y ortum

$$V \partial x + \partial y \int \partial x \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right);$$

ac si functionis $f : y$ differentiale indicetur per $\partial y f' : y$, erit

$$\partial z = V \partial x + \partial y \int \partial x \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \partial y f : y.$$

Corollarium 3.

46. Cum ergo posuerimus $\partial z = p \partial x + q \partial y$, sitque $p = V$, erit

$$q = \int \partial x \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + f' : y,$$

ubi ob V functionem datam ipsarum x et y, etiam $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$ erit functio data, et in integratione $\int \partial x \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$ sola x pro variabili habetur.

Exemplum 1.

47. *Quaeratur ejusmodi functio z ipsarum x et y, ut sit*

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}.$$

Ob $V = \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$, erit $\int V \partial x = \sqrt{(xx+yy)}$, ideoque habemus

$$z = \sqrt{(xx+yy)} + f:y,$$

unde fit

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q = \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}} + f':y,$$

id quod etiam per regulam datam prodit. Erit enim

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{-xy}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}},$$

hinc sumta y constante

$$\int \partial x \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = -y \int \frac{x \partial x}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}}.$$

Exemplum 2.

48. *Quaeratur ejusmodi functio z ipsarum x et y, ut sit*

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{y}{\sqrt{(yy-xx)}}.$$

Cum sit $V = \frac{y}{\sqrt{(yy-xx)}}$, erit

$$\int V \partial x = y \text{ Ang. sin. } \frac{x}{y},$$

hincque

$$z = y \text{ Ang. sin. } \frac{x}{y}. + f:y$$

cujus differentiale ex ipsius y variabilitate oriundum, si desideremus, ob

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{-\,x\,x}{(y\,y\,-\,x\,x)^{\frac{3}{2}}},\ \text{erit}$$

$$\int \partial x \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = -\int \frac{x\,x\,\partial x}{(yy-xx)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(yy-xx)}} - yy \int \frac{\partial x}{(yy-xx)^{\frac{3}{2}}},$$

ideoque

$$\int \partial x \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \text{Ang. sin. } \frac{x}{y} - \frac{x}{\sqrt{(y\,y\,-\,x\,x)}},\ \text{et}$$

$$q = \text{Ang. sin. } \frac{x}{y} - \frac{x}{\sqrt{(y\,y\,-\,x\,x)}} + f' : y.$$

Idem reperitur ex differentiatione expressionis pro z inventae

$$\partial z = \partial y \text{ Ang. sin. } \frac{x}{y} + \frac{y\partial x - x\partial y}{\sqrt{(yy-xx)}} + \partial y f' : y,$$

unde pro $q = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ idem valor prodit.

Exemplum 3.

49. *Quaeratur ejusmodi functio z ipsarum x et y, ut sit*

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{a}{\sqrt{(a\,a\,-\,y\,y\,-\,x\,x)}}.$$

Ob $V = \frac{a}{\sqrt{(a\,a\,-\,y\,y\,-\,x\,x)}}$, erit

$$\int V \partial x = a \text{ Ang. sin. } \frac{x}{\sqrt{(a\,a\,-\,y\,y)}},$$

unde functionis z forma quaesita est

$$z = a \text{ Ang. sin. } \frac{x}{\sqrt{(a\,a\,-\,y\,y)}} + f : y.$$

Deinde quia

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{a\,y}{(a\,a\,-\,y\,y\,-\,x\,x)^{\frac{3}{2}}},\ \text{erit}$$

$$\int \partial x \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = ay \int \frac{\partial x}{(aa-yy-xx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a\,y}{aa-yy} \cdot \frac{x}{\sqrt{(a\,a-yy-xx)}}.$$

ideoque

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q + \frac{a\,x\,y}{(a\,a - y\,y)\sqrt{(a\,a - y\,y - x\,x)}} + f' : y$$

quae eadem expressio etiam ex ipsa differentiatione ipsius z eruitur.

Scholion 1.

30. In hoc calculo tamen adhuc quaedam incertitudo relinquitur, qua valor quantitatis q afficitur. Cum enim valor ipsius $z = \int V \partial x + f : y$ sit determinatus, quandoquidem integrale $\int V \partial x$ respectu ipsius x ita fuerit determinatum, ut pro dato ipsius x valore etiam datum valorem obtineat; adeoque in ejus differentiali pleno nulla incertitudo inesse potest, sed necesse est, ut valor ipsius p aeque prodeat determinatus atque ipsius p: interim tamen formula integralis $\int \partial x \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$ non determinatur, sed novam functionem arbitrariam a priori non pendentem introducere videtur. Ut igitur talis significatus vagus evitetur, spectari oportet conditionem, qua integrale $\int V \partial x$ determinatur, eademque conditio in formulae $\int \partial x \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$ integratione adhiberi debet. Nam ponamus integrale $\int V \partial x$ ita capi ut evanescat posito $x = a$, sitque ejus valor determinatus $\int V \partial x = S$, isque igitur potentia saltem habebit factorem $a - x$ seu $a^n - x^n$; qui cum non contineat y, etiam $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)$ eundem factorem continebit, ideoque $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)$ evanescet posito $x = a$.

Est vero $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right) = \int \partial x \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$, ex quo perspicitur, si integrale $\int V \partial x$ ita capiatur ut evanescat posito $x = a$; etiam alterum integrale $\int \partial x \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$ ita capi debere, ut evanescat posito $x = a$. In allatis binis postremis exemplis, utraque integratio ita est instituta, ut evanescat posito $x = 0$, in primo autem nulla hujusmodi regula est observata; sin autem eandem legem adhibeamus, habebimus.

$$\int V\partial x = \sqrt{(xx+yy)} - y \text{ et } \int \partial x \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}} - 1,$$

unde quidem eadem solutio emergit; quia ibi $-y$ continetur in $f:y$, et hic -1 in $f':y$. Perinde autem est quacunque lege prior integratio determinetur, dummodo eadem lege et in posteriori utamur.

Scholion 2.

51. Principium hujus determinationis isto innititur Theoremate aeque elegante ac notatu digno:

Si S sit ejusmodi functio binarum variabilium x et y, quae evanescat posito $x = a$, fueritque $\partial S = P\partial x + Q\partial y$, tum etiam quantitas Q evanescet posito $x = a$.

Unde simul colligitur, si S evanescat posito $y = b$, tum etiam fieri $P = 0$ si ponatur $y = b$. Hic autem probe observandum est, quae de simili determinatione binarum formularum integralium $\int V\partial x$ et $\int \partial x \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$ sunt praecepta, tantum valere si valor a ipsi x tribuendus fuerit constans; neque etiam superius Theorema locum habet, si verbi gratia functio S evanescat posito $x = y$, inde enim neutiquam sequitur, eodem casu quantitatem Q esse evanituram. Etiamsi enim functio S factorem habeat $x - y$ vel $x^n - y^n$, minime sequitur, formulam $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)$ seu Q eundem factorem esse habituram, quemadmodum usu venit, si factor fuerit $x - a$ seu $x^n - a^n$. Dixi autem non opus esse, ut talis factor revera adsit, dum modo quasi potentia in functione S contineatur. Veluti si fuerit

$$S = a - x + y - \sqrt{(aa - xx + yy)},$$

quae functio posito $x = a$ utique evanescit, etiamsi neque factorem $x - a$ neque $x^n - a^n$ contineat; simul vero etiam

$$\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right) = 1 - \frac{y}{\sqrt{(aa - xx + yy)}}$$

posito $x = a$ evanescit. In hujusmodi ergo calculo, quo in his problematibus utimur, ubi integrale formulae $\int V \partial x$ exhiberi debet, id semper ex duabus partibus compositum spectamus, altera indeterminata per functionem $f:y$ indicata, altera autem, quam proprie per $\int V \partial x$ exprimimus, determinata, quae scilicet posito $x = a$ evanescat; hicque semper perinde est qualis constans pro a assumatur, dum discrimen perpetuo alteri parti indeterminatae involvitur.

Problema 7.

§. 32. Si z debeat ita determinari per binas variabiles x et y, ut formula differentialis $(\frac{\partial z}{\partial x}) = p$ aequatur datae cuipiam functioni ipsarum y et z, quae sit V, definire in genere indolem functionis z per x et y.

Solutio.

Cum posito $\partial z = p \partial x + q \partial y$, sit $p = V$, si quantitatem y pro constante capiamus, erit $\partial z = V \partial x$, ubi cum V sit functio data ipsarum y et z, et y pro constante habeatur, aequatio $\frac{\partial z}{V} = \partial x$ erit integrabilis, ex cujus integratione completa oritur

$$\int \frac{\partial z}{V} = x + f:y,$$

qua aequatione relatio inter ternas variabiles x, y et z ita in genere exprimitur, ut ex ea z per x et y definiri, indolesque functionis z assignari possit.

Quodsi hinc alteram quoque differentialis partem $q \partial y$ seu functionem $q = (\frac{\partial z}{\partial y})$ indagare velimus, ponamus integrale $\int \frac{\partial z}{V}$, ubi y ut constans spectatur, ita capi ut evanescat posito $z = c$, eritque quantitatem $\int \frac{\partial z}{V}$ denuo differentiando ut etiam y variabilis assumatur

$$\partial \cdot \int \frac{\partial z}{V} = \frac{\partial z}{V} + \partial y \int \partial z \left(\frac{\partial (1:V)}{\partial y}\right), \text{ seu}$$
$$\partial \cdot \int \frac{\partial z}{V} = \frac{\partial z}{V} - \partial y \int \frac{\partial z}{VV} \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right),$$

ubi in integrali $\int \frac{\partial z}{VV} \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$ quantitas y iterum pro constante habetur, hocque integrale ita capi debet, ut posito $z = c$ evanescat. Quo facto cum aequationis inventae differentiale sit

$$\frac{\partial z}{V} - \partial y \int \frac{\partial z}{VV} \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = \partial x + \partial y f' : y,$$

pro forma proposita habebimus

$$\partial z = V \partial x + \partial y \left(V \int \frac{\partial z}{VV} \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + V f' : y\right),$$

unde quantitas q innotescit.

Corollarium 1.

53. In hoc problemate facillime definitur, qualis functio quantitas x futura sit binarum reliquarum y et z, cum sit

$$x = \int \frac{\partial z}{V} - f : y,$$

siquidem V per y et z detur. Perinde autem est sive z per x et y, sive x per y et z determinetur.

Corollarium 2.

54. Cum relatio inter ternas variabiles x, y et z ita sit determinata, ut fiat $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = V$ functioni datae ipsarum y et z, ob $\partial x = \frac{\partial z}{V}$ sumto y constante erit x ejusmodi functio ipsarum y et z, ut sit $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = \frac{1}{V}$, ideoque $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = 1$.

Scholion.

55. In genere autem quaecunque relatio inter ternas variabiles x, y et z proponatur, unde unaquaeque per binas reliquas determinari et tanquam earundem functio spectari possit, semper erit $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = 1$. Ponamus enim aequatione illam relationem exprimente differentiata prodire

$$P\partial x + Q\partial y + R\partial z = 0,$$

ac manifestum est sumta y pro constante fore

$$P\partial x + R\partial z = 0,$$

ideoque tam $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{-P}{R}$ quam $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = \frac{-R}{P}$; simile autem modo erit

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = \frac{-Q}{P},\ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{-P}{Q},\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{-Q}{R},\ \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) = \frac{-R}{Q},$$

unde propositum patet, etiamsi relatio inter plures tribus variabiles locum habeat. Caeterum hic casus a praecedentibus differt, quod hic natura functionis z, quatenus ex binis reliquis x et y formatur, non explicite exhibeatur, sed per resolutionem demum aequationis inventae definiri debet, cujus rei aliquot exempla evoluisse juvabit.

Exemplum 1.

56. *Quaeratur ejusmodi functio z ipsarum x et y, ut sit*

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{y}{z}.$$

Cum ergo sit $\partial z = \frac{y\partial x}{z}$, erit y pro constante sumendo

$$z\partial z = y\partial x \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}zz = xy + f:y.$$

Pro q inveniendo differentietur haec aequatio generaliter

$$z\partial z = y\partial x + x\partial y + \partial y f':y,$$

eritque

$$q = \frac{x}{z} + \frac{1}{z} f':y;$$

quod idem per regulam datam reperitur. Nam ob $V = \frac{y}{z}$; erit $\int\frac{\partial z}{V} = \frac{zz}{2y}$, integrali ita sumto ut evanescat posito $z = 0$; tum vero ob $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{1}{z}$, erit

$$\int\frac{\partial z}{VV}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \int\frac{z\partial z}{yy} = \frac{zz}{2yy},$$

eadem integrationis lege observata. Hinc fit

$$\partial z = \frac{y\partial x}{z} + \frac{y\partial y}{z}\left(\frac{zz}{2yy} + f':y\right) \text{ et } q = \frac{z}{2y} + \frac{y}{z} f':y,$$

quae expressio cum praecedente convenit; ex comparatione enim fit

$$x + f' : y = \frac{zz}{2y} + y f' : y,$$

unde x aequatur ut ante quantitati $\frac{zz}{2y}$ una cum functione ipsius y. Hoc tantum notetur, quod ad consensum perfectum hic pro $f:y$ scribere debuissemus $y f:y$.

Exemplum 2.

57. *Quaeratur ejusmodi functio z binarum variabilium x et y, ut sit $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\sqrt{(yy - zz)}}{z}$.*

Cum ergo sit

$$\partial z = \frac{\partial x \sqrt{(yy - zz)}}{z} + q\partial y,$$

sumta y constante fit

$$\partial x = \frac{z\partial z}{\sqrt{(yy - zz)}}, \text{ et integrando}$$

$$x = y - \sqrt{(yy - zz)} - f:y,$$

unde vicissim differentiando oritur

$$\partial x = \partial y - \frac{y\partial y + z\partial z}{\sqrt{(yy - zz)}} - \partial y f' : y, \text{ seu}$$

$$\partial z = \frac{\partial x \sqrt{(yy - zz)}}{z} + \partial y \left[\frac{y}{z} - \frac{\sqrt{(yy - zz)}}{z}(1 - f':z)\right].$$

Per regulam autem datam ob $V = \frac{\sqrt{(yy - zz)}}{z}$, est

$$\int \frac{\partial z}{V} = y - \sqrt{(yy - zz)},$$

integrali ita sumto ut evanescat posito $z = 0$. Jam vero est

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{y}{z\sqrt{(yy - zz)}} \text{ et } \frac{1}{VV}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{yz}{(yy - zz)^{\frac{3}{2}}},$$

hinc

$$\int \frac{\partial z}{VV}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{y}{\sqrt{(yy - zz)}} - 1,$$

integrali autem lege sumto. Quocirca colligitur

$$q = \frac{\sqrt{(yy-zz)}}{z}\left(\frac{y}{\sqrt{(yy-zz)}} - 1 + f':y\right) = \frac{y}{z} - \frac{\sqrt{(yy-zz)}}{z}(1 - f':y),$$

prorsus ut ante.

Problema 8.

58. Si z ita debeat determinari per binas variabiles x et y, ut formula differentialis $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p$ aequetur functioni cuipiam datae ipsarum x et z, quae sit $= V$, definire in genere indolem functionis z per x et y.

Solutio.

Ponatur $\partial z = p\partial x + q\partial y$, et cum sit $p = V$, sumatur quantitas y constans, eritque $\partial z - V\partial x = 0$, quae aequatio duas tantum quantitates variabiles x et z continens, integrabilis reddetur ope cujusdam multiplicatoris, qui sit $= M$, ita ut $M\partial z - MV\partial x$ sit differentiale verum cujuspiam functionis ipsarum x et z, quae functio sit $= S$, quantitatem y non involvens. Ex quo aequatio nostra integralis erit $S = f:y$, unde indoles functionis z quemadmodum per x et y determinatur, innotescit. Differentiemus hanc aequationem sumto praeter x et z etiam y variabili, eritque

$$\partial S = M\partial z - MV\partial x = \partial y f':y, \text{ seu}$$
$$\partial z = V\partial x + \frac{\partial y}{M} f':y, \text{ ita ut sit } q = \frac{1}{M} f':y.$$

Corollarium 1.

59. Multiplicator etiam M formulam $\partial z - V\partial x$ integrabilem reddens, quantitatem y non continebit, quia in functione data V non inest y. Statim autem hoc multiplicatore invento, valor ipsius $q = \frac{1}{M} f':y$ colligitur.

Corollarium 2.

60. Si formulae differentialis $M\partial z - MV\partial x$ integrale fuerit S functio ipsarum x et z, pro solutione problematis habebimus $S = f:y$, unde patet constantem, quam quis forte ad S adjicere voluerit, jam in functione arbitraria $f:y$ contineri.

Exemplum 1.

61. *Quaeratur ejusmodi functio z ipsarum x et y, ut sit* $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{nz}{x}$.

Posito $\partial z = \frac{nz\partial x}{x} + q\partial y$, sumto y constante erit $\partial z - \frac{nz\partial x}{x} = 0$, quae aequatio per $\frac{1}{z}$ multiplicata fit integrabilis, ita ut sit multiplicator $M = \frac{1}{z}$, hincque integrale $S = lz - lx^n$: ergo aequatio nostra integralis quaesita erit $l\frac{z}{x^n} = f:y$; unde etiam $\frac{z}{x^n}$ aequabitur functioni cuicunque ipsius y, ita ut sit $z = x^n f:y$.

Exemplum 2.

62. *Quaeratur ejusmodi functio z binarum variabilium x et y, ut sit formula differentialis* $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = nx - z$.

Posito $\partial z = (nx - z)\partial x + q\partial y$, sumto y constante erit $\partial z + z\partial x - nx\partial x = 0$, quae ope multiplicatoris $M = e^x$ dat

$$S = e^x z - n\int e^x x\partial x = e^x z - ne^x x + ne^x;$$

unde aequatio quaesitam relationem inter x, y et z exprimens est

$$e^x z - ne^x x + ne^x = f:y, \text{ sive}$$

$$z = n(x - 1) + e^{-x} f:y,$$

tum vero erit

$$q = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = e^{-x} f' : y.$$

Exemplum 3.

63. *Quaeratur ejusmodi functio z binarum variabilium x et y, ut sit formula differentialis $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{xz}{xx + zz}$.*

Ponatur ergo $\partial z = \frac{xz\partial x}{xx + zz} + q\partial y$, et posito y constante quaeratur integrale hujus aequationis differentialis

$$\partial z - \frac{xz\partial x}{xx + zz} = 0,$$

quae integrabilis redditur ope cujusdam divisoris, qui ob homogeneitatem reperitur scribendo x et z loco differentialium ∂x et ∂z, ita ut hic divisor sit

$$z - \frac{xxz}{xx + zz} = \frac{z^3}{xx + zz},$$

hincque multiplicator $M = \frac{xx + zz}{z^3}$. Quare erit

$$\partial S = \frac{(xx + zz)\partial z}{z^3} - \frac{x\partial x}{zz}, \quad \text{ideoque}$$

$$S = \frac{-xx}{2zz} + lz;$$

unde aequatio nostra quaesita erit

$$lz - \frac{xx}{2zz} = f : y \quad \text{et} \quad q = \frac{z^3}{xx + zz} f' : y,$$

ex qua cum posito $lz - \frac{xx}{2zz} = u$ sit $u = f : y$, etiam vicissim concludi potest fore $y = f : u$.

Problema 9.

64. Si z ita debeat determinari per binas variabiles x et y, ut formula differentialis $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ aequetur functioni cuipiam datae omnes tres variabiles x, y et z implicanti, quae sit $= V$, definire in genere indolem functionis z per x et y.

Solutio.

Cum sit $\partial z = V\partial x + q\partial y$, si sumamus y constans, erit $\partial z = V\partial x$, quae ergo aequatio duas tantum continet variabiles x et z, litteram autem y functione V involvens. Dabitur ergo multiplicator M hanc aequationem integrabilem reddens, ita ut sit

$$M\partial z - MV\partial x = \partial S,$$

unde aequatio integralis relationem inter x, y et z exprimens erit

$$S = f : y:$$

uci S erit functio certa ipsarum x, y et z, fierique potest ut etiam M omnes has tres litteras comprehendat. Convenit autem functioni S per integrationem inventae valorem determinatum tribui, quoniam pars indeterminata in functione arbitraria $f : y$ includitur. Ponamus ergo S ita capi, ut evanescat si ponatur $x = a$ et $z = c$.

Quod si hinc aequationis differentialis propositae alteram partem $q\partial y$ invenire velimus, differentiemus functionem S sumto etiam y variabili, sitque

$$\partial S = M\partial z - MV\partial x + Q\partial y = \partial y f' : y,$$

ubi cum sit

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) \text{ vel } \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial . MV}{\partial y}\right),$$

erit sumto iterum y constante

$$\partial Q = \partial z\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \partial x\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \partial z\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) - \partial x\left(\frac{\partial . MV}{\partial y}\right),$$

quae formula certo erit integrabilis. Capi autem Q eadem lege debet, qua S sumsimus, ita ut evanescat posito $x = a$ et $z = c$, atque inventa hac quantitate Q, cum habeamus

$$\partial z = V\partial x - \frac{Q\partial y}{M} + \frac{\partial y}{M} f' : y, \text{ erit}$$

$$q = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{-Q + f' : y}{M}.$$

Haec determinatio isto nititur fundamento, quod si S fuerit ejusmodi functio ipsarum x, y et z, quae posito $x = a$ et $z = c$ evanescat, etiam formula differentialis $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)$ eodem casu evanescat.

Corollarium 1.

65. Reducitur ergo resolutio hujus problematis ad integrationem aequationis differentialis

$$\partial z - V\partial x = 0,$$

in qua quantitas y ut constans spectatur, etiamsi V contineat omnes tres litteras x, y et z. Dabitur ergo utique multiplicatur M, qui hanc aequationem integrabilem reddat, ut sit

$$M\partial z - MV\partial x = \partial S,$$

existente S certa quadam functione ipsarum x, y et z.

Corollarium 2.

66. Invento autem hoc multiplicatore M indeque integrali S, quantitas z ita per binas variabiles x et y definietur, ut sit $S = f : y$, ubi $f : y$ denotat functionem quamcunque ipsius y sive continuam sive etiam discontinuam, ob cujus naturam integratio pro completa est habenda.

Corollarium 3.

67. Cum hoc modo relatio inter z, x, y, fuerit definita, erit ea ita differentiata, ut omnes tres litterae x, y et z variabiles sumantur

$$\partial z = V\partial x + \left(\frac{f' : y - Q}{M}\right)\partial y,$$

ubi quantitas Q ex suo differentiali

$$\partial Q = \partial z \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial . MV}{\partial y}\right)$$

definiri debet, sumta y constante, integrationem ita temperando, ut si S evanescat casu $x = a$ et $z = c$, etiam Q eodem casu evanescat.

Scholion.

68. Hic ergo ad insigne hoc Theorema deducimur:

Quod si fuerit S ejusmodi functio ipsarum x, y et z, quae evanescat ponendo $x = a$ et $z = c$, tum etiam pro eadem positione formulam $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)$ esse evanituram.

Veluti si fuerit

$$S = Axx + Bxyz + Czz - Aaa - Bacy - Ccc,$$

erit $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right) = Bxz - Bac$,

quarum utraque expressio casu $x = a$ et $z = c$ evanescit. Pluribus autem hujusmodi exemplis evolutis veritas Theorematis ita patet, ut demonstratio solennis non desideretur. Interim hujusmodi functio semper, quantitates solam y continentes a reliquis separando, ita evolvi potest, ut in talem formam transmutetur

$$S = PY + QY' + RY'' + \text{etc.}$$

ubi per hypothesin P, Q, R, etc. sunt functiones ipsarum x et z tantum, et tales quidem quae ponendo $x = a$ et $z = c$ singulae evanescant. Hinc jam perspicuum est fore

$$\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right) = P . \frac{\partial Y}{\partial y} + Q . \frac{\partial Y'}{\partial y} + R . \frac{\partial Y''}{\partial y} + \text{etc.}$$

quae forma manifesto sub iisdem conditionibus evanescit. Quomodocunque autem functio S hac indole praedita fuerit complicata, tam formulis irrationalibus quam transcendentibus, eam semper in ejusmodi formam evolvere licet, quae etsi in infinitum progrediatur, haec demonstratio tamen vim suam retinet.

Exemplum 1.

69. *Quaeratur ejusmodi functio z duarum variabilium x et y, ut sit formula differentialis* $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{xz}{ay}$.

Ponamus ergo $\partial z = \frac{xz\partial x}{ay} + q\partial y$, et sumta y constante habebitur aequatio $\partial z - \frac{xz\partial x}{ay} = 0$, ut sit $V = \frac{xz}{ay}$, et multiplicator erit $M = \frac{1}{z}$; unde fit

$$S = l\frac{z}{c} - \frac{xx + aa}{2ay},$$

et aequatio integralis completa functionem z determinans erit

$$l\frac{z}{c} + \frac{aa - xx}{2ay} = f : y.$$

Porro ad quantitatem q inveniendam, ob $M = \frac{1}{z}$ et $MV = \frac{x}{ay}$, erit $\partial Q = 0$ et $Q = 0$; unde fit $q = zf' : y$. Hic idem autem valor ex differentiatione aequationis inventae eruitur, quae praebet

$$\frac{\partial z}{z} - \frac{x\partial x}{ay} = \partial y f' : y, \text{ ideoque}$$

$$\partial z = \frac{xz\partial x}{ay} + z\partial y f' : y, \text{ ita ut sit } q = zf' : y.$$

Exemplum 2.

70. *Quaeratur binarum variabilium x et y ejusmodi functio z, ut sit* $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{y}{x+z}$.

Cum sit $V = \frac{y}{x+z}$, habebitur sumto y constante haec aequatio

$$\partial z - \frac{y\partial x}{x+z} = 0,$$

ad cujus multiplicatorem inveniendum, multiplicetur primo per $x + z$, ut prodeat

$$x\partial z + z\partial z - y\partial x = 0, \text{ seu } \partial x - \frac{x\partial z}{y} = \frac{z\partial z}{y},$$

quae multiplicata per $e^{-\frac{z}{y}}$ integrabilis evadit, proditque

$$e^{-\frac{z}{y}} x = \int e^{-\frac{z}{y}} \frac{z \partial z}{y} = - e^{-\frac{z}{y}} z + \int e^{-\frac{z}{y}} \partial z;$$

hincque

$$e^{-\frac{z}{y}} x = - e^{-\frac{z}{y}} z - y e^{-\frac{z}{y}} + C.$$

Quocirca erit multiplicator

$$M = (x+z) \cdot - \frac{1}{y} \cdot e^{-\frac{z}{y}} = - \frac{(x+z)}{y} e^{-\frac{z}{y}}, \text{ et}$$

$$S = e^{-\frac{z}{y}} (x+z+y) - e^{-\frac{c}{y}} (a+c+y),$$

ex quo aequatio integralis completa erit

$$e^{-\frac{z}{y}} (x+z+y) - e^{-\frac{c}{y}} (a+c+y) = f:y.$$

Nunc porro cum sit $MV = - e^{-\frac{z}{y}}$, erit

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = e^{-\frac{z}{y}} \left(\frac{x+z}{yy} - \frac{z(x+z)}{y^3}\right) = e^{-\frac{z}{y}} (x+z) \left(\frac{1}{yy} - \frac{z}{y^3}\right), \text{ et}$$

$$\left(\frac{\partial . MV}{\partial y}\right) = - e^{-\frac{z}{y}} \cdot \frac{z}{yy}, \text{ hincque}$$

$$\partial Q = e^{-\frac{z}{y}} \left[\partial z (x+z) \left(\frac{1}{yy} - \frac{z}{y^3}\right) + \frac{z \partial x}{yy}\right]:$$

sumto y constante, unde integrando obtinebitur

$$Q = e^{-\frac{z}{y}} \left(\frac{xz}{yy} + 1 + \frac{z}{y} + \frac{zz}{yy}\right) - e^{-\frac{c}{y}} \left(\frac{ac}{yy} + 1 + \frac{c}{y} + \frac{cc}{yy}\right),$$

hinc

$$q = \frac{z}{y} + \frac{y+z}{x+z} - e^{\frac{z-c}{y}} \left(\frac{ac + cc + cy + yy}{y(x+z)}\right) - \frac{y}{x+z} e^{\frac{z}{y}} f' : y,$$

ita ut sit

$$\partial z = \frac{y \partial x}{x+z} + q \partial y.$$

Aequatio autem inventa si differentietur dat

$$-e^{-\frac{z}{y}}\frac{(x+z)\partial z}{y}+e^{-\frac{z}{y}}\partial x+e^{-\frac{z}{y}}\partial y\left(1+\frac{z}{y}+\frac{xz}{yy}+\frac{zz}{yy}\right)$$
$$-e^{-\frac{c}{y}}\partial y\left(1+\frac{c}{y}+c\frac{(a+c)}{yy}\right)=\partial y\, f':y,$$
unde idem prorsus valor pro q concluditur.

Exemplum 3.

71. *Quaeratur binarum variabilium x et y ejusmodi functio z, ut sit* $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{yy+zz}{yy+xx}$.

Posito $\partial z=\frac{yy+zz}{yy+xx}\partial x+q\partial y$, sumatur quantitas y constans, et cum sit $\partial z-\frac{(yy+zz)\partial x}{yy+xx}=0$, evidens est multiplicatorem idoneum esse $M=\frac{y}{yy+zz}$, unde cum sit
$$\frac{y\partial z}{yy+zz}-\frac{y\partial x}{yy+xx}=0,$$
erit per integrationem
$$S=A\,\text{tang.}\frac{z}{y}-A\,\text{tang.}\frac{x}{y}+C=A\,\text{tang.}\frac{yz-xy}{yy+xz}-A\,\text{tang.}\frac{(c-a)y}{ac+yy},$$
et functio quaesita z hac aequatione definietur
$$A\,\text{tang.}\frac{y(z-x)}{yy+xz}-A\,\text{tang.}\frac{(c-a)y}{ac+yy}=f:y.$$
Cum porro sit $MV=\frac{x}{yy+xx}$, erit
$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)=\frac{zz-yy}{(yy+zz)^2}\text{ et }\left(\frac{\partial.MV}{\partial y}\right)=\frac{xx-yy}{(yy+xx)^2},$$
hincque
$$\partial Q=\frac{(zz-yy)\partial z}{(yy+zz)^2}-\frac{(xx-yy)\partial x}{(yy+xx)^2},$$
sumto y constante. Ergo
$$Q=\frac{-z}{yy+zz}+\frac{x}{yy+xx}+\frac{c}{yy+cc}-\frac{a}{yy+aa},$$
et $q=\frac{-Q+f':y}{M}$, qui idem valor etiam ex differentiatione prodit.

Caeterum cum constantes a et c pro lubitu accipi queant, sumtis iis nihilo aequalibus, seu saltem $c = a$, erit aequatio integralis

$$\text{A tang.}\ \frac{y(z-x)}{yy+xz} = \mathrm{f} : y,$$

unde erit etiam

$$\frac{y(z-x)}{yy+xz} = \mathrm{f} : y \quad \text{et} \quad \frac{yy+xz}{z-x} = \mathrm{f} : y,$$

quae functio si dicatur Y habebitur

$$z = \frac{yy+x\mathrm{Y}}{\mathrm{Y}-x}.$$

Scholion.

72. Vix opus est notari, saepe fieri posse, ut solutio hujusmodi quaestionum superet vires analyseos, quando scilicet aequatio differentialis resolvenda artificiis adhuc cognitis integrari nequit. Veluti si proponatur casus $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{yy}{xx+zz}$, unde sumto y constante fieri debet $yy\partial x = xx\partial z + zz\partial z$, cujus integrationem nondum expedire licet. Interim quia integrale per seriem exhiberi potest, modo id fiat complete, etiam solutio per seriem obtinebitur. Posito scilicet $x = \frac{-yy\partial u}{u\partial z}$, et sumto elemento ∂z constante, oritur haec aequatio differentio-differentialis

$$y^4 \partial\partial u + uzz\partial z^2 = 0,$$

unde per series integrando reperitur

$$u = \mathrm{A}\left(1 - \frac{z^4}{3.4y^4} + \frac{z^8}{3.4.7.8y^8} - \text{etc.}\right) + \mathrm{B}z\left(1 - \frac{z^4}{4.5y^4} + \frac{z^8}{4.5.8.9y^8} - \text{etc.}\right),$$

ubi pro A et B functiones quaecunque ipsius y accipi possunt. Quare si ponatur $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \mathrm{f} : y$, erit

$$x = \frac{yy\,\mathrm{f}:y\,.\left(\frac{z^3}{3y^4} - \frac{z^7}{3.4.7y^8} + \text{etc.}\right) - yy\left(1 - \frac{z^4}{4y^4} + \frac{z^8}{4.5.8y^8} - \text{etc.}\right)}{\mathrm{f}:y\,.\left(1 - \frac{z^4}{3.4y^4} + \frac{z^8}{3.4.7.8y^8} - \text{etc.}\right) + z\left(1 - \frac{z^4}{4.5y^4} + \frac{z^8}{4.5.8.9y^8} - \text{etc.}\right)},$$

qua aequatione functio quaesita z per binas variabiles x et y generalissime exprimitur. Quoniam ergo methodos aperuimus aequationes differentiales quascunque per approximationes integrandi, idque complete; his methodis in subsidium vocandis, omnia problemata huc pertinentia saltem per approximationem sesolvi poterunt. Caeterum in hac parte Analyseos sublimiori resolutionem aequationum differentialium ad priorem partem Analysis pertinentium pro concessa assumere possumus, omnino uti, quo longius in Analysi progredimur, ea semper quae ad partes praecedentes pertinent, etiamsi non penitus sunt evoluta, tanquam confecta spectare solemus.