APPENDIX
DE
CALCULO
VARIATIONUM.

CAPUT I.

DE
CALCULO VARIATIONUM IN GENERE.

Definitio 1.

1.

Relatio inter binas variabiles variari dicitur, si valor, quo altera inde per alteram determinatur, incremento infinite parvo augeri concipiatur, quod incrementum variationem ejus quantitatis, cui adjicitur, vocabimus.

Explicatio.

2. Primum ergo hic consideratur relatio inter binas variabiles x et y quaecunque, aequatione quacunque inter easdem expressa, qua pro singulis valoribus ipsi x tributis valores ipsius y convenientes determinentur, tum vero singuli valores ipsius y particulis infinite parvis utcunque augeri concipiantur, ita ut hi valores variati a veris, quos ex relatione proposita sortiuntur, infinite parum discrepent, atque hoc modo relatio illa inter x et y variari dicitur, simulque particulae illae infinite parvae valoribus veris ipsius y adjunctae variationes appellentur. Imprimis autem hic notandum est has variationes, quibus singuli valores ipsius y augeri concipiuntur, neque inter se statui aequales, neque ullo modo a se in-

vicem pendentes, sed ita arbitrio nostro permitti, ut omnes praeter unam vel aliquas certis valoribus ipsius y respondentes plane ut nullas spectare liceat. Nulli scilicet legi hae variationes adstrictae sunt concipiendae neque relatio inter x et y data ullam determinationem in istas variationes inferre est censenda, quas ut prorsus arbitrarias spectare oportet.

Corollarium 1.

3. Hinc patet variationes toto coelo differre a differentialibus, etiamsi utraque sint infinite parva ideoque plane evanescant, variatio enim afficit eundem valorem ipsius y, eidem valori ipsius x convenientem, dum ejus differentiale ∂y simul sequentem valorem $x + \partial x$ respicit.

Corollarium 2.

4. Si enim ex relatione inter x et y proposita ipsi x conveniat y, ipsi $x + \partial x$ vero valor ipsius y conveniens ponatur y', tum est $\partial y = y' - y$; at variatio ipsius y neutiquam pendet a valore sequente y', quin potius utrique y et y' pro lubitu suam variationem seorsim tribuere licet.

Scholion.

5. Haec variationum idea quae per se tam nimis vaga quam sterilis videri queat, maxime illustrabitur, si ejus originem et quo pacto ad eam est perventum, accuratius exposuerimus. Perduxit autem eo potissimum quaestio de curvis inveniendis, quae certa quadam maximi minimive proprietate sint praeditae, unde ne rem in genere considerando obscuritas offundatur, problema contemplemur, quo linea curva quaeritur, super qua grave delabens e dato puncto citissime ad aliud punctum datum descendat. Atque hic quidem ex natura maximorum et minimorum statim constat,

curvam ita debere esse comparatam, ut si ejus loco alia curva quaecunque infinite parum ab illa discrepans substituatur, tempus descensus super ea idem prorsus sit futurum. Solutionem ergo ita institui oportet, ut dum curva quaesita tanquam data spectatur, calculus quoque ad aliam curvam infinite parum ab ea discrepantem accommodetur, indeque discrimen quod in temporis expressionem redundat, supputetur; tum enim hoc ipsum discrimen nihilo aequale positum naturam curvae quaesitae declarabit. Curvae autem istae infinite parum a quaesita discrepantes commodissime ita considerantur, ut applicatae singulis abscissis respondentes particulis infinite parvis vel augeantur vel minuantur, hoc est, ut variationes recipere concipiantur. Vulgo quidem sufficit hujusmodi variationem in unica applicata constituisse, nihil autem impedit, quominus pluribus atque adeo omnibus applicatis tales variationes assignentur cum semper ad eandem solutionem perduci sit necesse. Hoc autem modo non solum vis methodi multo luculentius illustratur, sed etiam inde solutiones quaestionum hujus generis pleniores obtinentur, unde etiam quaestiones ad alias conditiones spectantes enucleare licet. Quam ob causam omnino necessarium videtur, ut calculus variationum in amplissima extensione, cujus quidem est capax, pertractetur.

Definitio 2.

6. *Pro data relatione inter binas variabiles quantitates utraque earum variari dicitur, si utraque seorsim incremento infinite parvo augeri concipiatur; unde patet quomodo intelligendum sit, si utrique variabili sua tribuatur variatio.*

Explicatio.

7. Si proposita sit aequatio quaecunque inter binas variabiles x et y, qua earum relatio mutua exprimitur, haec relatio per

definitionem duplici modo variari potest, altero quo manentibus valoribus x, singulis y variatio tribuitur, altero vero quo manentibus valoribus y, singuli x variari concipiuntur. Nihil igitur prohibet, quo minus utraque variabilis simul suas variationes recipere intelligatur, quas adeo ita capere licet, ut nullo plane nexu inter se cohaereant, duplex ergo hic variatio consideratur, cum in definitione prima unica tantum sit admissa. Rem autem hic ita generaliter contemplamur, ut neutra variatio ulli legi sit adstricta, neque etiam variationes ipsius y ullo modo a variationibus ipsius x pendeant.

Corollarium 1.

8. Ex casu ergo quo duplex variatio statuitur, casus prior tanquam species nascitur, si variationes alterius variabilis plane rejiciantur, unde manifestum est casum definitionis secundae in se complecti casum primae.

Corollarium 2.

9. Hinc magis elucet, quemadmodum data relatio inter binas variabiles infinitis modis variari possit, simulque intelligitur, quoniam has variationes nulli legi adstrictas assumimus, omnes omnino illius relationis variationes possibiles hac ratione indicari.

Scholion 1.

10. Variationes quidem alterutri tantum variabili inductae jam omnes variationes possibiles, quae in propositam relationem inter binas variabiles cadere possunt, comprehendunt, ut superfluum videri possit calculum ad duplicem variationem accommodari, verum si indolem rei, usumque cui destinatur, attentius contemplemur, duplicis variationis consideratio neutiquam supervacanea deprehendetur, id quod per Geometriam evidentissime sequentem in modum illustrabitur. Cum relatio quaecunque inter binas variabiles distinctissime per lineam curvam in plano descriptam repraesente-

tur, sit AYM linea curva, aequatione inter coordinatas $AX = x$ et $XY = y$ definita, quae ergo datam illam relationem exhibeat; jam igitur quaelibet linea curva alia Aym ab illa infinite parum discrepans relationem illam variatam repraesentabit, quae quomodocunque se habeat, semper ita considerari potest, ut eidem abscissae $AX = x$ conveniat applicata variata Xv, existente particula Yv ejus variatione, quae consideratio quoque pro plerisque circa maxima et minima prolatis quaestionibus sufficit, ubi adeo curva AM in nonnullis tantum elementis variari solet concipi. At si quaestio ita sit comparata ut inter omnes curvas, quas a dato puncto A ad datam quampiam curvam CD usque ducere licet, ea definiatur AYM cui maximi minimive proprietas quaedam conveniat, tum eadem proprietas in aliam quamcunque curvam proximam Aym etiam in alio lineae CD puncto m terminatam aeque competere debet, sicque pro ultimo curvae quaesitae puncto M tam abscissa AP quam applicata PM variationem recipere est censenda, et hujusmodi quidem, quae naturae lineae CD sit consentanea. Quo igitur calculus ad talem variationem ultimo elemento inductam accommodari queat, omnino necesse est, ut pro singulis curvae AM punctis intermediis Y generalissime tam abscissae $AX = x$ quam applicatae $XY = y$ variationes tribuantur quaecunque, illiusque variatio statuatur particula Xx hujus vero $= xy - XY$, ex quo indoles simulque usus hujusmodi duplicis variationis clarissime perspicitur.

Scholion 2.

11. Quemadmodum consideratio ultimi puncti curvae investigandae nobis hanc insignem dilucidationem suppeditavit, ita etiam subinde primo puncto variationem tribui oportet. Veluti si inter omnes lineas, quas a data quadam curva AB ad aliam quandam itidem datam CD ductas concipere licet ea sit quaerenda, quae

maximi minimive cujuspiam proprietate sit praedita, tum multo magis erit necessarium tam singulis abscissis AX quam applicatis XY variationes quascunque nulla lege adstrictas in calculo assignari, ut deinceps tam ad initii G curvae quaesitae, quam ejus finis M variationem transferri possint. Quanquam autem haec illustratio ex Geometria est desumta, tamen facile intelligitur ideam variationum inde petitam multo latius patere, atque in Analysi absoluta summo usu non esse carituram. Celeberrimus autem de la Grange, acutissimus Geometra Taurinensis, cui primas speculationes de calculo variationum acceptas referre debemus, hanc methodum adeo ingeniosissime transtulit ad lineas non continuas veluti ad polygonorum genus referendas, in quo negotio hae duplices variationes ipsi summam praestiterunt utilitatem.

Definitio 3.

12. *Relatio inter tres variabiles, duabus aequationibus determinata, variari dicitur, si earum vel una, vel duae, vel omnes tres particulis infinite parvis augeantur; quae earum variationes appellantur.*

Explicatio.

13. Cum tres proponantur variabiles quantitates veluti x, y et z, inter quas duae aequationes dari concipiuntur, ex unaquaque earum binas reliquas determinare licet, ita ut tam y quam z tanquam functio ipsius x spectari possit. Hoc autem modo definiri solet linea curva non in eodem plano descripta, dum singula ejus puncta per has ternas coordinatas x, y et z more solito assignantur. Quodsi jam talis curva alia quacunque sibi proxima comitetur, ut differentia sit infinite parva, haec nova curva propositae erit variata, ac relatio illa inter ternas variabiles x, y, z variata ejus na-

turam exprimere est concipienda. Ex quo prout bina puncta proxima alterum in ipsa curva proposita, alterum in variata comitante assumtum inter se comparantur, fieri potest ut pro variata vel omnes tres coordinatae prodeant diversae, vel duae tantum, vel saltem unica, harumque differentiae a coordinatis principalis curvae earum variationes repraesentabunt; quas autem hic ita generalissime contemplari convenit, ut ad omnes omnino curvas proximas extendantur, sive eae per totum tractum a curva proposita fuerint diversae, sive tantum in quibusdam portionibus ab ea aberrent; ita ut etiam lineae non continuae dummodo principali sint proximae, hinc non excludantur. Neque enim hae curvae variatae ulli continuitatis legi sunt adstringendae, ut omnes plane curvas possibiles infinite parum a principali aberrantes in se complectantur.

Corollarium 1.

14. Cum puncto ergo quocunque curvae propositae seu principalis comparatur punctum puodpiam curvae variatae infinite parum ab illo dissitum, et hincque coordinatarum variationes definiri intelliguntur.

Corollarium 2.

15. Quia porro ex assumta variabili una x, binae reliquae y et z ideoque punctum curvae propositae determinatur, etiam variationes singularum coordinatarum tanquam functiones ipsius x spectare licet, dummodo earum quantitas ut infinite parva spectetur.

Corollarium 3.

16. Tres ergo quascunque functiones ipsius x utcunque inter se diversas concipere licet, quae per factores infinite parvos multiplicatae idoneae erunt ad ternas variationes coordinatarum re-

praesentandas. Quod idem de ternis quibuscunque variabilibus est tenendum, etiamsi non ad geometriam referantur.

Corollarium 4.

17. Simili quoque modo si relatio tantum inter duas variabiles proponatur, earum variationes tanquam functiones alterius variabilis spectari possunt, modo sint infinite parvae, sed quod eodem redit, per quantitatem infinite parvam multiplicatae.

Scholion 1.

18. Consideratio autem geometrica maxime est ideonea ad has speculationes illustrandas, quae in genere consideratae nimis abstractae atque etiam vagae videri queant. Casus igitur trium variabilium quarum relatio duabus aequationibus definiri assumitur, luculentissime per curvam non in eodem plano descriptam explicatur, dum illis variabilibus ternae coordinatae designantur. Quodsi enim de hujusmodi curvis quaestio instituatur, ut inter eas definiatur ea quae maximi minimive proprietate quapiam sit praedita, necesse est ut eadem proprietas in omnes alias curvas ab ea infinite parum aberrantes aeque competat, id quod ex variationibus debite in calculum introductis est dijudicandum. Cuinam autem usui summa generalitas in variationibus hic stabilita sit futura, inde intelligere licet, si loco duarum curvarum A B et C D datae sint duae quaecunque superficies a quarum illa ad hanc ejusmodi lineam curvam duci oporteat, quae maximi minimive quapiam gaudeat proprietate. Tum enim ternarum coordinatarum variationes ita generales considerari oportet, ut curvae quaesitae puncto ad initium in superficiem A B translato, variationes ibi ad eandem superficiem accommodari possint, idque simili modo in fine ad superficiem C D fieri queat. Ex quo perspicuum est, in genere tres variationes in calculum introduci debere, ut eas tam pro initio quam pro fine

curvae investigandae ad superficies terminatrices transferre liceat, quippe quarum indoles in utroque termino relationem mutuam inter variationes determinabit.

Scholion 2.

19. Quemadmodum hic tres variabiles sumus contemplati, quarum relatio duabus aequationibus determinatur, ita etiam calculus variabilium ad quatuor pluresve extendi potest, siquidem relatio per tot aequationes exprimatur ut per unicam variabilem reliquae omnes determinationem suam nanciscantur, etiamsi hujus casus illustratio non amplius ex Geometria tribus tantum dimensionibus inclusa peti queat, nisi forte tempus in subsidium vocare velimus, fluvium continuum a superficie A B ad superficiem C D profluentem sed temporis lapsu jugiter immutatum considerantes, ita ut tum etiam temporis momentum sit assignandum, quo quaepiam fluvii vena a superficie A B ad superficiem C D porrecta maximi vel minimi proprietate quadam sit praedita. Ad quas variabiles si insuper celeritatis mutabilitatem adjiciamus, haec majori variationum numero illustrando inservire poterunt. Imprimis autem hinc intelligitur, etiamsi omnes variabiles per unicam determinari assumantur, rationem investigationis tamen ab ea ubi duae tantum variabiles admittuntur, maxime discrepare, propterea quod singulis suae variationes a reliquis non pendentes tribui debent; neque enim inde, quod inter variabiles ipsas certa quaedam relatio agnoscitur, ideo quoque earum variationes ulli relationi adstrictae sunt censendae. Veluti ex casu ante allato manifestum est, ubi curva inter binas superficies A B et C D porrecta et certa maximi minimive proprietate praedita utique ita est in se determinata, ut sumta coordinatarum una, binae reliquae determinentur; nihilo vero minus curvae variatae omnes quae in omnes plagas ab illa deflectere possunt, pro singulis coordinatis recipiunt variationes neutiquam a se invicem

pendentes, solo initio ac fine excepto, ubi eas ad datas superficies accommodari oportet.

Definitio 4.

20. *Relatio inter ternas variabiles unica aequatione definita, ut una earum aequetur functioni binarum reliquarum, variari dicitur, si vel una vel omnes tres illae variabiles particulis infinite parvis augeantur, quae earum variationes vocantur.*

Explicatio.

21. Quoniam hic relatio inter ternas variabiles unica aequatione definiri ponitur, duabus pro arbitrio sumtis tertia demum determinatur, ita ut pro functione duarum variabilium sit habenda. Ea ergo relatione non quaedam linea curva, si rem ad figuras transferre velimus, indicatur, sed tota quaedam superficies, cujus natura aequatione inter ternas coordinatas exprimitur, ex quo intelligitur, eadem relatione variata aliam superficiem ab illa infinite parum dissidentem repraesentari, quae variatio ita latissime patere debet, ut variatio vel tantum ad quampiam superficiei portionem restringi vel per totam extendi possit. Prout igitur cum quovis superficiei datae puncto aliud punctum superficiei variatae illi quidem proximum comparatur, fieri potest, ut non solum trium coordinatarum una sed etiam duae vel adeo omnes tres varientur; unde quo tractatio in omni amplitudine instituatur, conveniet statim singulis coordinatis suas tribui variationes, quas propterea ita comparatas esse oportet, ut tanquam functiones binarum variabilium spectari possint, cum binis demum determinatis superficiei punctum determinetur.

Corollarium 2.

22. Si igitur tres variabiles seu coordinatae sint x, y et z, quemadmodum ex relatione binis x et y pro lubitu valores tribuere

licet, unde z valorem determinatum obtineat, itidem variatio ipsius z ab utraque illarum x et y pendere censenda est, quandoquidem sive alterutra sive ambae mutentur, alia variatio ipsius z resultare debet.

Corollarium 2.

23. Quod hic de variatione unius z observatum est, perinde de binis reliquis est intelligendum, ita ut singularum variationes sint tanquam functiones binarum variabilium considerandae; quoniam vero inter x et y et z aequatio datur, perinde est, quarumnam binarum functiones concipiantur, quia functio ipsarum y et z per aequationem ad functionem ipsarum x et y revocari potest, si scilicet loco z suus valor per x et y expressus substituatur.

Scholion 1.

24. Hac variationum institutione erit utendum, si superficies fuerit investiganda, quae maximi minimive quapiam proprietate sit praedita, quandoquidem calculum tum ita instrui oportet ut eadem proprietas in superficies illi proximas ac variatas aeque competat. Deinde cum in curvis maximi minimive proprietate praeditis amborum terminorum ratio praescribi soleat, ut vel in datis punctis, vel ad datas lineas curvas, vel adeo superficies terminentur, similis conditio hic est admittenda, ut superficies quaerenda circumquaque definiatur, vel data quadam superficie circumscribatur; cujus posterioris conditionis ut ratio haberi possit, omnino necesse est, ut omnibus tribus coordinatis variationes generalissimae a se invicem neutiquam pendentes tribuantur, quo eae deinceps in extrema ora ad naturam superficiei terminantis, accommodari queant. Hic quidem fatendum est, methodum maximorum et minimorum vix adhuc ad hujusmodi investigationes esse promotam, tantasque difficultates hic occurrere, ad quas superandas multo majora

Analyseos incrementa requiri videntur. Verum ob hanc ipsam causam eo magis erit enitendum ut principia hujus methodi, quae calculo variationum continentur, solide stabiliantur, simulque clare ac distincte proponantur.

Scholion 2.

25. Vix opus esse arbitror hic animadvertere, istum calculum simili modo ad plures tribus variabiles amplificari posse, etiamsi quaestiones geometricae non amplius dilucidationem suppeditent; ipsa enim Analysis non uti Geometria certo dimensionum numero limitari est censenda. Quando autem plures variabiles considerantur, ante omnia perpendi convenit, utrum earum relatio mutua unica tantum aequatione exprimatur, an pluribus? quae tot esse possunt, ut multitudo unitate tantum a numero variabilium deficiat, quo casu omnes tanquam functiones unius spectare licet. Sin autem paucioribus aequationibus constet relatio, singulae variabiles erunt functiones duarum pluriumve variabilium, et quolibet quoque casu variationes singulis tributae tanquam functiones totidem variabilium tractari debent, siquidem hunc calculum generalissime expedire velimus.

Definitio 5.

26. *Calculus variationum est methodus inveniendi variationem, quam recipit expressio ex quotcunque variabilibus utcunque conflata, dum variabilibus vel omnibus vel aliquibus variationes tribuantur.*

Explicatio.

27. In hac definitione nulla fit mentio relationis, quam hactenus inter variabiles dari assumsimus, cum enim hic calculus potissimum in hac ipsa relatione investiganda sit occupatus, quae scilicet maximi minimive proprietate sit praedita, quamdiu ea adhuc est incognita, ejus rationem in calculo neutiquam habere licet, sed potius eum ita tractari convenit, quasi variabiles nulla plane

relatione inter se essent connexae. Calculum igitur ita instrui convenit, ut si singulis variabilibus, quae in calculum ingrediuntur, variationes tribuantur quaecunque, omnis generis expressionum, quae utcunque ex iis fuerint conflatae, variationes inde oriundae investigari doceantur, quibus in genere inventis tum demum ejusmodi quaestiones evolvendae occurrunt, qualem relationem inter variabiles statui oporteat, ut variatio illa inventa sit vel nulla, uti in investigatione maximorum seu minimorum usu venit, vel alio certo quodam modo sit comparata, prout natura quaestionum exegerit. Hoc modo si istius calculi praecepta tradantur, nihil impedit, quo minus etiam ejusmodi quaestiones tractentur, in quibus statim relatio quaedam inter variabiles tanquam data assumitur ac certae cujusdam expressionis ex iis formatae variatio ex variabilium variationibus nata desideratur. Ex quo intelligitur, huc calculum ad quaestiones plurimas diversissimi generis accomodari posse.

Corollarium 1.

28. Quaestiones ergo in hoc calculo tractandae huc redeunt, ut proposita expressione quacunque ex quotcunque variabilibus utcunque conflata, ejus incrementum definiatur, si singulae variabiles suis variationibus augeantur.

Corollarium 2.

29. Similis igitur omnino est calculus variationum calculo differentiali, dum in utroque variabilibus incrementa infinite parva tribuuntur. Quatenus autem uti jam observavimus, variationes a differentialibus discrepant, adeoque simul cum iis consistere possunt, eatenus summum discrimen inter utrumque calculum est agnoscendum.

Scholion.

30. Ex observationibus supra allatis discrimen hoc maxime

fit manifestum, ubi enim calculus refertur ad lineam curvam, quam cum alia sibi proxima comparari oportet, per differentialia a puncto quovis curvae ad alia puncta ejusdem curvae progredimur; quando autem ab hac curva ad alteram sibi proximam transilimus, transitus quatenus est infinite parvus, fit per variationes. Idem evenit in superficiebus ad alias sibi proximas relatis, ubi differentialia in eadem superficie concipiuntur, variationibus vero ab una in alteram transilitur. Eadem omnino est ratio, si res analytice consideretur sine ullo respectu ad figuras geometricas, ubi semper variationes quantitatem variabilium a suis differentialibus sollicite distingui oportet, quem in finem variationes signo diverso indicari conveniet.

Hypothesis.

31. *Variationem cujusque quantitatis variabilis littera* δ *eidem quantitati praefixa in posterum designabimus ita ut* δx, δy, δz *designent variationes quantitatum* x, y, z; *ac si* V *fuerit expressio quaecunque ex iis conflata, ejus variatio hoc modo* δV *nobis indicabitur.*

Corollarium 1.

32. Significat ergo δx incrementum illud infinite parvum, quo quantitas x augeri concipitur, ut ejusdem valor variatus prodeat; ex quo vicissim intelligitur valorem variatum ipsius x fore $x + \delta x$.

Corollarium 2.

33. Quatenus ergo expressio V ex variabilibus x, y et z conflatur, si earum loco scribantur valores variati

$$x + \delta x, \quad y + \delta y \quad \text{et} \quad z + \delta z,$$

atque a valore hoc modo pro V resultante subtrahatur ipsa V residuum erit variatio δV.

Corollarium 3.

34. Hactenus ergo omnia perinde se habent atque in calculo differentiali, ac si V fuerit functio quaecunque ipsarum x, y et z, sumto ejus differentiali more solito tantum ubique loco ∂ scribatur δ, et habebitur ejus variatio δV.

Scholion 1.

35. Quoties ergo V est functio quaecunque quantitatum variabilium x, y, z, ejus variatio iisdem regulis inde elicitur ac differentiale ejus, ex quo calculus variationum prorsus cum calculo differentiali congruere videri posset, cum sola signi diversitas levis sit momenti. Verum probe perpendendum est, hic non omnes quantitates, quarum variationes requiruntur, in genere functionum comprehendi posse; quamobrem etiam in definitione vocabulo expressionis sum usus, cui longe ampliorem significatum attribuo. Quatenus enim ad relationem mutuam variabilium respicere non licet, quia est incognita, eatenus ejusmodi expressiones seu formulae, in quas variabilium differentialia atque etiam integralia ingrediuntur, non amplius tanquam merae functiones variabilium spectari possunt, ac formularum tam differentialium quam integralium variatio peculiaria praecepta postulat; sicque totum negotium huc redit, ut quemadmodum formularum utriusque generis variationes investigari conveniat, doceamus, ex quo tractatio nostra evadit bipartita.

Scholion 2.

36. In ipsa autem tractatione maximum exoritur discrimen ex numero variabilium, qui si binarium superet, vix adhuc perspicitur, quomodo calculus sit expediendus. Cum enim pluribus introductis variabilibus, etiam differentialium consideratio longe aliter expendatur, dum plerumque binarum tantum differentialia ita inter se comparari solet, quasi reliquae variabiles manerent constantes, simi-

50*

lis quoque ratio in variationibus erit habenda in quo etiamnunc tantae difficultates occurrunt, ut vix pateat quomodo eas superare liceat; ante omnia certe prima hujus calculi principia accuratissime evolvi erit necesse, ut ex intima rei natura calculi praecepta repetantur, in quo plerumque summae difficultates offendi solent. Primum igitur hunc calculum ad duas tantum variabiles accommodatum, quemadmodum is quidem adhuc tractari est solitus, explicare conabor, variationes tam formularum differentialium quam integralium investigaturus, tum vero si quid lucis ex ipsa hac tractatione affulserit, quoque ad tres pluresve variabiles contemplandas progrediar.