RECHERCHES

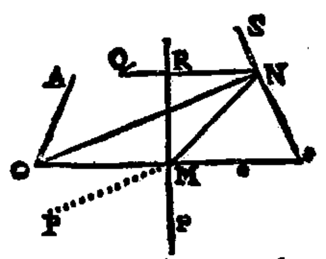
SUR

LES INÉGALITÉS

DE JUPITER ET DE SATURNE.

PAR M. LEONARD EULER,

De l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celles de Londres, de Petersbourg, de Berlin, &c.



Cette Figure se rapporte à la page 6 de ce Mémoire.

A PARIS,

Chez PANCKOUCKE, rue & à côté de la Comédie Françoise.

M. DCC. LXIX.

RECHERCHES
SUR
LES IRRÉGULARITÉS
DU MOUVEMENT
DE JUPITER ET DE SATURNE.

Piéce qui a remporté le Prix proposé par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, pour l'année 1752.

Par M. LEONARD EULER, *Associé Etranger de l'Académie Royale des Sciences, & Membre de celles de Petersbourg, de Berlin, de Londres, &c.*

RECHERCHES SUR LES IRRÉGULARITÉS DU MOUVEMENT *DE JUPITER ET DE SATURNE.*

Nihil est enim, quod aut natura extremum inveneris, aut doctrina primum. *Ad* HERENN. *Lib. III.*

§. I.

Sur la cause des irrégularités du mouvement de Jupiter & de Saturne.

LES observations astronomiques nous ont fait connoître que les Planètes de Jupiter & de Saturne ne suivent pas exactement, dans leur mouvement, les règles établies par Kepler, & que le dernier principalement s'en écarte très-sensiblement, surtout lorsque ces deux Planètes se trouvent près de leur conjonction. C'est donc aux observations que nous devons cette connoissance, mais c'est aussi tout ce que

nous en pouvons attendre; car il y a bien de l'apparence que quelque soin que les Astronomes apportent à bien observer ces dérangemens; ils ne parviendront jamais à une connoissance suffisante de l'ordre qui règne sans doute dans ces irrégularités, pour pouvoir prédire en tout tems combien ces Planètes s'écarteront, dans leur mouvement, des règles de Kepler. Il n'y a donc que la Théorie qui puisse nous servir de guide dans cette recherche; & c'est de-là uniquement qu'il faut tâcher de tirer les règles que ces deux Planètes observent dans leur mouvement, puelque irrégulier qu'il puisse paroître. Il faut donc commencer par bien déterminer la cause dont ces dérangemens sont l'effet; ou, ce qui revient au même, il faut connoître les forces qui produisent dans le mouvement de ces Planètes les inégalités dont il est question.

Or la Théorie de Newton, en tant qu'elle établit l'attraction universelle des corps célestes, nous découvre d'abord les forces qui doivent troubler le mouvement de Jupiter & de Saturne; puisque ces deux Planètes, qui surpassent les autres plusieurs fois en grosseur, ne sauroient manquer d'agir assez sensiblement l'une sur l'autre, sur tout lorsqu'elles ne sont pas fort éloignées de leur conjonction. Il n'y a donc pas le moindre doute que l'attraction mutuelle de ces deux Planètes ne soit la véritable cause des irrégularités qu'on observe dans leur mouvement: il s'agit seulement de savoir si cette force attractive suit exactement la proportion renversée des quarrés des distances, comme Newton avoit supposé, ou non.

En effet, si cette proportion répondoit si mal au mouvement de l'apogée de la Lune, comme on a eu lieu de croire jusqu'ici, on seroit bien autorisé à douter que la même proportion subsiste dans les forces, dont les autres Planètes agissent les unes sur les autres. Mais depuis que M. Clairaut a fait cette nous en pouvons attendre ; car il y a bien de l'apparence que quelque soin que les Astronomes apportent à bien observer ces dérangemens ; ils ne parviendront jamais à une connoissance suffisante de l'ordre qui règne sans doute dans ces irrégularités, pour pouvoir prédire en tout tems combien ces Planètes s'écarteront, dans leur mouvement, des règles de Kepler. Il n'y a donc que la Théorie qui puisse nous servir de guide dans cette recherche ; & c'est de-là uniquement qu'il faut tâcher de tirer les règles que ces deux Planètes observent dans leur mouvement, puelque irrégulier qu'il puisse paroître. Il faut donc commencer par bien déterminer la cause dont ces dérangemens sont l'effet ; ou, ce qui revient au même, il faut connoître les forces qui produisent dans le mouvement de ces Planètes les inégalités dont il est question.

Or la Théorie de Newton, en tant qu'elle établit l'attraction universelle des corps célestes, nous découvre d'abord les forces qui doivent troubler le mouvement de Jupiter & de Saturne ; puisque ces deux Planètes, qui surpassent les autres plusieurs fois en grosseur, ne sauroient manquer d'agir assez sensiblement l'une sur l'autre, sur tout lorsqu'elles ne sont pas fort éloignées de leur conjonction. Il n'y a donc pas le moindre doute que l'attraction mutuelle de ces deux Planètes ne soit la véritable cause des irrégularités qu'on observe dans leur mouvement : il s'agit seulement de savoir si cette force attractive suit exactement la proportion renversée des quarrés des distances, comme Newton avoit supposé, ou non.

En effet, si cette proportion répondoit si mal au mouvement de l'apogée de la Lune, comme on a eu lieu de croire jusqu'ici, on seroit bien autorisé à douter que la même proportion subsiste dans les forces, dont les autres Planètes agissent les unes sur les autres. Mais depuis que M. Clairaut a fait cette

importante découverte, que le mouvement de l'apogée de la Lune est parfaitement d'accord avec l'hypothèse Newtonienne sur la loi d'attraction, il ne reste plus le moindre doute sur la généralité de cette proportion ; & puisque cette même proportion convient si exactement au mouvement de la Lune, malgré toutes les objections qu'on a cru être bien fondé à faire, on pourra maintenant soutenir hardiment que les deux Planètes de Jupiter & de Saturne s'attirent mutuellement en raison réciproque des quarrés de leur distance ; & que toutes les irrégularités qui se peuvent découvrir dans leur mouvement sont infailliblement causées par cette action mutuelle. Voilà donc déja la véritable cause de tous ces dérangemens de quelque nature qu'ils puissent être ; & si les calculs qu'on prétend avoir tirés de cette Théorie ne se trouvent pas assez bien d'accord avec les observations, on sera toujours en droit de douter plutôt de la justesse des calculs, que de la vérité de la Théorie. Car quoique la Théorie nous conduise aisement à des équations qui renferment le mouvement des Planètes, de quelques forces qu'elles soient sollicitées, pour peu qu'on ait manié ces équations, on tombera aisément d'accord que leur résolution est assujettie à de très grandes difficultés ; & quelques précautions qu'on ait prises dans ce travail, on ne sauroit parvenir qu'à des approximations, par le moyen desquelles on ne pourra pas asseurer si le résultat ne s'écarte pas beaucoup plus de la vérité qu'on ne pense.

Dans ces circonstances embarrassantes, il n'est pas surprenant que l'Académie Royale des Sciences n'ait pas été entièrement contente de la pièce qu'elle avoit couronnée du prix sur cette même matiere, il y a quatre ans ; car quoique les calculs qu'elle renferme soient tirés de cettte Théorie avec bien de la peine, & que la plupart des irrégularités que ces calculs ont fournies, ſe trouvent confirmées par les obſervations, il s'en faut cependant beaucoup que l'auteur ait épuiſé cette importante matière. Car la méthode dont il s'eſt ſervi pour arriver à ſes approximations, outre qu'elle conduit à des calculs extrêmement ennuyans, demeure toujours fort aſſujettie à des doutes ſur la ſuffiſance de ſes reſultats; vu que le nombre de toutes les inégalités étant actuellement infini, celles que l'Auteur a developpées dépendent auſſi, ſuivant la méthode qu'il a emploiée, des autres qu'il a négligées; ce qui en rend les valeurs incomplettes. Je tâcherai donc de remédier à cet inconvénient, en me ſervant d'une méthode qui me paroît tout-à-fait nouvelle, & qui ne mêle pas ſi fort enſemble les diverſes inégalités qu'elle fait découvrir. Cependant je crois que je me pourrai diſpenſer de la recherche des inégalités qui ſe rencontrent dans la ligne des nœuds, & dans l'inclinaiſon mutuelle des orbites de ces deux Planètes, puiſqu'il me ſemble que la pièce mentionnée a parfaitement bien developpé cette partie de la queſtion.

§. II.

Réduction de la Queſtion à l'Analyſe pure.

QUE les deux Planètes en Queſtion ſe meuvent donc avec le Soleil dans le même plan; & ſoit le centre du Soleil en O, de Jupiter en M, & de Saturne en N. Nommons la maſſe du Soleil $= \odot$, celle de Jupiter $=$ ♃, & le Saturne $=$ ♄, & ayant tiré les droites OM, ON & MN; les forces, dont ces trois corps agiſſent entr'eux, ſeront telles:

I. Le Soleil O eſt ſollicité par les forces $\begin{cases} \text{ſelon } OM = \frac{\text{♃}}{OM^2}. \\ \text{ſelon } ON = \frac{\text{♄}}{ON^2}. \end{cases}$

II. Jupiter M eſt ſollicité par les forces $\begin{cases} \text{ſelon } MO = \frac{\odot}{OM^2}. \\ \text{ſelon } MN = \frac{\text{♄}}{MN^2}. \end{cases}$

III. Saturne N eſt ſollicité par les forces $\begin{cases} \text{ſelon } NO = \frac{\odot}{ON^2}. \\ \text{ſelon } MN = \frac{\text{♃}}{MN^2}. \end{cases}$

Or puiſqu'il faut déterminer le mouvement des deux Planètes, comme il paroîtroit à un ſpectateur placé au centre du Soleil, on doit tranſporter les forces, qui agiſſent ſur le Soleil, en ſens contraire ſur les Planètes mêmes. Donc pour pouvoir regarder le Soleil comme demeurant en repos, ſi nous menons les droits MP, NQ, paralleles à NO, MO, il eſt clair, que

Jupiter en M ſera ſollicité par les forces $\begin{cases} \text{ſelon } MO = \frac{\odot + \text{♃}}{OM^2}. \\ \text{ſelon } MN = \frac{\text{♄}}{MN^2}. \\ \text{ſelon } MP = \frac{\text{♄}}{ON^2}. \end{cases}$

Saturne en N ſera ſollicité par les forces $\begin{cases} \text{ſelon } NO = \frac{\odot + \text{♄}}{ON^2}. \\ \text{ſelon } NM = \frac{\text{♃}}{MN^2}. \\ \text{ſelon } NQ = \frac{\text{♃}}{OM^2}. \end{cases}$

Maintenant il faut décompoſer ces forces ſuivant deux directions, dont les unes ſoient dirigées vers le Soleil,

& les autres y ſoient perpendiculaires. Pour cet effet ayant tiré les droites, RMr & SNs, perpendiculaires à MO & NO, & prolongé OM en o.

Pour Jupiter.

La force $\frac{♄}{MN^2}$ ſelon MN donnera $\begin{cases} \text{pour la direction } Mo = \frac{♄}{MN^2} \cdot \cos. NMo. \\ \text{pour la direction } MR = \frac{♄}{MN^2} \sin. NMo. \end{cases}$

La force $\frac{♄}{ON^2}$ ſelon MP donnera $\begin{cases} \text{pour la direction } MO = \frac{♄}{ON^2} \cos. MON. \\ \text{pour la direction } Mr = \frac{♄}{ON^2} \sin. MON. \end{cases}$

Pour Saturne.

La force $\frac{♃}{MN^2}$ ſelon NM donnera $\begin{cases} \text{pour la direction } NO = \frac{♃}{MN^2} \cos. MNO; \\ \text{pour la direction } Ns = \frac{♃}{MN^2} \sin. MNO. \end{cases}$

La force $\frac{♃}{OM^2}$ ſelon NQ donnera $\begin{cases} \text{pour la direction } NO = \frac{♃}{OM^2} \cos. MON. \\ \text{pour la direction } NS = \frac{♃}{OM^2} \sin. MON. \end{cases}$

De-là nous obtiendrons les forces ſuivantes, dont l'une & l'autre Planète ſera ſollicitée.

Premièrement Jupiter ſera ſollicité.

Suivant MO par la force $= \frac{⊙+♃}{OM^2} + \frac{♄}{ON^2} \cos. MON - \frac{♄}{MN^2} \cos. NMo;$

Suivant MR par la force $= \quad - \frac{♄}{ON^2} \sin. MON + \frac{♄}{MN^2} \sin. NMo.$

Enſuite Saturne ſera ſollicité

Suivant NO par la force $= \frac{⊙+♄}{ON^2} + \frac{♃}{OM^2} \cos. MON + \frac{♃}{MN^2} \cos. MNO.$

Suivant NS par la force $= \quad + \frac{♃}{OM^2} \sin. MON - \frac{♃}{MN^2} \sin. MNO.$

Cela

Cela poſé, nommons les diſtances $OM = x$, $ON = y$, & l'angle $MON = \omega$, & on aura $MN = \sqrt{(xx + yy - 2xy \cos. \omega)} = z$. De plus pour les autres angles on aura :

$$\sin. NMo = \frac{y \sin. \omega}{z} \qquad \cos. MNo = \frac{y \cos. \omega - x}{z}$$

$$\sin MNO = \frac{x \sin \omega}{z} \qquad \cos. MNO = \frac{y - x \cos. \omega}{z}$$

Donc en introduiſant ces valeurs, les forces qui agiſſent ſur Jupiter ſeront :

celle qui agit ſelon $MO = \frac{⊙+♃}{xx} + \frac{♄ \cos. \omega}{yy} - \frac{♄ (y \cos. \omega - x)}{z^3}$

celle qui agit ſelon $MR = \quad - \frac{♄ \sin. \omega}{yy} + \frac{♄ y \sin \omega}{z^3}$

Or les forces qui agiſſent ſur Saturne ſeront

celle qui agit ſelon $NO = \frac{⊙+♄}{yy} + \frac{♃ \cos. \omega}{xx} + \frac{♃ (y - x \cos. \omega)}{z^3}$

celle qui agit ſelon $NS = \quad + \frac{♃ \sin. \omega}{xx} - \frac{♃ x \sin \omega}{z^3}$

Qu'on choiſiſſe à préſent à volonté une direction fixe OA, pour en conter la longitude des Planètes & qu'on nomme,

La longitude de Jupiter $AOM = \eta$, celle de Saturne $AON = \theta$, de ſorte qu'on ait $\eta - \theta = \omega$: & poſant dt, pour marquer l'élément du tems qui ſoit pris conſtant, les principes de Mécanique nous fourniront les équations ſuivantes.

Pour Jupiter.

$$2 dx d\eta + x dd\eta = -\tfrac{1}{2} dt^2 \left(\frac{- ♄ \sin. \omega}{yy} + \frac{♄ y. \sin. \omega}{z^3} \right)$$

$$ddx - x d\eta^2 = -\tfrac{1}{2} dt^2 \left(\frac{⊙+♃}{xx} + \frac{♄ \cos. \omega}{yy} - \frac{♄ (y \cos. \omega - x)}{z^3} \right)$$

Pour Saturne.

$$2\,dy\,d\theta + y\,dd\theta = -\tfrac{1}{2}\,dt^2\left(+\frac{\text{♃}\,\mathit{sin}.\,\omega}{xx} - \frac{\text{♃}\,x\,\mathit{sin}.\,\omega}{z^3}\right)$$

$$ddy - y\,d\theta^2 = -\tfrac{1}{2}\,dt^2\left(\frac{\odot + \text{♄}}{yy} + \frac{\text{♃}\,\mathit{cos}.\,\omega}{xx} + \frac{\text{♃}\,(y - x\,\mathit{cos}.\,\omega)}{z^3}\right)$$

Pour chasser du calcul l'élément du tems dt, on n'a qu'à introduire à sa place le mouvement moyen des Planètes qu'elles suivroient si elles décrivoient des cercles autour du Soleil en même tems périodique. Soit donc la distance moyenne de Jupiter au Soleil $= a$ & sa longitude moyenne $= p$, la distance moyenne de Saturne au Soleil $= b$ & sa longitude moyenne $= q$. Supposons que ce mouvement moyen soit produit par la seule force du Soleil, ou bien concevons deux corps qui décrivent autour du Soleil des cercles dont les tems périodiques soient égaux à ceux de Jupiter & de Saturne, de sorte que les longitudes de ces corps marquent à chaque tems les longitudes moyennes de Jupiter & de Saturne : & il est clair que nos formules donneront le mouvement de ces deux corps, en supposant $\text{♃} = o$, $\text{♄} = o$, $x = o$, $y = b$ $\eta = p$ & $\theta = q$, d'où nous obtiendrons $a\,dp^2 = \tfrac{1}{2}\,dt^2 . \frac{\odot}{aa}$ & $b\,dq^2 = \tfrac{1}{2}\,dt^2 . \frac{\odot}{bb}$, ou bien $\tfrac{1}{2}\odot dt^2 = a^3\,dp^2 = b^3\,dq^2$. Introduisons donc au lieu de dt, les élémens dp & dq, qui seront également constans ; & posons, pour abréger $\frac{\text{♃}}{\odot} = \mu$ & $\frac{\text{♄}}{\odot} = \nu$, dont les valeurs sont connues par les révolutions des Satellites, d'où l'on conclut $\mu = \frac{1}{1067}$ & $\nu = \frac{1}{3021}$; & nous aurons

Pour Jupiter ces deux équations,

$$2\,dx\,d\eta + x\,dd\eta = -\nu\,a^3\,dp^2\,\mathit{sin}.\,\omega\left(-\frac{1}{yy} + \frac{y}{z^3}\right)$$

$$ddx - x\,dy^2 = -a^3\,dp^2\left(\frac{1+\mu}{xx} + \frac{\nu\,\mathit{cos}.\,\omega}{yy} + \frac{\nu\,(x - y\,\mathit{cos}.\,\omega)}{z^3}\right)$$

& pour Saturne celle-ci:

$$2\,dy\,d\theta + y\,dd\theta = -\mu\,b^3\,dq^2\,\mathit{sin}.\,\omega\left(\frac{1}{xx} - \frac{x}{z^3}\right)$$

$$ddy - y\,d\theta^2 = -b^3\,dq^2\left(\frac{1+\nu}{yy} + \frac{\mu\,\mathit{cos}.\,\omega}{xx} + \frac{\mu\,(y - x\,\mathit{cos}.\,\omega)}{z^3}\right)$$

Or, puisque le mouvement moyen des deux Planètes est connu, le rapport entre dp & dq le sera également ; car puisque à l'égard des étoiles fixes selon le mouvement moyen :

Jupiter avance en 5 ans de 5^s, 1^o, $43'$, $40''$.
& Saturne — — — de 2, 1, 4, 51.

nous en aurons $\frac{dp}{dq} = \frac{546220}{219891} = 2,48405$ ou $\frac{dq}{dp} = 0,4025686$

& puisque $a^3 dp^2 = b^3 dq^2$, il s'ensuit $\frac{b}{a} = 1,834172$ ou $\frac{a}{b} = 0,545208$

En voici donc les valeurs absolues, sur lesquelles on doit fonder le calcul suivant. Or pour déterminer aussi les constantes, que ces quatre équations *differentio-différentielles* renferment, lesquelles sont au nombre de huit, il faut avoir égard aux conditions suivantes.

Premiérement, puisque p & q marquent les longitudes moyennes, si nous posons $\eta = p + P$ & $\theta = q + Q$, il faut que les quantités P & Q ne renferment ni des quantités constantes, ni des termes de la forme αp & βq, parceque alors p & q ne seroient plus les longitudes moyennes. Donc P & Q ne contiendront que des ſinus ou coſinus de certains angles, qui contribueront autant à augmenter qu'à diminuer les longitudes moyennes. Cette condition déterminera déja quatre conſtantes.

Enſuite la quantité de l'une & de l'autre excentricité, qui doit être conclue par les obſervations, ſervira auſſi à déterminer deux conſtantes renfermées dans nos équations.

Enfin comme l'excentricité entraîne avec elle l'anomalie qui ſe pourroit compter depuis un point quelconque de l'orbite excentrique, l'uſage & la commodité du calcul exigent qu'on la compte depuis l'aphélie; deſorte que l'anomalie s'évanouiſſe lorſque la Planète ſe trouve dans ſon aphélie. Cette conſidération déterminera les deux dernieres conſtantes.

Tout le travail ſe réduit donc à réſoudre les quatre équations différentielles que les principes mécaniques ont fournies.

§. III.

Méthode de réſoudre les équations trouvées.

Je dois d'abord remarquer qu'on ne gagneroit rien quelque peine qu'on voulût ſe donner, pour intégrer ces équations. Car d'un côté je doute fort qu'on trouve jamais de moyen d'y parvenir; & d'un autre côté, quand même on ſeroit ſi heureux d'en tirer des équations intégrales, comme elles ſeroient extrêmement compliquées, elles ne pourroient apporter preſque aucun avantage pour l'uſage de l'aſtronomie; & on ſeroit néanmoins

néanmoins obligé d'en déduire des approximations propres à ce deſſein. Or quand il s'agit des approximations, il ſera auſſi aiſé de les tirer immédiatement des équations *differentio*-différentielles.

Il eſt toujours convenable de commencer par les premieres équations

$$2\,dx\,d\eta + x\,dd\eta = -\nu a^3\,dp^2\,\text{ſin.}\,\omega\left(\frac{-1}{yy} + \frac{y}{\zeta^3}\right)$$

$$2\,dy\,d\theta + y\,dd\theta = -\mu b^3\,dq^2\,\text{ſin.}\,\omega\left(\frac{1}{xx} - \frac{x}{\zeta^3}\right)$$

dont les premiers membres deviennent intégrables étant multipliés par x & y, d'où l'on tire à cauſe de $b^3\,dq^2 = a^3\,dp^2$;

$$xx\,d\eta = C\,dp + \nu a^3\,dp\int\frac{x\,dp\,\text{ſin.}\,\omega}{yy} - \nu a^3\,dp\int\frac{xy\,dp\,\text{ſin.}\,\omega}{\zeta^3}$$

$$yy\,d\theta = D\,dp - \mu a^3\,dp\int\frac{y\,dp\,\text{ſin.}\,\omega}{xx} + \mu a^3\,dp\int\frac{xy\,dp\,\text{ſin.}\,\omega}{\zeta^3}$$

Donc, ſi nous poſons pour abréger

$$X = \int\frac{x\,dp\,\text{ſin.}\,\omega}{yy};\quad Y = \int\frac{y\,dp\,\text{ſin.}\,\omega}{xx};\quad Z = \int\frac{xy\,dp\,\text{ſin.}\,\omega}{\zeta^3}$$

nous aurons:

$$d\eta = \frac{dp}{xx}\left(C + \nu a^3\,(X - Z)\right) \;\&\; d\theta = \frac{dp}{yy}\left(D - \mu a^3\,(Y - Z)\right)$$

Or, rien n'empêche que nous ne mettions, pour abréger, l'unité à la place de a, de ſorte que l'unité exprime le rayon du cercle, ou le demi-grand axe de l'orbite d'une Planète, qui étant uniquement attirée par le Soleil, acheveroit ſes révolutions en même tems que Jupiter; enſuite pour les conſtantes C & D, mettons les lettres f & g, pour avoir

$$d\eta = \frac{dp}{xx}\left(f + \nu(X - Z)\right) \;\&\; d\theta = \frac{dp}{yy}\left(g - \mu(Y - X)\right)$$

& partant à cauſe de $\eta - \theta = \omega$ on aura

$$\frac{d\omega}{dp} = \frac{f}{xx} - \frac{g}{yy} + \frac{\nu}{xx}(X - Z) + \frac{\mu}{yy}(Y - Z)$$

Or, les deux autres équations, en ſubſtituant pour $d\eta$ & $d\theta$ les valeurs trouvées, & en les délivrant de la conſidération que l'élément dp eſt ſuppoſé conſtant, prendront les formes ſuivantes:

$$\frac{1}{dp}d\frac{dx}{dp} = \frac{1}{x^3}\left(f + \nu(X - Z)\right)^2 - \frac{(1+\mu)}{xx} - \frac{\nu\, cof.\,\omega}{yy} - \frac{\nu(x - y\, cof.\,\omega)}{z^3}$$

$$\frac{1}{dp}d\frac{dy}{dp} = \frac{1}{y^3}\left(g - \mu(Y - Z)\right)^2 - \frac{(1+\nu)}{yy} - \frac{\mu\, cof.\,\omega}{xx} - \frac{\mu(y - x\, cof.\,\omega)}{z^3}$$

Maintenant tout le ſuccès qu'on peut ſe promettre des opérations ſuivantes, dépend preſque uniquement de la nature des variables qu'on introduit à la place de x & y. Car puiſqu'on doit tâcher de ramener toutes les expreſſions à des angles qui en expriment le plus commodément la variabilité, on voit d'abord que la variabilité des diſtances x & y dependra non-ſeulement de l'angle ω, mais auſſi des anomalies de l'une & de l'autre Planète, lorſque leurs orbites ſont excentriques. Or l'anomalie d'une Planète étant un angle, qui dépend de ſa diſtance à ſon aphélie, on a trois ſortes d'anomalies qu'on pourroit introduire dans le calcul; l'anomalie moyenne, l'excentrique & la vraie. En introduiſant l'anomalie moyenne, on auroit la commodité que ſa différentielle eût une raiſon conſtante à dp, mais le rapport de ſa différentielle à $d\omega$ qu'on aura par tout dans la pourſuite du calcul, deviendroit trop compliqué, ce qui rendroit le calcul

preſque impraticable. Et ſi l'on vouloit introduire ou l'anomalie excentrique ou la vraie, quoique les expreſſions pour les diſtances devinſſent plus ſimples dans le cas de Kepler, cependant le défaut d'aucun rapport réglé entre leurs différentielles & $d\omega$ rendroit encore le calcul preſque impraticable, & chaque différentiation ou intégration exigeroit des opérations extrêmement embarraſſantes.

Ayant bien peſé ces difficultés, il m'eſt venu dans l'eſprit, ſi l'on ne pourroit pas imaginer une nouvelle éſpece d'anomalie, dont la différentielle eût un rapport conſtant à la différentielle $d\omega$; puiſqu'il eſt évident qu'alors toutes les différentiations & intégrations ſe pourroient exécuter ſans aucune difficulté. Cette idée me parut d'abord de la derniere importance, & je ne trouve rien qui puiſſe s'oppoſer à l'introduction d'une telle anomalie; car bien qu'une telle anomalie ne ſoit plus ſi facile à trouver, puiſqu'elle dépend de l'angle ω, qui n'eſt pas encore connu, lorſqu'on veut déterminer, pour quelque tems propoſé, les lieux de Jupiter & de Saturne, cette difficulté n'eſt pourtant d'aucune conſéquence dans le calcul analytique dont il s'agit ici; & pour le calcul aſtronomique, on ne manquera point de trouver moyen de le dreſſer ſur cette nouvelle eſpece d'anomalie. J'introduirai donc dans la ſuite les lettres r & s pour marquer cette anomalie de Jupiter & de Saturne, que je déterminerai, enſorte que poſant leurs différentielles $dr = \varkappa\, d\omega$ & $ds = \lambda\, d\omega$, les quantités $\varkappa$ & λ deviennent conſtantes. Pour cet effet il faut éliminer du calcul l'élément dp, qui n'a point un rapport conſtant à $d\omega$.

Je poſe donc $dp = t\, d\omega$, & $dq = n\, t\, d\omega$, où t ſera une quantité variable, & n un nombre conſtant, donc la valeur ſera $\frac{dq}{dp} = n = 0,4025686$, de ſorte que $n = \frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}} = \frac{1}{b\sqrt{b}}$ à cauſe de $a = 1$, d'où l'on tire $b = 1,83417$. Cela poſé on aura :

$$X = \int \frac{t x\, d\omega\, \text{ſin.}\,\omega}{yy};\; Y = \int \frac{t y\, d\omega\, \text{ſin.}\,\omega}{xx};\; Z = \int \frac{t x y\, d\omega\, \text{ſin.}\,\omega}{z^3}$$

$$d\eta = \frac{t\, d\omega}{xx}\big(f + \nu(X - Z)\big),\; d\theta = \frac{t\, d\omega}{yy}\big(g - \mu(Y - Z)\big).$$

$$\frac{1}{t} = \frac{f}{xx} - \frac{g}{yy} + \frac{\nu}{xx}(X - Z) + \frac{\mu}{yy}(Y - Z) \;\&$$

$$\frac{1}{t\, d\omega} d\frac{dx}{t\, d\omega} = \frac{1}{x^3}\big(f + \nu(X - Z)\big)^2 - \frac{(1+\mu)}{xv} - \frac{\nu \cos.\omega}{yy} - \frac{\nu(x - y\cos.\omega)}{z^3}$$

$$\frac{1}{t\, d\omega} d\frac{dy}{t\, d\omega} = \frac{1}{y^3}\big(g + \mu(Y - Z)\big)^2 - \frac{(1+\nu)}{yy} - \frac{\mu \cos.\omega}{xx} - \frac{\mu(y - x\cos.\omega)}{z^3}$$

où l'on peut maintenant ſuppoſer à volonté l'élément $d\omega$ conſtant.

Il faudra donc commencer à ſubſtituer pour x & y des formules indéterminées qui renferment les angles ω, r & s ; & de-là on ſera en état d'aſſigner les valeurs des lettres X, Y, Z & t, pour les introduire enſuite dans les deux équations *differentio*-différentielles.

Mais puiſque l'invention de t ſuppoſe qu'on ſache déja les valeurs de X, Y & Z, & que ces lettres renferment réciproquement la valeur de t, on remédiera à cet inconvénient en poſant

$x = t\,u$, $\eta = t\,v$, & $z = t\,w$, ou bien $w = \sqrt{(uu + vv - 2\,uv \cos.\omega)}$; de-là ayant pris pour u & v des expreſſions indéterminées convenables, on aura, ſans qu'on ait beſoin de ſavoir la valeur de t,

$$X = \int \frac{u\, d\omega\, \text{ſin.}\,\omega}{vv};\; Y = \int \frac{v\, d\omega\, \text{ſin.}\,\omega}{uu};\; Z = \int \frac{uv\, d\omega\, \text{ſin.}\,\omega}{w^3}$$

Q r

& ayant trouvé ces expreſſions, on aura tout de ſuite

$$t = \frac{f}{uu} - \frac{g}{vv} + \frac{\nu(X - Z)}{uu} + \frac{\mu(Y - Z)}{vv}$$

Pour le mouvement moyen de l'une & de l'autre Planète on aura

$$dp = t\,d\omega \qquad \&\; dq = n\,t\,d\omega$$

& pour le mouvement vrai,

$$d\eta = \frac{d\omega}{tuu}\big(f + \nu(X - Z)\big);\; d\theta = \frac{d\omega}{tvv}\big(g - \mu(Y - Z)\big)$$

Enfin, ayant formé les expreſſions $x = t\,u$ & $y = t\,v$, les équations *differentio*-différentielles à reſoudre ſeront,

$$\frac{x}{d\omega} d\frac{dz}{t\,d\omega} + \frac{1+\mu}{t} - \frac{1}{tuu}\big(f + \nu(X - Z)\big)^2 + \frac{\nu u \cos.\omega}{vv} + \frac{\nu(uu - uv\cos.\omega)}{w^3} = 0$$

$$\frac{n}{d\omega} d\frac{dy}{t\,d\omega} + \frac{1+\nu}{t} - \frac{1}{tvv}\big(g - \mu(Y - Z)\big)^2 + \frac{\mu v \cos.\omega}{uu} + \frac{\mu(vv - uv\cos.\omega)}{w^3} = 0$$

d'où l'on déterminera tous les coëfficiens indéterminés, qui ſe trouveront dans les formules ſuppoſées pour u & v.

Voilà donc le plan de l'analyſe, que je me propoſe d'exécuter, & qui me procurera, à ce que j'eſpere, tous les avantages que l'Académie Royale des Sciences peut avoir en vue en propoſant cette queſtion pour la ſeconde fois. On voit d'abord que cette méthode eſt préférable à quantité d'autres qui ſe pourroient préſenter, parce qu'elle fournit à la fois & conjointement les inégalites tant de Jupiter que de Saturne; car on verra que ces inégalités sont tellement liées ensemble, qu'il est impossible de les bien déterminer séparément. Cette méthode nous découvrira aussi d'abord toute les inégalités qui peuvent être de quelque conséquence; car quoique le nombre de toutes les inégalités soit effectivement infini, il est pourtant certain, que le nombre de celles, dont l'effet est encore sensible, ne sauroit être trop grand. Il y a une grande ressemblance entre cette question & la recherche des inégalités de la Lune; & quelque difficile que soit celle-ci, il est certain qu'à quelques égards la question présente est assujettie encore à de plus grandes difficultés, qui proviennent du terme irrationnel z ou w. Donc si la méthode que je viens d'indiquer, est capable de vaincre tous ces obstacles, on la pourra aussi employer avec tout le succès possible dans la recherche des inégalités de la Lune. De plus, si Jupiter & Saturne agissent l'un sur l'autre, il est incontestable que la terre doit aussi sentir leur action; & cette recherche seroit sans doute de la derniere importance.

§. IV.

Recherche des inégalités de Jupiter & Saturne, qui dépendent uniquement de leur distance.

TOUTES les inégalités de ces deux Planètes, de quelque nature qu'elles soient, dépendent nécessairement de ces trois élémens:

I. De leur distance apparente vue du Soleil ou de l'angle ω.

II. De l'excentricité de l'orbite de Jupiter.

III. De l'excentricité de l'orbite de Saturne.

Donc, pour ne pas trop embrouiller le calcul, je ne chercherai d'abord que les inégalités qui dépendent uniquement du premier élément ou de l'angle ω. Cette recherche seroit donc suffisante pour résoudre parfaitement la question proposée, si les deux orbites étoient destituées de toute excentricité; puisqu'il est certain que dans ce cas le mouvement de ces deux Planètes ne sauroit être troublé par d'autres inégalités, supposé que leurs orbites soient situées dans le même plan.

Or, quand je conçois que les deux orbites n'aient point d'excentricité, il ne faut pas s'imaginer qu'elles seroient circulaires, si l'action mutuelle des Planètes s'évanouissoit; cette idée seroit contraire à l'hypothèse que j'ai en vue. Car si les deux Planètes n'agissoient pas l'une sur l'autre, & qu'elles eussent reçu d'abord un tel mouvement, qu'elles décriroient des cercles autour du Soleil, il est certain que si elles commençoient subitement à s'attirer mutuellement, l'une & l'autre orbite en deviendroit excentrique, outre les autres inégalités dont leur mouvement seroit dérangé. Ainsi, quand je dis que les deux orbites ne sont pas excentriques, il le faut entendre de l'état actuel où les Planètes se trouvent effectivement en s'attirant l'une l'autre; & non pas de l'état où elles se trouveroient, si cette action mutuelle s'évanouissoit.

Or quoique les orbites ne fussent pas excentriques, dans le sens que je viens d'établir, les distances x & y ne seroient pas pourtant constantes, elles renfermeroient des parties qui dépendent de l'angle ω; & puisque ces parties variables s'évanouiroient tout-à-fait, si l'on avoit $\mu = o$ & $\nu = o$, il est clair que ces parties seront fort petites à cause de la petitesse de ces lettres μ & ν dont elles seront affectées. Donc, puisque ces termes seront si petits, il sera permis de négliger leurs produits par quelqu'une de ces lettres. Posant donc $u = c + U$ & $v = e + V$, les lettres U & V contiendront les petites parties variables dont je viens de parler, & je négligerai dans le calcul les termes où se trouveroient ces lettres multipliées par μ ou ν.

Donc, puisque les valeurs des quantités X, Y & Z, ne se rencontrent dans le calcul qu'avec des coëfficiens μ ou ν, je pourrai me dispenser de faire entrer les lettres U & V dans la détermination des quantites X, Y & Z. Posant donc $u = c$ & $v = e$, j'aurai

$$w = \sqrt{(cc + ee - 2ce \cos.\omega)};\ X = \int \frac{c\,d\omega \sin.\omega}{ee};\ Y = \int \frac{e\,d\omega \sin.\omega}{cc}$$

$$\& Z = \int \frac{ce\,d\omega \sin.\omega}{(cc+ee-2ce\cos.\omega)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{ce\,d\omega \sin.\omega}{(cc+ee)^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{2ce}{cc+ee}\cos.\omega\right)^{\frac{3}{2}}}$$

De-là on aura d'abord: $X = -\frac{c}{ee}\cos.\omega$ & $Y = -\frac{e}{cc}\cos.\omega$.

La valeur de Z demande plus d'adresse; car quoiqu'elle soit absolument intégrable, puisqu'on auroit $Z = \frac{-1}{\sqrt{(cc+ee-2ce\cos.\omega)}}$ cette quantité irrationnelle troubleroit tellement le calcul, qu'à peine pourroit-on en tirer quelque conclusion propre à l'usage de l'Astronomie. Il vaudra donc mieux qu'on convertisse d'abord la quantité irrationnelle $\frac{1}{w^3}$ dans une série infinie, qui procéde par les cosinus des angles multiplies de ω, &

& dans cette vue la résolution, qui se trouve dans la pièce qui a déja remporté un prix sur cette question, paroît la plus propre, Posant donc:

$$\left(1 - \frac{2ce}{cc+ee}\cos.\omega\right)^{-\frac{3}{2}} = \alpha + \beta\cos.\omega + \gamma\cos.2\omega + \delta\cos.3\omega + \varepsilon\cos.4\omega + \zeta\cos.5\omega + \&c.$$

Puisque la valeur de $\frac{2ce}{cc+ee}$ est précisément la même $= 0,8405$, comme elle y est supposée, les valeurs de ces coëfficiens seront:

$\alpha = 3,21789$; $\beta = 4,70357$; $\gamma = 3,07731$;
$\delta = 1,92413$; $\varepsilon = 1,18601$ & $\zeta = 0,75144$.

Et si nous posons, pour abréger, $\sqrt{(cc+ee)} = h$, nous aurons:

$$Z = \frac{ce}{h^3}\int d\omega \sin.\omega\,(\alpha + \beta\cos.\omega + \gamma\cos.2\omega + \delta\cos.3\omega + \varepsilon\cos.4\omega + \zeta\cos.5\omega + \&c.)$$ ou bien en multipliant par $\sin.\omega$, à cause de $\sin.\omega \times \cos.n\omega = \frac{1}{2}\sin.(n+1)\omega - \frac{1}{2}\sin.(n-1)\omega$ on aura:

$$Z = \frac{ce}{h^3}\int d\omega \left\{ \left.\begin{matrix}\alpha \\ -\frac{1}{2}\gamma\end{matrix}\right\}\cos.\omega \left.\begin{matrix}+\frac{1}{2}\beta \\ -\frac{1}{2}\delta\end{matrix}\right\}\cos.2\omega \left.\begin{matrix}+\frac{1}{2}\gamma \\ -\frac{1}{2}\varepsilon\end{matrix}\right\}\cos.3\omega \left.\begin{matrix}+\frac{1}{2}\delta \\ -\frac{1}{2}\zeta\end{matrix}\right\}\cos.4\omega\ \&c. \right\}$$

& partant l'intégration donnera:

$$Z = \frac{-ce}{h^3}\left((\alpha - \tfrac{1}{2}\gamma)\sin.\omega + \tfrac{1}{4}(\beta - \delta)\sin.2\omega + \tfrac{1}{6}(\gamma - \varepsilon)\sin.3\omega + \tfrac{1}{8}(\delta - \zeta)\sin.4\omega\ \&c.\right)$$

Quoique cette série ne soit pas fort convergente, on

Prix de 1752.

verra avec bien de la satisfaction que les séries, qui en résultent pour les valeurs x, y, u & θ, deviennent extrêmement convergentes, de sorte que cette résolution ne sera sujette à aucun scrupule.

Ayant maintenant trouvé les valeurs de X, Y & Z, puisqu'on peut négliger les quarrés & les plus hautes puissances de U & V, de même que leurs produits par μ ou ν, on aura:

$$t = \frac{f}{cc} - \frac{g}{ee} - \frac{2fU}{c^3} + \frac{2gV}{e^3} + \frac{\nu}{cc}(X-Z) + \frac{\mu}{ee}(Y-Z)$$

$$tuu = f - \frac{ccg}{ee} - \frac{2cgU}{ee} + \frac{2ccgV}{e^3} + \nu(X-Z) + \frac{\mu cc}{ee}(Y-Z)$$

$$tvv = \frac{fee}{cc} - g - \frac{2feeU}{c^3} + \frac{2efV}{cc} + \frac{\nu ee}{cc}(X-Z) + \mu(Y-Z)$$

$$\frac{1}{tuu} = \frac{ee}{eef-ccg} + \frac{2ceegU - 2ccegV - \nu e^4(X-Z)}{(eef-ccg)^2} \frac{-\mu ccee(Y-Z)}{(eef-ccg)^2}$$

$$\frac{1}{tvv} = \frac{cc}{eef-ccg} + \frac{2ceefU - 2ccefV - \nu ccee(X-Z)}{(eef-ccg)^2} \frac{-\mu c^4(Y-Z)}{(eef-ccg)^2}$$

& de-là on tirera

$$\frac{du}{d\omega} = \frac{eef}{eef-ccg} + \frac{2ceefgU - 2ccefgV - \nu c^2e^2g(X-Z)}{(eef-ccg)^2} \frac{-\mu cceef(Y-Z)}{(eef-ccg)^2}$$

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{ccg}{eef-ccg} + \frac{2ccefgU - 2ccefgV - \nu cceeg(X-Z)}{(eef-ccg)} \frac{-\mu cceef(Y-Z)}{(eef-ccg)^2}$$

Or ayant pour les mouvemens moyens $\frac{dp}{d\omega} = t$ & $\frac{dq}{d\omega} = nt$, il faut qu'en négligeant les termes variables, U, V, X, Y & Z; on ait $\frac{dp}{d\omega} = \frac{du}{d\omega}$ & $\frac{dq}{d\omega} = \frac{d\theta}{d\omega}$; d'où nous tirons les déterminations suivanses;

$$\frac{eef-ccg}{ccee} = \frac{eef}{eef-ccg} \;\&\; \frac{n(eef-ccg)}{ccee} = \frac{ccg}{eef-ccg}$$

Dont celle-ci divisée par celle-là donne $n = \frac{ccg}{eef}$ ou $ccg = neef$, & partant $f = \frac{cc}{(1-n)^2}$ & $g = \frac{nee}{(1-n)^2}$.

Posons pour abréger $1 - n = m$ pour avoir $f = \frac{cc}{mm}$ & $g = \frac{nee}{mm}$ & nous obtiendrons:

$$t = \frac{1}{m} - \frac{2U}{mmc} + \frac{2nV}{mme} + \frac{\nu}{cc}(X-Z) + \frac{\mu}{ee}(Y-Z)$$

& de plus:

$$\frac{1}{tuu} = \frac{m}{cc} + \frac{2nU}{c^3} - \frac{2nV}{cce} - \frac{\nu mm(X-Z)}{c^4} - \frac{\mu mm(Y-Z)}{ccee}$$

$$\frac{1}{tvv} = \frac{m}{ee} + \frac{2U}{cee} - \frac{2V}{e^3} - \frac{\nu mm(X-Z)}{ccee} - \frac{\mu mm(Y-Z)}{e^4}$$

$$\frac{du}{d\omega} = \frac{1}{m} + \frac{2nU}{mmc} - \frac{2nV}{mme} - \frac{\nu n(X-Z)}{cc} - \frac{\mu(Y-Z)}{ee}$$

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{n}{m} + \frac{2nU}{mmc} - \frac{2nV}{mme} - \frac{\nu n(X-Z)}{cc} - \frac{\mu(Y-Z)}{ee}$$

Ensuite on aura

$$x = \frac{c}{m} - \frac{(2-m)U}{mm} + \frac{2ncV}{mmc} + \frac{\nu}{c}\,(X-Z)$$
$$+ \frac{\mu c}{cc}\,(Y-Z)$$
$$y = \frac{c}{m} - \frac{2cU}{mmc} + \frac{(2-m)V}{mm} + \frac{\nu c}{cc}\,(X-Z)$$
$$+ \frac{\mu}{c}\,(Y-Z)$$

& fubftituant ces valeurs dans les équations *differentio*-différentielles il proviendra.

$$0 = \frac{-(2-m)\,c\,ddU}{mm\,d\omega^2} + \frac{2nc'c\,ddV}{mmc\,d\omega^2} + \frac{\nu\,dd(X-Z)}{d\omega^2}$$
$$+ \frac{\mu cc\,dd(Y-Z)}{cc\,d\omega^2} + \frac{1+\mu}{c} - \frac{cc}{m^3} - \frac{(2-m)\,cU}{m^4}$$
$$+ \frac{2nccV}{m^4c} + \frac{\nu c\, cof.\,\omega}{cc} + \frac{\nu c(c - c\,cof.\,\omega)}{h^3}(\alpha + \beta\, cof.\,\omega + \gamma\, cof.\,2\,\omega + \&c.)$$
$$+ \frac{\nu(n-m)}{mm}\,(X-Z) + \frac{\mu cc}{mmcc}\,(Y-Z)$$

$$0 = \frac{-2cc\,ddU}{mmc\,d\omega^2} + \frac{(2-m)\,c\,ddV}{mm\,d\omega^2} + \frac{\nu cc\,dd(X-Z)}{cc\,d\omega^2}$$
$$+ \frac{\mu\,dd(Y-Z)}{d\omega^2} + \frac{1+\nu}{c} - \frac{nncc}{m^3} + \frac{(2-m)\,nncV}{m^4}$$
$$- \frac{2nnccU}{m^4c} + \frac{\mu c\, cof.\,\omega}{cc} + \frac{\mu(c - c\,cof.\,\omega)}{h^3}(\alpha + \beta\, cof.\,\omega + \gamma\, cof.\,2\,\omega + \&c.)$$
$$+ \frac{\nu nncc}{mmcc}\,(X-Z) + \frac{\mu n(n+2m)}{mm}\,(Y-Z)$$

Et réintroduifant les diftances x & y on aura:

$$0 = c\,ddx + \frac{1+\mu}{c} - \frac{2cc}{m^3} + \frac{cx}{mm} - \frac{2\nu}{m}\,(X-Z) + \frac{\nu c\, cof.\,\omega}{cc}$$
$$+ \frac{\nu c(c - c\,cof.\,\omega)}{h^3}\,(\alpha + \beta\, cof.\,\omega + \gamma\, cof.\,2\,\omega + \&c.)$$

0 =

$$0 = c\,ddy + \frac{1+\nu}{c} - \frac{2nncc}{m^3} + \frac{nncy}{mm} + \frac{2\mu n}{m}(Y-Z) + \frac{\mu c\, cof.\,\omega}{cc}$$
$$+ \frac{\mu c(c - cof.\,\omega)}{h^3}\,(\alpha + \beta\, cof.\,\omega + \gamma\, cof.\,2\,\omega + \&c.$$

Enfuite on aura :

$$\frac{d\upsilon - dp}{d\omega} = \frac{2(2-m)\,U}{mmc} - \frac{4nV}{mmc} - \frac{\nu(2-m)}{cc}\,(X-Z)$$
$$- \frac{2\mu}{cc}\,(Y-Z)$$
$$\frac{d\theta - dq}{d\omega} = \frac{4nU}{mmc} - \frac{2n(2-m)\,V}{mmc} - \frac{2\nu n}{cc}\,(X-Z)$$
$$- \frac{\mu(2-m)}{cc}\,(Y-Z)$$

ou bien

$$\frac{d\upsilon - dp}{d\omega} = \frac{x}{m} - \frac{2x}{c} + \frac{\nu m}{cc}\,(X-Z)\ \&$$
$$\frac{d\theta - dq}{d\omega} = \frac{2n}{m} - \frac{2ny}{c} - \frac{\mu m}{cc}\,(Y-Z)$$

Maintenant il n'eft plus difficile de parvenir à la folution. Car ayant les valeurs $n = 0{,}4025686$ & $m = 0{,}5974314$, on trouvera d'abord $c^3 = n^3$ & $c^3 = \frac{m^3}{nn}$, $h = 2{,}089088\,m$, ou $\frac{c}{m} = 1$ & $\frac{c}{m} = 1{,}834170$.

Maintenant qu'on fuppofe

$$x = \frac{c}{m} + A\ cof.\ \omega + B\ cof.\ 2\ \omega + C\ cof.\ 3\ \omega +$$
$$D\ cof.\ 4\ \omega\ \&c.$$

$$y = \frac{c}{m} + A'\ cof.\ \omega + B'\ cof.\ 2\ \omega + C'\ cof.\ 3\ \omega +$$
$$D'\ cof.\ 4\ \omega\ \&c.$$

& ſubſtituant ces valeurs dans les équations *differentio*-différentielles, on trouvera les déterminations ſuivantes:

$$A = +0,4347\nu \qquad A' = +1,7814\mu$$
$$B = -1,8637\nu \qquad B' = +0,2831\mu$$
$$C = -0,1944\nu \qquad C' = +0,0655\mu$$
$$D = -0,0505\nu \qquad D' = +0,0205\mu$$

Enſuite on trouvera plus exactement:

$$\frac{c}{m} = 1,000000 + 0,33333\mu - 0,04006\nu$$

$$\frac{e}{m} = 1,834170 + 0,61140\nu + 0,16513\mu$$

Par conſequent les vraies diſtances des Planètes au Soleil feront:

$$x = 1,000000 + 0,3333\mu + 0,4347\nu\, cof.\,\omega - 0,1944\nu\, cof.\,3\omega - 0,0401\nu - 1,8637\nu\, cof.\,2\omega - 0,0505\nu\, cof.\,4\omega$$

$$y = 1,834170 + 0,61141 + 1,7814\mu\, cof.\,\omega + 0,0655\mu\, cof.\,3\omega + 0,1651\mu + 0,2831\mu\, cof.\,2\omega + 0,0205\mu\, cof.\,4\omega$$

& les longitudes vraies des Planètes ſe trouveront:

$$\eta = p - 1,3416\nu\, ſin.\,\omega + 3,3154\nu\, ſin.\,2\omega + 0,2761\nu\, ſin.\,3\omega + 0,0494\nu\, ſin.\,4\omega$$

$$\theta = q - 0,0627\mu\, ſin.\,\omega - 0,1623\mu\, ſin.\,2\omega - 0,0336\mu\, ſin.\,3\omega - 0,0099\mu\, ſin.\,4\omega$$

où p & q marquent les longitudes moyennes.

Donc ſi nous donnons aux lettres μ & ν les valeurs, qu'on conclut des revolutions des ſatellites; ſavoir

$\mu = \frac{1}{1067}$ & $\nu = \frac{1}{3021}$; & que la diſtance d'un corps au Soleil, qui fait ſes revolutions au tour du Soleil en même tems que Jupiter, ſoit poſée = 1000000 dans l'hypothéſe de Kepler, les diſtances des deux Planètes au Soleil feront, lorſqu'elles ſe trouvent éloignées l'une de l'autre de l'angle $\omega = \eta - \theta$.

$$x = 1000317 + 145\, cof.\,\omega - 621\, cof.\,2\omega - 64\, cof.\,3\omega - 17\, cof.\,4\omega$$

$$y = 1834027 + 1781\, cof.\,\omega + 283\, cof.\,2\omega + 65\, cof.\,3\omega + 20\, cof.\,4\omega$$

Or, pour leurs longitudes, ſi nous convertiſſons les coëfficiens trouvés en ſecondes, ſuppoſant le ſinus total = 1, elles proviendront:

$$\eta = p - 92''\, ſin.\,\omega + 226''\, ſin.\,2\omega + 19''\, ſin.\,3\omega + 3''\, ſin.\,4\omega$$

$$\theta = q - 12''\, ſin.\,\omega - 32''\, ſin.\,2\omega - 6''\, ſin.\,3\omega - 2''\, ſin.\,4\omega$$

Ainſi il ne feroit pas difficile de marquer en tout tems les lieux vrais de ces deux Planètes, ſi leurs orbites n'étoient pas excentriques, dans le ſens que j'ai établi ci-deſſus: & ſi ce cas avoit lieu dans le ciel, la queſtion propoſée feroit déja parfaitement réſolue.

De ces formules je tire les réflexions ſuivantes, qui ſerviront non ſeulement à nous éclaircir aſſez conſidérablement ſur cette matiere, mais auſſi à conduire plus ſûrement les opérations que je dois encore entreprendre pour les autres inégalités.

I. Je remarque donc premiérement, que la réſolution de la formule irrationnelle $\left(1 - \frac{2ce}{cc+ee}\, cof.\,\omega\right)^{-\frac{2}{3}}$ dans une ſérie eſt tout-à-fait propre à notre deſſein;

car quoique cette ſérie ſoit peu convergente en elle-même, on voit pourtant que les changemens qu'elle ſubit dans le calcul, la rendent tellement convergente, qu'il ſuffit d'en prendre les cinq premiers termes; les ſuivans devenant ſi petits tant pour les diſtances x & y que pour les longitudes n & θ, qu'on s'en peut paſſer ſans aucune erreur ſenſible. Il eſt donc certain que dans le calcul que j'aurai encore à faire, il ſuffira de conſidérer les mêmes premiers termes de cette ſérie ſans qu'on puiſſe avoir lieu de craindre que les ſuivans ſoient de quelque conſéquence.

II. On voit auſſi que les inégalités, qui dependent des angles ω, 2ω, 3ω & 4ω, ſont déja ſi petites d'elles-mêmes, qu'elle deviendroient tout-à-fait inſenſibles ſi on les multiplioit encore par les fractions μ & ν: ce qui juſtifie mes opérations, quand j'ai négligé dans le calcul tous les termes qui renferment les coëfficiens A, B, C, D, &c. A', B', C', D', &c. multipliés par μ ou ν. Et partant dans la pourſuite du calcul je ſerai également autoriſé à négliger quantité de termes qui ne ſeront pas plus conſidérables que ceux dont je viens de parler.

III. Il eſt auſſi fort remarquable que ſi les deux orbites de Jupiter & Saturne n'étoient point excentriques, les inégalités qui ſe trouveroient dans la longitude de Saturne ſeroient ſi petites qu'à peine ſauroit on s'en appercevoir par les obſervations; puiſqu'on voit qu'elles ne ſurpaſſeroient que fort rarement la moitié d'une minute. Or en recompenſe la diſtance de Saturne au Soleil en ſera plus altérée; car dans ſes conjonctions avec Jupiter, lorſque $\omega = o$ ſa diſtance ſera $= 1834027 + 2049$, & dans les oppoſitions $= 1834027 - 1543$; donc ſa diſtance moyenne au Soleil ſera augmentée dans le

le premier cas de ſa $\frac{1}{900}$ partie, & diminuée dans l'autre de ſa $\frac{1}{1200}$ partie.

IV. Mais il eſt encore plus ſurprenant que les inégalités dans le mouvement de Jupiter, qui dépendent de l'angle ω, ſoient beaucoup plus grandes que celles de Saturne, quoique la force attractive de Jupiter ſoit ſuppoſée trois fois plus grande que celle de Saturne. Car nous voyons que ces inégalités de Jupiter peuvent monter au de-là de 4 minutes lorſque l'angle ω eſt de $4^s\, 11^\circ$ ou de $7^s\, 19^\circ$. Dans le premier cas la longitude vraie de Jupiter ſera moins avancée que la moyenne de $4'\, 45''$, & dans l'autre elle ſera plus avancée environ de la même quantité.

Ces mêmes inégalités ſe trouveront donc auſſi actuellement dans le mouvement de ces deux Planètes, quand même leurs orbites ſeroient excentriques; mais l'excentricité y cauſera encore de nouvelles inégalités ſans changer celles-ci, que je m'en vais chercher dans les articles ſuivans.

§. V.

Recherches des inégalités de Jupiter & de Saturne qui dépendent de l'excentricité de l'orbite de Jupiter.

L'Analyſe de l'article précédent nous fait voir qu'il eſt plus convenable de garder dans le calcul les diſtances x & y mêmes, que d'y introduire les ſubſtitutions

$x = tu$ & $y = tv$; puisque nous avons vu que les équations finales à résoudre deviennent plus simples en y remettant les lettres x & y.

Pour cet effet il sera nécessaire d'arranger nos formules d'une autre façon, pour les rendre plus propres aux recherches suivantes. Dans cette vûe je poserai d'abord:

$$x = c(1+u) \;\&\; y = e(1+v)$$

desorte que c & e marquront à l'avenir, ce qui a été exprimé par $\frac{c}{m}$ & $\frac{e}{m}$; & partant les valeurs de c & e, entant qu'elles ne sont pas changées par les excentricités seront:

$$c = 1,000317,\; e = 1,834027 \;\&\; h = \sqrt{(cc+ee)}$$
$$= 2,089088.$$

De plus, il est clair que les lettres u & v, exprimant les inégalités causées tant par les excentricités que par l'action mutuelle, seront si petites qu'on pourra négliger sans scrupule les termes qui en contiendront trois ou plusieurs dimensions; & lorsque les termes sont déja multipliés par μ ou ν, on pourra même négliger les termes qui contiendront deux dimensions de u & v. Or puisque les termes qui dépendent uniquement de l'une ou l'autre excentricité peuvent exiger qu'on monte jusqu'aux trois dimensions, la recherche se pourra faire à part; car ici je me contenterai de conduire le calcul de même que si les excentricités étoient pour ainsi dire infiniment petites.

Donc puisque la quantité z n'entre dans le culcul qu'avec un multiplicateur μ ou ν, on aura assez exactement:

$$z = h\sqrt{\left(1 - \frac{2ce}{hh}\cos.\omega + \frac{2ccu + 2eev}{hh} - \frac{2ce}{hh}(u+v)\cos.\omega\right)}$$

& partant:

$$\frac{1}{z^3} = \frac{1}{h^3}\Big[\left(1 - \frac{2ce}{hh}\cos.\omega\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{hh}(ccu + eev - ce(u+v)\cos.\omega)$$
$$\left(1 - \frac{2ce}{hh}\cos.\omega\right)^{-\frac{5}{2}}\Big]$$

Or posant:

$$\left(1 - \frac{2ce}{hh}\cos.\omega\right)^{-\frac{3}{2}} = \alpha + \beta\cos.\omega + \gamma\cos.2\omega +$$
$$\delta\cos.3\omega + \varepsilon\cos.4\omega + \zeta\cos.5\omega + \&c.$$

$$\left(1 - \frac{2ce}{hh}\cos.\omega\right)^{-\frac{5}{2}} = \alpha' + \beta'\cos.\omega + \gamma'\cos.2\omega +$$
$$\delta'\cos.3\omega + \varepsilon'\cos.4\omega' + \&c.$$

les valeurs de ces coëfficiens seront: (*)

$\alpha = 3,21789$	$\alpha' = 13,21601$
$\beta = 4,70357$	$\beta' = 23,79051$
$\gamma = 3,07731$	$\gamma' = 18,94939$
$\delta = 1,92413$	$\delta' = 13,82941$
$\varepsilon = 1,18601$	$\varepsilon' = 9,96700.$
$\zeta = 0,75144$	

Pour trouver ensuite les valeurs des formules X, Y & Z, comme elles sont par tout multipliées par μ ou ν, & qu'il est permis de négliger les termes, qui seroient multipliés par $\mu\mu$, $\mu\nu$ ou $\nu\nu$, il suffira d'y mettre $\frac{1}{t} = \frac{f}{xx} - \frac{g}{yy}$ & puisque nous avons trouvé $f = cc$ & $g = nee$, nous avons pour ces termes:

(*) Voyez la piece de 1748, sur ce sujet. pag. 52.

que nature qu'elles soient, dépendent nécessairement de ces trois élémens:

$t = \frac{1}{m} + \frac{2u}{mm} - \frac{2nv}{mm}$ à cause de $m = 1 - n$.

& partant:

$$X = \frac{e}{ce}\int d\omega \,\text{fin.}\,\omega\left(\frac{1}{m} + \frac{(m+2)u}{mm} - \frac{2(1+n)v}{mm}\right)$$

$$Y = \frac{e}{cc}\int d\omega \,\text{fin.}\,\omega\left(\frac{1}{m} + \frac{2nu}{mm} - \frac{(2n-m)v}{mm}\right)$$

$$Z = \frac{ce}{h^3}\int d\omega \,\text{fin.}\,\omega\left(\frac{1}{m} + \frac{(2+m)u}{mm} - \frac{(2n-m)v}{mm}\right)$$
$$(\alpha + \beta\,\text{cof.}\,\omega + \gamma\,\text{cof.}\,2\omega + \delta\,\text{cof.}\,3\omega + \&c.)$$
$$-\frac{3ce}{mh^3}\int d\omega\,\text{fin.}\,\omega\left(ccu + eev - ce(u+v)\,\text{cof.}\,\omega\right)$$
$$(\alpha' + \beta'\,\text{cof.}\,\omega + \gamma'\,\text{cof.}\,2\omega + \delta'\,\text{cof.}\,3\omega + \&c.)$$

ou bien

$$Z = \frac{ce}{mh^3}\int d\omega\,\text{fin.}\,\omega\,(\alpha + \beta\,\text{cof.}\,\omega + \gamma\,\text{cof.}\,2\omega + \&c.)$$
$$+\frac{(2+m)ce}{mmh^3}\int u\,d\omega\,\text{fin.}\,\omega\,(\alpha + \beta\,\text{cof.}\,\omega + \&c.)$$
$$-\frac{(2n-m)ce}{mmh^3}\int v\,d\omega\,\text{fin.}\,\omega\,(\alpha + \beta\,\text{cof.}\,\omega + \&c.)$$
$$-\frac{3c^3e}{mh^3}\int u\,d\omega\,\text{fin.}\,\omega\,(\alpha' + \beta'\,\text{cof.}\,\omega + \&c.)$$
$$-\frac{3ce^3}{mh^3}\int v\,d\omega\,\text{fin.}\,\omega\,(\alpha' + \beta'\,\text{cof.}\,\omega + \&c.)$$
$$+\frac{3ccee}{2mh^3}\int u\,d\omega\,\text{fin.}\,2\omega\,(\alpha' + \beta'\,\text{cof.}\,\omega + \&c.)$$
$$+\frac{3ccee}{2mh^3}\int v\,d\omega\,\text{fin.}\,2\omega\,(\alpha' + \beta'\,\text{cof.}\,\omega + \&c.)$$

où il faut remarquer qu'on ne doit pas prendre pour u & v leurs valeurs entieres, mais seulement leurs parties

ties, qui ne font pas affectées par μ ou ν.

Ensuite on aura pour les autres expressions:

$$\frac{xx}{t} = cc(m - 2nu + 2nv) + \nu(X - Z) + \mu(Y - Z)\frac{cc}{ee}$$

$$\frac{yy}{t} = ee(m - 2u + 2v) + \frac{\nu ee}{cc}(X - Z) + \mu(Y - Z)$$

donc en renversant,

$$\frac{t}{xx} = \frac{1}{mcc} + \frac{2nu}{mmcc} - \frac{2nv}{mmcc} - \frac{\nu(X-Z)}{mmc^4} - \frac{\mu(Y-Z)}{mmccee}$$

$$\frac{t}{yy} = \frac{1}{mee} + \frac{2u}{mmee} - \frac{2v}{mmee} - \frac{\nu(X-Z)}{mmccee} - \frac{\mu(Y-Z)}{mme^4}$$

& partant on aura pour les longitudes:

$$\frac{d\phi - dp}{d\omega} = -\frac{2u}{m} - \frac{(m+4n)uu}{mm} + \frac{4nuv}{mm} + \frac{\nu(X-Z)}{mcc}$$
$$+\frac{2\nu(1+n)u(X-Z)}{mmcc} - \frac{2\nu nv(X-Z)}{mmcc} + \frac{2\mu u(Y-Z)}{mmee}$$

$$\frac{d\psi - dq}{d\omega} = -\frac{2nv}{m} + \frac{4nuv}{mm} + \frac{(4-m)nvv}{mm} - \frac{\mu(Y-Z)}{mee}$$
$$+\frac{2\mu(1+n)v(Y-Z)}{mmee} - \frac{2\mu u(Y-Z)}{mmee} + \frac{2\nu nv(X-Z)}{mmcc}$$

& enfin pour les équations *differentio*-différentielles en posant 1 pour $d\omega$, on aura:

$$\frac{xx}{td\omega}\,d\,\frac{dx}{td\omega} = mmc^3ddu - 2m(1+n)c^3uddu$$
$$-2mc^3du^2 + 4mnc^3vddu + 2mnc^3dudv$$
$$+2\nu mcddu(X-Z) + \nu mcdu(dX - dZ)$$
$$+\frac{2\mu mc^3ddu(Y-Z)}{ee} + \frac{\mu mc^3du(dY-dZ)}{ee}$$

$$\frac{yy}{td\omega}\,d\,\frac{dy}{td\omega} = mme^3ddv - 4me^3uddv - 2me^3dudv$$
$$+2m(1+n)e^3vddv + 2mne^3dv^2$$
$$+\frac{2\nu me^3ddv(X-Z)}{cc} + \frac{\nu me^3dv(dX-dZ)}{cc}$$
$$+2\mu meddv(Y-Z) + \mu medv(Yd - dZ)$$

qui procède par les cosinus des angles multipliés de ω, &

Or, il conviendra de donner à nos équations *differentio*-différentielles les formes suivantes, pour en rendre le calcul plus aisé.

$$\frac{x^3}{c^4 t d\omega}\, d\frac{dx}{t d\omega} = 1 + \frac{2\nu}{cc}(X - Z) - \frac{(1+\mu)x}{c^4} - \frac{\nu x^3 \cos.\omega}{c^4 yy}$$
$$- \frac{\nu(x^4 - x^3 y \cos.\omega)}{c^4 z^3}$$

$$\frac{y^3}{c^4 t d\omega}\, d\frac{dy}{t d\omega} = nn - \frac{2\mu n}{cc}(Y - Z) - \frac{(1+\nu)y}{c^4} - \frac{\mu y^3 \cos.\omega}{c^4 xx}$$
$$- \frac{\mu(y^4 - x y^3 \cos.\omega)}{c^4 z^3}$$

& pour ces formes on aura :

$$\frac{x^3}{c^4 t d\omega}\, d\frac{dx}{t d\omega} = mm\,ddu - m(4-3m)\,u\,ddu - 2m\,du^2$$
$$+ 4mn\nu\,ddu + 2mn\,du\,dv$$
$$+ \frac{2\nu m\,ddu}{cc}(X - Z) + \frac{\nu m\,du}{cc}(dX - dZ)$$
$$+ \frac{2\mu m\,ddu}{cc}(Y - Z) + \frac{\mu m\,du}{cc}(dY - dZ)$$

$$\frac{y^3}{c^4 t d\omega}\, d\frac{dy}{t d\omega} = mm\,ddv + m(4-m)\,v\,ddv + 2mn\,dv^2$$
$$- 4mu\,ddv - 2m\,du\,dv$$
$$+ \frac{2\nu m\,ddv}{cc}(X - Z) + \frac{\nu m\,dv}{cc}(dX - dZ)$$
$$+ \frac{2\mu m\,ddv}{cc}(Y - Z) + \frac{\mu m\,dv}{cc}(dY - dZ)$$

Donc nos deux équations *differentio*-différentielle seront :

$$\text{I. } 0 = \left\{\begin{array}{l}
- mm\,ddu + m(4 - 3m)\,u\,ddu + 2m\,du^2 \\
- 4mn\nu\,ddu - 2mn\,du\,dv \\
- \frac{2\nu m\,ddu}{cc}(X - Z) - \frac{\nu m\,du}{cc}(dX - dZ) \\
- \frac{2\mu m\,ddu}{cc}(Y - Z) - \frac{\mu m\,du}{cc}(dY - dZ) \\
+ 1 + \frac{2\nu}{cc}(X - Z) - \frac{(1+\mu)}{c^3} - \frac{(1+\mu)u}{c^3} \\
\qquad - \frac{\nu}{cce}\cos.\omega - \frac{3\nu u \cos.\omega}{cce} + \frac{2\nu v \cos.\omega}{cce} \\
- \frac{\nu}{h^3}\left(1 - \frac{e}{c}\cos.\omega\right)(\alpha + \beta\cos.\omega + \gamma\cos.2\omega + \&c.) \\
- \frac{\nu u}{h^3}\left(4 - \frac{3e}{c}\cos.\omega\right)(\alpha + \beta\cos.\omega + \gamma\cos.2\omega + \&c.) \\
+ \frac{\nu e v}{c h^3}\cos.\omega(\alpha + \beta\cos.\omega + \gamma\cos.2\omega + \&c.) \\
+ \frac{\nu u}{h^5}\ (3cc - 6ce\cos.\omega + 3ee\cos.\omega^2) \\
(\alpha' + \beta'\cos.\omega + \gamma'\cos.2\omega + \&c.) \\
+ \frac{\nu v}{h^5}\left(3ee - 3ce\cos.\omega - \frac{3e^3}{c}\cos.\omega + 3ee\cos.\omega^2\right) \\
(\alpha' + \beta'\cos.\omega + \gamma'\cos.2\omega + \&c.)
\end{array}\right.$$

$$
\text{II. } o = \left\{
\begin{aligned}
&-mmddv - m(4-m)vddv - 2mndv^2 \\
&+ 4muddv + 2mdudv \\
&- \frac{2\nu mddv}{cc}(X-Z) - \frac{\nu mdv}{cc}(dX-dZ) \\
&- \frac{2\mu mddv}{ee}(Y-Z) - \frac{\mu mdv}{ee}(dY-dZ) \\
&+ nn - \frac{2\mu n}{ee}(Y-Z) - \frac{(1+\nu)}{c^3} - \frac{(1+\nu)v}{e^3} \\
&\qquad - \frac{\mu \cos.\omega}{cce} + \frac{2\mu u \cos.\omega}{cce} - \frac{3\mu v \cos.\omega}{cce} \\
&- \frac{\mu}{h^3}\left(1 - \frac{c}{e}\cos.\omega\right)(\alpha + \beta\cos.\omega + \gamma\cos.2\omega + \&c.) \\
&- \frac{\mu v}{h^3}\left(4 - \frac{3c}{e}\cos.\omega\right)(\alpha + \beta\cos.\omega + \gamma\cos.2\omega + \&c.) \\
&+ \frac{\mu c u}{e h^3}\cos.\omega(\alpha + \beta\cos.\omega + \gamma\cos.2\omega + \&c.) \\
&+ \frac{\mu v}{h^5}(3ee - 6ce\cos.\omega + 3cc\cos.\omega^2) \\
&(\alpha' + \beta'\cos.\omega + \gamma'\cos.2\omega + \&c.) \\
&+ \frac{\mu u}{h^5}\left(3cc - 3ce\cos.\omega - \frac{3e^3}{c}\cos.\omega + 3cc\cos.\omega^2\right) \\
&(\alpha' + \beta'\cos.\omega + \gamma'\cos.2\omega + \&c.)
\end{aligned}
\right.
$$

Maintenant puiſque les quantités conſtantes, qui entrent dans ces formules, ſont connues, ſi nous remettons à leur place leurs valeurs, nos formules ſe changeront dans les formes ſuivantes, qui ſeront les plus commodes pour achever le calcul. Or on trouvera :

$$
\begin{aligned}
X = &- 0,49755\cos.\omega + 2,16316\int u\,d\omega\sin.\omega \\
&- 2,33614\int v\,d\omega\sin.\omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y = &- 3,07010\cos.\omega + 4,13746\int u\,d\omega\sin.\omega \\
&- 1,06737\int v\,d\omega\sin.\omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z = &- 0,56546\cos.\omega - 0,23399\cos.2\omega \\
&- 0,10614\cos.3\omega - 0,04936\cos.4\omega \\
&+ \int u\,d\omega(2,69960\sin.\omega + 2,71178\sin.2\omega \\
&+ 2,15293\sin.3\omega) \\
&- \int v\,d\omega(2,14022\sin.\omega + 2,39381\sin.2\omega \\
&+ 1,96490\sin.3\omega)
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
X - Z = &+ 0,06791\cos.\omega + 0,23399\cos.2\omega \\
&+ 0,10614\cos.3\omega + 0,04936\cos.4\omega \\
&- \int u\,d\omega(0,53644\sin.\omega + 2,71178\sin.2\omega \\
&+ 2,15293\sin.3\omega) \\
&- \int v\,d\omega(0,19592\sin.\omega - 2,39381\sin.2\omega \\
&- 1,96490\sin.3\omega)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y - Z = &- 2,50464\cos.\omega + 0,23399\cos.2\omega \\
&+ 0,10614\cos.3\omega + 0,04936\cos.4\omega \\
&+ \int u\,d\omega(1,43786\sin.\omega - 2,71178\sin.2\omega \\
&- 2,15293\sin.3\omega) \\
&+ \int v\,d\omega(1,07285\sin.\omega + 2,39381\sin.2\omega \\
&+ 1,96490\sin.3\omega)
\end{aligned}
$$

Avant que de paſſer outre il faut remarquer que les valeurs cc & nee, trouvées ci-deſſus pour les lettres f & g, ne ſont vraies qu'à-peu-près, lorſque les orbites ſont excentriques. Dans ce cas elles demandent une petite

$o =$

$D'\,\text{cof.}\,4\,\omega$ &c.

correction, que nous trouverons en posant $f = ee(1+f)$ & $g = nee(1+g)$, où f & g seront des quantités extrêmement petites. Donc on aura:

$$\frac{d\nu - dp}{d\omega} = \frac{f}{m} - \frac{2u}{m} - \frac{(m+n)uu}{mm} + \frac{4nuv}{mm} + \frac{\nu(X-Z)}{mee} + \frac{2\nu(1+n)u(X-Z)}{mmee} - \frac{2\nu nv(X-Z)}{mmee} + \frac{2\mu u(Y-Z)}{mmee}$$

$$\frac{d\theta - dq}{d\omega} = \frac{ng}{m} - \frac{2nv}{m} + \frac{(4-m)nvv}{mm} - \frac{4nuv}{mm} - \frac{\mu(Y-Z)}{mee} + \frac{2\mu(1+n)v(Y-Z)}{mmee} - \frac{2\mu u(Y-Z)}{mmee} + \frac{2\nu nv(X-Z)}{mmee}$$

& les équations *differentio*-différentielles obtiendront les formes suivantes, en les divisant par $m\,m$.

$$o = \left\{ \begin{aligned} & -ddu + \frac{(4-3m)uddu}{m} + \frac{2du^2}{m} - \frac{4nvddu}{m} \\ & - \frac{2ndudv}{m} + \frac{1}{mm} + \frac{2f}{mm} + \frac{2\nu}{mmee}(X-Z) \\ & - \frac{(1+\mu)}{mme^3} - \frac{2\nu ddu}{mee}(X-Z) - \frac{\nu du}{mee}(dX-dZ) \\ & - \frac{2\mu ddu}{mee}(Y-Z) - \frac{\mu du}{mee}(dY-dZ) - \frac{(1+\mu)u}{mme^3} \\ & + 0,33672\,\nu + 0,40276\,\nu\,\text{cof.}\,\omega \\ & + 0,94218\,\nu\,\text{cof.}\,2\omega + 0,61021\,\nu\,\text{cof.}\,3\omega \\ & + 0,38959\,\nu\,\text{cof.}\,4\omega. \\ & + \nu u\,(1,65822 + 2,34202\,\text{cof.}\,\omega \\ & \qquad + 4,44811\,\text{cof.}\,2\omega + 3,43398\,\text{cof.}\,3\omega) \\ & - \nu v\,(1,33820 + 1,97818\,\text{cof.}\,\omega \\ & \qquad + 3,27124\,\text{cof.}\,2\omega + 2,94118\,\text{cof.}\,3\omega) \end{aligned} \right.$$

$$o = \left\{ \begin{aligned} & -ddv - \frac{(4-m)vddv}{m} - \frac{2ndv^2}{m} + \frac{4uddv}{m} \\ & + \frac{2dudv}{m} + \frac{nn}{mm} + \frac{2nng}{mm} - \frac{2\mu n}{mmee}(Y-Z) \\ & - \frac{(1+\nu)}{mme^3} - \frac{2\nu ddv}{mee}(X-Z) - \frac{\nu dv}{mee}(dX-dZ) \\ & - \frac{2\mu ddv}{mee}(Y-Z) - \frac{\mu dv}{mee}(dY-dZ) - \frac{(1+\nu)v}{mme^3} \\ & - 0,59483\,\mu - 2,17601\,\mu\,\text{cof.}\,\omega \\ & - 0,39044\,\mu\,\text{cof.}\,2\omega - 0,23413\,\mu\,\text{cof.}\,3\omega \\ & - 0,14032\,\mu\,\text{cof.}\,4\omega. \\ & - \mu u\,(0,39631 - 1,97192\,\text{cof.}\,\omega \\ & \qquad + 0,97240\,\text{cof.}\,2\omega + 0,87427\,\text{cof.}\,3\omega) \\ & - \mu v\,(0,20219 + 4,15067\,\text{cof.}\,\omega \\ & \qquad - 0,69750\,\text{cof.}\,2\omega - 0,44479\,\text{cof.}\,3\omega) \end{aligned} \right.$$

Après avoir ainsi préparé nos formules, il sera d'autant plus aisé de déterminer les inégalités qui dépendent de l'excentricité de l'une ou de l'autre planète, puisque ni les différentiations ni les intégrations ne causent aucun embarras.

Soit donc k l'excentricité de l'orbite de Jupiter, & r son anomalie de l'espece dont j'ai parlé ci-dessus, desorte que sa différentielle $d\,r$ garde une raison constante avec l'élément $d\,\omega$: & partant je poserai $dr = \varkappa d\omega$, où il est clair que la valeur de $\varkappa$ nous découvrira le vrai mouvement de l'aphélie de Jupiter. La valeur de u contiendra donc ce terme $k\,\text{cof.}\,r$, qui sera le plus considérable par rapport aux autres, puisque l'excentricité k est assez considérable; ensuite il est évident que des termes de cette forme $k^2\,\text{cof.}\,2\,r\,k^3\,\text{cof.}\,3\,r$, &c. entreront aussi dans la valeur de u, mais nos formules ne font propres qu'à trouver le terme $k^2 \, cos. \, 2r$; or les fuivans fe trouveront aifément par le moyen d'une méthode particuliere, que j'expoferai enfuite; car ces termes feront fi petits, que je les pourrai négliger dans la recherche préfente.

Pour la valeur de v, elle fubira auffi des changemes confidérables à caufe de l'excentricité de l'orbite de Jupiter, & contiendra les mêmes termes que celle de u, quoique leurs coëfficiens foient tous multipliés par μ ou ν. Or nonobftant cela j'ai remarqué que le coëfficient du terme $cof. \, (\omega - r)$, qui fe trouvera dans v, devient fi grand, qu'il n'eft pas permis de le confondre avec les autres termes de la même quantité v, qui feront pour la plupart fort petits.

Or l'angle $\omega - r$ exprime à-peu-près la diftance de Saturne à l'aphélie de Jupiter, deforte que Saturne foit fouffrir des dérangemens très-confidérables, qui dépendent de fa diftance à l'aphélie de Jupiter. Donc quand même Saturne n'auroit point d'excentricité propre, fon mouvement feroit tellement déreglé par rapport à l'aphélie de Jupiter, qu'on croiroit que fon orbite eft très fenfiblement excentrique, & que fon aphélie tombe dans celui de Jupiter, comme on verra quand le calcul fera achevé. Et c'eft ici que fe trouve la plus grande difficulté de la queftion propofée, difficulté telle, que fi l'on n'y fait pas toute la réflexion poffible, il eft abfolument impoffible de réuffir dans cette recherche.

Pofons donc, puifqu'il eft aifé de prévoir la forme des quantités u & v;

$u =$

$$\begin{aligned} u = & + k \, cof. \, r + A \, cof. \, \omega + B \, cof. \, 2\omega + F k \, cof. \, (\omega - r) \\ & + \mathfrak{A} kk \, cof. \, 2r + \mathfrak{a} k^2 \, cof. \, \omega + C \, cof. \, 3\omega + G k \, cof. \, (\omega + r) \\ & + D \, cof. \, 4\omega + H k \, cof. \, (2\omega - r) \\ & + I k \, cof. \, (2\omega + r) \\ & + K kk \, cof. \, (\omega - 2r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = & \alpha k \, cof. \, (\omega - r) + A' cof. \, \omega + B' cof. \, 2\omega + G' k \, cof. \, (\omega + r) \\ & + f' kk \, cof. \, (2\omega - 2r) + \mathfrak{a}' k^2 cof. \, \omega + C' cof. \, 3\omega + H' k \, cof. \, (2\omega - r) \\ & + E' k \, cof. \, r \qquad + D' cof. \, 4\omega + I' k \, cof. \, (2\omega + r) \\ & + K' kk \, cof. \, (\omega - 2r) \end{aligned}$$

& faifant les fubftitutions dans nos équations, on aura d'abord :

$$f = \frac{(m + 4n)}{2m} kk \;\&\; g = -\frac{(4 - m)}{2m} \alpha\alpha k k.$$

& enfuite les valeurs des lettres A, B, C, D, & A', B', C', D' deviendront:

$A = 0{,}43472 \nu$; $B = -1{,}88047 \nu$; $C = -0{,}19440 \nu$; $D = -0{,}05047 \nu$.

$A' = 0{,}90959 \mu$; $B' = +0{,}15435 \mu$; $C' = +0{,}03572 \mu$; $D' = +0{,}01116 \mu$.

Pour les autres valeurs, ayant rangé tous les termes dont les deux équations *differentio*-différentielles feront compofées, felon les cofinus des angles, qui forment les quantités u & v; les premiers rangs, qui ne renferment que des quantités conftantes, donneront

$$\frac{1 + \mu}{mmc^3} = \frac{1}{mm} + \frac{(m + 4n)}{m^3} kk - \frac{3n}{m} \varkappa\varkappa kk + 0{,}33672 \nu$$

$$\frac{1 + \nu}{mme^3} = \frac{nn}{mm} - \frac{nn(4 - m)}{m^3} \alpha\alpha kk + \frac{3}{m} (1 - n)^2 \alpha\alpha kk - 0{,}59483 \mu$$

d'où l'on pourra déterminer les vraies diftances moyennes c & e après quon aura trouvé les quantités $\varkappa$, α &

l'excentricité k, dont celle-ci se doit conclure par les obſervations. Or le terme $k\ cof.\ r$ de la premiere équation donnera.

$$xx + \frac{n}{m}(1+x)A\alpha + \frac{0,19591}{mmee}\nu\alpha$$
$$-\frac{(1+\mu)}{mme^3} + 1,65822\nu - 0,98909\nu\alpha = 0$$

qui ſe réduit à celle-ci, puiſque $x = \frac{1}{m}$ à-peu-près

$$xxmm = 1 - 0,47168\nu - 0,0432\nu\alpha$$

d'où nous tirons

$$x = \frac{1}{m} - 0,39475\nu - 0,0362\nu\alpha$$

& partant

$$1 - x = -\frac{n}{m} + 0,39475\nu + 0,0362\nu\alpha$$

Enſuite le terme $k\ cof.(\omega - r)$ de l'autre équation fournit cette égalité :

$$(1-x)^2\alpha - \frac{1}{m}(2-x)A'' + \frac{kn, 1,43786}{mmee(1-x)}$$
$$-\frac{\alpha(1+\nu)}{mme^3} + 0,98596\mu - 0,20219\mu\alpha = 0$$

ſi l'on y ſubſtitue la valeur trouvée de x, les termes finis, ou ceux qui ne contiennent point μ ou ν ſe détruiront d'eux-mêmes, & l'on aura :

$$\alpha(0,39264\mu - 0,53199\nu) - 0,0487\alpha\alpha\nu$$
$$= 0,22604\mu$$

d'où l'on voit, que ſi l'on ne connoît pas très-exactement les valeurs de μ & ν, il eſt impoſſible de bien déterminer celle de α ; de ſorte que cette détermination eſt extrêmement délicate. Cependant ſi nous ſuppoſons

$$\mu = \frac{1}{1067} \ \& \ \nu = \frac{1}{3021}$$

nous aurons :

$$192\alpha - 16\alpha\alpha = 212$$

d'où nous tirons :

$$\alpha = 1,2303.$$

Donc puiſque α eſt > 1. Saturne reſſent une plus grande inégalité de Jupiter, que Jupiter même. Or cela n'eſt vrai que dans la ſuppoſition faite pour les lettres μ & ν ; & puiſqu'elle n'eſt pas trop ſûre, il peut arriver que la véritable valeur de α differe très-conſidérablement de celle que nous venons de trouver.

Pour cette raiſon, il vaudra mieux conſidérer la valeur de α comme inconnue, & de tâcher enſuite de la déterminer exactement par les obſervations. Cependant voyant qu'elle eſt très conſidérable, & qu'elle ſurpaſſe peut-être l'unité, on reconnoîtra la néceſſité de traiter dans le calcul ce terme $\alpha k\ cof.(\omega - r)$ ſur le même pied que le terme $k\ cof.\nu$, qui eſt le plus conſidérable dans la valeur de u, & on verra que cette lettre α influe ſi-conſidérablement ſur toutes les autres inégalités, quelles peuvent même changer de ſigne.

Mais quoique je ne puiſſe conſidérer la valeur de α comme entiérement connue, la valeur de x n'en dépend point ſenſiblement, & partant nous ſommes en état de déterminer le mouvement de l'aphélie de Jupiter très-exactement. Car poſant $\alpha = 1\frac{1}{4}$, nous aurons :

$$xxmm = 1 - 0,52568\nu \ \& \ x\ m = 1 - 0,26284\nu.$$

Or ayant poſé $dr = x\,d\omega$, nous aurons $r =$ conſt. $+ x\omega =$ conſt. $+ x(\eta - \theta)$, & ſelon le mouvement moyen, $r = C + x(p - q) = C + mxp$. Donc s'il l'on avoit exactement $x\ m = 1$, le mouvement de l'anomalie moyenne feroit égal au mouvement moyen, & l'aphélie feroit en repos. Or puifque $x\, m = 1 - 0,26284\nu$; il s'enfuit que le mouvement moyen eft ou mouvement de l'anomalie comme 1 à $1 - 0,26284\nu$; & partant l'aphélie aura un mouvement en avant; deforte que le mouvement de l'aphélie fera au mouvement moyen comme $0,26284\nu$ à 1, ou pofant $\nu = \frac{1}{3021}$ comme $0,000087$ à 1. Donc puifque le mouvement moyen de Jupiter eft pendant un an de $1^s, 0^\circ, 20', 38'' = 109238''$, l'aphélie de Jupiter avancera chaque année de $9\frac{1}{2}''$, par rapport aux étoiles fixes; donc par rapport aux équinoxes le mouvement annuel de l'aphélie de Jupiter fera affez exactement de $60''$,

M. Caffini ayant très-foigneufement examiné toutes les obfervations anciennes, & les ayant comparées avec les modernes, ne trouve que $57''$ pour le mouvement annuel de cet aphélie, au lieu que d'autres tables aftronomiques le marquent au delà de $70''$, d'où je conclus que ce bel accord de mon calcul avec les obfervations anciennes en confirme affez la jufteffe.

Pour les autres valeurs on les trouve pour la valeur de u:

$A = 1,78973 \qquad F = -0,61925\nu - 0,01701\mu - 0,57001\alpha\nu$,

$a = 1,67383\alpha \qquad G = +0,76236\nu + 0,01689\mu + 3,64624\alpha\nu$.

$K = -1,67385\alpha \qquad H = +10,58430\nu + 0,13210\mu + 0,40168\alpha\nu$.

$\qquad I = -4,74525\nu - 0,13576\mu + 0,52283\alpha\nu$,

& pour les valeurs de l'expreffion ν.

$f' =$

$f' = -2,12306\alpha\alpha \qquad E' = +0,16881\mu + 0,45202\alpha\nu - 0,74378\alpha\mu$

$a' = -0,67224\alpha \qquad G' = +0,65758\mu - 0,85288\alpha\nu - 0,44740\alpha\mu$

$K' = +0,67366\alpha \qquad H' = -12,87303\mu - 0,45204\alpha\nu + 5,23988\alpha\mu$

$\qquad I' = +0,26728\mu - 0,09304\alpha\nu - 0,11413\alpha\mu$

D'ou l'on voit qu'on feroit bien trompé dans la valeur de ces coëfficiens, fi l'on avoit négligé celle de la lettre α, qui eft, à ce que nous avons vu, très-confidérable.

De-là les véritables diftances moyennes c & e feront:

$c = 1,00000 + 0,33333\mu - 0,04006\nu - 0,55794kk$

$e = 1,83417 + 0,61139\nu + 0,16513\mu + 0,41197\alpha\alpha kk$

où l'unité marque le rayon d'un cercle, dans lequel un corps uniquement attiré vers le Soleil, acheveroit fes révolutions en même tems que Jupiter.

Donc ayant trouvé les valeurs des coëfficiens fuppofés ci-deffus, on aura à chaque tems les valeurs des diftances x & y, par le moyen des formules $x = c(1+u)$ & $y = e(1+\nu)$

Il ne refte donc qu'à trouver les longitudes η & θ de nos Planètes, ce qui ce fera aifement par les formules données pour $\frac{d\eta - dp}{du}$ & $\frac{d\theta - dq}{du}$. Je n'en raporterai que les termes principaux, qui auroient lieu quand même l'excentricité feroit infiniment petite, d'où l'on aura:

$$\eta = p - 1,34665\,\nu\,\text{sin.}\,\omega + 3,34343\,\nu\,\text{sin.}\,2\,\omega$$
$$+ 0,27615\,\nu\,\text{sin.}\,3\,\omega + 0,06193\,\nu\,\text{sin.}\,4\,\omega$$
$$- 2\,k\,\text{sin.}\,r - 2,71356\,k\,k\,\text{sin.}\,2\,r$$
$$- 3,34766\,\alpha kk\,\text{sin.}\,\omega - 3,34835\,\alpha kk\,\text{sin.}\,(\omega - 2r)$$

$$\theta = q + 0,02035\,\mu\,\text{sin.}\,\omega - 0,16222\,\mu\,\text{sin.}\,2\,\omega$$
$$- 0,03365\,\mu\,\text{sin.}\,3\,\omega - 0,00990\,\mu\,\text{sin.}\,4\,\omega$$
$$+ 2\,\alpha k\,\text{sin.}\,(\omega - r) - 3,54689\,\alpha\alpha kk\,\text{sin.}\,2\,(\omega - r)$$
$$- 1,34979\,\alpha kk\,\text{sin.}\,\omega + 1,34816\,\alpha k^2\,\text{sin.}\,(\omega - 2\,r)$$

Pour les autres inégalités, je crois qu'il suffit d'avoir donné la méthode d'où elles peuvent être déduites; car avant qu'on ait déterminé exactement les valeurs de μ, ν & κ, leur évolution en nombre deviendroit trop embarrassante, & ne feroit outre cela d'aucun usage.

Cependant ces expressions seroient suffisantes, si l'excentricité de l'orbite de Jupiter étoit si petite, que les termes affectés par k & μ ou ν ensemble ne fussent d'aucune conséquence.

Or les autres termes, dont les expressions de η & θ sont composées, sont compris dans les formules suivantes:

$$\eta = \text{Prec.} + \frac{k\,\text{sin.}\,r}{\kappa}\left(\frac{2n}{mm}A\,\alpha + \frac{0,09796\,\alpha\nu}{mcc\kappa} - \frac{0,06791\,\alpha\nu}{mmcc}\right)$$
$$+ \frac{k\,\text{sin.}\,(\omega - r)}{1-\kappa}\left\{\begin{array}{l} -\frac{2}{m}F - \frac{(4-3m)\,A}{mm} + \frac{2nA'}{mm} + \frac{0,26822\,\nu}{mcc(1-\kappa)} \\ + \frac{0,06791\,(1+n)\,\nu}{mmcc} - \frac{2,50464\,\mu}{mmee} \end{array}\right\}$$

$$+ \frac{k\,\text{sin}\,(\omega + r)}{1+\kappa}\left\{\begin{array}{l} -\frac{2}{m}G - \frac{(4-3m)A}{mm} + \frac{2nA'}{mm} + \frac{2nB\alpha}{mm} \\ + \frac{0,26822\,\nu}{mcc(1+\kappa)} - \frac{1,19690\,\alpha\nu}{mcc(1+\kappa)} + \frac{0,06791\,(1+n)\,\nu}{mmcc} \\ - \frac{2,50464\,\mu}{mmee} - \frac{0,23399\,n\alpha\nu}{mmcc} \end{array}\right\}$$

$$+ \frac{k\,\text{sin.}\,(2\omega - r)}{2-\kappa}\left\{\begin{array}{l} -\frac{2}{m}H - \frac{(4-3m)\,B}{mm} + \frac{2nB'}{mm} + \frac{2nA\alpha}{mm} \\ + \frac{1,33589\,\nu}{mcc(2-\kappa)} + \frac{0,09796\,\alpha\nu}{mcc(2-\kappa)} + \frac{0,23399(1+n)\,\nu}{mmcc} \\ + \frac{0,23399\,\mu}{mmee} - \frac{0,06791\,n\alpha\nu}{mmcc} \end{array}\right\}$$

$$+ \frac{k\,\text{sin.}\,(2\omega + r)}{2+\kappa}\left\{\begin{array}{l} -\frac{2}{m}I - \frac{(4-3m)\,B}{mm} + \frac{2nB'}{mm} + \frac{2nC\alpha}{mm} \\ + \frac{1,35589\,\nu}{mcc(2+\kappa)} - \frac{0,98245\,\alpha\nu}{mcc(2+\kappa)} + \frac{0,23399(1+n)\,\nu}{mmcc} \\ + \frac{0,23399\,\mu}{mmee} - \frac{0,10614\,n\alpha\nu}{mmcc} \end{array}\right\}$$

$$\theta = \text{Prec.} + \frac{k\,\text{sin}\,r}{\kappa}\left\{\begin{array}{l} -\frac{2n}{m}E' + \frac{n(4-)\,A'\alpha}{mm} - \frac{2nA\alpha}{mm} \\ + \frac{1,07285\,\alpha\mu}{2mee\kappa} - \frac{2,50464(1+n)\,\alpha\mu}{mmee} + \frac{0,06791\,n\alpha\nu}{mmcc} \end{array}\right\}$$
$$+ \frac{k\,\text{sin.}\,(\omega - r)}{1-\kappa}\left(-\frac{2nA'}{mm} + \frac{1,43786\,\mu}{2mee(1-\kappa)} + \frac{2,50464\,\mu}{mmee}\right)$$
$$+ \frac{k\,\text{sin}\,(\omega + r)}{1+\kappa}\left\{\begin{array}{l} -\frac{2n}{m}G' + \frac{n(4-m)\,B'\alpha}{mm} - \frac{2nA'}{mm} - \frac{2nB\alpha}{mm} \\ + \frac{1,43786\,\mu}{2mee(1+\kappa)} + \frac{2,39381\,\alpha\mu}{2mee(1+\kappa)} + \frac{0,23399(1+n)\,\alpha\mu}{mmee} \\ + \frac{2,50464\,\mu}{mmee} + \frac{0,23399\,n\alpha\nu}{mmcc} \end{array}\right\}$$

$$+\frac{k\,\mathit{fin}.(2u-r)}{2-x}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2n}{m}H'+\frac{n(4-m)A'\alpha}{mm}-\frac{2nB'}{mm}-\frac{2nA\alpha}{mm}\\ -\frac{2,71178\,\mu}{2mee(2-x)}+\frac{1,07285\,\alpha\mu}{2mee(2-x)}+\frac{2,50464(1+n)\alpha\mu}{mmee}\\ -\frac{0,23399\,\mu}{mmee}+\frac{0,06791\,n\alpha\nu}{mmee}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{k\,\mathit{fin}.(2u+r)}{2+x}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2n}{m}I'+\frac{n(4-m)C'\alpha}{mm}-\frac{2nB'}{mm}+\frac{2nC\alpha}{mm}\\ -\frac{2,71178\,\mu}{2mee(2+x)}+\frac{1,96490\,\alpha\mu}{2mee(2+x)}+\frac{0,10614(1+n)\alpha\mu}{mmee}\\ -\frac{0,23399\,\mu}{mmee}+\frac{0,10614\,n\alpha\nu}{mmee}\end{array}\right\}$$

§ VI.

Recherches des Inégalités de Jupiter & de Saturne, qui dependent de l'excentricité de l'orbite de Saturne.

De la même maniere que je viens de déterminer les inégalités, qui dependent de l'excentricité de l'orbite de Jupiter, on déterminera celles, qui dependent de l'excentricité de l'orbite de Saturne; soit donc l, l'excentricité de l'orbite de Saturne, & s son anomalie de l'espece que j'ai exposé ci-dessus, de sorte que ds, garde avec $d\omega$, un rapport constant qui soit $ds = \lambda\, d\omega$; or le mouvement de Jupiter se ressentira tellement de cette excentricité, que sa distance au Soleil dependra très-sensiblement de son élongation depuis l'aphélie de Saturne

Saturne. Cette élongation étant donc $= \omega + s$, la quantité u contiendra un terme de la forme $\mathit{cof}.(\omega+s)$, qui sera très-considérable par rapport aux autres. Comme je ne regarderai pas ici l'excentricité de l'orbite de Jupiter, les inégalités qui en dependent étant deja trouvées dans l'article précédent; je poserai

$$\begin{aligned} u = {} & b\,l\,\mathit{cof}.(\omega+s) + A\,\mathit{cof}.\omega + C\,\mathit{cof}.3\omega + E\,l\,\mathit{cof}.s \\ & + B\,\mathit{cof}.2\omega + D\,\mathit{cof}.4\omega + L\,l\,\mathit{cof}.(\omega-s) \\ & + N\,l\,\mathit{cof}.(2\omega-s) \\ & + O\,l\,\mathit{cof}.(2\omega+s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = {} & l\,\mathit{cof}.s + A'\,\mathit{cof}.\omega + C'\,\mathit{cof}.3\omega + L'\,l\,\mathit{cof}.(\omega-s) \\ & + B'\,\mathit{cof}.2\omega + D'\,\mathit{cof}.4\omega + M'\,l\,\mathit{cof}.(\omega+s) \\ & + N'\,l\,\mathit{cof}.(2\omega-s) \\ & + O\,l\,\mathit{cof}.(2\omega+s) \end{aligned}$$

où je néglige les termes $ll\,\mathit{cof}.\omega$, $ll\,\mathit{cof}.2(\omega+s)$ & $ll\,\mathit{cof}.(\omega+2s)$, puisque je ferai voir dans l'article suivant, comment on peut fort aisement assigner les inégalités, qui feroient comprises dans ces termes.

Maintenant on n'a qu'à substituer ces expressions dans nos deux équations *differentio*-différentielles rapportées pag. 34. & cette substitution n'aura aucune difficulté, puisque nous négligerons tous les termes, qui feroient multipliés, ou par $\mu\mu$, $\mu\nu$ ou $\nu\nu$.

Or la premiere équation sera changée par cette substitution dans la forme suivante:

Conſtante.	$l \cos. s$	$l \cos.(\omega - s)$
$\frac{1}{mm} + \frac{2f}{mm}$	$+E$	$+(1-\lambda)^2 L$
$-\frac{(1+\mu)}{mmc^3}$	$-\frac{(4-3m)}{2m} bA$	$-\frac{(4-3m)}{2m} 4bB$
$+0,33672\,\nu$	$-\frac{(4-3m)}{2m}(1+\lambda)^2 bA$	$-\frac{(4-3m)}{2m}(1+\lambda)^2 bB$
$-\frac{(4-2m)}{2m} b^2(1+\lambda)^2 ll$	$+\frac{2}{m}(1+\lambda)\, bA$	$+\frac{2}{m}(1+\lambda)\, 2bB$
$+\frac{1}{m} b^2(1+\lambda)^2 ll$	$+\frac{2n}{m}(1+\lambda)^2 bA'$	$+\frac{2n}{m}(1+\lambda)^2 bB'$
	$-\frac{n}{m}(1+\lambda) bA'$	$+\frac{2n}{m} A$
	$-\frac{\nu b}{mmcc}\,\frac{0,53644}{\lambda}$	$-\frac{n}{m}(1+\lambda)\, 2bB'$
	$+\frac{\nu b(1+\lambda)^2}{mcc}\, 0,06791$	$-\frac{n}{m}\lambda A$
	$-\frac{\nu b(1+\lambda)}{2mcc}\, 0,06791$	$+\frac{\nu b}{mmcc}\,\frac{2,71178}{1-\lambda}$
	$-\frac{\mu b(1+\lambda)^2}{mcc}\, 2,50464$	$+\frac{\nu}{mmcc}\,\frac{0,19592}{1-\lambda}$
	$+\frac{\mu b(1+\lambda)}{\nu ncc}\, e,50464$	$+\frac{\nu b(1+\lambda)^2}{mcc}\, 0,23399$
	$-\frac{(1+\mu)E}{mmc^3}$	$-\frac{\nu b(1+\lambda)}{mcc}\, 0,23399$
	$+\nu b\, 1,17101$	$+\frac{(\mu b(1+\lambda)^2}{mcc}\, 0,23399$
	$-\nu\, 1,33820$	$-\frac{\mu b(1+\lambda)}{mcc}\, 0,23399$
		$-\frac{(1+\mu)L}{mmc^3}$
		$+\nu b\, 2,22405$
		$-\nu\, 0,98909$

$l. \cos.(\omega + s)$	$l \cos.(2\omega - s)$	$l \cos.(2\omega + s)$
$+b(1+\lambda)^2$	$+(2-\lambda)^2 N$	$+(2+\lambda)^2 O$
$+\frac{2n}{m} A$	$-\frac{(4-3m)}{2m} 9bC$	$-\frac{(4-3m)}{2m} bA$
$+\frac{n}{m}\lambda A$	$-\frac{(4-3m)}{2m}(1+\lambda)^2 bC$	$-\frac{(4-3m)}{2m}(1+\lambda)^2 bA$
$+\frac{\nu}{mmcc}\,\frac{0,19592}{1+\lambda}$	$+\frac{2}{m}(1+\lambda)\, 3bC$	$-\frac{2}{m}(1+\lambda)\, bA$
$-\frac{(1+\mu)b}{mmc^3}$	$+\frac{2n}{m}(1+\lambda)^2 bC'$	$+\frac{2n}{m}(1+\lambda)^2 bA'$
$+\nu b\, 1,65822$	$+\frac{2n}{m} 4B$	$+\frac{2n}{m} 4B$
$-\nu\, 0,98909$	$-\frac{n}{m}(1+\lambda)\, 3bC'$	$+\frac{n}{m}(1+\lambda) bA'$
	$-\frac{n}{m} 2\lambda B$	$+\frac{n}{m} 2\lambda B$
	$+\frac{\nu b}{mmcc}\,\frac{2,15293}{2-\lambda}$	$+\frac{\nu b}{mmcc}\,\frac{0,53644}{2+\lambda}$
	$-\frac{\nu}{mmcc}\,\frac{2,39381}{2-\lambda}$	$-\frac{\nu}{mmcc}\,\frac{2,39381}{2+\lambda}$
	$+\frac{\nu b(1+\lambda)^2}{mcc}\, 0,10614$	$+\frac{\nu b(1+\lambda)^2}{mcc}\, 0,06791$
	$-\frac{3\nu b(1+\lambda)}{2mcc}\, 0,10614$	$+\frac{\nu b(1+\lambda)}{2mcc}\, 0,06791$
	$+\frac{\mu b(1+\lambda)^2}{mcc}\, 0,10614$	$-\frac{\mu b(1+\lambda)^2}{mcc}\, 2,50464$
	$-\frac{3\mu b(1+\lambda)}{2mcc}\, 0,10614$	$-\frac{\mu b(1+\lambda)}{2mcc}\, 2,50464$
	$-\frac{(1+\mu)N}{mmc^3}$	$-\frac{(1+\mu)O}{mmc^3}$
	$+\nu b\, 1,71699$	$+\nu b\, 1,17101$
	$-\nu\, 1,63562$	$-\nu\, 1,63562$

L'autre équation prendra cette forme:

Conſtante	$l\,cof.\,s$	$l\,cof.(\omega - s)$
$+\frac{(4-m)}{2m}\lambda\lambda\,ll$	$+\lambda\lambda$	$+(1-\lambda)^2 L'$
$-\frac{n}{m}\lambda\lambda\,ll$	$-\frac{2}{m}b\,A'$	$+\frac{(4-m)}{2m}(1+\lambda\lambda)A'$
$+\frac{nn}{mm}+\frac{2nng}{mm}$	$+\frac{1}{m}(1+\lambda)b\,A'$	$-\frac{2n}{m}\lambda A'$
$-\frac{(1+\nu)}{mme^3}$	$-\frac{\mu n b}{mmee}\frac{1,43786}{\lambda}$	$-\frac{2}{m}4bB'$
$-0,59483\,\mu$	$-\frac{(1+\nu)}{mme^3}$	$-\frac{2}{m}\lambda\lambda A$
	$+\mu b\,0,98596$	$+\frac{1}{m}\lambda A$
	$-\mu\,0,20219$	$+\frac{1}{m}(1+\lambda)2bB'$
		$-\frac{\mu n b}{mmee}\frac{2,71178}{1-\lambda}$
		$+\frac{\mu n}{mmee}\frac{1,07285}{1-\lambda}$
		$+\frac{\nu\lambda\lambda}{mee}0,06791$
		$-\frac{\nu\lambda}{2mee}0,06791$
		$-\frac{\mu\lambda\lambda}{mee}2,50464$
		$+\frac{\mu\lambda}{2mee}2,50464$
		$-\frac{(1+\nu)L'}{mme^3}$
		$-\mu\,2,07533$
		$-\mu b\,0,48620$

$l\,cof.$

$l.\,cof.(\omega+s)$	$l\,cof.(2\omega - s)$	$l\,cof.(2\omega+s)$
$+(1+\lambda)^2 M'$	$+(2-\lambda)^2 N'$	$+(2+\lambda)^2 O'$
$+\frac{(4-m)}{2m}(1+\lambda\lambda)A'$	$+\frac{(4-m)}{2m}(4+\lambda\lambda)B'$	$+\frac{(4-m)}{2m}(4+\lambda\lambda)B'$
$+\frac{2n}{m}\lambda A'$	$-\frac{2n}{m}4\lambda B'$	$+\frac{2n}{m}4\lambda B'$
$-\frac{2}{m}\lambda\lambda A$	$-\frac{2}{m}9bC'$	$-\frac{2}{m}bA'$
$-\frac{1}{m}\lambda A$	$-\frac{2}{m}\lambda\lambda B$	$-\frac{2}{m}\lambda\lambda B$
$+\frac{\mu n}{mmee}\frac{1,07285}{1+\lambda}$	$+\frac{1}{m}2\lambda B$	$-\frac{1}{m}2\lambda B$
$+\frac{\nu\lambda\lambda}{mee}0,06791$	$+\frac{1}{m}(1+\lambda)3bC'$	$-\frac{1}{m}(1+\lambda)bA'$
$+\frac{\nu\lambda}{2mee}0,06791$	$-\frac{\mu n b}{mmee}\frac{2,15293}{2-\lambda}$	$+\frac{\mu n b}{mmee}\frac{1,43786}{2+\lambda}$
$-\frac{\mu\lambda\lambda}{mee}2,50464$	$+\frac{\mu n}{mmee}\frac{2,39381}{2-\lambda}$	$+\frac{\mu n}{mmee}\frac{2,39381}{2+\lambda}$
$-\frac{\mu\lambda}{2mee}2,50464$	$+\frac{\nu\lambda\lambda}{mee}0,23399$	$+\frac{\nu\lambda\lambda}{mee}0,23399$
$-\frac{(1+\nu)M'}{mme^3}$	$-\frac{\nu\lambda}{mee}0,23399$	$+\frac{\nu\lambda}{mee}0,23399$
$-\mu b\,0,39631$	$+\frac{\mu\lambda\lambda}{mee}0,23399$	$+\frac{\mu\lambda\lambda}{mee}0,23399$
$-\mu\,2,07533$	$-\frac{\mu\lambda}{mee}0,23399$	$+\frac{\mu\lambda}{mee}0,23399$
	$-\frac{(1+\nu)N'}{mme^3}$	$-\frac{(1+\nu)O'}{mme^3}$
	$-\mu b\,0,43714$	$+\mu b\,0,98596$
	$+\mu\,0,34875$	$+\mu\,0,34875$

Les formules pour les longitudes nous donnent d'abord à connoître, qu'il y a $f = \frac{m+4n}{2m} bbll$, & $g = -\frac{(4-m)}{2m} ll$. Enfuite les termes conftans donnent :

$$\frac{2+\mu}{mmc^3} = \frac{1}{mm} + 0,33672\,\nu - \frac{(2-3m)}{2m} bb(1+\lambda)^2 ll + \frac{(m+4n)}{m^3} bbll$$

$$\frac{1+\nu}{mme^3} = \frac{nn}{mm} - 0,59483\,\mu + \frac{(2-3m)}{2m} \lambda\lambda ll - \frac{(4-m)nn}{m^3} ll$$

Le terme $l\,cof.\,s$ de la feconde équationfournit:

$$\lambda\lambda - \frac{1}{n}(1-\lambda) bA' - \frac{\mu n b}{mmee} \frac{1,43786}{\lambda} + \mu b\, 0,98596 - \mu\, 0,20219 = \frac{nn}{mm} - 0,59483\,\mu$$

car nous favons que la valeur de λ, ne depend point de l'excentricité λ; ce qu'on verroit évidemment, fi l'on n'avoit pas omis dans le coëfficient du terme $l\,cof.\,s$ les parties affectées, par ll.

Or le terme $l\,cof.\,(\omega+s)$ de la premiere équation donne :

$$b(1+\lambda)^2 + \frac{n}{m}(2+\lambda)A + \frac{\nu}{mmce} \frac{0,19592}{1+\lambda} + \nu b 1,65822 - \nu\, 0,98909 = \frac{b}{mm} + 0,33672\, b\nu$$

D'où il eft évident, qu'il y a fort à-peu-près $\lambda = \frac{n}{m}$ & partant nous aurons en pofant $\lambda = \frac{n}{m} + \frac{\xi}{m}$

$$\frac{2n\xi}{mm} - \frac{(m-n)}{mm} bA' - \frac{\mu b}{mce} 1,43786 + \mu b\, 0,98596 + \mu\, 0,39264 = 0$$

$$\frac{2b\xi}{mm} + \frac{n(2m+n)}{mm} A + \frac{\nu}{mce} 0,19592 + \nu b\, 1,32150 - \nu\, 0,98909 = 0$$

& fubftituant les valeurs déja trouvées

$$\frac{2n\xi}{mm} - 0,22603\, b\mu + 0,39264\,\mu = 0$$

$$\frac{2b\xi}{mm} + 1,32150\, b\nu + 0,55683\,\nu = 0$$

d'où l'on tire en éliminant ξ,

$$0,22603\, bb\mu = 0,39264\, b\mu - 0,53199\, b\nu - 0,22416\,\nu$$

& de-là la valeur de b réfulteroit imaginaire en pofant $\mu = \frac{1}{1067}$, & $\nu = \frac{1}{3021}$.

Mais fi l'on change un peu les valeurs de μ & ν, pour rendre les deux racines égales, on trouvera à-peu-près $b = \frac{1}{2}$; d'où il femble qu'on ne fe trompera pas beaucoup en pofant $b = \frac{1}{2}$.

Cependant il eft très-remarquable, qu'il pourroit arriver, que la valeur de b, devint imaginaire, & dans ce cas on feroit bien embarraffé de déterminer le mouvement, car ce feroit une marque qu'au lieu des cofinus des angles, il faudroit introduire dans le calcul des quantités exponentielles, auxquelles fe réduifent comme on fait les cofinus imaginaires.

Or de-là on obtient $\xi = -0,17406\,\mu + 0,10002\, b\mu$, & la valeur de $\lambda = \frac{n+\xi}{m}$, donnant pour l'anomalie de Saturne $s = C + \frac{n+\xi}{m}\omega = \text{Conft.} + \frac{n+\xi}{m}(\eta - \theta)$, &

felon le mouvement moyen $s = C + \frac{n \cdot \xi}{m}(p - q) = C + \left(1 + \frac{\xi}{n}\right) q$. Donc le mouvement moyen de Saturne q eft au mouvement de fon anomalie s, comme 1 à $1 + \frac{\xi}{n}$, & au mouvement de fon aphélie, fuppofé progreffif, comme 1 à $- \frac{\xi}{n}$, c'eft-à-dire comme, 1 à $0,43237\,\mu - 0,24891\,b\mu$, ou comme 3466 à 1. Donc le mouvement moyen de Saturne étant pendant un an $0^s, 12^\circ, 13', 30'' = 44010''$, l'aphélie de Saturne avancera chaque année de $13''$ par rapport aux étoiles fixes, & de $1'\,4''$ par rapport aux équinoxes. M. Cafini fuppofe ce mouvement annuel de $1', 18''$; mais il eft bien clair, qu'il eft impoffible de bien déterminer le mouvement de l'aphélie par les obfervations, tandis que les inégalités du mouvement ne font pas connues.

Ayant trouvé les valeurs des lettres b & λ, on déterminera enfuite les autres coëfficiens $L, M, N, O, L', M', N', O'$, d'où l'on connoîtra les inégalités des diftances x & y, en tant qu'elles dependent de l'excentricité de l'orbite de Saturne. Enfuite on trouvera aifement les inégalités dans la longitude des Planètes, qui dependent de ce même élément.

$$\pi = \text{Prec.} + \frac{l\,\text{fin}\,s}{\lambda} \left\{ \begin{array}{l} - \frac{2}{m} E - \frac{(m+4n)}{mm} bA + \frac{2n}{mm} b A' \\ - \frac{\nu b}{2mcc} \frac{0,53644\,\mu}{\lambda} + \frac{\nu(1+n)b}{mmcc} 0,06791 \\ - \frac{\mu b}{mmcc} 2,50464 \end{array} \right\}$$

$+ l\,\text{fin}$

$$+ \frac{l\,\text{fin.}(\omega - s)}{1 - \lambda} \left\{ \begin{array}{l} - \frac{2}{m} L - \frac{(m+4n)}{mm} bB + \frac{2n}{mm} bB' + \frac{2n}{mm} A \\ + \frac{\nu b}{2mcc} \frac{2,71178}{1-\lambda} + \frac{\nu}{2mcc} \frac{0,19592}{1-\lambda} \\ + \frac{r(1+n)b}{mmcc} 0,23399 - \frac{\nu n}{mmcc} 0,06791 \\ + \frac{\mu b}{mmcc} 0,23399 \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{l\,\text{fin.}(\omega + s)}{1 + \lambda} \left\{ \begin{array}{l} - \frac{2}{m} b + \frac{2n}{mm} A + \frac{\nu}{2mcc} \frac{0,19592}{1+\lambda} \\ - \frac{\nu n}{mmcc} 0,06791 \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{l\,\text{fin.}(2\omega - s)}{2 - \lambda} \left\{ \begin{array}{l} - \frac{2}{m} N - \frac{(m+4n)}{mm} bC + \frac{2n}{mm} b C' \\ + \frac{2n}{mm} B + \frac{\nu b}{2mcc} \frac{2,15293}{2-\lambda} - \frac{\nu}{2mcc} \frac{2,39381}{2-\lambda} \\ + \frac{\nu(1+n)b}{mmcc} 0,10614 - \frac{\nu n}{mmcc} 0,23399 \\ + \frac{\mu b}{mmcc} 0,10614 \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{l\,\text{fin.}(2\omega + s)}{2 - \lambda} \left\{ \begin{array}{l} - \frac{2}{m} O - \frac{(m+4n)}{mm} bA + \frac{2n}{mm} b A' \\ + \frac{2n}{mm} B + \frac{\nu b}{2mcc} \frac{0,53644}{2+\lambda} - \frac{\nu}{2mcc} \frac{2,39381}{2+\lambda} \\ + \frac{\nu(1+n)b}{mmcc} 0,06791 - \frac{\nu n}{mmcc} 0,23399 \\ - \frac{\mu b}{mmcc} 2,50464 \end{array} \right\}$$

$$\phi = \text{Prec.} + \frac{l\,\text{fin.}\,s}{\lambda} \left\{ \begin{array}{l} - \frac{2n}{m} - \frac{2n}{mm} bA' - \frac{\mu b}{2mcc} \frac{1,43786}{\lambda} \\ + \frac{\mu b}{mmcc} 2,50464 \end{array} \right\}$$

$$+\frac{l\,\sin.(\omega+s)}{1-\lambda}\left\{\begin{array}{l} -\frac{2n}{m}L' + \frac{(4-m)n}{mm}A' - \frac{2n}{mm}bB' \\ -\frac{2n}{mm}A - \frac{\mu b}{2mee}\frac{2,71178}{1-\lambda} + \frac{\mu}{2mee}\frac{1,07285}{1-\lambda} \\ -\frac{\mu(1+n)}{mmee}2,50464 - \frac{\mu b}{mmee}0,23399 \\ +\frac{\nu n}{mmcc}0,06791 \end{array}\right\}$$

$$+\frac{l\,\sin.(\omega+s)}{1+\lambda}\left\{\begin{array}{l} -\frac{2n}{m}M' + \frac{(4-m)n}{mm}A' - \frac{2n}{mm}A \\ +\frac{\mu}{2mee}\frac{1,07285}{1+\lambda} - \frac{\mu(1+n)}{mmee}2,50464 \\ +\frac{\nu n}{mmcc}0,06791 \end{array}\right\}$$

$$+\frac{l\,\sin.(2\omega-s)}{2-\lambda}\left\{\begin{array}{l} -\frac{2n}{m}N' + \frac{(4-m)n}{mm}B' - \frac{2n}{mm}bC' \\ -\frac{2n}{mm}B - \frac{\mu b}{2mee}\frac{2,15293}{2-\lambda} + \frac{\mu}{2mee}\frac{2,39381}{2-\lambda} \\ +\frac{\mu(1+n)}{mmee}0,23399 - \frac{\mu b}{mmee}0,10614 \\ +\frac{\nu n}{mmcc}0,23399 \end{array}\right\}$$

$$+\frac{l\,\sin.(2\omega+s)}{2+\lambda}\left\{\begin{array}{l} -\frac{2n}{m}O' + \frac{(4-m)n}{mm}B' - \frac{2n}{mm}bA'. \\ -\frac{2n}{mm}B + \frac{\mu b}{2mee}\frac{1,43786}{2+\lambda} + \frac{\mu}{2mee}\frac{2,39381}{2+\lambda} \\ +\frac{\mu(1+n)}{mmee}0,23399 + \frac{\mu b}{mmee}2,50464 \\ +\frac{\nu n}{mmcc}0,23399 \end{array}\right\}$$

§. VII.

Recherche des inégalités de Jupiter & de Saturne, qui dépendent de l'une & de l'autre excentricité à la fois.

QUOIQUE le nombre des inégalités qui dépendent des quantités k & l à la fois soit infini, il eſt pourtant aiſé de voir, qu'il n'y a que l'angle $\omega - r + s$, qui fourniſſe des inégalités de quelque conſéquence, toutes les autres devenant pour ainſi dire infiniment petites; à l'égard de cet angle puiſque le rapport de ſa différentielle, ou $1 - \varkappa + \lambda$, devient preſque égal à zero, les coëfficiens des termes qui en réſultent pour les longitudes η & θ, feront extrêmement grands. Car ayant $\varkappa = \frac{1}{m} - 0,39475\,\nu - 0,0362\,\nu\alpha$, & $\lambda = \frac{n}{m} - 0,29135\,\mu + 0,16742\,\mu b$, on aura

$$\varkappa - \lambda = 1 - 0,39475\,\nu - 0,03620\,\nu\alpha + 0,29135\,\mu - 0,16742\,\mu b$$

& partant

$$1 - \varkappa + \lambda = 0,39475\,\nu - 0,29135\,\mu + 0,036201\,\alpha + 0,16742\,\mu b$$

ou bien l'angle $\omega - r + s = \eta - r - \theta + s$, ſe trouve en ſouſtrayant la longitude de l'aphélie de Saturne de celle de l'aphélie de Jupiter.

On voit auſſi que les inégalités de cet angle ne feront d'aucune conſidération pour les diſtances mêmes,

& qu'il ſera permis par conſéquent de négliger dans leur recherche les termes qui ſont affectés par μ ou ν. Je poſe donc pour trouver ces inégalités

$$u = \text{prec.} + k\,cof.\,r + b\,l\,cof.(\omega + s) + P\,k\,l\,cof.(\omega - r + s)$$
$$v = \text{prec.} + l\,cof.\,s + \alpha\,k\,cof.(\omega - r) + P'\,k\,l\,cof.(\omega - r + s)$$

& les équations *differentio*-différentielles donneront

$$P = -\frac{m(4-3m)}{2}\,b\,(\varkappa\varkappa + (1+\lambda)^2) + 2\,m\,b\,\varkappa\,(1+\lambda)$$
$$= -\frac{2+3m}{m}\,b$$
$$P' = \frac{m(4-m)}{2nn}\,\alpha(\lambda\lambda + (1-\varkappa)^2) + \frac{2m}{n}\,\alpha\,\lambda\,(1-\varkappa)$$
$$= \frac{2+m}{m}\,\alpha$$

Ces valeurs étant ſubſtituées dans les formules pour les longitudes produiront :

$$\eta = \text{Prec.} - \frac{3\,b\,k\,l\,fin.(\omega - r + s)}{m(1-\varkappa+\lambda)}$$
$$\theta = \text{Prec.} - \frac{3\,n\,\alpha\,k\,l\,fin.(\omega - r + s)}{m(1-\varkappa+\lambda)}$$

Donc ſi nous poſons $\mu = \frac{1}{1067}$, $\nu = \frac{1}{3021}$, $\alpha = \frac{5}{4}$ & $b = \frac{1}{2}$ à cauſe de $1 - \varkappa + \lambda = -0,0000488$, ces deux inégalités deviendront à-peu-près égales, ſavoir :

$$\eta = \text{Prec.} + 51450.\,k\,l\,fin.(\omega - r + s)$$
$$\theta = \text{Prec.} + 51780\,k\,l\,fin.(\omega - r + s)$$

Quoique ces expreſſions ſoient très-conſidérables, leur effet n'eſt preſque point ſenſible dans le mouvement des Planètes ; car puiſque l'angle $\omega - r + s$, & partant auſſi ſon ſinus, eſt à peu-près conſtant, quelque grandes que ſoient ces valeurs, elles ſe confondront avec la longitude moyenne, & ne troubleront le mouvement, qu'en tant que l'angle $\omega - r + s$ deviendra ſenſiblement variable. Or je parlerai plus amplement de ces changemens dans la ſuite.

§. VIII.

Réflexions ſur les Anomalies de Jupiter & de Saturne.

Les inégalités, que j'ai trouvées en premier lieu, & qu'on pourroit nommer la variation de ces Planètes, puiſqu'elles dependent uniquement de leur diſtance, ou de l'angle ω, ne ſont aſſujetties à aucun doute, & il eſt bien ſûr qu'elles ſe trouvent actuellement tant dans Saturne que dans Jupiter. Mais pour les inégalités, qui dependent de l'excentricité de l'une ou de l'autre orbite, on ſera bien ſurpris, que je vienne de trouver des inégalités auſſi conſidérables, que l'équation du centre-même de ces deux Planètes ; & on ſera peut-être porté à rejetter entiérement mes recherches, puiſqu'elles conduiſent à des inégalités qui pourroient monter à pluſieurs degrès.

Mais j'eſpére, que les réflexions ſuivantes ne leveront pas non-ſeulement ce doute, mais qu'elles nous découvriront la vraie nature des inégalités qui troublent le mouvement de ces deux planètes du côté de leur excentricité ; de ſorte que nous ferons parfaitement éclaircis ſur cet article, qui doit paroître fort bizarre à tous ceux qui travaillent ſur cette matiere

Je dis donc d'abord que les grandes inégalités qui paroissent troubler le mouvement d'une Planète à cause de l'excentricité de l'autre, ne produisent même aucune altération dans le mouvement régulier, selon les regles de Kepler, & que s'il n'y avoit point d'autres inégalités hormis celles ci, le mouvement des deux Planètes seroit parfaitement conforme aux regles de Kepler.

Car en effet ayant vu, que mettant l'excentricité de l'orbite de Jupiter $=k$, & partant sa distance $x=c(1+k\,cos\!f.r)$ en tant qu'elle dépend uniquement de k, la distance de Saturne au Soleil devient $y=e(1+\alpha k\,cos\!f.(\omega-r))$, il est évident que l'orbite de Saturne devient déja fort excentrique quoique je n'aie pas encore introduit dans le calcul sa propre excentricité. De plus, il est remarquable que cette excentricité demeureroit la même, quand même l'action mutuelle des deux Planètes évanouiroit tout à fait, pourvu que les lettres μ & ν conservent entr'elles en évanouissant le même rapport. Or, dans ce cas, il est clair que Saturne suivroit exactement les regles de Kepler, il décriroit donc une ellipse, dont l'excentricité seroit $=\alpha\,k$, & l'anomalie $=\omega-r$. ou bien son aphélie conviendroit avec celui de l'orbite de Jupiter. Ainsi, aussi-tôt que nous supposons excentrique l'orbite de Jupiter, le calcul nous marque celle de Saturne aussi excentrique, dont l'excentricité tient un rapport constant à celle de Jupiter, savoir comme α à 1; & qui se rapporte au même aphélie, & l'une & l'autre Planète suivroit les regles de Kepler, à moins que leur mouvement ne soit dérangé par les autres inégalités.

Or nonobstant cela Saturne peut avoir une excentricité propre, & un aphélie particulier; & alors ces deux excentricités se réunissent dans une seule, selon laquelle il décrira une ellipse conformement aux re-

gles de Kepler, comme je ferai voir bien-tôt. Et partant l'aphélie & l'excentricité que les tables marquent pour l'orbite de Saturne ne sont pas son propre aphélie & son excentricité, mais plutôt le resultat des deux excentricités de celle qui lui est propre, & de celle qui lui convient à cause de l'excentricité de l'orbite de Jupiter.

Le mouvement de Saturne se regle donc sur deux aphélies à la fois savoir sur celui de Jupiter, & sur le sien; en conséquence il y aura aussi deux anomalies, l'une qui regarde l'aphélie de Jupiter, & l'autre qui regarde l'aphélie de Saturne. Donc si nous nommons la longitude de l'aphélie de Jupiter $=\rho$, & la longitude de l'aphélie de Saturne $=\sigma$, le mouvement de Saturne en tant qu'il depend de cette double anomalie sa longitude étant $=\theta$, sera déterminé par cette distance:

$$y=e(1+l\,cos\!f.(\theta-\sigma)+\alpha k\,cos\!f.(\theta-\rho))$$

Pareillement le mouvement de Jupiter dependra d'une double anomalie, lequel sera déterminé par cette expression de sa distance au Soleil.

$$x=c(1+k\,cos\!f.(\eta-\rho)+b\,l\,cos\!f.(\eta-\sigma))$$

Or je dis que cette double anomalie produira le même effet, que si chaque Planète, selon les regles de Kepler, n'étoit assujettie qu'à une seule anomalie, qui sera celle qu'on découvre par les observations, & que je nommerai son anomalie apparente.

Soit donc R la longitude de l'aphélie apparent de Jupiter, & K son excentricité apparente, soit de plus S la longitude de l'aphélie apparent de Saturne, & L son excentricité, ce sont les élémens, que les observations nous donnent immédiatement à connoître: &

je dis qu'on peut toujours déterminer ces élémens apparens R, K, S & L, de maniere qu'on ait :

$$k\,cos.(\eta-\rho)+b\,l\,cos.(\eta-\sigma)=K\,cos.(\eta-R)$$
$$l\,cos.(\theta-\sigma)+\alpha\,k\,cos.(\theta-\rho)=L\,cos.(\theta-S)$$

& qu'on ait autre cela:

$$k\,sin.(\eta-\rho)+b\,l\,sin.(\eta-\sigma)=K\,sin.(\eta-R)$$
$$l\,sin.(\theta-\sigma)+\alpha\,k\,sin.(\theta-\rho)=L\,sin.(\theta-S)$$

Car quand j'aurai prouvé cela, il sera évident qu'on peut substituer cette anomalie apparente au lieu des deux anomalies auxquelles j'ai été conduit par la théorie, & partant on conviendra que les inégalités de cette espece, que la théorie a fournies, ne troublent rien dans le mouvement régulier des Planètes, selon les regles de Kepler.

Or pour satisfaire aux égalités proposées, en éliminant les longitudes η & θ, on obtiendra.

$$k\,cos.\rho+b\,l\,cos.\sigma=K\,cos.R$$
$$l\,cos.\sigma+\alpha k\,cos.\rho=L\,cos.S$$
$$k\,sin.\rho+b\,l\,sin.\sigma=K\,sin.R$$
$$l\,sin.\sigma+\alpha k\,sin.\rho=L\,sin.S$$

d'où l'on tire:

$$KK=kk+bbll+2\,bkl\,cos.(\rho-\sigma)$$
$$LL=ll+\alpha\alpha kk+2\,\alpha kl\,cos.(\rho-\sigma)$$

& $\text{tang.}\,R=\frac{k\,sin.\rho+b\,l\,sin.\sigma}{k\,cos.\rho+b\,l\,cos.\sigma}$; $\text{tang.}\,S=\frac{l\,sin.\sigma+\alpha\,k\,sin.\rho}{l\,cos.\sigma+\alpha\,k\,cos.\rho}$

Donc si les deux anomalies réelles de chaque Planète étoient connues, on trouveroit par le moyen de ces formules l'anomalie apparente de chacune, de même que le lieu apparent de l'une & de l'autre aphélie. Mais

Mais puisque nous connoissons par les observations les élémens apparens K, L, R & S, nous devons plutôt chercher les élémens vrays k, l, ρ & σ, pour nous mettre en état d'en déterminer ensuite les inégalités, dont le mouvement de deux Planètes se trouve dérangé. Pour cet effet je tire de nos formules les égalités suivantes.

$$(\alpha b-1)\,k\,cos.\rho=b\,L\,cos.S-K\,cos.R$$
$$(\alpha b-1)\,l\,cos.\sigma=\alpha K\,cos.R-L\,cos.S$$
$$(\alpha b-1)\,k\,sin.\rho=b\,L\,sin.S-K\,sin.R$$
$$(\alpha b-1)\,l\,sin.\sigma=\alpha K\,sin.R-L\,sin.S.$$

d'où l'on déduit aisément.

$$(\alpha b-1)^2\,kk=bbLL+KK-2\,bKL\,cos.(R-S)$$
$$(\alpha b-1)^2\,ll=\alpha\alpha KK+LL-2\,\alpha KL\,cos.(R-S)$$

$$\text{tang.}\,\rho=\frac{b\,L\,sin.S-K\,sin.R}{b\,L\,cos.S-K\,cos.R}\;\text{tang.}\,\sigma=\frac{\alpha K\,sin.R-L\,sin.S}{\alpha K\,cos.R-L\,cos.S}$$

Or les Tables Astronomiques de M. Cassini marquent pour l'époque de 1700, le lieu de l'aphélie.

$$\begin{cases}\text{de Jupiter } R = 6^s\ 9^\circ\ 26'\ 42'' \\ \text{de Saturne } S = 8\ \ 28\ \ 8\ \ 39.\end{cases}$$

& de-là on tire:

$\text{tang.}\,K=8,6832165$; $\text{tang.}\,L=8,7559031.$

Posant donc comme j'ai trouvé $\alpha=\frac{5}{4}$, & $b=\frac{1}{2}$; on obtiendra:

$\rho=5^s\ 6^\circ\ 12'$ & $\sigma=10^s\ 20^\circ\ 45'$

& pour les excentricités vrayes on aura:

$k=0,13595$ & $l=0,19840.$

qui font par conféquent beaucoup plus grandes que les excentricités apparentes.

Je ne doute pas, qu'on ne regarde cette double anomalie, comme un grand défaut de ma méthode, & puifque ces deux anomalies fe peuvent réduire à une feule, on penfera qu'une méthode, qui n'eut donne que cette feule anomalie auroit été préférable; mais outre qu'il eft abfolument néceffaire, qu'on parvienne à une double anomalie, fi l'on veut fuivre exactement les principes de la mécanique, on verra d'abord que cette double anomalie nous fournit des éclairciffemens, qui ne feroient pas compatibles avec une feule anomalie. Car premierement, puifque les deux aphélies n'avancent pas également, l'angle $\rho - \sigma$ fera variable, & partant les excentricités apparentes K & L changeront continuellement, d'où il refulte une variation perpétuelle dans l'équation elliptique des deux Planètes.

Le mouvement annuel de l'aphélie de Jupiter ayant été trouvé de $60''$, & celui de Saturne de $64''$ par rapport aux équinoxes, l'angle $\rho - \sigma$ décroît tous les ans de $4''$. Or en, 1700 il étoit $\rho - \sigma = 6^s, 15^\circ, 27'$ donc puifque cet angle décroît chaque année de $4''$, fon cofinus, qui eft négatif croîtra, ou le terme $cof.(\rho - \sigma)$ à fouftraire dans les formules trouvées pour KK & LL deviendra plus grand. Par conféquent les excentricités apparentes tant de Jupiter que de Saturne vont en décroiffant, & partant auffi leurs équations du centre.

Cette diminution de l'excentricité ayant été mife hors de doute dans la piece, qui à remporté le prix fur cette queftion, à l'égard de Saturne, je crois, que je me puis difpenfer de démontrer plus amplement

ce merveilleux accord de la Théorie de Newton avec l'expérience.

Mais la diminuation de l'excentricité, qui découle de ma Théorie eft auffi fort bien d'accord avec celle, que M. Euler a conclue uniquement des obfervations, car la méthode qu'il a fuivie n'étoit pas capable de lui découvrir les changemens de l'excentricité. Pour faire voir ce bel accord, que $d\rho$ & $d\sigma$ marquent les accroiffemens annuels de la longitude des aphélies, & dK & dL les accroiffemens des excentricités apparentes K & L; & nous aurons en différentiant:

$$dK = -\frac{bkl(d\rho - d\sigma)\,fin.(\rho - \sigma)}{K}$$

$$dL = -\frac{akl(d\rho - d\sigma)\,fin.(\rho - \sigma)}{L}$$

d'où pofant $d\rho - d\sigma = -4''$, il s'enfuit

$$dK = -0,14886.\,4b'' \quad \& \, dL = -0,12592.\,4a''$$

Or, la plus grande équation elliptique de l'une & de l'autre orbite étant à-peu-près $2K$ & $2L$, on aura la diminution annuelle de la plus grande équation elliptique. Pofant $a = \frac{5}{4}$, & $b = \frac{1}{2}$.

de Jupiter	de Saturne
$= 0,592''$	$= 1,258''$

Donc la plus grande équation de Jupiter décroit tous les ans de $35'''$, & celle de Saturne de $1'', 15'''$, or au lieu de celle-ci, M. Euler a trouvé $1''\ 5'''$, ou $11''$ en 10 ans. Or on conviendra aifement, qu'il eft abfolument impoffible d'éviter une erreur de $10'''$ tant dans la théorie, que dans la pratique.

On remarquera de plus, que cette diminution n'eſt pas conſtante, puiſqu'elle eſt proportionelle au ſinus de l'angle $\rho - \sigma$, & parce que cet angle devient inſenſiblement plus petit, la diminution mentionnée va en décroiſſant. Mais puiſque le changement de l'angle $\rho - \sigma$ ne monte à un degré, que dans l'eſpace de 900 ans, on peut, ſans aucune erreur ſenſible, regarder cette diminution comme uniforme.

Par la même méthode on pourra auſſi déterminer le mouvement annuel de l'aphélie apparent tant de Jupiter que de Saturne; car marquant ce mouvement annuel par les différentielles $d\,R$ & $d\,S$, on aura par la différentiation.

$$d\,R = \frac{kk\,d\rho + bbll\,d\sigma + bkl(d\rho + d\sigma)\,cof.(\rho - \sigma)}{KK}$$

$$d\,S = \frac{ll\,d\sigma + \alpha\alpha kk\,d\rho + \alpha kl(d\rho + d\sigma)\,cof.(\rho - \sigma)}{LL}$$

& ces formules ſe changent dans celles-ci:

$$d\,R = \tfrac{1}{2}(d\rho + d\sigma) - \tfrac{1}{2}(d\sigma - d\rho)\,\frac{kk - bbll}{KK}$$
$$= 62'' - 7,4736''$$

$$d\,S = \tfrac{1}{2}(d\rho + d\sigma) + \tfrac{1}{2}(d\sigma - d\rho)\,\frac{ll - \alpha\alpha kk}{LL}$$
$$= 62 + 6,4522''$$

Donc l'aphélie de Jupiter avancera chaque année de 55'' & celui de Saturne avancera chaque année de 68'' ce qui approche déja d'avantage du mouvement marqué dans les Tables Aſtronomiques de M. Caſſini.

§. IX.

§. IX.

Du tems périodique des Planètes de Jupiter & de Saturne, & de leurs diſtances moyennes au Soleil.

Les grands termes, que j'ai trouvés dans l'article VII, qui dépendent de l'angle $\omega - r + s$, ſe réduiſent à l'angle $\rho - \sigma$, poſant ρ pour la longitude de l'aphélie de Jupiter, & σ pour celle de l'aphélie de Saturne, où il faut entendre les aphélies vrais, & non pas les apparens. Donc les longitudes vraies de Jupiter & de Saturne η & θ renfermeront ces termes dépendans de l'angle $\rho - \sigma$.

$$\eta = \text{Prec.} + 51450\,kl\,fin.\,(\rho - \sigma)$$
$$\theta = \text{Prec.} + 51780\,kl\,fin.\,(\rho - \sigma)$$

où l'on voit d'abord que la valeur de ces termes, réduite en degré, deviendroit horriblement grande.

Mais quelque grande que ſoit cette valeur, il eſt certain que ſi l'angle $\rho - \sigma$ demeuroit conſtant, il n'en réſulteroit aucun dérangement dans le mouvement des Planètes, puiſque la valeur de ces termes ſeroit détruite par l'addition des quantités conſtantes, que l'intégration des formules $d\,\eta - d\,p$, & $d\,\theta - d\,q$ exige.

Ces termes n'entrent donc en conſidération, qu'entant que l'angle $\rho - \sigma$ eſt variable. Or nous venons de voir que cet angle décroît chaque année de 4''; donc ſi la valeur de ces termes à été détruite en 1700 par l'addition des constantes, on aura pour l'année suivante 1701, à cause de $\rho - \sigma = 6^s,\ 15'',\ 27'$

$$\left.\begin{array}{l} \eta = \text{Prec.} - 4''.51450\,k\,l\,cos.(\rho-\sigma) \\ \theta = \text{Prec.} - 4''.51780\,k\,l\,cos.(\rho-\sigma) \end{array}\right\} = \text{Prec.} + 5355''.$$

Et partant si la même quantité accroissoit après chaque année, après un espace de n années depuis l'époque 1700, la longitude des Planètes devroit être avancée de 5355 n secondes. Or cette quantité ne troubleroit pas non plus le mouvement régulier des Planètes, puisqu'elle ne fait que diminuer d'une quantité constante leurs tems périodiques, qui étant une fois bien établis par les observations, ce terme n'y apporteroit plus de changement.

Mais puisque cet accroissement annuel de 5355'' ne demeure pas toujours le même, vu qu'il depend de l'angle $\rho - \sigma$, on voit qu'après un grand nombre d'années, il doit souffrir un changement considérable. En effet on trouvera qu'après neuf siécles où l'angle $\rho - \sigma$ sera diminué d'un degré, cet accroissement annuel devient $= 5355'' + 25''$; ou l'accroissement depuis l'année 2600 jusqu'à l'année 2601 sera de 5380''. Donc après un intervalle de n ans depuis l'époque 1700 l'accroissement de la longitude ne sera plus $= 5355\,n''$, mais on le trouvera $= 5355\,n'' + \frac{1}{70}\,n\,n''$, & encore plus exactement $= 5355\,n'' + \frac{1000\,n\,n''}{96803} - \frac{n^3\,''}{2989900}$.

Or comme le premier terme ne fait que diminuer les tems périodiques d'une quantité constante, si nous supposons que le mouvement moyen des deux Planètes ait été bien réglé pour l'année 1700, les longitudes moyennes qu'on en tire pour tout autre tems ne

seront plus justes, mais à l'année $1700 + n$, il faudra ajouter à la longitude moyenne $\frac{1000\,n\,n}{69803} - \frac{n^3}{2989900}$ secondes, & cette correction sera la même pour Jupiter & Saturne.

Correction des longitudes moyennes de Jupiter & de Saturne, calculée sur le mouvement moyen de l'année 1700.

L'an	ajoutez.	L'an	ajoutez.	Avant l'Ere Chr. L'an	ajoutez.
1700	0' 0	1700	0° 0' 0'	0	11° 57' 16''
1710	0 1	1600	0 2 24	100	13 25 56
1720	0 6	1500	0 9 36	200	14 59 58
1730	0 13	1400	0 21 38	300	16 39 25
1740	0 23	1300	0 38 33	400	18 24 19
1750	0 36	1200	1 0 23	500	20 14 41
1760	0 52	1100	1 27 9	600	22 10 33
1770	1 10	1000	1 58 53	700	24 11 58
1780	1 32	900	2 35 38	800	26 18 58
1790	1 56	800	3 17 26	900	28 31 34
1800	2 23	700	4 6 18	1000	30 49 48
1810	2 53	600	4 56 36	1100	33 13 43
1820	3 26	500	5 53 23	1200	35 43 21
1830	4 2	400	6 55 41	1300	38 18 43
1840	4 41	300	8 3 11	1400	40 59 51
1850	5 23	200	9 15 55	1500	43 46 48
1860	6 8	100	10 33 56	1600	46 39 35
1870	6 56	0	11 57 16	1700	49 38 15

Nous voyons donc que le mouvement moyen de deux Planètes devient continuellement plus rapide, ou que leurs tems périodiques diminuent, & que cela est l'effet de l'action mutuelle de ces deux Planètes.

Mais puiſque cet effet dépend de l'angle $\rho - \sigma$, on comprend qu'il pourroit être tout contraire, & qu'il le ſera effectivement après environ 150 ſiécles. Par conſéquent il faut bien diſtinguer cette diminution des tems périodiques, de celle qui pourroit être cauſée par la réſiſtance de l'ether, s'il y en a une.

On remarquera auſſi, que pour bien connoître le mouvement moyen de ces deux planètes par les obſervations, la méthode ordinaire, où l'on compare les obſervations de notre tems avec les plus anciennes, n'eſt pas ſûre, puiſqu'elle ne nous decouvre ni le mouvement moyen, qui ſubſiſte à préſent, ni celui qui a ſubſiſté au tems des anciennes obſervations, mais plutôt un certain milieu.

Mais par le moyen de la table que je viens de donner, on peut profiter de toutes les obſervations pour en conclure le vrai mouvement moyen pour un tems propoſé. Car ſi l'on veut comparer une obſervation faite l'an 100 avec une de l'an 1700, il faut retrancher 10° 33′ 56″ de la longitude obſervée en 100, & alors la comparaiſon de ce lieu corrigé avec le lieu obſervé en 1700, nous donnera le mouvement moyen pour l'année 1700.

C'eſt ſans doute la raiſon pourquoi les Aſtronomes ſont ſi peu d'accord ſur le mouvement moyen de ces deux Planètes. Car ſi l'on compare le mouvement moyen ſéculaire des Tables de M. Caſſini avec celui des Tables angloiſes publiées par Leadbetter, on aura

	de Jupiter	de Saturne
Caſſini	5ˢ, 6°, 21′, 30″	4ˢ, 23°, 29′, 28″
Leadbetter	5, 6, 28, 11,	4, 23, 6, 0.

II

Il en eſt de même de l'excentricité apparente de ces deux Planètes; car puiſqu'elle eſt variable, comme j'ai fait voir, il n'eſt pas ſurprenant, que les tables aſtronomiques ne ſoient pas d'accord ſur cet article.

Or puiſque le tems périodique de nos deux Planètes eſt variable, leurs diſtances moyennes au Soleil le ſeront auſſi, ce qui vaudra la peine examiné plus ſoigneuſement. Or conſidérant l'angle $\omega - r + s$, ou $\rho - \sigma$ comme conſtant, nous aurons

$$f = \frac{4-3m}{2m}(kk + bbll) + 3\,bkl\,cof.(\rho - \sigma)$$

$$g = -\frac{(4-m)}{2m}(ll + aakk) + 3\,akl\,cof.(\rho - \sigma)$$

& ces valeurs étant ſubſtituées dans les termes conſtans que fourniſſent les équations *differentio*-différentielles, donneront

$$\frac{1+\mu}{c^3} = 1 + 0,12018\,\nu + \frac{3(2-m)}{2m}(kk + bbll)$$
$$+ 6\,bkl\,cof.(\rho - \sigma)$$

$$\frac{1+\nu}{nne^3} = 1 - 1,31005\,\mu - \frac{3(2-m)}{2m}(ll + aakk)$$
$$+ 6\,akl\,cof.(\rho - \sigma)$$

Le terme $cof.(\rho - \sigma)$ étant négatif & devenant après chaque révolution plus grand, il ſemble que les valeurs de $\frac{1+\mu}{c^3}$ & $\frac{1+\nu}{nne^3}$ vont en diminuant, & partant les diſtances moyennes mêmes c & e en augmentant, pendant que les tems périodiques décroiſſent, ce qui ſeroit une abſurdité manifeſte. Or il faut ſe ſouvenir, que j'ai pris l'unité pour marquer la diſtance moyenne d'une orbite planetaire, dont le tems périodique dans la ſimple hypothèſe de Kepler ſeroit égal au vrai tems périodique de Jupiter. Donc puisque ce tems est variable, il est évident que la variabilité du terme $cos. (\rho - \sigma)$ marque plutôt la variabilité de notre unité, que celle des distances c & e. Car posant a au lieu de cette unité, pour marquer la distance moyenne dans l'hipothèse simple de Kepler, qui convient au tems périodique de Jupiter, il faudra écrire au lieu de $\frac{1+\mu}{c^3}$ & $\frac{1+\nu}{nne^3}$ ces formes $\frac{(1+\mu)a^3}{c^3}$ & $\frac{(1+\nu)a^3}{nne^3}$ de sorte que la diminution successive causée par le terme $cos. (\rho - \sigma)$, nous marquera la diminution de la quantité a; ce qui est très-conforme à la théorie.

Mais il est à remarquer qu'il n'est pas permis d'introduire dans la valeur des quantités constantes f & g le terme $cos. (\rho - \sigma)$, en tant qu'il est variable, puisque sa variabilité doit être plutôt rangée aux termes variables de nos formules. Et la valeur de $cos. (\rho - \sigma)$, pouvant changer de $+1$ à -1, sa valeur moyenne sera $= o$, d'où l'on voit que la lettre a, ou l'unité que j'ai mise à sa place, doit marquer la distance moyenne qui convient dans l'hypothèse de Kepler, au terme périodique de Jupiter lorsque l'angle $\rho - \sigma$ est aux $90°$, ou de $270°$. Mais les lettres c & e marqueront des quantités constantes, comme la nature du calcul l'exige, or les vraies distances x & y, en tant qu'elles dépendent de la variabilité de $\rho - \sigma$, seront

$$x = c\left(1 - \frac{(2-3m)b}{m} k\, l\, cos. (\rho - \sigma)\right)$$

$$y = e\left(1 + \frac{(2+m)}{m} \alpha\, k\, l\, cos. (\rho - \sigma)\right)$$

Maintenant nous sommes en état de déterminer le changement, que les distances des Planètes au Soleil subissent, en tant qu'elles dépendent uniquement de

l'angle $\rho - \sigma$ ou du tems périodique, ou plutôt du mouvement moyen, qui convient, aux Planètes à chaque tems proposé. Or quisque $2 > 3m$, nous voyons que la distance de Jupiter au Soleil va en augmentant, & celle de Saturne en diminuant, quoique le mouvement moyen de l'un & de l'autre s'accélere, ou que leurs tems périodiques deviennent plus petits.

Or; pour ce qui regarde la valeur de notre unité, qui repond au mouvement moyen que Jupiter aura lorsque l'angle $\rho - \sigma$ deviendra $= 90°$, ou $= 270°$, il sera aisé de la trouver par ce que j'ai rapporté au commencement de cet article. Car soit Q le mouvement moyen annuel de Jupiter lorsque $cos. (\rho - \sigma) = o$, & son mouvement annuel moyen sera pour l'année $1700 = Q + 5355''$, qui est, suivant les observations $= 109238''$; d'où il s'ensuit $Q + 103883'' = 28°\ 51'\ 23''$. Donc dans le tems où $cos. (\rho - \sigma) = o$, le mouvement moyen annuel de Jupiter est $28°\ 51'\ 23''$, & c'est conformement au tems périodique qui répond à ce mouvement moyen, qu'il faut déterminer la valeur de notre unité a. Posant donc la distance moyenne de la terre au soleil $= 100000$, puisque la distance moyenne de Jupiter au Soleil est conclue conformément au mouvement moyen qu'il tient à présent $= 520098$, la valeur de notre unité sera $= 520098 \left(\frac{109238}{103883}\right)^{\frac{2}{3}} = 537821$. Ensuite l'excentricité ne changeant rien dans la distance moyenne, ou la moitié du grand axe de l'orbite, si nous prénons c & e pour marquer les demi-grands axes des orbites de Jupiter & de Saturne en tant qu'ils sont altérés par l'action mutuelle des Planètes, nous aurons:

$$c = 537821 \sqrt[3]{\frac{1+\mu}{1+0,120181}}$$

$$e = \frac{517821}{\sqrt[3]{nn}} \sqrt[3]{\frac{1+\nu}{1-1,31005\mu}}$$

Puisque l'angle $\rho - \sigma$ est à présent $6^s\ 15^\circ\ 27'$, & qu'il diminue tous les ans de $4''$, il aura été de 9^s, avant 67100 ans, & alors le mouvement moyen annuel de Jupiter à été $28^\circ\ 51'\ 23''$, & celui de Saturne $10^\circ\ 43'\ 15''$. A présent le mouvement moyen annuel de Jupiter est $30^\circ\ 20'\ 38''$, & celui de Saturne $12^\circ\ 13'\ 30''$. Or après 13900 ans le mouvement moyen annuel de Jupiter sera $30^\circ\ 23'\ 58''$, & de Saturne $12^\circ\ 16'\ 0''$, mais après 94900 ans celui de Jupiter redevient $28^\circ\ 51'\ 23''$, & de Saturne $10^\circ\ 43'\ 15''$; or après 175900 ans le mouvement moyen annuel de Jupiter sera $27^\circ\ 18'\ 48''$, & de Saturne $9^\circ\ 10'\ 50''$; & alors leur mouvement sera le plus lent; après il sera derechef accéléré, & après l'espace de 324000 années il redeviendra le même qu'il est aujourd'hui.

Comme la révolution de ces variations ne s'acheve que dans l'espece de 324000 ans, on comprendra aisément qu'il feroit possible, que ce tems devint infini, ou que les variations allassent toujours ou en croissant, ou en décroissant: & que cette circonstance dépend de la valeur des quantités μ & ν. Dans ce cas il est évident, que les inégalités ne sauroient plus être exprimées par des sinus, ou cosinus des angles, & c'est précisement le cas qu'on rencontre lorsque la valeur de b devient imaginaire, comme j'ai remarqué cidessus.

Puisque la valeur de b est devenue effectivement imaginaire, ayant posé $\mu = \frac{1}{1067}$ & $\nu = \frac{1}{3021}$, & que pour éviter les angles imaginaires, qui se reduiroient à des quantités exponentielles réelles, j'ai changé tant soit peu les valeurs de μ & ν, il s'ensuit que si ces valeurs de μ & ν étoient justes, les variations, que je viens de développer, ne rétourneroient jamais au même état, mais qu'elles iroient à l'infini. Et si ce cas avoit actuellement lieu dans la nature, je dois avouer, que je serois bien éloigné de la résolution de la question proposée, & que je ne vois pas même encore de quelle méthode on devroit se servir pour déterminer toutes les variations, que ces deux Planètes souffriroient dans tous les siécles à venir.

Mais comme il ne s'agit que de leur mouvement qu'elles suivent pendant le cours d'un petit nombre de siécles, je me flatte que ma méthode est parfaitement bonne; car puisque je n'ai changé que fort peu la valeur des lettres μ & ν dans la détermination de b, cette différence ne sauroit produire une erreur sensible dans un espace de quelques siécles, quoique l'erreur, qui en resulteroit pour un tems infini, pût devenir infinie.

Par cette raison je n'ai pas hésité de présenter ma méthode à l'examen de l'illustre Académie Royale, d'autant plus qu'elle m'a conduit à la découverte de cette importante circonstance, par laquelle nous voyons, que ce probleme est beaucoup plus difficile, qu'il n'auroit pû paroître au commencement, & qu'il pourroit même devenir impossible à résoudre par aucun esprit humain, si les orbites de ces deux Planètes étoient plus proches entr'elles, ou que leurs masses fussent plus grandes. Mais dans l'état où ces deux Planètes se trouvent, il me semble que la recherche de leur mouvement est encore en quelque sorte proportionnée aux bornes de nos lumieres, pourvu qu'on ne veuille pas se hazarder d'étendre ces recherches sur un trop grand nombre de siécles.

Il eſt à-peu-près de même de cette queſtion, que de celle ſur les inégalités de la Lune, car quoiqu'on ſoit aſſez heureuſement venu à bout de cette recherche, tous ceux qui ont travaillé ſur cette matiere ſeront obligés d'avouer, qu'il ſeroit poſſible que nous ne fuſſions en état de découvrir preſque rien à l'égard de ſon mouvement. Car ſi la Lune étoit quelque fois plus éloignée de la terre, qu'elle n'eſt actuellement, ou ſi l'excentricité de ſon orbite étoit plus grande qu'elle n'eſt, ou enfin ſi l'inclinaiſon de ſon orbite ſur l'écliptique étoit plus grande, je doute fort, qu'aucun homme eût aſſez de pénétration pour découvrir les inégalités de ſon mouvement. Or on conviendra qu'une telle diſpoſition de la Lune auroit été auſſi bien poſſible, que celle où elle ſe trouve actuellement. Il ſemble donc que le Créateur a voulu tellement arranger ces objets de nos recherches, qu'ils ne ſurpaſſent pas entiérement nos forces, de ſorte que nous en puiſſions approcher de plus en plus, à meſure que nous avançons dans les ſciences, ſans pourtant que nous fuſſions jamais en état de les atteindre parfaitement. C'eſt, à mon avis, par cette raiſon, que les Planètes ne ſe meuvent pas ſelon les regles de Kepler, car alors nous ſerions depuis long tems au bout de nos recherches à l'égard du mouvement des corps céleſtes.

§ X.

Des autres inégalités, qui ſe trouvent dans le mouvement des Planètes de Jupiter & de Saturne.

DE ce que je viens d'expoſer on eſt en état de déterminer le mouvement moyen de ces deux Planètes

pour chaque année, pourvu que ce tems ne ſoit pas trop éloigné de notre ſiécle, ou que l'intervalle du tems ne monte pas à pluſieurs milliers d'années, puiſque alors mes formules ſe pourroient trop écarter de la vérité. En ſecond lieu nous ſommes en état de marquer pour chaque année propoſée le lieu de l'aphélie apparent de l'une & de l'autre Planète, ſachant de combien l'un & l'autre aphélie avance par an, ſavoir celui de Jupiter de 55″, & celui de Saturne de 68″. En troiſieme lieu nous pouvons déterminer pour chaque année propoſée l'excentricité apparente des deux orbites, ayant trouvé que la plus grande équation elliptique de Jupiter décroît par an de 35‴, & celle de Saturne de 1″, 15‴. Donc quand on aura déterminé par les obſervations pour une époque fixe tant les longitudes moyennes de ces deux Planètes que leur mouvement moyen pour ce tems, le lieu de leurs aphélies apparens & leur excentricité, on connoîtra ces mêmes élémens pour tout autre tems, & partant on ſera en état de dreſſer des tables, qui marqueront l'équation elliptique de ces deux Planètes, en ſe ſervant de la ſolution du probleme de Kepler dans ce calcul. Or ces tables calculées tant pour les diſtances des Planètes au Soleil, que pour leurs longitudes, renfermeront déja tous les termes de nos formules trouvées ci-deſſus, qui ne contiennent pas ouvertement les lettres μ & ν, & outre cela encore les termes, qui dépendent des multiples de leurs anomalies, que je n'ai pas même développé dans le calcul pour l'excentricité de Saturne, ayant déja prévu dans le calcul de l'excentricité de Jupiter, que les termes $Akk\,cof.\,2r$, $akk\,cof.\,\omega$, $Kkk(\omega-r)$, $f'kk(2\omega-2r)$, $a'kk\,cof.\,\omega$, $K'kk\,cof.(\omega-2r)$, & ceux qui renfermeroient de plus hautes puiſſances de k ſe réduiſent tous à l'équation elliptique calculée ſur l'excentricité apparente,

& ſur le lieu apparent de l'aphélie, de ſorte qu'il feroit ſuperflu de chercher ſoigneuſement ces termes.

Donc après l'équation elliptique, nous n'aurons à conſidérer que les termes qui dépendent ouvertement de l'une au l'autre des petites quantités μ & ν, qui ſont de deux eſpeces, l'une qui eſt indépendante des excentricités, & qui donne la variation des deux Planètes, & l'autre qui depend outre cela de l'une de ces excentricités. J'ai d'abord au commencement développé les inégalités de la premiere eſpece, mais je le répéterai ici, puiſque le calcul ſuivant y a apporté quelque petite correction. Donc nous aurons pour les diſtances, ayant bien fixé, ſuivant l'article précédent, les diſtances moyennes ϱ & e

$$\frac{x}{\varrho} = 1 + \text{l'éq. ellipt.} + 0{,}43472\,\nu \cos.\omega - 0{,}19440\,\nu \cos.3\omega$$
$$- 1{,}88047\,\nu \cos.2\omega - 0{,}05047\,\nu \cos.4\omega$$

$$\frac{y}{e} = 1 + \text{l'éq. ellipt.} + 0{,}90959\,\mu \cos.\omega + 0{,}03572\,\mu \cos.3\omega$$
$$+ 0{,}15435\,\mu \cos.2\omega + 0{,}01116\,\mu \cos.3\omega$$

où il y aura:

$$\varrho = 537821\left(1 - \frac{(2-3m)b}{m} k\,l \cos.(\rho - \sigma)\right)\sqrt[3]{\frac{1+\mu}{1+0{,}12018\,\nu}}$$

$$e = \frac{537821}{\sqrt[3]{nn}}\left(1 + \frac{(2+m)}{m} a\,k\,l \cos.(\rho - \sigma)\right)\sqrt[3]{\frac{1+\nu}{1-1{,}31005\,\mu}}$$

Or les longitudes ſeront:

$$\eta = p + \text{l'éq. ellipt.} - 1{,}34665\,\nu \sin.\omega + 0{,}27615\,\nu \sin.3\omega$$
$$+ 3{,}34343\,\nu \sin.2\omega + 0{,}06193\,\nu \sin.4\omega$$

$$\theta = q + \text{l'éq. ellipt.} + 0{,}02035\,\mu \sin.\omega - 0{,}03365\,\mu \sin.3\omega$$
$$- 0{,}16222\,\mu \sin.2\omega - 0{,}00990\,\mu \sin.4\omega$$

Par-là

Par-là on aura déja les lieux des Planètes corrigés tant par leur vraye équation elliptique, que par la variation. Mais pour les autres inégalités qui reſtent encore, on aura pour les diſtances:

$$\frac{x}{\varrho} = \text{Prec.} + F\,k \cos.(\omega - r) + G\,k \cos.(\omega + r)$$
$$+ E\,l \cos.s \quad + H\,k \cos.(2\omega - r)$$
$$+ I\,k \cos.(2\omega + r)$$
$$+ L\,l \cos.(\omega - s)$$
$$+ N\,l \cos.(2\omega - s)$$
$$+ O\,l \cos.(2\omega + s)$$

$$\frac{y}{e} = \text{Prec.} + E'k \cos.r \quad + G'k \cos.(\omega + r)$$
$$+ L'l \cos.(\omega - s) + H'k \cos.(2\omega - r)$$
$$+ I'k \cos.(2\omega + r)$$
$$+ M'l \cos.(\omega + s)$$
$$+ N'l \cos.(2\omega - s)$$
$$+ O'l \cos.(2\omega + s)$$

& les valeurs de ces coëfficiens ſe tirent des égalités, que les équations différentielles nous ont fournies précédemment, deſorte que de ce côté il n'y a aucune difficulté.

Or pour les longitudes η & θ, il faut ajouter aux valeurs déja données, premierement les termes trouvés dans l'article V, & enſuite les termes rapportés dans l'article VI, à l'exception des deux membres marqués d'une étoile * pour ces derniers, puiſque ceux-ci ſont déja compris dans l'équation elliptique, deſorte qu'on aura alors toutes les inégalités qui paroiſſent de quelque conſéquence; car il eſt clair que le nombre de toutes les inégalités monte actuellement à l'infini.

Mais pour le calcul de ces coëfficiens, outre que les valeurs des lettres m, n, c, e, $\varkappa$, λ, a & b ſont connues, il faut principalement remarquer que les lettres k & l ne marquent pas les excentricités apparentes, ou celles qu'on conclut immédiatement des obſervations, mais plutôt les excentricités vraies, que j'ai conclues des apparentes, enſorte qu'il ſoit:

$$k = 0,13595, \qquad \& \; l = 0,19840.$$

Enſuite pour les anomalies r & s il ne faut pas prendre non plus celles qui ſe rapportent aux aphélies apparens, mais celles auxqu'elles conduiſſent les lieux des aphélies vrais, que j'ai fixés pour l'epoque 1700, celui de Jupiter à $5^s\ 6^o\ 12'$, & de Saturne à $10^s\ 20^o\ 45'$. Donc puiſque la longitude de l'aphélie apparent de Jupiter pour la même époque eſt $6^s\ 9^o\ 27'$, & de Saturne $8^s\ 28^o\ 9'$, il ſera aiſé de déduire les anomalies véritables r & s, dont il faut ſe ſervir dans ces dernieres inégalités, des anomalies apparentes, qu'on tire des lieux des aphélies apparens, en ſoutraiant la longitude de l'aphélie de celle de la Planète. Car pour Jupiter on aura:

ſon anomalie veritable r = à l'anomalie apparente

$$+ 43^o\ 15'$$

& pour Saturne on aura:

ſon anomalie veritable s = à l'anomalie apparente

$$- 52^o\ 36'$$

D'où l'on voit que les valeurs de ces dernieres inégalités deviendront tout autres, que ſi l'on y employoit les anomalies apparentes. Il n'y a donc aucun doute, que de cette maniere on approchera beaucoup plus de la vérité; puiſqu'on voit par la Piece de M. Euler ſur cette matiere, qu'en ſe ſervant des anomalies apparentes, de quelques maniere qu'on détermine les

coëfficiens des termes pour le calcul de Saturne $\sin. r$, $\sin. (\omega - s)$, $\sin. (\omega + s)$, $\sin. (2\,\omega - s)$, $\sin. (2\,\omega - r)$, $\sin. (2\,\omega + s)$, on ne ſauroit jamais tellement ſatisfaire aux obſervations, que le calcul ne s'en écarte quelquefois de pluſieurs minutes.

Enfin quoique les lettres r & s ne marquent ni les anomalies moyennes, ni les excentriques, ni les vraies, mais une nouvelle eſpece d'anomalies telles, que leurs différentielles $d\,r$ & $d\,s$ ſoient à la différentielle $d\,\omega$ dans un rapport conſtant, on peut pourtant ſans aucune erreur, prendre à volonté pour r & s les anomalies moyennes, ou excentriques, ou vraies, qui réſultent des aphélies vrais. Car quoique ces anomalies puiſſent différer entr'elles de quelques degrés, il n'en reſultera pas dans les inégalités, qui en découlent, une différence ſenſible. Car, quelque ſoit l'anomalie, qu'on voudroit introduire dans le calcul on trouveroit toujours pour ces termes les mêmes coëfficiens; & la différence ne paroîtroit que dans les termes ſuivans, qui contiendroient les doubles ou triples des anomalies r & s. Or puiſque nous avons négligé ces termes à cauſe de leur petiteſſe, il eſt clair, qu'il eſt indifférent, de quelle eſpece d'anomalie on voudra ſe ſervir.

Je crois que j'ennuyerois mes Juges, ſi je voulois calculer en nombres tous ces coëfficiens, vû que le calcul en déviendroit extrêmement long & pénible. Car puiſqu'on eſt à préſent tout à fait convaincu que toutes les inégalités qui ſe peuvent trouver dans le mouvement des corps celeſtes, ſont parfaitement d'accord avec le principe de l'attraction univerſelle établi par le grand Newton, en vertu duquel tous les corps céleſtes s'attirent mutuellement en raiſon directe de leurs maſſes, reciproque du quarré de leurs diſtances; il ne s'agit pas tant à mon avis, de produire des formules, qui satisfassent aux observations, que de découvrir plutôt les inégalités, qui sont conformes à la théorie; & dès qu'on est assuré, qui ces inégalités suivent nécessairement de la théorie, on ne sauroit plus douter de leur accord avec l'expérience. Pour preuve de cela la Lune nousfert d'exemple; l'on sait maintenant, que plus le calcul, qu'on fait sur cette Planète, est conforme à la théorie, plus aussi il satisfait aux phénomenes. Or je me flatte, que la méthode dont je me suis servi dans cette recherche, est tellement naturelle & conforme à la théorie, qu'on ne sauroit douter de la vérité des conséquences, qu'elle m'a fournies, d'autant plus que le mouvement de l'aphélie, & la diminution de l'excentricité apparente, qu'aucune autre méthode ne sauroit même à peine decouvrir, est parfaitement d'accord avec les observations. Cependant je souhaiterois bien comparer mon calcul avec des observations, si j'en pouvois trouver d'assez exactes, & même faites dans un assez long intervalle de tems; mais comme c'est une chose qui m'est impossible, je me vois obligé de borner mes recherches à ce que mes lumieres m'ont permis de conclure de la théorie sur la Question proposée.

Fin du N°. 2. 1752.