REMARQUES
SUR
L'EFFET DU FROTTEMENT
DANS L'ÉQUILIBRE. (*)
PAR M. L. EULER.

1.

Il ſemble d'abord, que le frottement ne regarde en aucune maniere l'état d'équilibre des corps, & que ſon effet eſt néceſſairement attaché au mouvement. Auſſi voyons-nous que les Auteurs, tant qu'ils expliquent les loix de l'équilibre, ne font aucune mention du frottement, & qu'ils n'en tiennent compte que lorſqu'ils traitent du mouvement. Cependant, pour qu'un corps ſoit mis en mouvement, il ne ſuffit pas que les forces dont il eſt ſollicité ne ſoient plus en équilibre, mais il faut que l'excès ſoit capable de vaincre le frottement. Donc un corps demeure en repos ou en équilibre, non ſeulement tant que les forces dont il eſt ſollicité ſe tiennent en équilibre, mais auſſi quand l'équilibre des forces eſt troublé, pourvu que l'excès ne ſoit pas aſſez grand pour vaincre le frottement. D'où il eſt évident, que le frottement influe beaucoup ſur l'équilibre des corps, entant que l'état d'équilibre ne differe pas de l'état de repos; & qu'on dit, qu'un corps ſe trouve en équilibre, tant qu'il demeure en repos.

2. Conſidérons le cas où le poids P repoſe ſur le plan incliné AB, étant retiré ſelon la direction DE parallele au plan par une force ſuffiſante; & l'on prouve, que cette force DE doit être au poids P, com- Planche IX. Fig. 1.

(*) Lu le 16 Mars 1758.

comme la hauteur AC eſt à la longueur AB du plan. S'il n'y avoit point de frottement, ce ſeroit ſans doute l'unique cas de l'équilibre, en ſorte que, ſi la force DE étoit moindre que $\frac{AC}{AB} . P$, le poids P deſcendroit ſur le plan; & ſi elle étoit plus grande, le poids monteroit vers A. Mais, à cauſe du frottement, le poids P demeurera en repos, quoique la force DE ſoit ou plus grande ou plus petite que $\frac{AC}{AB} . P$, pourvu que la différence ſoit plus petite qu'il ne faudroit pour vaincre le frottement. Donc, ſi nous poſons le frottement $= F$, tant que la force DE ſubſiſte entreces deux limites $\frac{AC}{AB} . P + F$ & $\frac{AC}{AB} . P - F$, le poids P demeurera toujours en repos.

3. Or l'expérience nous a donné à connoitre, que le frottement tient toujours un certain rapport à la preſſion du corps contre le plan, qui eſt pour la plûpart comme 1 à 3. Donc, puiſque la preſſion dû poids P ſur le plan incliné eſt $= \frac{BC}{AB} . P$, en prenant pour le dit rapport en général comme λ à 1, on aura le frottement $F = \lambda P . \frac{BC}{AB}$, où il y a à peu près $\lambda = \frac{1}{3}$. Et partant, le poids P demeurera en repos, tant que la force DE ſubſiſte entre ces deux limites $\frac{AC + \lambda . BC}{AB} P$ & $\frac{AC - \lambda . BC}{AB} P$. Le frottement eſt donc cauſe, que l'état d'équilibre admet une grande étendue par rapport à la force DE: d'où l'on peut dire que la force requiſe DE pour maintenir le corps P en équilibre, eſt indéterminée.

4. S'il s'agit ſeulement d'empêcher que le corps P ne gliſſe en bas, il ſuffit d'employer une force DE, qui ne ſoit pas moindre que $\frac{AC - \lambda BC}{AB} P$. Donc, ſi AC eſt égal à $\lambda . BC$, ou moindre, le corps

corps n'a pas besoin de soutien, & il demeurera de soi-même en son lieu: mais, si $AC > \lambda \,.\, BC$, le corps doit être retenu, & s'il étoit attaché en E par le fil DE, ce fil éprouveroit un effort égal à $\frac{AC - \lambda \,.\, BC}{AB} \,.\, P$, qui est la plus petite force capable d'arrêter le corps. Car, quoiqu'une plus grande force l'arrête également, il est naturel que le fil DE ne soutienne que la plus petite; puisque, s'il est assez fort pour résister à cette plus petite force, il n'y a pas à craindre qu'il soit rompu. D'où l'on voit que, s'il faut déterminer la force dont le fil DE est tendu par le poids P, quoique cette question appartienne à la doctrine de l'équilibre, on ne la sauroit résoudre sans avoir égard au frottement.

5. Mais je me propose d'examiner ici un cas plus curieux: je suppose le poids P attaché à une corde, qui soit appliquée autour d'un corps fixe ALMNB d'une figure quelconque, où il s'agit de déterminer la force dont l'autre bout de la corde BD doit être tiré, afin que le poids P soit maintenu en repos. Or d'abord, s'il n'y avoit point de frottement, & que la corde pût librement glisser autour du corps ALMNB, il est évident que la force dont on doit tirer le bout de la corde BD, devroit être égale au poids P, de sorte que, si cette force étoit moindre, le poids P descendroit en bas, & si elle étoit plus grande, le poids en seroit élevé. Mais le frottement changera la question; & pour empêcher que le corps P ne descende, une plus petite force à appliquer en D suffira; or il faudra y en appliquer une plus grande qu'au cas précédent, quand on veut faire monter le poids P. Toute autre force contenue entre ces deux limites, maintiendra le poids en repos. Fig. 2.

6. Pour connoitre ces limites, cherchons la plus petite force à appliquer en D, qui puisse encore arrêter le poids P en repos, de sorte que, si elle étoit tant soit peu plus petite, le poids P descendroit actuellement. Il faut donc que cette force soit égale à l'excès du poids P sur tous les obstacles du frottement, qui s'opposeroient à la descente

actuelle du poids. Or le frottement dépend en chaque point M, où la corde eſt appliquée au corps fixe, de la preſſion dont la corde y eſt apprimée, en ſorte que, ſi la preſſion en M étoit $= \Pi$, le frottement y ſeroit équivalent à une force $= \lambda \Pi$, dont la corde ſeroit tirée en arriere vers N ſelon ſa propre direction. Mais on ne ſauroit déterminer la preſſion ſans ſuppoſer connues toutes ces forces du frottement; & partant tout revient à la ſolution de ce probleme, que je m'en vais développer.

Fig. 3. 7. Partageons toute la corde en élémens infiniment petits & égaux entr'eux, dont deux quelconques ſoient mM & $M\mu$, qu'on nomme $mM = M\mu = ds$. Soit la preſſion en M, où je conſidere comme réunie toute la force dont l'élément mM eſt apprimé, $= Rds$; & le frottement cauſé par cet élément ſera $= \lambda Rds$, qu'il faut conſidérer comme une force appliquée en M ſuivant la direction $M\mu$, oppoſée à Mm, puiſqu'on peut négliger l'angle que ces deux élémens font enſemble. Cette force diminuera la tenſion de la corde, de ſorte qu'en poſant la tenſion de l'élément $Mm = T$, celle de l'élément $M\mu$ ſera $= T - \lambda Rds$; or celle-ci étant $= T + dT$, nous aurons $dT = -\lambda Rds$, & partant $T = \text{Conſt.} - \lambda \int Rds$. Pour définir cette conſtante, on n'a qu'à conſidérer, qu'au commencement en A, où l'intégrale $\int Rds$ évanouit, la tenſion doit être égale au poids P, d'où l'on obtient cette valeur déterminée $T = P - \lambda \int Rds$.

8. Concevons en M appliquée une force Mr, égale & oppoſée à la preſſion de l'élément Mm, de ſorte que cette force ſoit $Mr = Rds$, & il faut qu'elle ſoit en équilibre avec les autres forces qui agiſſent ſur le point M. Or, à cauſe de la tenſion, le point M eſt tiré ſelon Mm par la force $= T$, & ſelon $M\mu$ par la force $T + dT - \lambda Rds = T$. Ces deux forces étant donc égales, & la force Mr perpendiculaire, ſi nous poſons le rayon de courbure en $M = r$, l'équilibre exige cette proportion: $Rds : T = ds : r$, de ſorte que $T = Rr$. Or nous venons de trouver $T = P - \lambda \int Rds$, d'où nous tirons par la différentiation $Rdr + rdR = -\lambda Rds$, & de

là

là $\frac{dR}{R} = -\frac{dr}{r} - \frac{\lambda ds}{r}$: donc $lR = C - lr - \lambda \int \frac{ds}{r}$. Soit e le nombre, dont le logarithme eſt $= 1$, pour avoir $Rr = T = e^{C - \lambda \int ds : r} = Pe^{-\lambda \int ds : r}$ en déterminant la conſtante de telle ſorte, que la tenſion en A devienne égale au poids P.

9. Ici il faut remarquer que $\int \frac{ds}{r}$ exprime l'amplitude de l'arc AM, ou bien l'angle MRA, que fait la perpendiculaire MR à la corde en M avec la droite AR, qui eſt perpendiculaire au commencement A de la corde. Poſons donc cet angle ARM $= \Phi$, qu'il faut exprimer par l'arc d'un cercle, dont le rayon eſt $= 1$, qui en eſt la meſure: & la tenſion de la corde en M ſera $= Pe^{-\lambda\phi}$; la preſſion y étant $= Pd\Phi e^{-\lambda\phi} = Rds = T\frac{ds}{r}$. Par conſéquent, ſi nous nommons l'amplitude de la corde entiere ALMNB $= \gamma$, la tenſion à l'autre bout B ſera $= Pe^{-\lambda\gamma}$, & une telle force appliquée en D ſera ſuffiſante pour maintenir le poids P en équilibre; en ſorte que, ſi cette force étoit moindre, le corps P deſcendroit actuellement. Cependant une force plus grande appliquée en D ne fera que maintenir le poids P en repos, juſqu'à ce qu'elle ſurpaſſe la quantité $Pe^{\lambda\gamma}$, où elle fera monter le poids P; donc le poids P demeurera en repos, tant que la force appliquée en D eſt entre les limites $Pe^{-\lambda\gamma}$ & $Pe^{\lambda\gamma}$. Fig. 1.

10. De là on voit que la figure du corps ALMNB n'entre en conſidération, que par ſon amplitude, ou l'angle que font entr'elles les perpendiculaires AC & BC, tirées aux extrémités A & B. Donc, ſi les deux bouts de la corde en A & B deviennent paralleles, la corde faiſant un demi-tour ſur le corps fixe, quelle que ſoit ſa figure, de ſorte qu'au lieu de la force appliquée en D, on puiſſe concevoir un poids Q, ces deux poids pourront être en équilibre, quoiqu'ils ſoient inégaux entr'eux. Puiſque l'amplitude dans ce cas eſt de 180°, dont Fig. 4.

la mesure est la demi-circonférence d'un cercle π, le rayon étant $= 1$, l'équilibre aura lieu, tant que le poids Q n'est pas ou plus petit que $P e^{-\lambda\pi}$, ou plus grand que $P e^{\lambda\pi}$. Si nous supposons $\lambda = \frac{1}{3}$, à cause de $\pi = 3,14159$, ces deux limites seront pour le poids Q:

$$\text{la moindre} = 0,35092\,P, \quad \text{la plus grande} = 2,84965\,P.$$

11. Dans ce cas donc, le plus petit poids Q qui soit capable de soutenir le poids P, n'est qu'environ un tiers du poids P, ou à peu près $= \frac{7}{20} P$: & partant, si la corde étoit attachée en Q à un clou, ce clou ne soutiendroit qu'environ le tiers du poids P. C'est le frottement de la corde sur le demi-tour ALMNB, qui cause cette diminution considérable, puisque sans le frottement le poids Q devroit être égal au poids P. Or, si une si petite force est suffisante pour empêcher la descente du poids P, il en faut employer une d'autant plus grande pour faire monter le poids P: car, pour cet effet, il faut que le poids Q soit plus grand que $2,84965\,P$, ou à peu près que $\frac{20}{7} P$: s'il n'y avoit point de frottement, il suffiroit que le poids Q surpassât le poids P. Donc, s'il s'agit seulement d'arrêter un grand poids, le frottement est d'un grand secours, en diminuant la force requise à ce dessein: mais, d'un autre côté, l'élévation du poids P exige une force d'autant plus grande.

Fig. 5. 12. De là on peut conclure, combien la force requise pour arrêter un poids donné, peut être diminuée par le frottement, quand la corde fait plusieurs tours autour d'un tambour fixe, qu'on peut regarder comme un cylindre, puisque la figure n'y contribue rien. Considérons au lieu de cette force un poids Q attaché à l'autre bout de la corde, dont la direction étant verticale, la corde occupera sur le tambour, ou un demi-tour, comme dans le cas exposé, où nous avions $\gamma = \pi$: ou elle occupera un tour & demi, ce qui donne $\gamma = 3\pi$; ou deux tours & demi, ce qui donne $\gamma = 5\pi$; ou trois tours & demi, ce qui donne $\gamma = 7\pi$, & ainsi de suite. Dans ces cas, le plus petit poids Q capable d'arrêter le poids P, sera pour le premier

Q =

$Q = e^{-\lambda\pi}P$; pour le second $Q = e^{-3\lambda\pi}P$; pour le troisieme $Q = e^{-5\lambda\pi}P$; pour le quatrieme $Q = e^{-7\lambda\pi}P$, & ainsi de suite.

13. Supposons, comme il arrive ordinairement, $\lambda = \frac{1}{3}$, & nous aurons pour chaque nombre de tours & demi-tours comme la table suivante fait voir.

Lorsque la corde fait	la force requise pour maintenir le poids P.	Lorsque la corde fait	la force requise pour maintenir le poids P.
$\frac{1}{2}$ tour	0,350920 P	1 tour	0,123145 P
$1\frac{1}{2}$ tour	0,043214 P	2 tours	0,015165 P
$2\frac{1}{2}$ tours	0,005322 P	3 tours	0,001867 P
$3\frac{1}{2}$ tours	0,000655 P	4 tours	0,000230 P
$4\frac{1}{2}$ tours	0,000081 P	5 tours	0,000028 P
$5\frac{1}{2}$ tours	0,000010 P	6 tours	0,000003 P.

La figure représente le cas de quatre tours & demi; donc, si le poids P étoit de 1000 livres, pour empêcher sa descente, il suffiroit d'employer en Q un poids de $\frac{81}{1000}$, ou d'une douzieme partie d'une livre: & s'il y avoit un tour de plus, la centieme partie d'une livre seroit suffisante.

14. Cette diminution dépend principalement de la valeur du nombre λ, que j'ai supposé, conformément à plusieurs expériences, $= \frac{1}{3}$; si ce nombre étoit $= \frac{1}{4}$, comme il arrive quelquefois quand les surfaces sont assez bien polies, cette diminution deviendroit considérablement plus petite. Pour le cas de $4\frac{1}{2}$ tours, le poids Q devroit être $= 0,000854P$, & partant $10\frac{1}{2}$ fois plus grand que dans le cas $\lambda = \frac{1}{3}$. Réciproquement donc, ayant trouvé par l'expérience le poids Q, on pourra déterminer très exactement par là le nombre λ. Supposons que, pour le cas de $4\frac{1}{2}$ tours, on ait trouvé le poids $Q = 0,00025P$, ou $Q = \frac{1}{4000}P$; & puisque $\frac{1}{4000} = e^{-9\lambda\pi}1$ ou $e^{9\lambda\pi}$

$=$

$= 4000$, on aura $9\lambda\pi = \frac{l\,4000}{le}$, ou bien $\lambda = \frac{3,6020600}{0,4342945 . 9\pi}$ $= 0,29334$, ce qui feroit à peu près $\lambda = \frac{22}{75}$.

15. Cependant on ne fauroit trop compter fur cette conclufion, puifque j'ai négligé dans le calcul le propre poids de la corde, qui peut caufer un changement fenfible dans la tenfion; qu'il vaudra la peine d'examiner. Soit dont la corde partout également épaiffe, & que Fig. 2. & 3. le poids, dont la longueur eft $= c$, foit $= C$: de là le poids d'un élément ds, fera $= \frac{Cds}{c}$. Pofant comme ci-deffus l'amplitude de l'arc $ALM = \Phi$, le poids de l'élément Mm donnera une preffion $= \frac{Cds}{c}$ fin Φ, & une force felon la direction de la corde $= \frac{Cds}{c}$ cof Φ, dont le frottement doit être diminué. Soit Rds la partie de la preffion, qui eft encore inconnue, & la preffion entiere de l'élément Mm fera $= Rds + \frac{Cds}{c}$ fin Φ, d'où réfulte la force du frottement, qui agit felon la direction $M\mu = \lambda Rds + \frac{\lambda Cds}{c}$ fin Φ, d'où il faut retrancher la force $\frac{Cds}{c}$ cof Φ; de forte que la force qui tire felon $M\mu$ eft $= \lambda Rds + \frac{\lambda Cds}{c}$ fin $\Phi - \frac{Cds}{c}$ cof Φ.

16. Soit maintenant la tenfion de la corde dans l'élément Mm $= T$, & dans l'élément fuivant $M\mu = T + dT$, & de là on aura $dT = -\lambda Rds - \frac{\lambda Cds}{c}$ fin $\Phi + \frac{Cds}{c}$ cof Φ. Or la condition de l'équilibre fournit comme ci-deffus cette équation, en pofant le rayon de courbure en $M = r$, de forte que $\frac{ds}{r} = d\Phi$;

$T =$

$$T = Rr + \frac{Cr}{c}\sin\phi, \text{ ou } R + \frac{C}{c}\sin\phi = \frac{T}{r},$$

d'où nous tirons cette équation

$$dT = \frac{-\lambda T ds}{r} + \frac{Cds}{c}\operatorname{cof}\phi, \text{ ou } dT + \lambda T d\phi = \frac{Cds}{c}\operatorname{cof}\phi,$$

qui étant multipliée par $e^{\lambda\phi}$ & intégrée donne:

$$e^{\lambda\phi}T = \frac{C}{c}\int e^{\lambda\phi}ds\,\operatorname{cof}\phi, \text{ \& partant}$$

$$T = \frac{C}{c}e^{-\lambda\phi}\int e^{\lambda\phi}ds\,\operatorname{cof}\phi,$$

où il faut prendre l'intégrale de telle forte que, pofant l'amplitude $\phi = o$, la tenfion en A devienne $= P$, en négligeant le poids du bout de la corde AP, ou en le comprenant dans le poids P.

17. Ici il eft évident que la tenfion de la corde T dépend non feulement de l'amplitude ϕ, mais auffi de la figure du tambour. Suppofons cette figure cylindrique, dont le rayon foit $= a$, & puifque l'arc $AM = s$ devient $a\phi$, on aura $ds = ad\phi$, & partant pour les tambours cylindriques la tenfion T, qui répond à l'amplitude ϕ, fera exprimée par cette équation:

$$T = \frac{Ca}{c}e^{-\lambda\phi}\int e^{\lambda\phi}d\phi\,\operatorname{cof}\phi.$$

Or, ayant $\int e^{\lambda\phi}d\phi\,\operatorname{cof}\phi = e^{\lambda\phi}\operatorname{fin}\phi - \lambda\int e^{\lambda\phi}d\phi\,\operatorname{fin}\phi$, &

$\int e^{\lambda\phi}d\phi\,\operatorname{fin}\phi = -e^{\lambda\phi}\operatorname{cof}\phi + \lambda\int e^{\lambda\phi}d\phi\,\operatorname{cof}\phi$, nous en tirons

$\int e^{\lambda\phi}d\phi\,\operatorname{cof}\phi = e^{\lambda\phi}\operatorname{fin}\phi + \lambda e^{\lambda\phi}\operatorname{cof}\phi - \lambda\lambda\int e^{\lambda\phi}d\phi\operatorname{cof}\phi + \text{conft.}$

& partant

$$\int e^{\lambda\phi}d\phi\operatorname{cof}\phi = \text{conft.} + \frac{e^{\lambda\phi}(\operatorname{fin}\phi + \lambda\operatorname{cof}\phi)}{1 + \lambda\lambda}.$$

18. Après avoir trouvé cette intégrale, nous acquerrons la tension cherchée:

$$T = \text{const.}\ \frac{Ca}{c} e^{-\lambda\phi} + \frac{Ca\,(\sin\phi + \lambda \cos\phi)}{(1 + \lambda\lambda)\,c},$$

où, posant $\phi = o$, nous aurons pour la détermination de la constante:

$$P = \text{const.}\ \frac{Ca}{c} + \frac{\lambda Ca}{(1 + \lambda\lambda)\,c},$$

dont la valeur étant substituée fournit

$$T = Pe^{-\lambda\phi} - \frac{\lambda Ca e^{-\lambda\phi}}{(1+\lambda\lambda)\,c} + \frac{Ca\,(\sin\phi + \lambda \cos\phi)}{(1 + \lambda\lambda)\,c}.$$

Si le poids de la corde évanouit, de sorte que $C = o$, on aura comme ci-dessus $T = Pe^{-\lambda\phi}$; mais le poids de la corde change de telle sorte la tension, qu'elle devient

$$T = Pe^{-\lambda\phi} + \frac{Ca}{(1 + \lambda\lambda)\,c}\ \sin\phi + \lambda\cos\phi - \lambda e^{-\lambda\phi}).$$

19. Si l'on multiplie cette valeur de T par $\frac{ds}{r} = d\phi$, à cause de $r = a$, on aura la pression de la corde dans son élément $Mm = ds = a\,d\phi$, où il faut remarquer que notre calcul ne sauroit subsister, à moins que cette pression ne soit positive; car, si elle devenoit quelque part négative, rien n'empêcheroit que la corde n'abandonnât là le tambour: aussi le frottement ne sauroit alors devenir négatif, comme le calcul le supposeroit. Ou bien il faudroit concevoir qu'il y eût autour du tambour un cylindre creux, ou un tuyau, qui tînt attachée partout la corde au tambour, ou qui empêchât qu'elle ne s'en détache. Or la pression ne devient négative qu'à moins que la tension T ne le devienne: & partant les cas que nous devons exclure de notre calcul, ne se trouvent que là où l'expression de T obtient une valeur négative. Mais, avant que cela arrive, il faut que la valeur de T éva-

évanouisse, & partant c'est depuis cet endroit que nous devons abandonner le calcul.

20. Supposons $\lambda = \frac{1}{3}$, & considérons le cas où la corde fait un demi-tour sur le tambour. Fig. 4.
Puisqu'alors $\phi = 180° = \pi$, & partant $\sin\phi = o$, $\cos\phi = -1$, & $e^{-\lambda\phi} = 0,35092$, la tension à l'autre bout B, ou le poids Q, sera

$$Q = 0,35092\,P - 0,405276 \,.\, \frac{Ca}{c}.$$

Le poids de la corde diminue donc le poids Q, requis pour arrêter le poids P; & la force Q évanouiroit tout à fait, si la corde étoit si pesante, qu'il fût $C = \frac{13}{15} \,.\, \frac{cP}{a}$; ou bien, si un morceau de la corde, dont la longueur seroit égale au rayon du tambour a, avoit un poids qui fût au poids P comme 13 à 15; dans ce cas, la corde ALMNB simplement couchée sur le tambour, sans qu'on lui applique en B aucune force, arrêteroit le poids P; & si la corde étoit plus pesante, le poids P seroit d'autant mieux arrêté, & on le pourroit encore augmenter. Mais, si la corde est moins pesante, il faut toujours appliquer en B un contrepoids Q, qui ne soit pas plus petit que celui que je viens de déterminer.

21. Que dans la même hypothese $\lambda = \frac{1}{3}$, la corde remplisse sur le tambour un tour & demi, de sorte que $\phi = 3\pi$, & nous aurons $\sin\phi = 0$ & $\cos\phi = -1$, ensuite $e^{-\lambda\phi} = 0,043214$, d'où la grandeur du contrepoids Q devient:

$$Q = 0,043214\,P - 0,3129642 \,.\, \frac{Ca}{c}.$$

Donc, tandis que $C < \frac{4}{29} \,.\, \frac{Pc}{a}$, ou que le poids d'un morceau de la corde égal au rayon du tambour, est plus petit que $\frac{4}{29}\,P$, il faut appliquer un contrepoids Q. Mais, si ce morceau de la corde pese

$\frac{4}{29}\,P$,

$\frac{4}{29}$ P, ou davantage encore, la ſeule corde, ſans qu'on ait beſoin de la charger d'un contrepoids, arrêtera le poids P; & il ſeroit ſuperflu de lui donner une plus grande longueur, vu que l'excès ſur un tour & demi ne demeureroit plus attaché au tambour. On peut remarquer ici qu'une corde beaucoup plus mince que dans le cas précédent, eſt capable de ſoutenir le poids P ſans un contrepoids, & cela dans la raiſon de $\frac{13}{15}$ à $\frac{4}{29}$ ou de 44 à 7.

22. Quand la corde remplit ſur le tambour deux tours & demi, à cauſe de $e^{-\lambda\varphi} = 0,005322$, le plus petit contrepoids Q ſe trouve

$$Q = 0,005322\,P - 0,3015966 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Quand la corde remplit ſur le tambour trois tours & demi, à cauſe de $e^{-\lambda\varphi} = 0,000655$, le plus petit contrepoids ſera

$$Q = 0,000655\,P - 0,3001965 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Quand la corde remplit ſur le tambour quatre tours & demi, à cauſe de $e^{-\lambda\varphi} = 0,000081$, le plus petit contrepoids ſera

$$Q = 0,000081\,P - 3,0000243 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Quand la corde remplit ſur le tambour cinq tours & demi, à cauſe de $e^{-\lambda\varphi} = 0,000010$, le plus petit contrepoids ſera

$$Q = 0,000010\,P - 0,3000030 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Pour ſix tours & demi on trouve

$$Q = 0,00000122\,P - 0,300000366 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Pour

Pour ſept tours & demi on trouve

$$Q = 0{,}000000151\,P - 0{,}3000000453 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

23. En général, ſi la corde remplit ſur le tambour n tours & demi, à cauſe de $\phi = (2n+1)\pi$, le plus petit contrepoids ſera

$$Q = e^{-\lambda(2n+1)\pi}\,P - \frac{\lambda(1+e^{-\lambda(2n+1)\pi})}{1+\lambda\lambda} \cdot \frac{Ca}{c},$$

qui ſera donc d'autant plus diminué, que le tambour eſt gros. Si l'on veut que le contrepoids évanouiſſe, on aura cette équation:

$$(1+\lambda\lambda)c\,e^{-\lambda(2n+1)\pi}\,P = \lambda a\,(1+e^{-\lambda(2n+1)\pi})\,C,$$

d'où, ſi l'on connoit le nombre λ & les quantités a, c, C, P, on déterminera le nombre des tours n de cette ſorte:

$$e^{-\lambda(2n+1)\pi} = \frac{\lambda a C}{(1+\lambda\lambda)\,cP - \lambda a C}, \quad \text{ou bien}$$

$$2n+1 = \frac{l((1+\lambda\lambda)\,cP - \lambda aC) - l\lambda aC}{\lambda\pi le}.$$

Soit c la longueur de la corde, qui peſe autant que le poids P, qu'il faut ſoutenir, ſans avoir beſoin de contrepoids, & on aura

$$2n+1 = l\frac{(1+\lambda\lambda)c-\lambda a}{\lambda a} : \lambda\pi le \quad \text{ou} \quad \pi le = 1{,}3643766.$$

24. Pour donner un exemple, ſuppoſons qu'on employe une telle corde, dont 2000 pieds peſent autant que le poids à ſoutenir, & que le diametre du tambour ſoit un pied, ou $a = \frac{1}{2}$: ſoit de plus le nombre qui réſulte du frottement, $\lambda = \frac{1}{3}$, & on aura

$$2n+1 = \frac{l\,13332\frac{1}{3}}{0{,}4547922} = \frac{4{,}1248953}{0{,}4547922} = 9 \text{ aſſez exactement,}$$

 donc

donc $n = 4$: de ſorte que dans ce cas quatre tours & demi ſont ſuffiſans pour ſoutenir le poids. Si le frottement, étoit moindre & qu'il fût $\lambda = \frac{1}{4}$, on trouveroit

$$2n + 1 = \frac{l16999}{0,3410941} = \frac{4,2304234}{0,3410941} = 12\tfrac{1}{2}.$$

Ici au lieu de $12\frac{1}{2}$ il faut prendre 13, & $n = 6$; de ſorte que ce moindre frottement exige ſix tours & demi. Puiſque a eſt ordinairement fort petit par rapport à c, on voit qu'il eſt aſſez exactement

$$2n + 1 = l\frac{(1+\lambda\lambda)c}{\lambda a} : \lambda\pi le \text{ ou } e^{\lambda(2n+1)\pi} = \frac{(1+\lambda\lambda)c}{\lambda a}.$$

Du reſte il eſt évident, qu'un fort modique nombre de tours eſt toujours ſuffiſant pour ſoutenir les plus grands poids, ſans avoir beſoin d'un contrepoids.