SUR

LA CONFUSION

QUE CAUSE DANS LES INSTRUMENS DIOPTRIQUES LA DIVERSE RÉFRANGIBILITÉ DES RAYONS. (*)

PAR M. L. EULER.

I.

Dans mon Mémoire fur la conftruction des Inftrumens dioptriques, tant Télefcopes que Microfcopes, qui fe trouve dans le XIII Volume de notre Académie, j'ai expofé tout ce qui regarde ces Inftrumens, & qui peut contribuer à leur perfection: je me flatte de n'y avoir omis aucune circonftance rélative à ce but. Toutes les déterminations que j'y ai données, font le réfultat de calculs fort prolixes, & pour la plupart très embaraffées, que j'ai enfin trouvé moyen de développer après plufieurs efforts affez pénibles. Mais je fus obligé de me borner au fimple rapport de toutes les formules qui renferment les vraies maximes pour la conftruction de ces inftrumens, fans détailler les principes & les calculs fur lefquels elles font fondées, ce qui fourniroit de la matiere pour un traité très confidérable. Chaque article en particulier demande des recherches fort foigneufes; & je me propofe maintenant de développer celui qui regarde la différente réfrangibilité des rayons, pour faire voir plus clairement, combien elle influe fur tous ces Inftrumens.

II. Pour cet effet il faut confidérer les diftances de foyer de chaque verre comme des quantités variables, puifque chaque efpece des rayons y forme fon propre foyer: fur quoi je remarque dabord, que

(*) Lu le 2 de Sept. 1762.

que ces variations dans la diſtance de foyer ſont proportionelles à la diſtance même, en ſorte que ſi l'on connoit la diſtance de foyer d'un verre pour les rayons d'une réfrangibilité moyenne, on peut aiſément déterminer par-là celle qui convient aux rayons qui ſouffrent ou la plus grande ou la plus petite réfraction. On ſait que, ſi la diſtance de foyer d'un verre eſt $= p$ pour les rayons moyens, les rayons rouges auront leur foyer à la diſtance $(1 + \frac{1}{55})p$, & les violets à la diſtance $(1 - \frac{1}{55})p$. Cete différence de $\frac{1}{55}p$ étant aſſez petite, il ſera permis, dans le calcul, de la conſidérer comme le différentiel de p, de ſorte qu'en écrivant λ pour la fraction $\frac{1}{55}$, j'aurai $dp = \lambda p$, où λ ſe prendra & négatif & poſitif.

Planche VII. Fig. 1.

III. Conſidérons donc une ſuite d'autant de verres qu'on voudra, diſpoſés ſur le même axe, pour y examiner tous les changemens que la diverſe réfrangibilité des rayons cauſe dans les images repréſentées par ces verres. J'appliquerai mes recherches au nombre de cinq verres, repréſentés par les barres PAP, QBQ, RCR, SDS & TET, puiſqu'il ſera auſſi aiſé de les étendre à un plus grand nombre, que de les reſtreindre à un plus petit. Que devant ces verres ſe trouve l'objet Oo, dont les images formées par les rayons moyens ſoient ſucceſſivement repréſentées en Ff, Gg, Hh, Kk & Ll. Poſons, tant pour marquer les lieux des verres que ceux de ces images, les diſtances

$$AO = a; \quad BF = b; \quad CG = c; \quad DH = d; \quad EK = e$$

$$AF = \alpha; \quad BG = \beta; \quad CH = \gamma; \quad DK = \delta; \quad EL = \varepsilon;$$

& ſoit, pour abréger le calcul dans la ſuite:

$$\alpha = Aa; \quad \beta = Bb; \quad \gamma = Cc; \quad \delta = Dd; \quad \varepsilon = Ee.$$

IV. De là les diſtances entre les verres ſeront:

$$AB = \alpha + b; \quad BC = \beta + c; \quad CD = \gamma + d; \quad \& \quad DE = \delta + e,$$

qui doivent reſter conſtantes, & même toujours poſitives, quoique les quantités α, b, β, c &c. varient ſelon la diverſe nature des rayons.

Or,

Or, puisque leur variabilité dépend de celle de la distance de foyer des verres, nommons la distance de foyer de chacun pour les rayons moyens: de $PAP = p$; $QBQ = q$; $RCR = r$; $SDS = s$; $TET = t$; que je regarde toutes comme positives, ou les verres mêmes comme convexes, la concavité se réduisant à une distance négative de foyer. Or ces distances de foyer sont déjà déterminées par les distances précédentes de la maniere suivante:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}; \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}; \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma}; \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\delta};$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{e} + \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{ou bien}$$

$$p = \frac{Aa}{A+1}; \; q = \frac{Bb}{B+1}; \; r = \frac{Cc}{C+1}; \; s = \frac{Dd}{D+1}; \; t = \frac{Ee}{E+1}.$$

V. Voyons maintenant quel changement produira la variabilité de la réfraction dans le lieu de la derniere image Ll, qu'on doit regarder comme l'objet immédiat de la vue. Et puisque cette variabilité provient de celle des distances de foyer p, q, r, s, t, à cause de $dp = \lambda p$, $dq = \lambda q$, $dr = \lambda r$ &c., & parce que la distance de l'objet $AO = a$ n'en dépend point, la différentiation nous fournit les formules suivantes:

$$\frac{d\alpha}{\alpha\alpha} = \frac{\lambda}{p} = \lambda\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\lambda\,(A+1)}{Aa},$$

$$\frac{db}{bb} + \frac{d\beta}{\beta\beta} = \frac{\lambda}{q} = \lambda\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right) = \frac{\lambda\,(B+1)}{Bb},$$

$$\frac{dc}{cc} + \frac{d\gamma}{\gamma\gamma} = \frac{\lambda}{r} = \lambda\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{\lambda\,(C+1)}{Cc},$$

$$\frac{dd}{dd} + \frac{d\delta}{\delta\delta} = \frac{\lambda}{s} = \frac{\lambda\,(D+1)}{Dd}, \quad \text{\& enfin}$$

$$\frac{\mathrm{d}e}{ee} + \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon} = \frac{\lambda}{t} = \frac{\lambda\,(E+1)}{Ee}.$$

VI. Or l'invariabilité des diſtances entre les verres donne

$$\mathrm{d}b = -\mathrm{d}\alpha;\ \mathrm{d}c = -\mathrm{d}\beta;\ \mathrm{d}d = -\mathrm{d}\gamma;\ \mathrm{d}e = -\mathrm{d}\delta;$$

d'où nous pouvons tirer les valeurs de tous nos différentiels, réduites à la fraction λ; & d'abord ayant:

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha\alpha} = \frac{\lambda\,(A+1)}{Aa}$$ à cauſe de $\alpha = Aa$, nous aurons

$$\mathrm{d}\alpha = \lambda\alpha\,(A+1),\quad \&\ \mathrm{d}b = -\lambda\alpha\,(A+1).$$

Enſuite, les autres équations ſe réduiſent à celle-ci:

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\beta\beta} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{bb} + \frac{\lambda(B+1)}{Bb},\ \text{ou}\ \mathrm{d}\beta = BB\mathrm{d}\alpha + \lambda\beta\,(B+1) = -\mathrm{d}c,$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\gamma\gamma} = \frac{\mathrm{d}\beta}{cc} + \frac{\lambda(C+1)}{Cc},\ \text{ou}\ \mathrm{d}\gamma = CC\mathrm{d}\beta + \lambda\gamma\,(C+1) = -\mathrm{d}d,$$

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\delta\delta} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{dd} + \frac{\lambda(D+1)}{Dd},\ \text{ou}\ \mathrm{d}\delta = DD\mathrm{d}\gamma + \lambda\delta\,(D+1) = -\mathrm{d}e,$$

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\delta}{ee} + \frac{\lambda(E+1)}{Ee},\ \text{ou}\ \mathrm{d}\varepsilon = EE\mathrm{d}\delta + \lambda\varepsilon\,(E+1),$$

d'où nous concluons:

$$\mathrm{d}\alpha = -\mathrm{d}b = +\lambda\alpha\,(A+1),$$

$$\mathrm{d}\beta = -\mathrm{d}c = \lambda\alpha\,(A+1)\,BB + \lambda\beta\,(B+1),$$

$$\mathrm{d}\gamma = -\mathrm{d}d = \lambda\alpha\,(A+1)BBCC + \lambda\beta(B+1)CC + \lambda\gamma(C+1),$$

$$\mathrm{d}\delta = -\mathrm{d}e = \lambda\alpha\,(A+1)\,BBCCDD + \lambda\beta\,(B+1)\,CCDD + \lambda\gamma\,(C+1)\,DD + \lambda\delta\,(D+1),$$

$$\mathrm{d}\varepsilon = \lambda\alpha\,(A+1)\,B^2C^2D^2E^2 + \lambda\beta\,(B+1)\,C^2D^2E^2 + \lambda\gamma\,(C+1)\,D^2E^2 + \lambda\delta(D+1)\,E^2 + \lambda\varepsilon\,(E+1);$$

&

& cette derniere formule exprime le changement dans le lieu de la derniere image Ll, qui eſt cauſé par la différente réfrangibilité des rayons.

VII. Cherchons à préſent, par ces mêmes principes, combien la grandeur de l'image Ll doit être changée par la différente réfraction, ſuppoſant que Ll eſt l'image formée par les rayons d'une nature moyenne. Or, poſant la grandeur de l'objet Oo, ou de ſa partie dont les rayons ſont tranſmis par les verres, $= o$, & ſuivant les principes de la Dioptrique, nous aurons ſucceſſivement la grandeur de toutes les images exprimée de cette façon:

$$Ff = \frac{\alpha}{a}o;\ Gg = \frac{\alpha\beta}{ab}o;\ Hh = \frac{\alpha\beta\gamma}{abc}o;\ Kk = \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd}o;$$

$$Ll = \frac{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}{abcde}o.$$

Poſons maintenant, pour abréger, $\frac{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}{abcde} = V$, de ſorte que $V =$ ABCDE, pour avoir $Ll = Vo$; & puiſque la différentiation nous fournit les changemens cauſés par la différente réfraction des rayons, nous aurons, pour l'image infiniment proche $L''l''$, la grandeur $L''l'' = (V + dV)o$, & partant l'incrément $L''l'' - Ll = o, dV$. Pour le changement dans le lieu, la valeur de $d\epsilon$ que nous venons de trouver, exprime le petit intervalle LL', de ſorte que $LL' = d\epsilon$.

VIII. Tout revient donc à trouver le différentiel de la quantité V: pour cet effet, cherchons ſon différentiel logarithmique, qui, à cauſe de a & o conſtantes, ſera

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{d\beta}{\beta} - \frac{db}{b} + \frac{d\gamma}{\gamma} - \frac{dc}{c} + \frac{d\delta}{\delta} - \frac{dd}{d} + \frac{d\epsilon}{\epsilon} - \frac{de}{e},$$

qui, à cauſe de $db = -d\alpha$, $dc = -d\beta$, $dd = -d\gamma$ & $de = -d\delta$, ſe change en

dV

$$\frac{dV}{V} = d\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b}\right) + d\beta\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{c}\right) + d\gamma\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{d}\right) + d\delta\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{e}\right) + \frac{d\epsilon}{\epsilon};$$

où, si nous substituons à $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, $d\delta$, $d\epsilon$, les valeurs trouvées ci-dessus, nous trouverons l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\frac{dV}{V} = {} & \lambda\alpha(A+1)\left(\frac{\alpha+b}{\alpha b} + \frac{BB(\beta+c)}{\beta c} + \frac{BBCC(\gamma+d)}{\gamma d} + \frac{BBCCDD(\delta+e)}{\delta e} + \frac{BBCCDDE}{e}\right) \\ & + \lambda\beta(B+1)\left(\frac{\beta+c}{\beta c} + \frac{CC(\gamma+d)}{\gamma d} + \frac{CCDD(\delta+e)}{\delta e} + \frac{CCDDE}{e}\right) \\ & + \lambda\gamma(C+1)\left(\frac{\gamma+d}{\gamma d} + \frac{DD(\delta+e)}{\delta e} + \frac{DDE}{e}\right) \\ & + \lambda\delta(D+1)\left(\frac{\delta+e}{\delta e} + \frac{E}{e}\right) \\ & + \lambda(E+1).\end{aligned}$$

IX. Ayant trouvé ces valeurs différentielles, en donnant à λ toutes les valeurs comprises entre les limites $+\frac{1}{55}$ & $-\frac{1}{55}$, on connoitra l'arrangement de toutes les images formées par les rayons de toutes especes. Ces images seront disposées sur l'espace $LL' = d\epsilon$, de part & d'autre de l'image moyenne, & cet espace entier se trouvera en posant $\lambda = \frac{2}{55}$ dans l'expression de $d\epsilon$. Or il est clair que toutes ces images seront terminées par la ligne droite ll', qui étant prolongée coupera l'axe des verres en quelque point Ω, sous un angle dont la tangente est $= \frac{dV}{d\epsilon} \cdot o$: d'où l'on aura la distance $L\Omega = \frac{Vd\epsilon}{dV}$,

&

& partant la distance $E\Omega = \epsilon - \frac{Vd\epsilon}{dV} = \frac{\epsilon V}{dV}\left(\frac{dV}{V} - \frac{d\epsilon}{\epsilon}\right)$.

Mais, retranchant la valeur de $\frac{d\epsilon}{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{E\epsilon}$ de celle de $\frac{dV}{V}$, on obtient:

$$\frac{dV}{V} - \frac{d\epsilon}{\epsilon} = \lambda\alpha(A+1)\left(\frac{\alpha+b}{\alpha b} + \frac{BB(\beta+c)}{\beta c} + \frac{BBCC(\gamma+d)}{\gamma d} + \frac{BBCCDD(\delta+e)}{\delta e}\right)$$

$$+\lambda\beta(B+1)\left(\frac{\beta+c}{\beta c} + \frac{CC(\gamma+d)}{\gamma d} + \frac{CCDD(\delta+e)}{\delta e}\right)$$

$$+\lambda\gamma(C+1)\left(\frac{\gamma+d}{\gamma d} + \frac{DD(\delta+e)}{\delta e}\right)$$

$$+\lambda\delta(D+1)\left(\frac{\delta+e}{\delta e}\right).$$

X. Dans ces formules j'ai tâché d'introduire les distances entre les verres $\alpha + b$, $\beta + c$, $\gamma + d$, $\delta + e$, puisqu'elles sont nécessairement positives. Mais cela se peut faire d'une autre maniere, qui s'étend aussi à la valeur de $d\epsilon$; un léger changement nous fournit ces expressions:

$$d\epsilon = \lambda(aAABBCCDDEE + (\alpha+b)BBCCDDEE + (\beta+c)CCDDEE + (\gamma+d)DDEE + (\delta+e)EE + \epsilon),$$

& celle-ci:

$$\frac{dV}{V} = \frac{\lambda(E+1)}{e}(aAABBCCDD + (\alpha+b)BBCCDD + (\beta+c)CCDD + (\gamma+d)DD + \delta + e)$$

$$+\frac{\lambda(D+1)}{d}(aAABBCC + (\alpha+b)BBCC + (\beta+c)CC + \gamma + d)$$

$$+\frac{\lambda(C+1)}{c}(aAABB + (\alpha+b)BB + \beta + c)$$

$$+\frac{\lambda(B+1)}{b}(aAA+\alpha+b)$$

$$+\frac{\lambda(A+1)}{a}(a).$$

XI. Pour abréger ces formules posons:

$$\alpha + b + aAA = P$$
$$\beta + c + PBB = Q$$
$$\gamma + d + QCC = R$$
$$\delta + e + RDD = S$$

& nous aurons:

$$d\varepsilon = \lambda\varepsilon + \lambda SEE \quad \&$$

$$\frac{dV}{V} = \lambda\left(A+1+\frac{P(B+1)}{b}+\frac{Q(C+1)}{c}+\frac{R(D+1)}{d}+\frac{S(E+1)}{e}\right);$$

donc:

$$\frac{dV}{V}-\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}=\lambda\left(A+\frac{P(B+1)}{b}+\frac{Q(C+1)}{c}+\frac{R(D+1)}{d}+\frac{S}{e}\right),$$

d'où l'on tire la distance $E\Omega = \frac{\varepsilon V}{dV}\left(\frac{dV}{V}-\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right)$;

or il faut se souvenir que $V = ABCDE$, & substituant ces valeurs on obtiendra

$$E\Omega = \frac{\varepsilon\left(A+\frac{P(B+1)}{b}+\frac{Q(C+1)}{c}+\frac{R(D+1)}{d}+\frac{S}{e}\right)}{A+1+\frac{P(B+1)}{b}+\frac{Q(C+1)}{c}+\frac{R(D+1)}{d}+\frac{S(E+1)}{e}}.$$

XII. La premiere question qui se présente ici est, s'il ne seroit pas possible que toute cette diffusion des images fût réduite à rien, ce de ſorte que tant $d\varepsilon$ que $\frac{dV}{V}$ devînt égal à zéro? Or d'abord je remarque, que pour le cas où la diſtance de la derniere image doit être infinie ou très grande, comme l'exige une bonne vue, l'intervalle LL' ne ſauroit jamais évanouir, ni même ſon rapport à la diſtance entiere $EL = \varepsilon$. Car, puiſque $d\varepsilon = \lambda(\varepsilon + SEE) = \lambda\varepsilon\left(1+\frac{S\varepsilon}{ee}\right)$, à cauſe de $\varepsilon = \infty$, la quantité S devroit être $= o$, ce qui eſt impoſſible, puiſque S eſt une quantité poſitive, néceſſairement plus grande que l'intervalle des deux derniers verres $\delta + e$. Et par cette raiſon il eſt clair, que non ſeulement $d\varepsilon$, mais auſſi $\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \lambda\left(1+\frac{S\varepsilon}{ee}\right)$, ne ſauroit jamais évanouir. Il eſt auſſi évident qu'il eſt encore moins poſſible de remplir cette condition, lorſque ε doit avoir une valeur poſitive, ce qui eſt le cas des presbytes.

XIII. Mais pour les myopes, dont la vue demande une valeur négative de ε, qui n'eſt pas trop grande, rien n'empêche qu'on ne ſatisfaſſe à cette condition qui, à cauſe de $\varepsilon = Ee$, donne $e = -SE$, ou $\varepsilon = -SEE$: & enſuite il ſera auſſi poſſible de remplir l'autre condition que $\frac{dV}{V} = o$, pourvu que le nombre des verres ſoit plus grand que deux. Mais, ayant examiné le cas de trois verres, je trouve qu'en ſatisfaiſant aux deux conditions qui anéantiſſent toute confuſion, on tombe dans d'autres inconvéniens très conſidérables: c'eſt toujours, ou le groſſiſſement, qui importe peu, ou la lunette devient énormément longue, & le champ apparent évanouit preſque tout à fait. Pour les cas de pluſieurs verres, je ne ſaurois prononcer; le calcul devient trop embaraſſé, pour que j'aye pu me réſoudre à le développer; mais, puiſque $S = \delta + e + RDD$, il faudroit qu'il fût $\varepsilon = -E(\delta + e + RDD)$, & partant E un nombre négatif

moin-

moindre que l'unité; ou $-\varepsilon < e$, ce qui suppose une vue si courte qu'on n'en rencontrera jamais de semblable.

XIV. Or, puisqu'il faut se régler principalement sur les bonnes vues, qui demandent une valeur presque infinie pour la distance ε, on ne sauroit remédier tout à fait à l'effet de la diverse réfrangibilité des rayons, en sorte que l'intervalle LL' devienne évanouissant. Donc, renonçant à ce degré de perfection, il ne nous reste que de rendre la confusion qui naît de cette source, aussi peu sensible qu'il se pourra. Pour cet effet je remarque, que si l'on place l'œil dans le point $\mho$, la confusion deviendra très peu sensible; car, puisque les rayons, qui viennent des extrémités l & l' de toutes les images, se réunissent dans la même direction $l\mho$, ils représenteront les bords des objets assez distinctement, & les couleurs d'iris n'en troubleront point l'apparence; ce qui est un avantage presque aussi grand, que si toutes les images étoient parfaitement réunies dans une seule. Tout revient donc à bien déterminer ce point $\mho$, & à faire en sorte que l'œil y puisse être placé; or nous venons de trouver la distance $E\mho$ depuis le dernier oculaire TET

$$E\mho = \frac{\varepsilon\left(A + \frac{P(B+1)}{b} + \frac{Q(C+1)}{c} + \frac{R(D+1)}{d} + \frac{S}{e}\right)}{A+1+\frac{P(B+1)}{b} + \frac{Q(C+1)}{c} + \frac{R(D+1)}{d} + \frac{S(E+1)}{e}},$$

laquelle expression pour le cas $\varepsilon = \infty$ & partant $E = \frac{\varepsilon}{e} = \infty$, se change en celle-ci:

$$E\mho = \frac{ee}{S}\left(A + \frac{P(B+1)}{b} + \frac{Q(C+1)}{c} + \frac{R(D+1)}{d} + \frac{S}{e}\right),$$

ou bien

$$E\mho = e + \frac{ee}{S}\left(A + \frac{P(B+1)}{b} + \frac{Q(C+1)}{c} + \frac{R(D+1)}{d}\right);$$

où

où il faut remarquer que e exprime la distance de foyer du dernier verre TET.

XV. Mais le lieu de l'œil est déjà déterminé par d'autres circonstances, tant dans les lunettes que dans les microscopes; il faut toujours tenir l'œil là, d'où l'on découvre le plus grand champ; & partant il s'agit d'arranger les verres en sorte que ces deux points dans l'axe derriere les verres, où l'on découvre le plus grand champ, & où l'on voit les objets délivrés des couleurs d'iris, se réunissent dans un seul point, ou au moins à peu près. Pour cet effet, cherchons aussi le point d'où l'on voit le plus grand champ, & qui sera là où les rayons de l'extrémité o de l'objet, après avoir passé par tous les verres, se réunissent avec l'axe; & dans cette recherche il suffit de considérer les rayons qui passent par le centre A de l'objectif, puisque les autres rayons ne font qu'augmenter la clarté, sans rien changer dans le champ apparent. La 2[de] figure représente un tel rayon, qui vient de l'extrémité o de l'objet, & qui, après toutes les réfractions, coupe l'axe au point ω, qui sera par conséquent le lieu de l'œil, que nous cherchons. Planche VII. Fig. 2.

XVI. Le rayon passera bien par les extrémités de toutes les images f, g, h, k, d'où sa route pourroit être déterminée; mais les points q, r, s où il coupe successivement l'axe, nous fournissent un moyen plus aisé de la trouver. En effet, puisque le rayon AQ est rompu par le verre QQ en Qq, s'il y avoit en A un objet, son image tomberoit en q, dont les rayons passant par le verre RR donneront la seconde image en r, & ensuite de même maniere la troisieme en s, & la derniere en ω, qui est précisément le lieu de l'œil que nous cherchons, où l'angle EωT nous montre en même tems l'angle visuel, sous lequel la partie de l'objet Oo sera vue, & de là on pourra juger du grossissement que cet instrument produit. Il est aussi évident, que le champ apparent dépend principalement de l'ouverture de tous les verres oculaires, sans que celle de l'objectif y concoure.

XVII. Conservons les mêmes dénominations que nous avons établies ci-dessus §§. 3. & 4, & la considération des distances de foyer de tous les verres nous fournit ces équations:

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{Bq}=\frac{1}{q}=\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta};\quad Cq=\beta+c-Bq$$

$$\frac{1}{Cq}+\frac{1}{Cr}=\frac{1}{r}=\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma};\quad Dr=\gamma+d-Cr$$

$$\frac{1}{Dr}+\frac{1}{Ds}=\frac{1}{s}=\frac{1}{d}+\frac{1}{\delta};\quad Es=\delta+e-Ds$$

$$\frac{1}{Es}+\frac{1}{E\omega}=\frac{1}{t}=\frac{1}{e}+\frac{1}{\varepsilon}.$$

Introduisons aussi dans le calcul l'angle OAo ou BAQ, qui soit $=\Phi$, & qui marque la même chose que ce qui est exprimé ci-dessus par $\frac{o}{a}$, où o marquoit la portion vue de l'objet Oo. De là nous aurons les images:

$$Ff=\alpha\Phi;\; Gg=\frac{\alpha\beta}{b}\Phi;\; Hh=\frac{\alpha\beta\gamma}{bc}\Phi;\; Kk=\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{bcd}\Phi,$$

& les angles

$$BqQ=CqR=\frac{AB}{Bq}\Phi;\; CrR=Drs=\frac{AB\,.\,Cq}{Bq\,.\,Cr}\Phi;$$

$$DsS=EsT=\frac{AB.Cq.Dr}{Bq.Cr.Ds}\Phi,\ \&\ E\omega T=\frac{AB.Cq.Dr.Es}{Bq.Cr.Ds.E\omega}\Phi;$$

& outre cela pour l'ouverture des verres:

$$BQ=AB\,.\,\Phi;\; CR=\frac{AB\,.\,Cq}{Bq}.\Phi;\; DS=\frac{AB\,.\,Cq\,.\,Dr}{Bq\,.\,Cr}.\,\Phi;$$

$$ET=\frac{AB\,.\,Cq\,.\,Dr\,.\,Es}{Bq\,.\,Cr\,.\,Ds}\Phi.$$

XVIII.

XVIII. Comme l'ouverture des verres entre si essentiellement dans ces déterminations, & qu'elle dépend principalement de la distance de foyer de chaque verre, en y tenant un certain rapport, posons:

$BQ = \pi q$; $CR = \pi' r$; $DS = \pi'' s$ & $ET = \pi''' t$;

de là nous aurons à cause de $AB = a + b$ d'abord:

$$\pi q = (a + b)\Phi, \text{ donc } \pi = \frac{(a+b)\Phi}{q} = \Phi + \frac{(a+b)\Phi}{Bq};$$

& partant $\frac{a + b}{Bq} = \frac{AB}{Bq} = \frac{\pi - \Phi}{\Phi}$; d'où nous tirons

$$CR = \pi' r\ (\pi - \Phi) Cq; \ \& \ \pi' = \pi - \Phi + \frac{(\pi - \Phi) Cq}{Cr};$$

donc $\frac{Cq}{Cr} = \frac{\pi' - \pi + \Phi}{\pi - \Phi}$ & $\frac{AB \,.\, Cq}{Bq \,.\, Cr} = \frac{\pi' - \pi + \Phi}{\Phi}$.

Ensuite, $DS = \pi'' s = (\pi' - \pi + \Phi) Dr$, d'où, à cause de $\frac{Dr}{s} = 1 + \frac{Dr}{Ds}$, on aura $\pi'' = \pi' - \pi + \Phi + (\pi' - \pi + \Phi)\frac{Dr}{Ds}$,

partant

$$\frac{Dr}{Ds} = \frac{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}{\pi' - \pi + \Phi}, \ \& \ \frac{AB \,.\, Cq \,.\, Dr}{Bq \,.\, Cr \,.\, Ds} = \frac{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}{\Phi}.$$

De là on obtient

$ET = \pi''' t = (\pi'' - \pi' + \pi - \Phi) Es$, & depuis

$$\pi''' = \pi'' - \pi' + \pi - \Phi + (\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)\frac{Es}{E\omega},$$

ou $\frac{Es}{E\omega} = \frac{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$, par conséquent

$$\frac{ET}{E\omega} = \pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi.$$

XIX. Pour les angles donc, qu'on peut confondre avec leurs tangentes, il ſera bon de remarquer les formules ſuivantes:

$$OAo = BAQ = \frac{BQ}{AB} = \Phi,$$

$$BqQ = CqR = \frac{BQ}{Bq} = \pi - \Phi = \frac{CR}{Cq};$$

$$CrR = DrS = \frac{CR}{Cr} = \pi' - \pi + \Phi = \frac{DS}{Dr};$$

$$DsS = EsT = \frac{DS}{Ds} = \pi'' - \pi' + \pi - \Phi = \frac{ET}{Es},$$

$$\& \quad E\omega T = \frac{ET}{E\omega} = \pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi.$$

Donc, ſi nous poſons le groſſiſſement $= m$, ou que l'angle viſuel $E\omega T$ ſoit m fois plus grand que l'angle $OAo = \Phi$, nous aurons $\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi = m\Phi$, & de là, par les ouvertures de tous les verres oculaires enſemble, nous connoiſſons le champ apparent même, ou bien l'angle Φ, qui eſt

$$\Phi = \frac{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi}{m - 1};$$

d'où l'on comprend très évidemment, comment le champ apparent dépend, tant du groſſiſſement que de l'ouverture des verres, à l'exception de l'objectif.

XX. Ayant poſé ci-deſſus, pour abréger,

$$\alpha = Aa, \quad \beta = Bb, \quad \gamma = Cc, \quad \delta = Dd, \quad \varepsilon = Ee;$$

poſons de plus, pour abréger davantage,

$$\frac{A}{A+1} = \mathfrak{A}; \ \frac{B}{B+1} = \mathfrak{B}; \ \frac{C}{C+1} = \mathfrak{C}; \ \frac{D}{D+1} = \mathfrak{D}; \ \frac{E}{E+1} = \mathfrak{E};$$

pour

pour avoir les diſtances de foyer de tous les verres:

$$p = \mathfrak{A}a;\quad q = \mathfrak{B}b;\quad r = \mathfrak{C}c;\quad s = \mathfrak{D}d;\quad t = \mathfrak{E}e.$$

Maintenant, puiſque

$$BQ = \pi\mathfrak{B}b;\ CR = \pi'\mathfrak{C}c;\ DS = \pi''\mathfrak{D}d;\ ET = \pi'''\mathfrak{E}e;$$

à cauſe de $AB = \alpha + b = Aa + b$, nous aurons $\pi\mathfrak{B}b = \Phi Aa + \Phi b$,

donc $b = \dfrac{\Phi A a}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}$. De plus, nous aurons

$$Bq = \frac{\pi\mathfrak{B}b}{\pi - \Phi},\ \&\ Cq = \frac{\pi'\mathfrak{C}c}{\pi - \Phi},\ \text{donc}$$

$$\frac{\pi\mathfrak{B}b + \pi'\mathfrak{C}c}{\pi - \Phi} = Bb + c,\ \&\ \frac{c}{b} = \frac{\pi\mathfrak{B} - \pi B + \Phi B}{-\pi'\mathfrak{C} + \pi - \Phi}.$$

De la même maniere

$$Cr + Dr = \frac{\pi'\mathfrak{C}c + \pi''\mathfrak{D}d}{\pi' - \pi + \Phi} = Cc + d\ \&\ \frac{d}{c} = \frac{\pi'\mathfrak{C} - (\pi' - \pi + \Phi)C}{-\pi''\mathfrak{D} + \pi' - \pi + \Phi},$$

$$Ds + Es = \frac{\pi''\mathfrak{D}d + \pi'''\mathfrak{E}e}{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = Dd + e\ \&\ \frac{e}{d} = \frac{\pi''\mathfrak{D} - (\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)D}{-\pi'''\mathfrak{E} + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi},$$

$$\&\ \text{enfin}\ E\omega = \frac{\pi'''\mathfrak{E}e}{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} = \frac{\pi'''\mathfrak{E}e}{m\Phi}.$$

XXI. Ces formules admettent une belle réduction à cauſe de

$$\mathfrak{B} - B = \frac{-BB}{B + 1} = -\mathfrak{B}B,\ \&\ \text{partant auſſi}$$

$$\mathfrak{C} - C = -\mathfrak{C}C;\quad \mathfrak{D} - D = -\mathfrak{D}D;\quad \mathfrak{E} - E = -\mathfrak{E}E,$$

d'où nous trouvons:

$$b = \frac{\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}\cdot Aa;\qquad \alpha + b = \frac{\mathfrak{B}\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}Aa;$$

$$c = \frac{+(\mathfrak{B}\pi - \phi)\,\mathrm{B}b}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \phi}; \qquad \beta + c = \frac{\mathfrak{C}\pi' + (\mathfrak{B}-1)\pi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \phi}.\mathrm{B}b;$$

$$d = \frac{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \phi}\mathrm{C}c; \quad \gamma + d = \frac{\mathfrak{D}\pi'' + (\mathfrak{C}-1)\pi'}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \phi}.\mathrm{C}c;$$

$$e = \frac{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi}.\mathrm{D}d; \ \delta + e = \frac{\mathfrak{E}\pi''' + (\mathfrak{D}-1)\pi''}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi}\,\mathrm{D}d;$$

& ſubſtituant toutes ces valeurs:

$$b = \frac{\mathrm{A}a\phi}{\mathfrak{B}\pi - \phi}; \qquad \beta = \mathrm{B}b; \qquad q = \mathfrak{B}b;$$

$$c = \frac{\mathrm{AB}a\phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \phi}; \qquad \gamma = \mathrm{C}c; \qquad r = \mathfrak{C}c;$$

$$d = \frac{\mathrm{ABC}a\phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \phi}; \qquad \delta = \mathrm{D}d; \qquad s = \mathfrak{D}d;$$

$$e = \frac{\mathrm{ABCD}a\phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi}; \qquad \epsilon = \mathrm{E}e; \qquad t = \mathfrak{E}e.$$

XXII. Voyons maintenant de quelle maniere les quantités P, Q, R, S, employées ci-deſſus, ſeront déterminées par ces nouveaux élémens; & d'abord, en ſubſtituant pour α, β, γ, δ, ϵ, les valeurs indiquées, nous aurons:

$$\mathrm{P} = (\mathrm{A}+1)\,\mathrm{A}a + b,$$

$$\mathrm{Q} = (\mathrm{A}+1)\,\mathrm{ABB}a + (\mathrm{B}+1)\,\mathrm{B}b + c,$$

$$\mathrm{R} = (\mathrm{A}+1)\,\mathrm{ABBCC}a + (\mathrm{B}+1)\,\mathrm{BCC}b + (\mathrm{C}+1)\,\mathrm{C}c + d,$$

$$\mathrm{S} = (\mathrm{A}+1)\,\mathrm{ABBCCDD}a + (\mathrm{B}+1)\,\mathrm{BCCDD}b + (\mathrm{C}+1)\,\mathrm{CDD}c + (\mathrm{D}+1)\,\mathrm{D}d + e,$$

où il ne s'agit plus que de ſubſtituer pour b, c, d, e, les valeurs indiquées ci-deſſus. Or, pour la valeur de E$\backsim$, nous aurons premierement:

A +

$$A + \frac{P(B+1)}{b} + \frac{Q(C+1)}{c} + \frac{R(D+1)}{d} + \frac{S}{e} =$$

$$A + \frac{(A+1)(B+1)Aa}{b}$$

$$B+1+\frac{(A+1)(C+1)ABBa}{c} + \frac{(B+1)(C+1)Bb}{c}$$

$$C+1+\frac{(A+1)(D+1)ABBCCa}{d} + \frac{(B+1)(D+1)BCCb}{d} + \frac{(C+1)(D+1)Cc}{d}$$

$$D+1+\frac{(A+1)ABBCCDDa}{e} + \frac{(B+1)BCCDDb}{e} + \frac{(C+1)CDDc}{e} + \frac{(D+1)Dd}{e}.$$

Ici la premiere colonne verticale fait

$$A + (B+1) + (C+1) + (D+1) + 1;$$

& la seconde, après avoir fait les substitutions, où la plupart des termes se détruisent, donne

$$-(A+1) + (A+1)BCD\mathfrak{E}\frac{\pi'''}{\Phi}.$$

La troisieme colonne, qui est multipliée par b, se réduit à

$$\frac{(B+1)b}{Aa\Phi}(\Phi - \pi + CD\mathfrak{E}\pi''') = \frac{(B+1)(\Phi - \pi + CD\mathfrak{E}\pi''')}{\mathfrak{B}\pi - \Phi};$$

les termes affectés par c donnent

$$\frac{(C+1)c}{ABa\Phi}(D\mathfrak{E}\pi''' - \pi' + \pi - \Phi) = \frac{(C+1)(D\mathfrak{E}\pi''' - \pi' + \pi - \Phi)}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi},$$

& enfin le dernier est

$$\frac{(D+1)d}{ABCa\Phi}(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi) = \frac{(D+1)(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}.$$

Joignons à ces trois derniers les parties $(B+1)$, $(C+1)$, $(D+1)$ du premier membre, & toute l'expression prendra cette forme:

$$\frac{(A+1)BCD\mathfrak{E}\pi'''}{\phi}+\frac{(B+1)CD(\mathfrak{E}\pi'''+(\mathfrak{B}-1)\pi)}{\mathfrak{B}\pi-\phi}+\frac{(C+1)(D\mathfrak{E}\pi'''+(\mathfrak{C}-1)\pi')}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi}$$
$$+\frac{(D+1)(\mathfrak{E}\pi'''+(\mathfrak{D}-1)\pi'')}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi}.$$

XXIII. Cette expression nous donne le numérateur de la fraction qui exprime la distance E☊; or, pour en avoir le dénominateur, nous n'avons qu'à y ajouter encore $1+\frac{SE}{e}$, dont la valeur se réduit à celle-ci:

$$\frac{(A+1)BCDE(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi)}{\phi}+\frac{(B+1)CDE(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi)}{\mathfrak{B}\pi-\phi}$$
$$+\frac{(C+1)DE(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi)}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi}+\frac{(D+1)E(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi)}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi}+(E+1),$$

qui, étant multipliée par $\lambda\epsilon=\lambda Ee$, donneroit l'intervalle $LL'=d\epsilon$. Mais, si nous ajoutons actuellement cette expression à la précédente, à cause de $\mathfrak{E}+\mathfrak{E}E=E$, nous obtiendrons:

$$(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi)\left(\frac{(A+1)BCDE}{\phi}+\frac{(B+1)CDE}{\mathfrak{B}\pi-\phi}+\frac{(C+1)DE}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi}\right.$$
$$\left.+\frac{(D+1)E}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi}+\frac{(E+1)}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi}\right)$$
$$-\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\phi}-\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi}-\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi}-\frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi}.$$

Le numérateur se réduit aussi à une forme presque semblable:

$$\mathfrak{E}\pi'''\left(\frac{(A+1)BCD}{\phi}+\frac{(B+1)CD}{\mathfrak{B}\pi-\phi}+\frac{(C+1)D}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi}+\frac{(D+1)}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi}\right)$$

$-\pi$

$$-\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\phi}-\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi}-\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi};$$

& le dénominateur se peut aussi exprimer de cette sorte:

$$E(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi)\left(\frac{(A+1)BCD}{\phi}+\frac{(B+1)CD}{\mathfrak{B}\pi-\phi}+\frac{(C+1)D}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi}+\frac{(D+1)}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi}\right)$$

$$-\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\phi}-\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi}-\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi}+E+1.$$

XXIV. Posons maintenant, pour abréger,

$$\frac{(A+1)BCD\phi}{\phi}+\frac{(B+1)CD\phi}{\mathfrak{B}\pi-\phi}+\frac{(C+1)D\phi}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi}+\frac{(D+1)\phi}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi}=X,$$

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\phi}+\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi}+\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi}=Y;$$

pour avoir les expressions suivantes:

$$A+\frac{P(B+1)}{b}+\frac{Q(C+1)}{c}+\frac{R(D+1)}{d}+\frac{S}{e}=\frac{\mathfrak{E}X\pi'''}{\phi}-Y,$$

$$A+1+\frac{P(B+1)}{b}+\frac{Q(C+1)}{c}+\frac{R(D+1)}{d}+\frac{S(E+1)}{e}=\frac{EX(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi)}{\phi}$$

$$-Y+E+1,$$

$$\& \; de=\lambda e\left(1+\frac{SE}{e}\right)=\lambda e\left(\frac{EX(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi)}{\phi}+E+1\right).$$

De là nous aurons pour le lieu de l'œil, où les couleurs d'iris évanouissent:

$$E\omega=\frac{Ee\,(\mathfrak{E}X\pi'''-Y\phi}{EX(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi)-Y\phi+(E+1)\phi}.$$

Or, pour le lieu de l'œil d'où l'on découvre le plus grand champ, nous avons trouvé, (§. 20)

$$E\omega = \frac{\mathfrak{E}e\pi'''}{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}.$$

XXV. Donc, afin que ces deux lieux se réunissent dans un seul, il faut satisfaire à cette équation :

$$\frac{E\mathfrak{E}X\pi''' - EY\Phi}{EX(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi) - Y\Phi + (E+1)\Phi} = \frac{\mathfrak{E}\pi'''}{\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi},$$

qui se change en celle-ci :

$$o = EY\Phi(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi) - \mathfrak{E}Y\pi'''\Phi + \mathfrak{E}(E+1)\pi'''\Phi,$$

ou, à cause de $E - \mathfrak{E} = E\mathfrak{E}$, en celle-ci :

$$o = EY(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi) + E\pi''',$$

qui, étant divisée par $E(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)$, donne

$$o = Y + \frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}.$$

Et partant ces deux lieux de l'œil se réunissent dans un seul, lorsqu'on arrange les verres en sorte qu'il devienne

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi} + \frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi} + \frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi} = o.$$

S'il étoit possible de faire évanouir en même tems l'intervalle LL' entre toutes les images colorées, on remédieroit parfaitement à l'effet de la diverse réfrangibilité des rayons : pour cet effet il faudroit outre cela remplir cette équation :

$$\frac{(A+1)BCDE\Phi}{\Phi} + \frac{(B+1)CDE\Phi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi} + \frac{(C+1)DE\Phi}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi} + \frac{(D+1)E\Phi}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}$$
$$+ \frac{(E+1)\Phi}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi} = o.$$

Or nous avons vu que cela ne sauroit s'exécuter que pour les myopes, qui demandent pour la distance $\epsilon = Ee$ une valeur négative assez mé-

médiocre: or $\varepsilon = \frac{ABCDE\alpha\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}$; mais, pour toute autre vue, il sera toujours bon de rendre cette expression aussi petite qu'il est possible.

XXVI. S'il arrivoit que, pour le lieu d'où l'on voit le plus grand champ, la distance $E\omega$ devînt négative, comme dans les petites lunettes à deux verres dont l'oculaire est concave, on seroit obligé d'appliquer l'œil immédiatement au dernier verre oculaire. Dans ce cas donc, afin que les couleurs d'iris évanouissent également, il faut faire en sorte que cette quantité $\mathfrak{E}X\pi''' - Y\Phi$ évanouisse, ou bien il faut satisfaire à cette équation:

$$\frac{(A+1)ACD\mathfrak{E}\pi'''}{\Phi} + \frac{(B+1)CD\mathfrak{E}\pi'''}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{(C+1)D\mathfrak{E}\pi'''}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{(D+1)\mathfrak{E}\pi'''}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$$
$$+ \frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = o;$$

& on remédieroit aussi tout à fait à l'effet de la diverse réfrangibilité des rayons, s'il étoit possible de remplir l'équation précédente, qui, à cause de $\frac{E}{E+1} = \mathfrak{E}$, se réduit à celle-ci:

$$\frac{(A+1)BCD\mathfrak{E}\Phi}{\Phi} + \frac{(B+1)CD\mathfrak{E}\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{(C+1)D\mathfrak{E}\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{(D+1)\mathfrak{E}\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$$
$$+ \frac{\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} = o.$$

En cas que cela soit impossible, qu'on tâche de rendre la valeur de cette expression aussi petite, que les autres circonstances le permettent.

XXVII. Mais retournons au cas précédent, où l'on n'est pas obligé d'appliquer l'œil immédiatement au verre oculaire, & quand on aura arrangé les verres en sorte qu'il devienne

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}+\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}+\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}+\frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi}=0,$$

le lieu de l'œil derriere le dernier verre ſe trouvera à la diſtance:

$$E\omega=\frac{\mathfrak{E}e\pi'''}{\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi},$$

d'où l'on découvrira en même tems le plus grand champ, & l'on verra les objets bien terminés ſans aucune confuſion de couleurs. Si l'on veut auſſi tenir compte du groſſiſſement, qui marque combien de fois l'angle $\Phi = OAo$ eſt multiplié par les verres, en poſant l'angle viſuel $E\omega T = m \,.\, OAo$, on aura $\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi=m\Phi$,

& de là on aura pour le lieu de l'œil $E\omega=\frac{\mathfrak{E}e\pi'''}{m\Phi}$,

ou bien $E\omega=\frac{(m-1)\mathfrak{E}\pi'''}{m(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi)}e$, à cauſe de $\Phi=\frac{\pi'''-\pi''+\pi'-\pi}{m-1}$.

XXVIII. Voilà donc la démonſtration des formules que j'ai données dans le XIII Volume des Mémoires de l'Académie, pour délivrer tant les Téleſcopes que les Microſcopes des couleurs d'iris, dont les objets paroiſſent d'ailleurs environnés. Ce ſont préciſément les mêmes formules que j'ai produites alors; & il faut bien remarquer, que c'eſt uniquement l'introduction des lettres π, π', π'', π''', avec l'angle Φ, qui nous a conduits à des formules ſi ſimples, dont la progreſſion, pour quelque grand nombre de verres qu'on veuille l'employer, eſt tout à fait évidente; tandis que les autres quantités α, b, $\mathfrak{b}$, c, γ &c., quoiqu'elles paroiſſent plus naturelles à cette recherche, nous auroient conduits à des expreſſions extrêmement embaraſſées, qu'on ne ſauroit plus développer dès que le nombre des verres eſt tant ſoit peu conſidérable. Le cas de cinq verres, que j'ai ici ſuppoſé, ſuffit pour nous éclaircir parfaitement ſur cet important article, quelque grand que puiſſe être le nombre des verres.

XXIX. Donc, quelque grand que ſoit le nombre des verres, conſidérons les quantités, qui nous tiennent preſque lieu des premiers élémens; & d'abord, par rapport au verre objectif, nous avons la diſtance de l'objet $AO = a$, avec l'angle $OAo = \Phi$, duquel dépend le champ apparent, & outre cela le nombre A, duquel on forme $\mathfrak{A} = \frac{A}{A+1}$. Par rapport au ſecond verre QQ, nous introduiſons dans le calcul les nombres π, B & $\mathfrak{B} = \frac{B}{B+1}$;

le troiſieme verre fournit π', C & $\mathfrak{C} = \frac{C}{C+1}$;

le quatrieme fournit ces nombres π'', D & $\mathfrak{D} = \frac{D}{D+1}$;

le cinquieme - - - π''', E & $\mathfrak{E} = \frac{E}{E+1}$;

le ſixieme - - - π^{IV}, F & $\mathfrak{F} = \frac{F}{F+1}$;

&c.

où π, π', π'', π''' &c. ſont des fractions, qui marquent à la quantieme partie de la diſtance de foyer de chaque verre eſt pris égal le demi-diametre de ſon ouverture. Ces fractions dépendent donc de la courbure des faces du verre, & l'on convient, que pour les verres également convexes ou concaves des deux côtés, cette fraction ne ſauroit ſurpaſſer $\frac{1}{4}$; mais elle doit être plus petite, quand les deux faces du verre ſont inégales.

XXX. Voyons maintenant comment les autres quantités qui entrent dans la détermination de l'inſtrument, ſont déterminées par ces élémens; & d'abord pour les diſtances de foyer, celle de l'objectif eſt $= \mathfrak{A}a = p$, & pour les autres de la maniere qui ſuit:

Distance de foyer | Demi-diametre de l'ouverture

du second verre $= \dfrac{A\mathfrak{B}a\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} = q$; $BQ = \pi q$

du troisieme $= \dfrac{AB\mathfrak{C}a\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} = r$; $CR = \pi' r$

du quatrieme $= \dfrac{ABC\mathfrak{D}a\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = s$; $DS = \pi'' s$

du cinquieme $= \dfrac{ABCD\mathfrak{E}a\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} = t$; $ET = \pi''' t$

du sixieme $= \dfrac{ABCDE\mathfrak{F}a\Phi}{\mathfrak{F}\pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = u$; $FV = \pi^{IV} u$

&c. &c.

Ensuite pour les lieux des images:

$AF = \alpha = Aa$; $BF = b = \dfrac{Aa\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}$

$BG = \beta = \dfrac{ABa\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}$; $CG = c = \dfrac{ABa\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}$

$CH = \gamma = \dfrac{ABCa\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}$; $DH = d = \dfrac{ABCa\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$

$DK = \delta = \dfrac{ABCDa\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$; $EK = e = \dfrac{ABCDa\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}$

$EL = \varepsilon = \dfrac{ABCDEa\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}$; $FL = f = \dfrac{ABCDEa\Phi}{\mathfrak{F}\pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$

$FM = \zeta = \dfrac{ABCDEFa\Phi}{\mathfrak{F}\pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$.

Et pour les images mêmes, la partie vue de l'objet étant $Oo = a\Phi$, on a

$$Ff = Aa\Phi;\ Gg = ABa\Phi;\ Hh = ABCa\Phi;\ Kk = ABCDa\Phi;$$
$$Ll = ABCDEa\Phi;\quad Mm = ABCDEFa\Phi.$$

XXXI. Pour les distances entre les verres on tirera de là

$$AB = \alpha + b = \frac{A\mathfrak{B}\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi};$$

$$BC = \beta + c = \frac{Aa\Phi\,(B\mathfrak{C}\pi' - \mathfrak{B}\pi)}{(\mathfrak{B}\pi - \Phi)\,(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)};$$

$$CD = \gamma + d = \frac{ABa\Phi\,(C\mathfrak{D}\pi'' - \mathfrak{C}\pi')}{(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)\,(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)};$$

$$DE = \delta + e = \frac{ABCa\Phi\,(D\mathfrak{E}\pi''' - \mathfrak{D}\pi'')}{(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)\,(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)};$$

$$EF = \epsilon + f = \frac{ABCDa\Phi\,(E\mathfrak{F}\pi^{IV} - \mathfrak{E}\pi''')}{(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)(\mathfrak{F}\pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi)},$$

&c.

auxquelles expressions il faut apporter d'autant plus d'attention, qu'elles doivent absolument être positives.

Ensuite, pour les angles dans la 2^de figure, d'où l'on juge du grossissement, on a

$$OAo = BAQ = \Phi,$$
$$BqQ = CqR = \pi - \Phi,$$
$$CrR = DrS = \pi' - \pi + \Phi,$$
$$DsS = EsT = \pi'' - \pi' + \pi - \Phi,$$
$$EtT = FtV = \pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi,$$
$$FuV = GuW = \pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi$$

&c.

& de là on trouve pour les interſections q, r, s, &c.

$$Bq = ABa\Phi\left(\frac{1}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} - \frac{1}{\pi - \Phi}\right);\ Cq = ABa\Phi\left(\frac{1}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{1}{\pi - \Phi}\right);$$

$$Cr = \frac{ABCa\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} - \frac{ABCa\Phi}{\pi' - \pi + \Phi};$$

$$Dr = \frac{ABCa\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} + \frac{ABCa\Phi}{\pi' - \pi + \Phi},$$

&c.

ou bien les diſtances de ces points des images reſpectives ſeront:

$$FA = Aa;\quad Gq = \frac{ABa\Phi}{\pi - \Phi};\quad Hr = \frac{ABCa\Phi}{\pi' - \pi + \Phi};$$

$$Ks = \frac{ABCDa\Phi}{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi};\quad Lt = \frac{ABCDEa\Phi}{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi};$$

$$Mu = \frac{ABCDEFa\Phi}{\pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi}.$$

&c.

XXXII. Après l'explication de ces formules générales, paſſons à des nombres déterminés de verres; &, puiſqu'il faut auſſi tenir compte du groſſiſſement, ou de la multiplication de l'angle $OAo = \Phi$, produite par les verres, ſoit m cette multiplication, qui ſe rapporte à la repréſentation directe, de ſorte que ſi la repréſentation eſt renverſée, il faut donner au nombre m une valeur négative. Maintenant nous aurons

I. Pour le Cas de deux verres:

1°. La multiplication donne $\pi - \Phi = -m\Phi$, & partant

$$\Phi = \frac{-\pi}{m - 1} \text{ pour le champ apparent.}$$

2°. La

2°. La diſtance de l'œil derriere le dernier verre

$$Bq = \frac{\mathfrak{B}b\pi}{\pi - \Phi} = \frac{-\mathfrak{B}b\pi}{m\Phi}, \text{ ou } \mathfrak{B}q = -\frac{A\mathfrak{B}a\pi}{m(\mathfrak{B}\pi - \Phi)}.$$

3°. Pour remédier à l'inconvénient de la diverſe réfrangibilité des rayons, il faut ſatisfaire à cette équation :

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} = o.$$

II. Pour le cas de trois verres:

1°. La multiplication donne $\pi' - \pi + \Phi = m\Phi$, & partant

$$\Phi = \frac{\pi' - \pi}{m - 1} \text{ pour le champ apparent.}$$

2°. La diſtance de l'œil derriere le dernier verre

$$Cr = \frac{\mathfrak{C}c\pi'}{\pi' - \pi + \Phi} = \frac{\mathfrak{C}c\pi'}{m\Phi}, \text{ ou } Cr = \frac{AB\mathfrak{C}a\pi'}{m(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}.$$

3°. A cauſe de la diverſe réfrangibilité des rayons, il faut ſatisfaire à cette équation:

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} = o.$$

III. Pour le cas de quatre verres:

1°. La multiplication donne $\pi'' - \pi' + \pi - \Phi = -m\Phi$, & partant

$$\Phi = \frac{-\pi'' + \pi' - \pi}{m - 1} \text{ pour le champ apparent.}$$

2°. La diſtance de l'œil derriere le dernier verre

$$Ds = \frac{\mathfrak{D}d\pi''}{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = \frac{-\mathfrak{D}d\pi''}{m\Phi}, \text{ ou } Ds = \frac{-ABC\mathfrak{D}a\pi''}{m(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)}.$$

3°. A cauſe de la diverſe réfrangibilité des rayons, il faut ſatisfaire à cette équation:

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = 0.$$

IV. Pour le cas de cinq verres:

1°. La multiplication donne $\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi = + m\Phi$, & partant $\Phi = \frac{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi}{m - 1}$ pour le champ apparent.

2°. La diſtance de l'œil derriere le dernier verre

$$Et = \frac{\mathfrak{E}e\pi'''}{m\Phi}, \text{ ou } Et = \frac{ABCD\mathfrak{E}a\pi'''}{m(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)}.$$

3°. A cauſe de la diverſe réfrangibilité des rayons, il faut ſatisfaire à cette équation:

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} + \frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} = 0.$$

La continuation de ces formules à pluſieurs verres eſt ſi aiſée, qu'il ſeroit ſuperflu de les continuer, d'autant plus que, dans mon Mémoire du XIII Volume, toutes ces formules ſont déjà rapportées à pluſieurs verres, & cela conjointement avec celles que les autres bonnes qualités de ces inſtrumens exigent.

XXXIII. Juſqu'ici j'ai eu égard à l'uſage principal de ces inſtrumens, qui eſt de regarder à travers. Mais, ſi l'on vouloit, dans une chambre obſcure, recevoir la derniere image ſur une ſurface blanche, on n'auroit qu'à la poſer perpendiculaire à l'axe de l'inſtrument entre les limites L & L', afin que la repréſentation devînt d'autant plus diſtincte. Mais, pour la délivrer des couleurs d'iris, il faut que les rayons repréſentent ſur la table les extrêmités l, ayent précisément la direction $\Omega\, l$ (fig. 1), puiſqu'alors les diverſes couleurs ſe réuniſſent dans

dans une ſeule. Or cela arrive, lorſque le point Ω (fig. 1) ſe confond avec le point ω (fig. 2), puiſqu'alors $\frac{Ll}{L\Omega} = \frac{Ll}{L\omega} = \frac{ET}{E\omega}$: & partant la ligne $T\omega\Omega l$, qui eſt la direction du rayon, droite. Donc, pour obtenir cet effet, il faut arranger les verres en ſorte qu'il devienne

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \mathfrak{P}} + \frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \mathfrak{P}} + \frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \mathfrak{P}} + \frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \mathfrak{P}} + \&c. = o;$$

ce qui eſt le même remede dont il faut ſe ſervir pour délivrer la viſion des bords colorés. Ordinairement ces ſortes de repréſentations qu'on fait dans les chambres obſcures, ne ſont que trop aſſujetties à cette confuſion cauſée par la diverſe réfrangibilité des rayons; & partant le remede que je viens de propoſer contre cet inconvénient, ſera d'une très grande utilité.

XXXIV. Mais il faut bien remarquer ici, que ce remede pour délivrer les inſtrumens dioptriques des inconvéniens de la diverſe réfrangibilité des rayons, ne ſauroit produire ſon effet, que lorſque l'autre eſpece de confuſion, qui tire ſon origine de l'ouverture des verres, eſt réduite à rien, ou diminuée au point de n'être plus ſenſible. La raiſon en eſt bien évidente; car, ſi les rayons qui paſſent par les bords de l'objectif, préſentoient d'autres images que ceux qui paſſent par ſon centre, que j'ai conſidérés ici tout ſeuls, l'effet de la diverſe réfraction en deviendroit ſans doute beaucoup plus grand. Ce n'eſt donc qu'à meſure qu'on remédie à la confuſion de l'ouverture des verres, qu'on réuſſit à faire évanouir celle qui provient de la diverſe réfrangibilité des rayons. Et en effet, pour la plûpart, lorſqu'on ſe plaint des couleurs d'iris, auxquelles une lunette eſt aſſujettie, la raiſon ſe trouve ordinairement dans l'ouverture de l'objectif, laquelle étant rétrécie, ces couleurs évanouiſſent preſque tout à fait; ce qui prouve inconteſtablement, que le défaut réſide plutôt dans la trop grande ouverture de l'objectif, que dans la nature des rayons, dont

l'effet

l'effet immédiat n'eſt pas ordinairement beaucoup à craindre. Cependant il ſera toujours bon d'obſerver ſoigneuſement les regles que je viens de preſcrire ici, afin qu'on ſoit d'autant plus ſûr du juſte arrangement des verres, ſurtout lorſqu'il y en a plus de deux; puiſque ſans cette précaution la différence entre les deux lieux pour l'œil, Ω & ω, pourroit devenir aſſez grande pour produire un effet facheux.

Mais les plus grands ſoins doivent être apportés à diminuer la confuſion qui réſulte de l'ouverture des verres, & même à la réduire à rien, s'il eſt poſſible; ce n'eſt que par ce moyen, qu'on pourra achever de porter ces inſtrumens dioptriques au plus haut degré de perfection.

XXXV. Après ces recherches il eſt clair, que c'étoit un préjugé deſtitué de fondement, que de s'imaginer qu'il étoit abſolument impoſſible de prévenir dans les inſtrumens dioptriques les inconvéniens de la diverſe réfrangibilité des rayons, ſurtout quand on demande de très grands groſſiſſemens. Comme plus la diſtance de foyer de l'objectif eſt grande, plus auſſi l'eſpace de diffuſion cauſée par les différens rayons devient grand dans la même raiſon, on n'a pas balancé à en conclure, que plus on veut groſſir les objets, plus auſſi cette confuſion deviendroit conſidérable, & qu'il ſeroit impoſſible d'y remédier par un bon arrangement des verres. Cependant perſonne, que je ſache, n'avoit pris la peine de déterminer par le calcul toutes les images formées par les différens rayons qui paſſent par pluſieurs verres, ce qui auroit pourtant été le ſeul moyen de s'éclaircir ſur cet article. Mais maintenant, après avoir fait ces calculs, nous voyons que pour le même groſſiſſement l'effet de la diverſe réfrangibilité des rayons peut varier à l'infini, & partant devenir tantôt plus grand tantôt plus petit, ſelon le nombre & l'arrangement des verres. Enſuite il eſt non ſeulement poſſible de délivrer la viſion des objets des couleurs d'iris, mais, ce qui eſt le plus remarquable, nous avons auſſi vu, que pour ceux qui ont la vue courte on pourroit même entierement détruire l'effet de la diverſe réfrangibilité des rayons, de ſorte que la derniere image (ou l'ob-

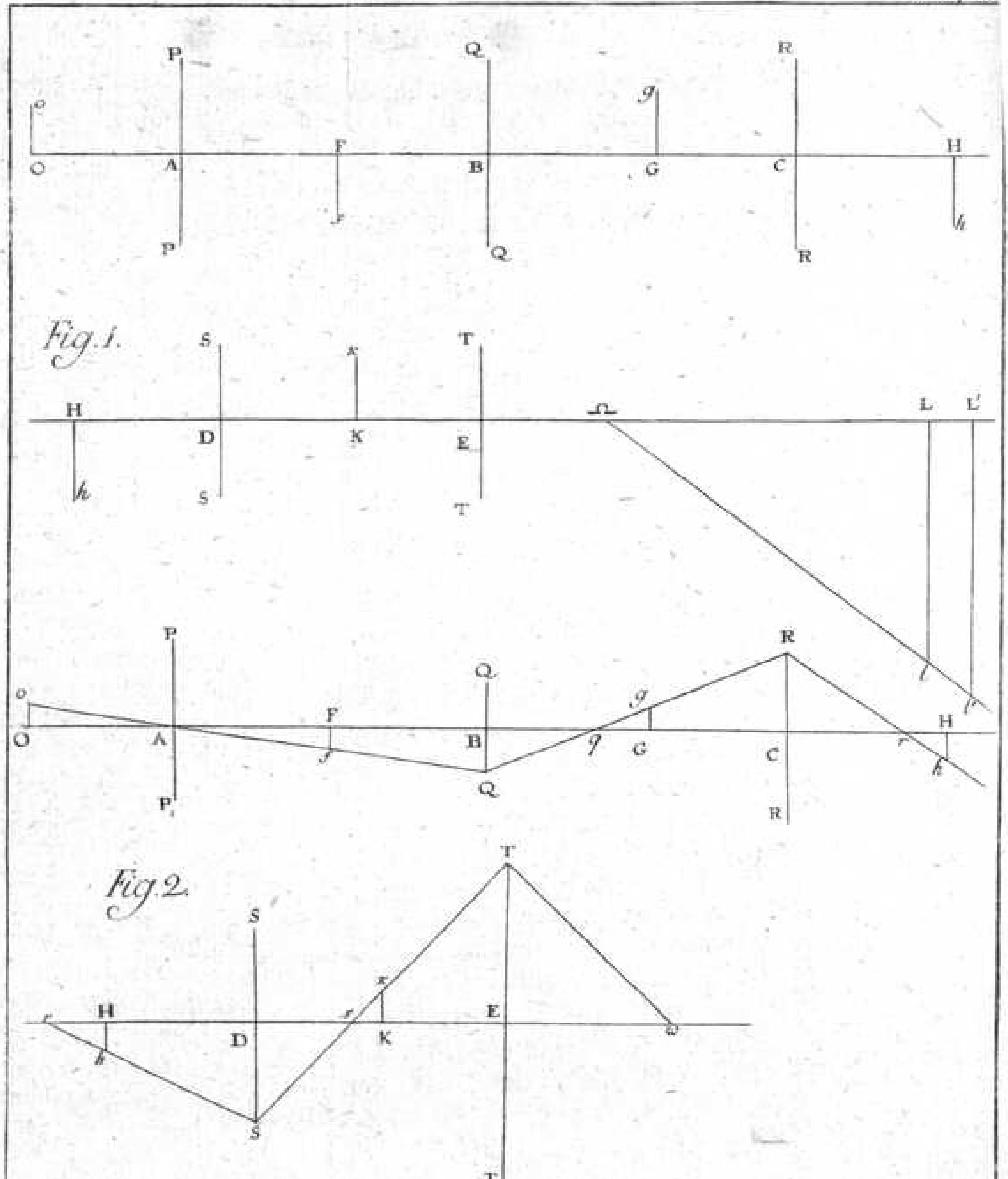
Fig. 1.
Fig. 2.

l'objet immédiat de la vue) ſeroit auſſi nette, que ſi elle étoit repréſentée par un miroir, & tout cela en n'employant qu'une ſeule eſpece de verre.

XXXVI. Cependant je ne diſconviens pas, qu'en employant différentes eſpeces de verre, on ne puiſſe peut-être trouver des arrangemens plus avantageux, ou au moins plus commodes; mais, puiſque les différentes eſpeces de verre different ſi peu en réfraction, ces avantages ſeront toujours peu conſidérables. Il ne ſera pas même difficile d'appliquer les recherches que je viens de développer, au cas où tous les verres auroient une réfraction particuliere: on n'auroit qu'à attacher à chaque verre une valeur particuliere de la lettre λ, & qu'à l'indiquer ainſi: λ, λ', λ'', λ''' &c.; où il faudroit remarquer que la raiſon de réfraction $1,55:1$ donneroit $\lambda = 0,01844$, & celle-ci, $1,50:1$ donneroit $\lambda = 0,01815$. Puiſque toutes les eſpeces de verre ſont compriſes entre ces limites, on voit que les valeurs des lettres λ, λ', λ'' &c. deviendroient trop peu différentes entr'elles, pour qu'on pût s'en promettre des avantages fort conſidérables. Mais, pour s'en aſſurer entierement, il vaudroit bien la peine de développer ces mêmes recherches, dans le cas où la lettre λ auroit pour chaque verre une valeur particuliere; les calculs deviendroient un peu plus ennuyeux, mais peut-être à la fin parviendroit-on à des formules aſſez ſimples.