NOVA CRITERIA
RADICES AEQVATIONVM
IMAGINARIAS DIGNOSCENDI.

Auctore

L. EVLERO.

Summus *Newtonus* et post eum plures alii Geometrae in eo elaborarunt, vt criteria seu signa inuenirent, quorum ope aequationum cuiuscunque gradus radices reales et imaginariae dignosci possent, simili modo quo radices positiuae et negatiuae dignosci solent. Verum cuncta illa criteria seu signa hoc defectu laborant vt quoties radices imaginarias indicant, inde certe quidem concludi possit, tales radices in aequatione reuera inesse; sed quando nullas radices imaginarias indicant neutiquam inde concludere licet, omnes radices esse reales, cum saepius euenire queat vt hoc non obstante omnes adeo aequationis radices sint imaginariae.

Hic defectus imprimis cernitur in aequationibus huius formae

$$+x^n+ax^{n-1}-bx^{n-2}-cx^{n-3}+dx^{n-4}+ex^{n-5}-\text{etc.}=0$$

vbi continuo bina signa eiusdem naturae se mutuo insequuntur, tum enim omnia illa criteria quae hactenus sunt prolata, nullas plane radices imagi-

 narias

narias oſtendunt, cum tamen fieri poſſit vt plures atque adeo omnes ſint imaginariae.

Ad hoc dilucidandum in genere aequatio quarti ordinis huius formae $+x^4+ax^3-bxx-cx+d=0$ exhiberi poteſt cuius omnes radices ſint imaginariae; concipiatur ea enim conflata ex duobus huiusmodi factoribus $xx+px+q$ et $xx-rx+s$ in quibus ſit $pp<4q$ et $rr<4s$ vt omnes radices fiant imaginariae.

Tum igitur fieri opportet $a=p-r$; $b=pr-q-s$; $c=qr-ps$ et $d=qs$; ideoque $p>r$: $pr>q+s$: et $qr>ps$.

Statuamus ergo $p=\alpha r$ et $q=\beta s$ et conditiones adimplendae erunt ſequentes

I. $\alpha>1$; II. $\beta>\alpha$; III. $rr<4s$; IV. $rr<\frac{4\beta}{\alpha\alpha}s$; V. $rr>\frac{\beta+1}{\alpha}s$:

Cum igitur ex quinta ſit $\frac{\beta+1}{\alpha}s<rr$
erit multo magis $\frac{\beta+1}{\alpha}s<4s$ et $<\frac{4\beta}{\alpha\alpha}s$
vnde fit $\beta+1<4\alpha$ ſeu $\beta<4\alpha-1$ et
$\beta+1<\frac{4\beta}{\alpha}$ ſeu $\beta>\frac{\alpha}{4-\alpha}$.

Cum quibus nouis conditionibus iungatur ſecunda $\beta>\alpha$ et adipiſcimur cum

$4\alpha-1>\alpha$ tum $4\alpha-1>\frac{\alpha}{4-\alpha}$

inde fit $\alpha>\frac{1}{3}$ quod per ſe ſupponitur quia $\alpha>1$; hinc vero $4\alpha>\alpha^2+1$; per qua conditione implen-

plenda neceſſe eſt vt α intra hos limites $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$ accipiatur vel potius intra limites $2+\sqrt{3}$ et 1 tum vero facile erit pro β idoneos valores inuenire; conſtitutis autem valoribus pro α et β aeque facile erit pro s et rr idoneos valores aſſumere.

Sumto enim exempli gratia $\alpha = 2$ debet eſſe $\beta > 2$ et > 1 et < 7 vnde intra limites 2 et 7 debet contineri; ſit igitur $\beta = 3$ et habebimus has conditiones

$$rr > 2s \text{ et } < 4s \text{ et } < 3s$$

vnde rr intra limites $2s$ et $3s$ debet contineri; ſumto ergo $s = 6$ capi poterit $r = 4$ hincque fit $p = 8$ et $q = 18$; quocirca ex binis factoribus $xx + 8x + 18$ et $xx - 4x + 6$ naſcetur haec aequatio quarti ordinis

$$x^4 + 4x^3 - 8xx - 24x + 108 = 0$$

cuius omnes radices certo ſunt imaginariae, etiamſi criteria ſupra memorata hoc neutiquam innuant.

Hoc autem ſemper certum eſt, ſi cuiuspiam aequationis omnes radices fuerint reales, tum illa criteria perpetuo locum habere; propterea quod in illis certae proprietates continentur, quae huiusmodi aequationibus conueniunt, quae autem negotium non exhauriunt, ſed quandoque etiam in eiusmodi aequationibus locum habent quae radices imaginarias inuoluunt.

Neque etiam adhuc aliud principium conſtat vnde talia criteria praeſertim pro aequationibus altiorum graduum peti poſſent; interim tamen numerum talium criteriorum pro lubitu augere licet, quo hoc commodi nanciſcimur vt dum quaedam nullas radices imaginarias indicant alia aduerſentur, quorum ſuffragium ſemper veritati conſentaneum eſt cenſendum.

Quod quo clarius appareat, methodos quibus memorati autores in hunc finem ſunt vſi breuiter hic exponam, tum vero oſtendam quomodo iisdem veſtigiis inſiſtendo plura alia imo infinita ſimilia criteria inueſtigari queant.

Primum principium inde petitur quod ſi cuiuspiam aequationis omnes radices fuerint reales, indeque alia aequatio formetur, cuius ſingulae radices ſint quadratis illarum aequales, tum huius novae aequationis omnes radices non ſolum futurae ſint reales ſed adeo poſitiuae, ita vt in ea ſigna + et − ſe mutuo alternatim inſequi debeant.

Sumamus ergo huius aequationis:

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + dx^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

omnes radices eſſe reales, indeque quaeramus nouam aequationem, cuius quaelibet radix z aequalis ſit quadrato xx, ſeu $z = xx$; hunc in finem illius aequationis alternos terminos ad alteram partem transferamus vt ſit

$$x^n + bx^{n-2} + dx^{n-4} + \text{etc.} = -ax^{n-1} - cx^{n-3} - ex^{n-5} - \text{etc.}$$

capian-

capianturque vtrinque quadrata, quae iterum ad eandem partem disposita dabunt hanc aequationem:

$$\left.\begin{array}{llll} x^{2n} + 2b.x^{2n-2} & + 2d.x^{2n-4} & + 2f.x^{2n-6} & + 2h.x^{2n-8} \\ - aa & + bb & + 2bd & + 2bf \\ & - 2ac & - 2ae & + dd \text{ etc.} \\ & & - cc & - 2ag \\ & & & - 2ce \end{array}\right\} = 0$$

In qua omnes exponentes ipsius x sunt numeri pares.

Scribamus ergo vbique z loco xx et habebimus nouam illam aequationem quaesitam, quae erit

$$\begin{array}{llll} z^n + 2b.z^{n-1} & + 2d.z^{n-2} & + 2f.z^{n-3} & + 2h.z^{n-4} \text{ etc.} = 0 \\ - aa & + bb & + 2bd & + 2bf \\ & - 2ac & - 2ae & + dd \\ & & - cc & - 2ag \\ & & & - 2ce. \end{array}$$

In qua cum coefficientes primi, tertii, quinti, etc. termini sint positiui, secundi vero quarti, sexti etc. negatiui, obtinebimus sequentes conditiones pro coefficientibus a, b, c, d etc. aequationis propositae

$$\begin{array}{lll} 2b - aa < 0 & & aa > 2b \\ 2d + bb - 2ac > 0 & \text{seu} & bb > 2ac - 2d \\ 2f + 2bd - 2ae - cc < 0 & & cc > 2bd - 2ae + 2f \\ 2h + 2bf + dd - 2ag - 2ce > 0 & \text{etc.} & dd > 2ce - 2bf + 2ag - 2h \\ & & \text{etc.} \end{array}$$

quarum formularum ordo facile perſpicitur.

En ergo iam inſignes proprietates, quae omnibus aequationibus, quarum radices ſunt reales, neceſſario conueniunt, ita vt aequationis propoſitae omnes radices reales eſſe nequeant, niſi ſimul hae conditiones inter eius coefficientes locum habeant. Neutiquam autem viciſſim inde ſequitur, ſi hae conditiones locum habeant, etiam omnes aequationis radices fore reales: quod exemplo aequationis biquadraticae ante allegatae $x^4+px^3-qx^2-rx+s=0$ fit manifeſtum, cum enim facta applicatione ſit $a=p$; $b=-q$; $c=-r$ et $d=s$; conditiones inuentae ſponte implentur quoniam vtique eſt $pp>-2q$; $qq>-2pr-2s$; $rr>-2qs$ hoc autem non obſtante nouimus, omnes huius aequationis radices eſſe poſſe imaginarias.

Scholion.

Quemadmodum hic ex data aequatione aliam elicuimus, cuius ſingulae radices ſint quadrata ſingularum radicum illius, ita etiam inde aliae aequationes inueniri poſſunt, quarum radices ſint vel cubi, vel biquadrata vel aliae poteſtates altiores radicum aequationis propoſitae.

Poni ſcilicet oportet vel $z=x^3$, vel $z=x^4$, vel $z=x^5$ etc. et negotium huc redit vt quantitas x eliminetur: pro qua operatione regulae paſſim ſunt traditae.

Verum

Verum calculus plerumque tam fit intricatus et molestus, vt nemo facile hunc laborem sit susceptorus.

Quare haud abs re fore arbitror peculiarem methodum ostendisse, qua haec eliminatio facile effici queat.

Hunc in finem aequatio ordine inuerso exhibeatur vt sit

$$a+bx+cxx+dx^3+ex^4+fx^5+gx^6+\text{etc.}=0$$

et pro casu iam euoluto, quo esse debet $z=xx$, facta substitutione, quatenus licet, habebimus

$$a+bx+cz+dxz+ezz+fxzz+gz^3+\text{etc.}=0$$

vbi breuitatis gratia statuamus

$$a+cz+ezz+gz^3+\text{etc.}=P \text{ et } b+dz+fzz+\text{etc.}=Q$$

vt sit $P+Qx=0$, quae aequatio per x multiplicata loco xx, scribendo z, dabit aliam eiusdem formae

$$Px+Qz=0$$

vnde iam facile x eliminatur; prodit enim

$$PP-QQz=0$$

quae formula operationem supra vsurpatam complectitur.

Ponamus autem requiri vt sit $z=x^3$, factaque substitutione quatenus licet, habebitur

$$a+bx+cxx+dz+exz+fxxz+gzz+\text{etc.}=0$$

quae

quae cum tribus partibus constet, statuamus breuitatis gratia $a+dz+gzz+$ etc. $=P$

$b+ez+hzz+$ etc. $=Q$

$c+fz+izz+$ etc. $=R$

vt sit $P+Qx+Rxx=0$ haec per x multiplicata dat nouam eiusdem formae

$Rz+Px+Qxx=0$; haec denuo per x multiplicata dabit

$Qz+Rzx+Pxx=0.$

Iam vt ex his tribus aequationibus tam x quam xx eliminetur prima per L secunda per M et tertia per N multiplicetur, fiatque

$LQ+MP+NRz=0$ et insuper

$LR+MQ+NP=0.$

eritque tum $LP+MRz+NQz=0.$

Ex duabus prioribus autem elicitur

$$L=\frac{-MP-NRz}{Q}=\frac{-MQ-NP}{R}$$

ideoque $MPR+NRRz=MQQ+NPQ$

vnde fit $\frac{M}{N}=\frac{PQ-RRz}{PR-QQ}.$

Statuatur ergo $M=PQ-RRz$

et $N=PR-QQ$ ac fiet $L=QRz-PP$

quocirca aequatio quaesita erit

$$3PQRz-P^3-Q^3z-R^3zz=0.$$

Hinc

Hinc iam ſatis perſpicuum eſt, quomodo eadem methodus etiam ad altiores poteſtates ſit accommodanda.

Secundum principium: ponamus aequationis propoſitae

$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} +$ etc. $= 0$ radices eſſe $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta, -$ etc. quarum numerus eſt n vt ſit $a = \alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc.

et $b = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta +$ etc.

Et quia omnes radices ſunt reales erit ſequens forma $(\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\gamma)^2 + (\alpha-\delta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2 + (\gamma-\delta)^2 +$ etc. certe numerus poſitiuus, facta autem euolutione, prodit $(n-1)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 +$ etc.$) - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\alpha\delta - 2\beta\gamma - 2\beta\delta - 2\gamma\delta -$ etc. eſt vero vti conſtat $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 +$ etc. $= aa - 2b$ vnde haec forma $(n-1)(aa-2b) - 2b = (n-1)aa - 2nb$ quae quantitas cum certe ſit poſitiua erit $aa > \frac{2n}{n-1} b$.

Quae iam inſignem continet proprietatem huiusmodi aequationum quarum omnes radices ſunt reales: etſi ea enim tantum ad tres terminos initiales ſe extendit, tamen mox patebit, quemadmodum ea ad ternos terminos quosuis ſucceſſiuos applicari queat.

Tertium principium. Si aequationis cuiuscunque gradus:

$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} +$ etc. $= 0$

omnes radices fuerint reales, semper duae aequationes vno gradu inferiores inde formari possunt quarum radices itidem omnes sunt reales; altera ita se habet

$$nx^{n-1}+(n-1)ax^{n-2}+(n-2)bx^{n-3}+(n-3)cx^{n-4}+\text{etc.}=0$$

quae ex proposita nascitur si singuli eius termini per progressionem arithmeticam n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, etc. multiplicentur; quia enim hoc modo vltimus terminus per 0 multiplicatur, tota aequatio diuisionem per x admittet, sicque vno gradu deprimetur: altera vero aequatio est

$$ax^{n-1}+2bx^{n-2}+3cx^{n-3}+4dx^{n-4}+\text{etc.}=0$$

quae ex proposita nascitur, si singuli eius termini per progressionem arithmeticam 0, 1, 2, 3, 4 etc. multiplicentur.

Cuius demonstratio ex consideratione linearum curuarum est petenda: si enim x denotet abscissam et applicata statuatur $y=x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\text{etc.}$ euidens est applicatam fieri nullam quoties abscissa x radici aequationis propositae aequalis capitur.

Cum igitur nostra aequatio n habeat radices reales, in totidem locis applicata y euanescet, ibique curua axem intersecabit. Inter binas igitur intersectiones certo dabitur applicata maxima, vbi erit $\frac{dy}{dx}=0$, vnde tales applicatae maximae erunt numero

mero $n-1$ ad minimum; quodſi ergo valor formulae $\frac{dy}{dx}$ quaeratur qui erit

$$nx^{n-1}+(n-1)ax^{n-2}+(n-2)bx^{n-3}+\text{etc.}$$

hic $n-1$ caſibus euaneſcere poterit, ſiue haec aequatio $nx^{n-1}+(n-1)ax^{n-2}+(n-2)bx^{n-3}+\text{etc.}=0$ certe habebit $n-1$ radices, hoc eſt, omnes ſuas radices reales, quae eſt demonſtratio prioris formae.

Pro altera ſtatuamus $x=\frac{1}{y}$ et aequatio hinc reſultans $1+ay+byy+cy^3+\text{etc.}=0$ itidem omnes habebit radices reales, quippe quae ſunt reciprocae radicum illius; quocirca aequatio per differentiationem hinc ſimili modo formata

$$a+2by+3cyy+4dy^3+\text{etc.}=0$$

etiam omnes radices habebit reales; reſtituamus nunc pro y valorem $\frac{1}{x}$, ac manifeſtum erit etiam huius aequationis

$$ax^{n-1}+2bx^{n-2}+3cx^{n-3}+4dx^{n-4}+\text{etc.}=0$$

omnes radices futuras eſſe reales.

Quemadmodum hinc duae aequationes vno gradu inferiores ſunt erutae, ita porro ex his tres nouae duobus gradibus inferiores deriuantur, quae ſunt

$$n(n-1)x^{n-2}+(n-1)(n-2)ax^{n-3}+(n-2)(n-3)bx^{n-4}+\text{etc.}=0$$

$$1.(n-1)ax^{n-2}+2.(n-2)bx^{n-3}+3\,(n-3)cx^{n-4}+\text{etc.}=0$$

$$1.2.bx^{n-2}+2.3.cx^{n-3}+3.4.dx^{n-4}+\text{etc.}=0.$$

Simili modo ex his elicientur quatuor aequationes tribus gradibus inferiores, scilicet:

$$n(n-1)(n-2)x^{n-3}+(n-1)(n-2)(n-3)ax^{n-4}+(n-2)(n-3)(n-4)bx^{n-5}+\text{etc.}=0$$

$$1.(n-1)(n-2)ax^{n-3}+2.(n-2)(n-3)bx^{n-4}+3.(n-3)(n-4)cx^{n-5}+\text{etc.}=0$$

$$1.2.(n-2)bx^{n-3}+2.3.(n-3)cx^{n-4}+3.4.(n-4)dx^{n-5}+\text{etc.}=0$$

$$1.2.3.cx^{n-3}+2.3.4.dx^{n-4}+3.4.5.ex^{n-5}+\text{etc.}=0$$

sicque continuo vlterius progredi licet quoniam igitur omnes istae aequationes radices habent reales, quae criteria pro his aequationibus deriuatis habentur, eadem quoque in ipsa aequatione proposita locum habere debent.

Applicatio ad criteria primi principii.

Faciamus ergo applicationem ad criteria, ex primo principio eruta: et prima aequatio deriuata dabit:

$$(n-1)^2a^2 > 2n(n-2)b$$

$$(n-2)^2b^2 > 2(n-1)(n-3)ac-2n(n-4)d$$

$$(n-3)^2c^2 > 2(n-2)(n-4)bd-2(n-1)(n-5)ae+2n(n-6)f$$

etc. etc.

ex

ex ſecunda autem aequatione deriuata naſcuntur haec criteria

$$4bb > 2.6ac$$
$$9cc > 2.8bd - 2.5ae$$
$$16dd > 2.3.5ce - 2.2.6bf + 2.7ag$$
$$25ee > 2.4.6df - 2.3.7cg + 2.2.8bh - 2.8ai$$

etc. etc.

Si tantum primum criterium $aa > 2b$ ad vltimas aequationes cuiusque ordinis applicetur, ſequentia criteria emergent

$$aa > 2b \qquad\qquad aa > 2b$$
$$4bb > 2.3.ac \qquad \text{ſiue} \qquad bb > \tfrac{3}{2}ac$$
$$4.9.cc > 2.1.2.3.4bd \qquad\qquad cc > \tfrac{4}{3}bc$$
$$4.9.16.dd > 2.1.2.3^2.4.5ce \qquad\qquad dd > \tfrac{5}{4}ce$$

etc.

Applicatio ad criterium ſecundi principii

$$aa > \frac{2n}{n-1}b.$$

Cum ſecundum hoc principium pro aequatione quacunque $px^m + qx^{m-1} + nx^{m-2} + \text{etc.} = 0$ habeatur $qq > \frac{2m}{m-1}pr$ binae aequationes vno gradu inferiores dabunt

$$(n-1)^2 aa > \frac{2(n-1)}{n-2}.n.(n-2)b \text{ ſeu } aa > \frac{2nb}{n-1}$$

deinde $4bb > \frac{2.(n-1)}{n-2}.3ac$ ſeu $bb > \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}.ac.$

Tres aequationes duobus gradibus inferiores autem dabunt

I. $(n-1)^2(n-2)^2 aa > \frac{2.n-2}{n-3}.n.(n-1)(n-2)(n-3)b$

seu $aa > \frac{2n}{n-1} b$

II. $4\,(n-2)^2 bb > \frac{2.n-2}{n-3}.3.(n-1)(n-3)ac$

seu $bb > \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2} ac$

III. $4.9.cc > \frac{2.n-2}{n-3}.1.2.3.4.bd$ seu

$cc > \frac{4}{3}.\frac{n-2}{n-3} bd.$

Cum igitur ex quolibet ordine vltima aequatio sola praebeat nouum criterium; omnia criteria hinc nata ita se habebunt

$aa > \frac{2}{1}.\frac{n}{n-1} b$

$bb > \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2} ac$

$cc > \frac{4}{3}.\frac{n-2}{n-3} bd$

$dd > \frac{5}{4}.\frac{n-3}{n-4} ce$

etc.

Hinc euoluamus ista criteria pro aequationibus singulorum graduum.

I°. Pro $xx+ax+b=0$ erit criterium

$aa > 4b$

quod ita est perfectum, vt si sit $aa > 4b$, radices certe sint reales.

II°.

II°. Pro $x^3 + axx + bx + c = 0$

erunt criteria

$aa > 3b$; $bb > 3ac$.

III°. Pro $x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$

erunt criteria

$aa > \frac{8}{3}b$; $bb > \frac{9}{4}ac$; $cc > \frac{8}{3}bd$

IV°. Pro $x^5 + ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$

erunt criteria

$aa > \frac{5}{2}b$; $bb > 2ac$; $cc > 2bd$; $dd > \frac{5}{2}ce$.

V°. Pro $x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dxx + ex + f = 0$

erunt criteria

$aa > \frac{12}{5}b$; $bb > \frac{15}{8}ac$; $cc > \frac{16}{5}bd$; $dd > \frac{15}{8}ce$; $ee > \frac{12}{5}df$.

Scholion.

Omnia haec criteria a *Newtono* in Arithmetica vniuersali sunt prolata et deduci possunt ex criterio aequationum quadratarum, quod si aequatio $pxx + qx + r = 0$ ambas radices habeat reales necessario sit $qq > 4pr$.

Cum enim cuiuscunque ordinis proposita fuerit aequatio, ope tertii principii ex ea tandem plures aequationes quadraticae formae $pxx + qx + r = 0$ erui queant quae omnes radices habent reales, siquidem propositae aequationis omnes radices fuerit reales:

les: hoc principium ad aequationes cuiuscunque gradus extendi poterit.

Ita ex aequatione cubica $x^3 + axx + bx + c$ nascuntur hae duae quadraticae

$$3xx + 2ax + b = 0 \quad \text{et} \quad axx + 2bx + 3c = 0$$

vnde concluditur vt ante

$$aa > 3b \quad \text{et} \quad bb > 3ac.$$

Simili modo aequatio quarti ordinis

$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$ praebet has tres quadraticas

$$4.3.\ xx + 3.2.ax + 2.1.b = 0$$
$$1.3.axx + 2.2.bx + 3.1.c = 0$$
$$1.2.bxx + 2.3.cx + 3.4.d = 0$$

et aequatio quinti gradus

$x^5 + ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$ praebet has quatuor quadraticas

$$5.4.3.\ xx + 4.3.2.ax + 3.2.1.b = 0$$
$$1.4.3\ axx + 2.3.2.bx + 3.2.1.c = 0$$
$$1.2.3.bxx + 2.3.2.cx + 3.4.1.d = 0$$
$$1.2.3.cxx + 2.3.4.dx + 3\ 4.5.e = 0$$

quae supra allata criteria suppeditant.

Quoniam autem operosum foret has formas vlterius continuare rem generatim expediamus et ex aequa-

aequatione cuiuscunque gradus ſtatim aequationem quadraticam quamcunque eliciamus.

Aequationem generalem ita exhibeamus

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px^{\lambda+2} + qx^{\lambda+1} + rx^{\lambda} + \ldots + v = 0$$

0	1	2	$n-\lambda-2$	$n-\lambda-1$	$n-\lambda$	
	0	1	$n-\lambda-3$	$n-\lambda-2$	$n-\lambda-1$	
		0	$n-\lambda-4$	$n-\lambda-3$	$n-\lambda-2$	
			⋮	⋮	⋮	
			⋮	⋮	⋮	
			1	2	3	
			$\lambda+2$	$\lambda+1$	λ	0
			$\lambda+1$	λ	$\lambda-1$ . .	0
			λ	$\lambda-1$	$\lambda-2$ . .	0
			⋮	⋮	⋮	
			⋮	⋮		
			3	2	1	

$$\left.\begin{array}{l} +1.2.3\ldots n-\lambda-2.3.4.5\ldots\lambda+2.pxx \\ +2.3.4\ldots n-\lambda-1.2.3.4\ldots\lambda+1.qx \\ +3.4.5\ldots n-\lambda\ldots 1.2.3\ldots\lambda r \end{array}\right\} = 0$$

Vnde patet pro ternis coefficientibus p, q et r hanc obtineri aequationem quadraticam

quae primo diuiſa per 1. 2. 3. 4 . . . . $n-\lambda-2$ dabit

$$3.4.5\ldots\lambda+2.pxx + \frac{n-\lambda-1}{1.}.2.3.4\ldots\lambda+1.qx + \frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{1.\ 2.}.1.2.3\ldots\lambda r = 0$$

quae denuo per 1. 2. 3 . . . . . λ diuiſa dabit

$$\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.\ 2}pxx + \frac{n-\lambda-1}{1}.\frac{\lambda+1}{1}qx + \frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{1.\ 2}r = 0$$

vnde pro radicibus realibus hoc habetur criterium

$$\frac{(n-\lambda-1)^2(\lambda+1)^2}{1.\ 1}\,qq > 4.\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.\ 2\ \ 1.\ 2}\,pr$$

quod reducitur ad hoc

$$qq > \frac{\lambda+2}{\lambda+1}.\ \frac{n-\lambda}{n-\lambda-1}\,pr.$$

Quemadmodum haec criteria ex caractere aequationum quadraticarum sunt deriuata, ita si caractere aequationum cubicarum, quarum omnes radices sunt reales, simili modo vti velimus, alia noua criteria impetrabimus, sicque certius circa radices imaginarias aequationum iudicium instituere licebit.

Problema.

Caracterem completum inuestigare pro aequationibus cubicis, quarum omnes radices sunt reales.

Solutio.

Quoniam constat aequationis cubicae omnes radices esse reales, quoties regula *Cardani* ad formulas imaginarias perducit; ponamus aequationem cubicam $x^3+axx+bx+c=0$ ex hac forma nasci $(x+\frac{1}{3}a)=\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$ sumtis igitur vtrinque cubis prodit

$$x^3+axx+\tfrac{1}{3}aax+\tfrac{1}{27}a^3=p+q+3(\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q})\times\sqrt[3]{pq}$$

vel $=p+q+(3x+a)\sqrt[3]{pq}$ seu

x^3+axx

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + axx + \frac{1}{3}aax + \frac{1}{27}a^3 \\ \quad -3x\sqrt[3]{pq} - p \\ \quad\quad - q \\ \quad\quad -a\sqrt[3]{pq} \end{array}\right\} = 0$$

quae forma cum aequatione proposita comparata praebet $b = \frac{1}{3}aa - 3\sqrt[3]{pq}$ et

$c = \frac{1}{27}a^3 - p - q - a\sqrt[3]{pq}$; cum ergo sit

$\sqrt[3]{pq} = \frac{1}{9}aa - \frac{1}{3}b = \frac{aa-3b}{9}$ hincque

$pq = \frac{(aa-3b)^3}{729}$ et $p+q = \frac{1}{27}a^3 - \frac{a(aa-3b)}{9} - c = \frac{1}{27}a(9b-2aa) - c$

colligimus $(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq$

$= \frac{1}{729}aa(9b-2aa)^2 - \frac{2}{27}ac(9b-2aa) + cc$

$- \frac{4}{729}(aa-3b)^3$

quae quantitas si fuerit negatiua, formula $p-q$ ideoque ambae litterae p et q obtinebunt valores imaginarios; quod cum sit signum radicum realium statuamus

$$\left(\tfrac{1}{27}a(9b-2aa)-c\right)^2 - \tfrac{4}{729}(aa-3b)^3 = -\omega$$

hincque

$$\tfrac{1}{27}a(9b-2aa) - c = \pm\sqrt{\left(\tfrac{4}{729}(aa-3b)^3 - \omega\right)}$$

et $c = \frac{1}{27}a(9b-2aa) \mp \sqrt{\left(\frac{4}{729}(aa-3b)^3 - \omega\right)}$.

Vnde pro c deducuntur hi limites

$$c < \tfrac{1}{27}a(9b-2aa) + \tfrac{2}{27}(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}$$

$$c > \tfrac{1}{27}a(9b-2aa) - \tfrac{2}{27}(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}.$$

Vel quoniam inde habetur $bb-3ac=\frac{1}{9}(aa-3b)(2aa-3b)\pm 3a\sqrt{(\frac{4}{729}(aa-3b)^3-\omega)}$

pro $bb-3ac$ hi oriuntur limites

$$bb-3ac<\tfrac{1}{9}(aa-3b)(2aa-3b)+\tfrac{2}{9}a(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}$$

$$bb-3ac>\tfrac{1}{9}(aa-3b)(2aa-3b)-\tfrac{2}{9}a(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}.$$

Vnde deducimus

$$\frac{bb-3ac}{aa-3b}<\frac{2aa-3b+2a\sqrt{(aa-3b)}}{9} \text{ seu}$$

$$\frac{bb-3ac}{aa-3b}<\left(\frac{a+\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2 \text{ et}$$

$$\frac{bb-3aa}{aa-3b}>\left(\frac{a-\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2.$$

Quoties ergo formulae $\frac{bb-3ac}{aa-3b}$ valor intra hos limites $\left(\frac{a+\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$ et $\left(\frac{a-\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$ continetur certi ſumus omnes radices noſtrae aequationis cubicae eſſe reales. In quo adeo conſiſtit caracter completus quem quaerimus.

Corollarium 1.

Quia limites inuenti locum habere nequeunt niſi $aa-3b$ ſit quantitas poſitiua, hinc ſtatim perſpicuum eſt radices reales eſſe non poſſe niſi ſit $aa>3b$: quod criterium iam in ſupra allatis continetur.

Corollarium 2.

Deinde cum ambo limites ſint quadrata ideoque quantitates poſitiuae, valor formulae $\frac{bb-3ac}{aa-3b}$ debet

debet esse positiuus; quare cum sit $aa > 3b$ necesse est vt fiat quoque $bb > 3ac$; quod est alterum criterium supra iam allatum.

Corollarium 3.

Videmus ergo non solum ambo criteria ante inuenta in hoc caractere contineri, sed hunc caracterem praeterea aliam conditionem complecti, quae nisi impleatur, radices non futurae sint reales, etiamsi fuerit $aa > 3b$ et $bb > 3ac$.

Mirum igitur videri poterit quod vnicus caracter plura criteria in se complectatur.

Scholion 1.

Si in aequatione cubica sumamus esse $c = 0$ vt ea abeat in quadraticam, manifestum est ad realitatem radicum requiri vt sit $aa > 4b$, atque adeo in hoc contineri caracterem completum. Interim tamen si in nostro caractere inuento statuamus $c = 0$, non tam facile patet inde sequi $aa > 4b$; prodit enim $\frac{bb}{aa-3b} \gtrless \left(\frac{a \mp \sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$ operae igitur erit pretium inuestigare, quomodo iste caracter ad simplicem formam $aa > 4b$ reducatur.

Reuertamur igitur ad conditionem primo inventam, quae posito $c = 0$ abit in hanc formam $aa(9b-2aa)^2 - 4(aa-3b)^3 < 0$

 quae

quae contrahitur in hanc $-27bb(aa-4b) < 0$ seu $bb(aa-4b) > 0$ vnde manifesto sequitur $aa > 4b$. Ceterum tamen memoratu dignum hic vsu venit quod conditio

$$\frac{bb}{aa-3b} \lessgtr \left(\frac{a \pm \sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$$

prorsus conueniat cum ista $aa > 4b$, ita vt neutra plus inuoluat quam altera, sicque haec conuenientia tanquam insigne Theorema spectari possit.

Hoc quidem ostendi potest, quantitatem $\frac{bb}{aa-3b}$ alterutri limiti ipsi fore aequalem si fuerit vel $aa = 4b$ vel $aa = \infty$; intra quos casus extremos vtique cadit $aa > 4b$.

Scholion 2.

Iste caracter completus alio modo prorsus singulari inuestigari potest, vnde autem non patet eum esse completum, nisi de eo iam certiores essemus facti. Sequenti autem modo ratiocinium institui potest.

Si aequatio $x^3 + axx + bx + c$ omnes radices habet reales, tum posito $x = y + p$ aequatio resultans $y^3 + (a+3p)yy + (b+2ap+3pp)y + c + bp + app + p^3 = 0$ etiam habebit radices omnes reales; criteria autem iam cognita dant

I. $(a+3p)^2 > 3(b+2ap+3pp)$ hoc est $aa > 3b$

II. $(b+2ap+3pp)^2 > 3(a+3p)(c+bp+app+p^3)$ hoc est

$$bb + (ab-9c)p + (aa-3b)pp > 3ac$$

quae

quae conditio impletur tam si $p=0$ quo fit $bb>3ac$ quam si $p=\infty$ quia $aa>3b$.

Tribuatur igitur ipsi p eiusmodi valor quo formula illa fit minima, atque etiam nunc illa erit $>3ac$. Verum formula $A+Bp+Cpp$ fit minima sumto $p=\frac{-B}{2C}$ eiusque valor minimus erit $A-\frac{BB}{4C}$; facta ergo applicatione habebimus

$$bb-\frac{(ab-9c)^2}{4(aa-3b)}>3ac.$$

Quia $aa>3b$ multiplicetur per $4(aa-3b)$ et obtinebimus facta euolutione

$$3bb(aa-4b)>81cc+6ac(2aa-9b)$$

quod criterium completum supra inuentum continet.

Conclusio.

Pro Applicatione ergo ad aequationes altiorum graduum si methodo ante exposita inde deriuentur aequationes cubicae huius formae

$$px^3+qxx+rx+s=0.$$

Criterium radicum realium in hoc consistit vt sit

$$\frac{rr-3qs}{qq-3pr}<\left(\frac{q\pm\sqrt{(qq-3pr)}}{3p}\right)^2$$

qua scribendi ratione indicatur quantitatem $\frac{rr-3qs}{qq-3pr}$ intra hos limites $\left(\frac{q+\sqrt{(qq-3pr)}}{3p}\right)^2$ et $\left(\frac{q-\sqrt{(qq-3pr)}}{3p}\right)^2$ contineri debere.

Appli-

Applicatio

ad aequationem quarti ordinis

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Hinc methodo ſupra oſtenſa deriuantur hae duae aequationes cubicae

$$4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c = 0$$
$$ax^3 + 2bx^2 + 3cx + 4d = 0.$$

Vnde, ſi omnes radices ſunt reales, inueniuntur duo ſequentia noua criteria

$$\frac{4bb - 9ac}{9aa - 24b} \lessgtr \left(\frac{3a \pm \sqrt{(9aa - 24b)}}{12}\right)^2 \text{ et}$$

$$\frac{9cc - 24bd}{4bb - 9ac} \lessgtr \left(\frac{2b \pm \sqrt{(4bb - 9ac)}}{3a}\right)^2$$

Simili modo applicatio fieri poſſet ad aequationes quinti gradus, vnde tria criteria obtinerentur, et ita porro ad aequationes altiorum graduum.

Verum res adeo in genere praeſtari poteſt, ita vt propoſita aequatione cuiuscunque ordinis, inter quaternos eius coefficientes ſucceſſiuos tale criterium inueniri poſſit: eodem ſcilicet modo calculum inſtitui opportet, quo ſupra pro criteriis prioris ordinis ſumus vſi (vid. Scholion ante Probl.)

$x^n +$

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} \ldots + px^{\lambda+3} + qx^{\lambda+2} + rx^{\lambda+1} + sx^{\lambda} \ldots + px^2 + qx + v = 0$$

0,	1,	2	$n-\lambda-3$	$n-\lambda-2$	$n-\lambda-1$	$n-\lambda \ldots$,	$n-2$	$n-1$	n
	0	1	$n-\lambda-4$	$n-\lambda-3$	$n-\lambda-2$	$n-\lambda-1 \ldots$	$n-3$	$n-2$	$n-1$
		0	$n-\lambda-5$	$n-\lambda-4$	$n-\lambda-3$	$n-\lambda-2 \ldots$	$n-4$	$n-3$	$n-2$
			⋮	⋮	⋮	⋮			
			⋮	⋮	⋮	⋮			
			1	2	3	4			
			$\lambda+3$	$\lambda+2$	$\lambda+1$	$\lambda \ldots\ldots$	2	1	0
			$\lambda+2$	$\lambda+1$	λ	$\lambda-1 \ldots$	1	0	
			$\lambda+1$	λ	$\lambda-1$	$\lambda-2 \ldots$	0		
			⋮	⋮	⋮	⋮			
			⋮	⋮	⋮	⋮			
			4	3	2	1			

Hinc ergo per continuas differentiationes ad hanc aequationem cubicam peruenitur

$$\left.\begin{array}{l} 1.2.3\ldots(n-\lambda-3).4.5.6\ldots(\lambda+3)px^3 + 2.3.4\ldots(n-\lambda-2).3.4.5\ldots(\lambda+2)qx^2 \\ + 3.4.5\ldots(n-\lambda-1).2.3.4\ldots(\lambda+1)rx + 4.5.6\ldots(n-\lambda).1.2.3\ldots\lambda\, s \end{array}\right\} = 0$$

quae diuisa per $1.2.3\ldots(n-\lambda-3).1.2.3\ldots\lambda$ reducitur ad hanc formam

$$\left.\begin{array}{l} \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{1.2.3}px^3 + \frac{(n-\lambda-2)}{1}.\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.2}qxx \\ + \frac{(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)}{1.2}.\frac{(\lambda+1)}{1}rx + \frac{(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)(n-\lambda)}{1.2.3}s \end{array}\right\} = 0$$

seu

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)px^3 + 3.(\lambda+1)(\lambda+2)(n-\lambda-2)qxx \\ + 3(\lambda+1)(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)rs + (n-\lambda-2)(n-\lambda-1)(n-\lambda)s \end{array}\right\} = 0$$

Quare ex aequatione generali quacunque

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + dx^{n-4} + ex^{n-5} + fx^{n-6} + gx^{n-7} + hx^{n-8} \text{etc.} = 0$$

 elicien-

elicientur sequentes aequationes cubicae

I. Si $\lambda = n-3$ erit

$$n(n-1)(n-2)x^3 + 1.3(n-1)(n-2)axx + 1.2.3.(n-2)bx + 1.2.3\,c = 0$$

seu $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}axx + \frac{(n-2)}{1}bx + c = 0.$

II. Si $\lambda = n-4$ erit

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}ax^3 + 2.\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}bxx + 3.\frac{(n-3)}{1}cx + 4d = 0$$

III. Si $\lambda = n-5$ erit

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}bx^3 + 3.\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}cxx + 6.\frac{n-4}{1}dx + 10e = 0$$

IV. Si $\lambda = n-6$ erit

$$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}cx^3 + 4.\frac{(n-4)(n-5)}{1.2}dxx + 10.\frac{n-5}{1}ex + 20f = 0$$

etc.

Quod si ergo aequatio proposita omnes radices habet reales, singulae hae aequationes cubicae etiam suas radices habebunt reales; Vnde sequentia oriuntur criteria

$$\frac{bb - \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}ac}{aa - \frac{2n}{n-1}b} \lessgtr \frac{1.(n-1)^2}{4.n^2}\left(a \pm \sqrt{\left(da - \frac{2n}{n-1}b\right)}\right)^2$$

$$\frac{cc - \frac{4}{3}.\frac{n-2}{n-3}bd}{bb - \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}ac} \lessgtr \frac{4.(n-2)^2}{9.(n-1)^2aa}\left(b \pm \sqrt{\left(bb - \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}ac\right)}\right)^2$$

$$\frac{dd - \frac{5}{4}.\frac{n-3}{n-4}ce}{cc - \frac{4}{3}.\frac{n-2}{n-3}bd} \lessgtr \frac{9.(n-3)^2}{16.(n-2)^2bb}\left(c \pm \sqrt{\left(cc - \frac{4}{3}.\frac{n-2}{n-3}bd\right)}\right)^2$$

$cc - \frac{6}{5}e$

$$\frac{ee-\frac{6}{5}\cdot\frac{n-4}{n-5}df}{dd-\frac{5}{4}\cdot\frac{n-3}{n-4}ce} \gtrless \frac{16.(n-4)^2}{25.(n-3)^2cc}\left(d \pm \sqrt{\left(dd-\frac{5}{4}\cdot\frac{n-3}{n-4}ce\right)}\right)^2$$

etc. etc.

vnde lex progressionis clare perspicitur.

Obseruatio.

Quae hactenus attulimus praeter primum criterium ad duo genera reducuntur, quae proprietates aequationum quarum omnes radices sunt reales in se complectuntur; primum genus eiusmodi relationes suppeditat, quae inter ternos quosque coefficientes successiuos locum habent, et quae iam pridem sunt cognitae. Alterum genus vero eiusmodi praebet relationes, quae inter quaternos quosque coefficientes successiuos necessario subsistere debent, si quidem omnes radices fuerint reales. Circa vtrumque genus obseruasse iuuabit, nullam accuratiorem relationem vel inter ternos vel quaternos coefficientes successiuos exhiberi posse.

Quoties vel vnica harum relationum in quapiam aequatione locum non inuenit, certo concludere licet non omnes radices esse reales; vtrum autem duae tantum vel plures futurae sint imaginariae, hinc non definitur. Ex defectu quidem vnici criterii concludi oportet ad minimum duas radices fore imaginarias, neque tamen hinc sequitur duorum defectum quatuor radices imaginarias indicare.

Si enim aequatio propoſita fuerit tertii gradus, duo caracteres primi generis ad eam applicari poſſunt, qui etſi ambo deficiant, aequatio tamen non plures quam duas radices imaginarias habere poteſt.

Quemadmodum hos caracteres ex indole aequationum quadraticarum et cubicarum, quarum radices ſunt reales, deriuauimus, ita ſi commode aequationum biquadraticarum caracterem completum pro caſu quo omnes radices ſunt reales exprimere liceret, ſimili modo criteria tertii generis inde deducere poſſemus quibus relationes inter quinos quosque coefficientes ſucceſſiuos continerentur; verum cum formulae nimis prodirent prolixae, ad hunc vſum prorſus ineptae videntur.

Concluſio.

Cum hic plura principia in ſubſidium ſint vocata, coronidis loco oſtendam, quomodo omnia haec criteria ex duobus tantum principiis methodo ſatis ſingulari deduci queant.

Propoſita ſcilicet aequatione cuiuscunque gradus

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} \text{ etc.} = 0$$

cuius omnes radices ſint reales, pro priori principio aſſumo, ſemper eſſe $aa > 2b$, quod per ſe eſt manifeſtum, cum formula $aa - 2b$ exprimat ſummam quadratorum ſingularum radicum, alterum principium

pium in hoc consistit, quod huius aequationis vno gradu inferioris

$$ax^{m-1}+2bx^{m-2}+3cx^{m-3}+4dx^{m-4}+\text{etc.}=0$$

etiam omnes radices futurae sint reales; quod supra est demonstratum.

His iam duobus principiis constitutis ratiocinium ita prosequor.

I. Pro criteriis primi generis, statuo $x=y+p$ denotante p quantitatem realem, vt aequatio hinc resultans etiamnunc omnes suas radices habeat reales, quae erit

$$\left.\begin{array}{llll} y^m+mpy^{m-1} & +\frac{m(m-1)}{2}ppy^{m-2} & +\frac{m(m-1)(m-2)}{6}p^3y^{m-3} & +\text{etc.} \\ +a & +(m-1)ap & +\frac{(m-1)(m-2)}{2}app & +\text{etc.} \\ & +b & +(m-2)bp & +\text{etc} \\ & & +c & +\text{etc.} \end{array}\right\}=0$$

per prius igitur principium necesse est vt hic sit

$$(mp+a)^2>m(m-1)pp+2(m-1)ap+2b$$

seu facta euolutione $mpp+2ap+aa>2b$ quod cum de omnibus valoribus ipsius p valere debeat, necesse est vt etiam de eo valeat, quo ea formula fit minima, quod euenit si sumatur $p=\frac{-a}{m}$, tum autem habebitur $aa>\frac{2m}{m-1}b$; quod est primum criterium primi generis; ex quo reliqua per aequationes quas secundum principium praebet successiue deriuantur

Aequationes	Criteria
$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \text{etc.} = 0$	$aa > \frac{2m}{m-1} b$
$ax^{m-1} + 2bx^{m-2} + 3cx^{m-3} + \text{etc.} = 0$	$bb > \frac{3.(m-1)}{2.(m-2)} ac$
$bx^{m-2} + 3cx^{m-3} + 6dx^{m-4} + \text{etc.} = 0$	$cc > \frac{4.(m-2)}{3.(m-3)} bd$
$cx^{m-3} + 4dx^{m-4} + 10ex^{m-5} + \text{etc.} = 0$	$dd > \frac{5.(m-3)}{4.(m-4)} ce$
etc.	etc.

II. Pro criteriis secundi generis. Retenta substitutione $x = y + p$ aequationis inde resultantis, reiecto primo termino consideremus tres sequentes ad eosque criterium modo inuentum $bb > \frac{3.(m-1)}{2.(m-2)} ac$ applicemus, quod hanc aequationem praebebit

$$\left(\frac{m(m-1)}{2} pp + (m-1)ap + b\right)^2 > \frac{3.(m-1)}{2.(m-2)} (mp + a)\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{6} p^3 + \frac{(m-1)(m-2)}{2} app + (m-2)bp + c\right)$$

vnde facta euolutione peruenietur ad sequentem conditionem

$$\left(aa - \frac{2.m}{m-1} b\right) pp + \frac{2}{m-1}\left(ab - \frac{3m}{m-2} c\right) p + \frac{4}{(m-1)^2} bb > \frac{6}{(m-1)(m-2)} ac$$

statuatur nunc $p = \frac{-\left(ab - \frac{3m}{m-2} c\right)}{(m-1)\left(aa - \frac{2m}{m-1} b\right)}$ vt valor primi membri fiat minimus, obtinebimusque hanc conditionem, multiplicando per $\frac{(m-1)^2}{4}$

$$bb - \frac{\left(ab - \frac{3m}{m-2} c\right)^2}{4\left(aa - \frac{2m}{m-1} b\right)} > \frac{3.(m-1)}{2.(m-2)} ac.$$

Quia iam $aa > \frac{2m}{m-1} b$, conditionem hanc per $4\left(aa - \frac{2m}{m-1} b\right)$ multiplicare licebit; tunc autem facta euolu-

euolutione obtinebimus hoc criterium secundi generis

$$bb\left(3aa-\frac{4m}{m-1}b\right) > \frac{9mm}{(m-2)^2}cc+\frac{6ac}{m-2}\left((m-1)aa-3mb\right)$$

ex quo deinceps eruitur vt supra inuenimus

$$\frac{bb-\frac{3}{2}\cdot\frac{(m-1)}{m-2}ac}{aa-\frac{2m}{m-1}b} \lessgtr \frac{1.(m-1)^2}{4.m^2}\left(a\pm\sqrt{\left(aa-\frac{2m}{m-1}b\right)}\right)^2.$$

Quae formula ad aequationes differentiales applicata dabit reliqua criteria huius secundi generis.

Hinc concludere licet, si quis simili modo progredi, et secundum criterium huius generis ad aequationem transformatam, posito $x=y+p$, accommodare vellet, inde nouum criterium tertii ordinis deduci posse, quod contineret relationem inter quinos coefficientes successiuos: Verum tum in formula resultante littera p ad quartam dimensionem esset ascensurum, vnde eius valor eam formulam minimam reddens non applius commode definiri posset; quamobrem hanc inuestigationem vlterius non prosequor, eo contentus, quod criteria secundi generis, quae adhuc noua videntur, exhibuerim.

CON-