CAPUT XII.

DE AEQUATIONUM DIFFERENTIO-DIFFERENTIALIUM INTEGRATIONE PER APPROXIMATIONES.

Problema 137.

1082.

Proposita aequatione differentio-differentiali quacunque, principia explicare, ex quibus integrationem per approximationes peti oportet.

Solutio.

Versetur aequatio proposita inter binas variabiles x et y, ac posito $\partial y = p \partial x$ et $\partial p = q \partial x$, dabitur aequatio inter quatuor quantitates x, y, p et q, ex qua q ita definire licebit, ut q aequetur functioni cuidam trium quantitatum x, y et p, qua vocata $= V$, sit $q = V$, seu $\partial p = V \partial x$. Hic primo observandum est, integrationem, ut sit determinata, duplicem determinationem requirere, seu duas conditiones quasi pro lubitu praescribi posse, quibus satisfaciat. Scilicet non sufficit, ut posito $x = a$ fiat $y = b$, quemadmodum in aequationibus differentialibus primi gradus usu venire vidimus, sed aliam insuper conditionem adjicere licet, quae sit, ut posito $x = a$ fiat etiam $p = \frac{\partial y}{\partial x} = c$ quantitati datae. His ergo determinationibus constitutis, ut posito $x = a$, fiat $y = b$ et $p = c$, totum integrationis negotium huc reducitur, ut ipsi x alium quemcunque valorem tribuendo, investigentur valores respondentes ipsius y et ipsius p; hoc enim si praestiterimus, aequationis propositae integrale perfecte definiverimus, ut nihil praeterea desiderari possit. Quod cum in genere fieri nequeat, approximationis ratio in hoc consistit, ut ipsi x valor quam minimum ab a discrepans tribuatur, qui sit $x = a + \omega$, et inquiratur, quantum valores quantitatum y et p a primitivis b et c sint discrepaturi. Hic pro principio assumimus, dum x ab a ad $a + \omega$ increscit, etiam quantitatum y et p valores tam parum mutatum iri, ut inde functio V nullam variationem notabilem patiatur. Quare si ponamus, statuendo $x = a$, $y = b$ et $p = c$, fieri $V = F$, eundem valorem F quantitas V retinere censebitur, dum x ab a usque ad $a + \omega$ augetur. Cum igitur pro hoc intervallo minimo habeamus $\partial p = F \partial x$, erit integrando $p = Fx + \text{Const.}$ Verum, quia posito $x = a$, fieri debet $p = c$, erit $p = c + Fx - Fa$. Sit nunc $x = a + \omega$, atque habebimus $p = c + F\omega$, qui est valor ipsius p, valori $x = a + \omega$ respondens. Denique pro hoc minimo intervallo erit $\partial y = c\,\partial x$, ideoque $y = b + cx - ac$, et pro valore $x = a + \omega$ fit $y = b + c\omega$, qui est valor ipsius y valori $x = a + \omega$ conveniens. Quocirca si valores primitivi sint $x = a$, $y = b$ et $p = \frac{\partial y}{\partial x} = c$, ex iisque fiat $V = F$, sequentes valores intervallo quam minimo ab illis remoti erunt

$$x = a + \omega, \; y = b + c\omega, \; p = c + F\omega,$$

qui si porro ut primitivi spectentur, ex iis simili modo per intervallum quam minimum progredi licet, sicque tandem progressus per intervallum quantumvis magnum innotescet.

Corollarium 1.

1083. Quo minora capiantur haec intervalla, eo minus a vero aberrabitur, dummodo quantitates c et F non sint nimis magnae.

sin autem eae adeo in infinitum excrescant, manifestum est, errorem in quantitatibus y et p insignem commissum iri.

Corollarium 2.

1084. Si quantitas c vel F fiat vehementer magna, intervallum, quo y vel p crescit, pro dato accipi potest; ita posito $c\omega = \psi$ erunt sequentes valores

$$x = a + \frac{\psi}{c},\ y = b + \psi \text{ et } p = c + \frac{F\psi}{c}.$$

At si F prodeat quantitas permagna, valor ipsius p intervallo minimo Φ augeri sumatur, ut sit $F\omega = \Phi$, eruntque valores sequentes $x = a + \frac{\Phi}{F}$, $y = b + \frac{c\Phi}{F}$ et $p = c + \Phi$.

Corollarium 3.

1085. Si b sit quantitas infinita, pro valore proximo ipsius y expediet definiri

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{b + c\omega} = \frac{1}{b} - \frac{c\omega}{bb} = \frac{-c\omega}{bb},$$

quae expressio ut sit finita, etiam quantitas c infinita sit oportet; alioquin valor ipsius y respondens non solum ipsi $x = a$ sed etiam ipsi $x = a + \omega$ maneret infinitus.

Scholion 1.

1086. Quoties solutio alicujus problematis pendet ab integratione cujuspiam aequationis differentialis secundi gradus, toties conditiones problematis binas determinationes suppeditare solent; quarum altera, dum ipsi x certus quidam valor $x = a$ tribuitur, exigit ut y datum valorem $y = b$, altera vero ut etiam ratio $\frac{\partial y}{\partial x} = p$ datum valorem $p = c$ consequatur. Quodsi ergo in genere aequationem quandam differentio-differentialem integrare velimus, integrationem ita instituere licet, ut posito $x = a$, fiat $y = b$ et $p = c$, quantitatibus a, b, c ab arbitrio nostro pendentibus. Interim tamen quandoque usu venire potest, ut posito $x = a$, valores ipsarum y et p non penitus ab arbitrio nostro pendeant, sed ex natura aequationis jam datos valores sortiantur, quibus casibus defectus determinationis aliis conditionibus compensatur. Veluti si proponatur haec aequatio

$$xx(a - bx)\partial\partial y - 2x(2a - bx)\partial x\partial y$$
$$+ 2(3a - bx)y\partial x^2 = 6aa\partial x^2,$$

quomodocunque ea per integrationem determinetur, posito $x = 0$ necessario fit $y = a$ et $\frac{\partial y}{\partial x} = p = b$; ita ut pro casu $x = 0$ valores quantitatum y et p minime arbitrio nostro relinquantur. Integrale autem completum reperitur

$$y = a + bx + \frac{(A + Bx)xx}{a - bx},$$

ubi etiamsi constantes A et B pro lubitu assumantur, tamen semper posito $x = 0$ prodit $y = a$ et $p = b$. Hujusmodi ergo casibus mirum non est, si pro dato ipsius x valore, quantitatum y et p valores arbitrio nostro haud permittantur.

Scholion 2.

1087. Exposita ratio aequationes differentio-differentiales per approximationes integrandi, dum per intervalla minima progredimur, quemadmodum etiam in aequationibus differentialibus primi gradus fecimus, certis casibus difficultatibus involvitur, ut nisi remedium afferatur, in usum vocari nequeat. Primum hoc evenit, quando $c = \infty$, tum enim quantumvis exiguum accipiatur intervallum ω, neque ipsius y neque ipsius p valorem cognoscere licet. Simile quoque incommodum turbat, si positis $x = a$, $y = b$ et $p = c$, functio V fiat infinita, ideoque prodeat $F = \infty$, quo casu valor ipsius p non definitur. Deinde etiam casus quibus vel c vel F evanescit, seorsim tractari convenit: etsi enim tum valores ipsarum y et p satis accurate ostenduntur, tamen quia nullam mutationem patiuntur, dum mutatio altiore ipsius ω potestate exprimitur, ipsam mutationem investigari utile est, quo in progressu minus a veritate aberretur. Sin autem quantitas b evadat infinita, jam animadvertimus, loco ipsius y ejus reciprocum $\frac{1}{y}$ explorari deberi. Quemadmodum ergo difficultatibus ante memoratis sit occurrendum, diligentius perpendamus.

Problema 138.

1088. Si integrationem per intervalla instituendo, pro initio cujuspiam intervalli, posito $x = a$, $y = b$ et $p = c$ eveniat, ut quantitas c sit vel evanescens vel infinita, integrationem per hoc intervallum absolvere.

Solutio.

Praecedens approximatio dederat $y = b + c(x - a)$, unde si $c = 0$, incrementum ipsius y altiore potestate ipsius $x - a$ exprimetur, scilicet $y = b + \mathrm{A}(x - a)^\lambda$, existente $\lambda > 1$, rejectisque altioribus potestatibus, quae prae hac, ob intervallum $x - a$ minimum, recte contemnuntur. Sin autem sit $c = \infty$, valor ipsius y simili modo repraesentari potest, $y = b + \mathrm{A}(x - a)^\lambda$, existente $\lambda < 1$, ita tamen ut nihilo sit major; utroque ergo casu eadem investigatio est, ut ex aequatione proposita $\partial p = \mathrm{V}\partial x$ tam coefficiens A quam exponens λ definiatur. Jam ex illa aequatione deducimus

$$\frac{\partial y}{\partial x} = p = \lambda \mathrm{A}(x - a)^{\lambda - 1} \text{ et}$$

$$\partial p = \lambda(\lambda - 1)\mathrm{A}(x - a)^{\lambda - 2}\partial x,$$

ac necesse est, eandem expressionem resultare, si in formula $V\,\partial x$ statuatur

$$y = b + A(x-a)^{\lambda} \text{ et } p = \lambda A(x-a)^{\lambda-1},$$

unde evidens est, fore

$$c = 0 \text{ si } \lambda > 1, \text{ et } c = \infty \text{ si } \lambda < 1.$$

Cum jam V sit functio ipsarum x, y et p, ponatur ubique $x = a$, nisi quatenus formula $x - a$ inest, quae relinquatur, tum vero $y = b$, nisi hinc prodeat $V = 0$ vel $V = \infty$; hoc enim si eveniat, pro y valor $b + A(x-a)^{\lambda}$ scribatur, similique modo pro p scribatur $\lambda A(x-a)^{\lambda-1}$. Rejiciantur autem formulae $x - a$ potestates altiores prae inferioribus, sicque pro V orietur expressio hujus formae $C(x-a)^{\mu}$, quae formulae $\lambda(\lambda-1)A(x-a)^{\lambda-2}$ aequari debet, unde tam coëfficiens assumtus A quam exponens λ definietur, ideoque vero proximi valores

$$y = b + A(x-a)^{\lambda} \text{ et } p = \lambda A(x-a)^{\lambda-1}$$

innotescent, qui eo minus a veritate recedent, quo minor differentia inter a et x constituatur. Casus autem quo $\lambda = 1$ per se est perspicuus, atque in praecedente problemate pertractatus, cum is sit solus quo quantitas c finitum nanciscitur valorem.

Corollarium 1.

1089. Si eveniat ut posito $c = \infty$, quo casu esse debebat $\lambda < 1$, functio V finitum obtineat valorem, cui formula $\lambda(\lambda-1)A(x-a)^{\lambda-2}$ aequari nequit, casus per se nihil habet difficultatis, et valor ipsius y etiam pro minimo excessu ipsius x super a revera infinitus evadet.

Corollarium 2.

1090. Facilius hoc perspicere licet ex exemplo $\partial p = 6 x \partial x$ unde fit

$$p = c + 3 x x - 3 a a = \frac{\partial y}{\partial x}, \text{ hincque}$$
$$y = b + (c - 3 a a)(x - a) + x^3 - a^3, \text{ seu}$$
$$y = b - a c + 2 a^3 + (c - 3 a a) x + x^3.$$

Si ergo constans c sumatur infinita, valor ipsius y semper erit infinitus, solo excepto casu $x = a$.

Corollarium 3.

1091. Sin autem sumto $c = 0$, quo casu esse debet $\lambda > 1$ functio V finitum habeat valorem eumque adeo constantem, posito $x = a$ et $y = b$, ei formula $\lambda (\lambda - 1) A (x - a)^{\lambda - 2}$ aequabitur sumendo $\lambda = 2$, et $2 A =$ illi valori constanti. Veluti in praecedente exemplo fit $V = 6 a = 2 A$, hinc $A = 3 a$, eritque proxime $y = b + 3 a (x - a)^2$, quod etiam congruit cum integrali invento quod posito $c = 0$ est

$$y = b + 2 a^3 - 3 a a x + x^3 = b + (x + 2 a)(x - a)^2$$

quae expressio facto $x = a$ in illam abit.

Scholion 1.

1092. Posito $c = 0$ functio V, si in ea scribatur $x = a$ $y = b$ et $p = c = 0$, valorem nanciscetur vel infinite magnum vel finitum, vel adeo evanescentem. Primo casu, quo fit $V = \infty$ ut ei aequari possit $\lambda (\lambda - 1) A (x - a)^{\lambda - 2}$, sumto $x = a$ necesse est sit $\lambda < 2$, existente $\lambda > 1$; ut autem hinc quantitates A et λ definiantur, in functione V scribi oportet

$$y = b + A (x - a)^{\lambda} \text{ et } p = \lambda A (x - a)^{\lambda - 1},$$

itemque $x = a$, nisi ubi formula $x - a$ occurrit; hoc modo qui per hypothesin casu $x = a$ fit $V = \infty$; iste valor prodibit $= C(x-a)^{-\alpha}$, quo collato cum $\lambda(\lambda-1)A(x-a)^{\lambda-2}$ reperientur A et λ, dum ne prodeat $\lambda < 1$, qui casus cum $c = 0$ subsistere nequit. Secundo casu quo prodit $V =$ quantitati finitae, capi oportet $\lambda = 2$, sin autem tertio casu sit $V = 0$, sumi debet $\lambda > 2$, ut ejus valor in formula

$$\lambda(\lambda-1)A(x-a)^{\lambda-2}$$

contineatur. At si debeat esse $c = \infty$, fieri nequit ut vidimus; ut functio V finitum obtineat valorem, multo minus evanescentem, nisi quidem casus incongruos, quibus y perpetuo maneat infinita, admittere velimus. Tum igitur functio V necessario valorem infinitum induit cum formula

$$\lambda(\lambda-1)A(x-a)^{\lambda-2}$$

comparandum, ita ut sit $\lambda < 1$. Hinc igitur patet, determinationem quantitatis c non semper arbitrio nostro relinqui, sed quandoque ex indole ipsius aequationis nobis praescribi. Veluti si proponatur haec aequatio $\partial\partial y = \frac{2\partial x^2}{(x-a)^3}$, erit

$$\frac{\partial y}{\partial x} = p = A - \frac{1}{(x-a)^2} \text{ et } y = B + Ax + \frac{1}{x-a},$$

unde posito

$$x = a \text{ fit } c = A - \frac{1}{0^2} \text{ et } b = B + Aa + \frac{1}{0}, \text{ ergo}$$

$$A = c + \frac{1}{0^2}, \text{ et } B = b - ac - \frac{a}{0^2} + \frac{1}{0},$$

quare, ne aequatio integralis omnino in infinitis versetur, litterae b et c non possunt non esse infinitae.

Scholion 2.

1093. Non autem omnes ordines infinitorum et evanescentium in formula $(x-a)^\lambda$, casu $x = a$, contineri, jam observavimus; expressio scilicet $xx\,lx$, casu $x = 0$, infinities superat potestatem secundam x^2, interim tamen infinities minor est potestate $x^{2-\alpha}$, quantumvis etiam exigua fractio α accipiatur. Quare si in superiori solutione formulas ita instruere velimus, ut ad omnes ordines tam infinitorum quam evanescentium pateant, statui conveniet

$$y = b + A(x-a)^\lambda [l(x-a)]^\mu,$$

unde fit

$$\frac{\partial y}{\partial x} = p = \lambda A(x-a)^{\lambda-1}[l(x-a)]^\mu + \mu A(x-a)^{\lambda-1}[l(x-a)]^{\mu-1};$$

at posito $x = a$, pars prior est ad posteriorem ut $l(x-a)$ ad 1, hoc est ut $\infty : 1$, ex quo sufficit sumsisse

$$p = \lambda A(x-a)^{\lambda-1}[l(x-a)]^\mu,$$

ex quo simili modo colligitur

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \lambda(\lambda-1)A(x-a)^{\lambda-2}[l(x-a)]^\mu,$$

quae expressio cum functione V, postquam in ea scripserimus $x = a$, $y = b$ et $p = c$, seu potius

$$y = b + A(x-a)^\lambda [l(x-a)]^\mu \text{ et } p = \lambda A(x-a)^{\lambda-1}[l(x-a)]^\mu$$

comparari debet, ut inde tam constans A quam exponentes λ et μ innotescant. Haec ergo tenenda sunt in ista investigatione, quo ea ad plures casus extendatur.

Problema 139.

1094. Approximationem ante expositam accuratius persequi, ut sumtis intervallis etiam paulo majoribus minus a vero aberretur.

Solutio.

Posito $\partial y = p\,\partial x$, aequatio differentio-differentialis hac forma $\frac{\partial p}{\partial x} = V$ exhibeatur, ex qua ante p ita definivimus, quasi V esset quantitas constans pro intervallo saltem vehementer parvo, und obtinuimus $p = c + V(x - a)$, postquam scilicet in V posuerimus $x = a$, $y = b$ et $p = c$, qui sunt valores primitivi per intervallum $x - a = \omega$ retinendi. Cum autem functio V interea non sit constans, quia x, y et p involvit, revera erit

$$p = c + V(x - a) - \int (x - a) \partial V.$$

Ponamus igitur

$$\partial V = P \partial x + Q \partial y + R \partial p,$$

ut sit

$$\partial V = (P + Q p + R V) \partial x,$$

et nunc quantitatem $P + Qp + RV$ ut constantem spectemus, cujus valor prodeat ponendo $x = a$, $y = b$ et $p = c$, quo facto V in F abire supra sumsimus, eritque

$$p = c + F(x - a) - \tfrac{1}{2}(P + Qc + RF)(x - a)^2.$$

Hinc porro ob $\partial y = p \partial x$, fit

$$y = b + c(x - a) + \tfrac{1}{2} F (x - a)^2 - \tfrac{1}{6}(P + Qc + RF)(x + a)^3,$$

similique modo approximationem ulterius prosequi licet. Quando autem quantitates P, Q, R et V formulam $x - a$ ejusve potestates complectuntur, quam non amplius ut constantem spectare licet, ejus ratio in integratione est habenda, qua fit ut in seriebus approximantibus formulae $x - a$ potestates non ordine ascendant. Tum igitur conveniet pro p ejusmodi seriei initium assumi

$p = c + A (x - a)^\lambda$, unde fit

$y = b + c(x - a) + \frac{A}{\lambda + 1}(x - a)^{\lambda + 1}$, et quia

$\frac{\partial p}{\partial x} = \lambda A (x - a)^{\lambda - 1}$,

huic formulae aequari debet functio V, postquam in ea pro y et p valores assumtos, et a pro x scripserimus, nisi formula $x - a$ ingrediatur, hoc modo tam exponens λ quam coëfficiens A determinabitur.

Si c sit $= 0$ vel $= \infty$, ejus ratio potest in calculum introduci, ut ponatur

$$p = f(x - a)^n + \mathrm{A}(x - a)^\lambda,$$

unde fit

$$y = b + \frac{f}{n+1}(x - a)^{n+1} + \frac{\mathrm{A}}{\lambda+1}(x - a)^{\lambda+1},$$

qui valores si loco x et p substituantur in functione V, prodire debet

$$nf(x - a)^{n-1} + \lambda \mathrm{A}(x - a)^{\lambda - 1}.$$

Corollarium 1.

1095. Hoc modo per intervalla continuo ulterius progredi licet, dummodo singula non majora accipiantur, quam ut errores commissi maneant insensibiles; atque hac quidem correctione errores illi diminuuntur, ut intervalla etiam majora statui queant.

Corollarium 2.

1096. Pro primo scilicet intervallo valores primitivi $x = a$, $y = b$ et $p = c$ pro lubitu assumuntur, et valores in fine intervalli inventi praebent valores initiales pro secundo intervallo, ex quibus calculus pro hoc intervallo perinde expeditur ac primo; sicque continuo ulterius est progrediendum.

Scholion.

1097. Hujus problematis duplicem solutionem dedimus, quarum prior etsi latissime patere videtur, certis tamen casibus in usum vocari nequit; iis ergo altera solutione uti conveniet. Existunt autem tantum plerumque paucissima ejusmodi intervalla, quae posteriorem methodum postulant, dum reliqua omnia ope prioris expedire licet. Evenit hoc, quando pro quopiam intervallo quantitates V et c vel evanescunt vel in infinitum excrescunt; quin etiam fieri potest, ut quantumvis exiguum intervallum accipiatur, quantitates y et p variationibus infinitis sint obnoxiae, quarum repraesentatio determinationem prorsus singularem requirit. Veluti si proponatur haec aequatio $\partial\partial y + \frac{y\,\partial x^2}{xx} = 0$, intervallum ab $x = 0$ usque ad $x = \omega$, etiamsi ω quam minimum assumatur, infinitam mutationem in valoribus y et p indicat; id quod ex ejus integrali completo perspicitur, quod cum sit

$$y = \mathrm{A}\, x^{\frac{1}{2}} \sin. \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, l\, x + \alpha\right),$$

hincque

$$p = \frac{\mathrm{A}}{2\sqrt{x}} \sin. \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, l\, x + \alpha\right) + \frac{\mathrm{A}\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} \cos. \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, l\, x + \alpha\right),$$

seu

$$p = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{x}} \sin. \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, l\, x + \alpha + 60^\circ\right),$$

evidens est si $x = 0$, fore quidem $y = 0$, sed ipsius p valorem esse incertum. At ipsi x valorem quam minimum tribuendo, y quidem minimum retinebit valorem, sed qui pro minimo intervallo modo sit positivus, modo evanescens, modo negativus, ob maximam mutationem, quam $l\,x$ patitur, quantitas autem p interea transit per omnes mutationes possibiles. Idem luculentius perspicitur ex hoc exemplo

$$\partial\partial y + \frac{2\,\partial x\,\partial y}{x} - \frac{ff\,y\,\partial x^2}{x^4} = 0,$$

cujus integrale est $y = \mathrm{A} \sin. \left(\frac{f}{x} + \alpha\right)$; dum enim x a 0 ad ω crescit, angulus $\frac{f}{x} + \alpha$ ab infinito ad finitum transibit, ejusque sinus interea omnes mutationes ab $+1$ ad -1 infinities adeo subibit. Quando ergo ejusmodi intervalla occurrunt, mirum non est, si consuetae methodi approximandi deficiant, quippe quae hoc principio innituntur, quod mutationes per intervalla minima, sint etiam valde parvae; his autem intervallis exceptis solutio praescripta semper cum usu adhiberi potest.

Exemplum 1.

1098. *Proposita aequatione*

$$\partial\partial y + \frac{y\partial x^2}{fx} = 0,$$

ejus integrationem per approximationem absolvere.

Cum ergo sit $\partial p = -\frac{y\partial x}{fx}$, erit $V = \frac{-y}{fx}$; quare si pro initio intervalli sit $x = a$, $y = b$ et $p = c$, inde tantillum progrediendo, per solutionem priorem, ob

$$P = \frac{y}{fxx} = \frac{-1}{aaf},$$

$$Q = \frac{-1}{fx} = \frac{-1}{af}, \text{ et } R = 0,$$

habebimus

$$p = c - \frac{b}{af}(x-a) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{aaf} - \frac{c}{af}\right)(x-a)^2 \text{ et}$$

$$y = b + c(x-a) - \frac{b}{2af}(x-a)^2.$$

Sumto ergo $x - a = \omega$, pro intervallo sequente erunt valores initiales

$$a' = a + \omega,$$

$$b' = b + c\omega - \frac{b\omega^2}{2af}, \text{ et } c' = c - \frac{b\omega}{af} - \frac{(b-ac)\omega\omega}{2aaf},$$

unde simili modo valores initiales pro intervallo sequente colliguntur. Verum si pro quopiam intervallo fiat $a = 0$, operatio peculiari modo institui debet. Posito scilicet pro initio hujus intervalli $x = 0$, $y = b$ et $p = c$, statuatur

$$p = c + Ax^\lambda \text{ et } y = b + cx + \frac{Ax^{\lambda+1}}{\lambda+1}, \text{ erit}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \lambda A x^{\lambda-1} = \frac{-y}{fx} = \frac{-b}{fx} - \frac{c}{f} - \frac{Ax^\lambda}{(\lambda+1)f},$$

cui, nisi sit $b = 0$, satisfieri nequit; prodiret enim $\lambda = 0$ et $A = \infty$, unde concludimus poni debere $y = b + Axlx$, ut sit

$p = A\,l\,x + A$ et $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{A}{x} = \frac{-b - A\,x\,l\,x}{f\,x}$, hinc $A = -\frac{b}{f}$. Verum quo hinc p accuratius cognoscere liceat, statuamus

$$y = b + A\,x\,l\,x + B\,x, \text{ erit}$$
$$p = A\,l\,x + A + B \text{ et } \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{A}{x},$$

unde concluditur ut ante $A = \frac{-b}{f}$, et B manet indeterminatum, ita ut sit

$$y = b - \frac{b\,x}{f}\,l\,x + B\,x \text{ et } p = \frac{-b}{f}\,l\,x - \frac{b}{f} + B,$$

nisi ergo sit $b = 0$, casu $x = 0$, quantitas c necessario est infinita. Quamobrem si intervalli initio sit $x = 0$, $y = b$ et $p = \infty$, pro ejus fine et initio sequentis erit

$$x = \omega,\; y = b - \frac{b\,\omega}{f}\,l\,\omega \text{ et } p = \frac{-b}{f}\,l\,\omega.$$

Exemplum 2.

1099. *Proposita sit haec aequatio*

$$x\,x\,\partial\,\partial\,y - 2\,x\,\partial\,x\,\partial\,y + 2\,y\,\partial\,x^2 = \frac{x^2\,y\,\partial\,x^2}{f\,f},$$

quam per approximationem integrari oporteat.

Cum sit

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2\,p}{x} - \frac{2\,y}{x\,x} + \frac{y}{f\,f} = V, \text{ erit}$$
$$P = \frac{-2\,p}{x\,x} + \frac{4\,y}{x^3};$$
$$Q = \frac{-2}{x\,x} + \frac{1}{f\,f} \text{ et } R = \frac{2}{x}.$$

Hinc si pro cujusque intervalli initio sit $x = a$, $y = b$, $p = c$, ob $F = \frac{2\,c}{a} - \frac{2\,b}{a\,a} + \frac{b}{f\,f}$, erit

$$p = c + \left(\frac{2\,c}{a} - \frac{2\,b}{a\,a} + \frac{b}{f\,f}\right)(x - a)$$
$$- \tfrac{1}{2}\left(\frac{c}{f\,f} + \frac{2\,b}{a\,f\,f}\right)(x - a)^2, \text{ et}$$
$$y = b + c\,(x - a) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{2\,c}{a} - \frac{2\,b}{a\,a} + \frac{b}{f\,f}\right)(x - a)^2;$$

unde calculus per intervalla facile continuatur, dum ne sit $a = 0$. Hoc autem casu quo $a = 0$, difficulter intervallum computo definitur, quia tum fieri nequit, ut quantitatibus b et c dati valores tribuantur, id quod inde facillime intelligitur, quod aequationis propositae integrale completum est

$$y = A\, e^{\frac{x}{f}} x + B\, e^{\frac{-x}{f}} x;$$

posito enim $x = 0$, necessario fit $y = 0$, nisi coëfficientes A et B infinitos capere velimus. Sumto autem $b = 0$, approximatio est in promtu.