CORRECTIONS NÉCESSAIRES

POUR

LA THÉORIE DE LA DÉCLINAISON MAGNÉTIQUE, PROPOSÉE DANS LE XIII VOLUME DES MÉMOIRES.

PAR M. L. EULER.

Mon but principal, dans l'eſſai que j'avois propoſé ſur la déclinaiſon magnétique, a été de faire voir, que pour expliquer les phénomenes bizarres que la mappemonde de feu Mr. Halley nous préſente, il ſuffit de ſuppoſer dans la terre deux poles magnétiques, & qu'on n'eſt nullement obligé de recourir à quatre, comme ce grand homme ſe l'étoit imaginé. Auſſi mon ſentiment paroit-il ſuffiſamment confirmé par les lignes analogues à celles de Halley pour les différentes déclinaiſons, que j'y ai déduites de l'hypotheſe de deux poles magnétiques ſeulement, quoique d'ailleurs la théorie elle-même, ſur laquelle j'ai fondé ces concluſions, ſoit ſujette à des difficultés très embaraſſantes. Pour trouver la déclinaiſon magnétique en chaque lieu de la terre, je concevois un plan qui paſſoit par ce lieu & les deux poles magnétiques, & je regardois l'interſection de ce plan avec l'horizontal comme la direction de l'aiguille aimantée. On ne ſauroit douter que la véritable direction magnétique ne tombât dans ce plan, & partant, ſi cette direction étoit horizontale, il ſeroit bien certain que la bouſſole montreroit ladite interſection. Mais il faut bien diſtinguer la véritable direction magnétique, de celle que la bouſſole indique, puiſque celle-là eſt ſouvent fort inclinée à l'horizon, pendant que celle-ci eſt toujours horizontale. Pour connoitre la véritable direction magnéti-

 que,

que, il faut principalement avoir égard à l'inclinaiſon de l'aiguille aimantée, ou bien à cette ſituation dans laquelle l'aiguille repoſeroit, ſi elle étoit librement mobile autour de ſon centre de gravité, en ſorte que la gravité n'y eût aucune influence. Cette ſituation ſe trouvera donc ſans contredit dans le plan qui paſſe par le lieu propoſé de la terre & les deux poles magnétiques; mais, quand elle eſt inclinée à l'horizon, & qu'on en charge le bout élevé d'un petit poids pour la rendre horizontale, ſon mouvement ſe fera dans un plan vertical, y étant déterminé par l'action de la gravité; & partant, quand l'aiguille ſera parvenue à la direction horizontale, elle ne ſe trouvera plus dans le plan qui paſſe par les deux poles magnétiques, à moins que ce plan ne ſoit auſſi vertical. De là il eſt évident, que la direction horizontale de l'aiguille aimantée pourra s'écarter très conſidérablement de l'interſection du dit plan, tiré par les poles magnétiques avec l'horizon, & cela d'autant plus dans l'obliquité de ce plan à l'horizon, que l'inclinaiſon de l'aiguille ſera grande.

Planch. XIV. Fig. 1. Pour mettre cela dans tout ſon jour, concevons une ſphere décrite autour du lieu propoſé de la terre C, où le grand cercle NS repréſente l'horizon, & le diametre NCS la ligne méridienne, dont le point N marque le Nord & S le Sud. Enſuite, le plan qui paſſe par le lieu C & les deux poles magnétiques, ſoit repréſenté par le grand cercle PIQ, qui coupe l'horizon en I: & puiſque la véritable direction magnétique ſe trouve dans le plan PIQ, ſuppoſons qu'elle ſoit dirigée au point L, de ſorte qu'une aiguille librement ſuſpendue par ſon centre de gravité en C, prenne la ſituation CL, ſon bout boréal étant dirigé vers le point L. Tirons maintenant par ce point L le cercle vertical ZLY, qui coupe l'horizon au point M, & l'arc ML, ou l'angle MCL, nous marquera l'inclinaiſon de l'aiguille aimantée, dirigée par le bout boréal au deſſous de l'horizon. Cela poſé, il eſt clair qu'en réduiſant cette aiguille au plan horizontal, en chargeant ſon bout élevé d'un poids ſuffiſant, elle y prendra la ſituation CM, qui eſt par conſéquent celle que la bouſſole doit indiquer, & partant l'arc NM, ou l'angle NCM, en marquera la déclinaiſon.

Or,

Or, dans mon Mémoire sur ce sujet, inséré dans le XIII Volume des Mémoires de l'Académie, j'avois supposé que la ligne CI marqueroit toujours la direction de la boussole, & que l'arc NI seroit la mesure de la déclinaison; d'où il est évident que cette hypothese ne sauroit avoir lieu que dans les endroits dans lesquels, ou l'inclinaison ML est nulle, ou le plan PIQ tiré par les magnétiques verticaux. Dans tous les autres lieux de la terre, la véritable déclinaison magnétique sera différente de celle que j'avois supposée dans mon Mémoire, & partant aussi les lignes que j'avois tirées par tous les lieux où la déclinaison devoit être la même, s'écarteront de la vérité. Cependant, puisque le plan PIQ est presque partout à peu près vertical, l'aberration marquée par l'arc IM ne sauroit être assez grande pour changer tout à fait la figure desdites lignes; ce qui peut suffire en gros pour prouver qu'il n'y a que deux poles magnétiques dans la terre.

Pour mieux juger de cette erreur, commise dans la déclinaison de la boussole, on sait par la Trigonométrie sphérique, que connoissant dans le triangle sphérique IML, rectangle en M, l'angle LIM, avec l'inclinaison magnétique ML, on trouve par-là $\sin IM = \frac{\text{tag}\ .\ LM}{\text{tag}\ .\ LIM}$.

Il s'agit donc de corriger cette erreur dans les recherches que j'avois entreprises dans mon Mémoire précédent; ce qui est d'autant plus nécessaire, que sans cette correction il seroit impossible, ou de conclure par plusieurs observations les deux poles magnétiques de la terre, ou en les supposant connus, d'en déterminer les lignes Halleyennes par tous les lieux où la déclinaison est la même. Or c'est de là que dépendent tous les avantages qu'on a lieu d'attendre d'une connoissance plus parfaite de la déclinaison magnétique. Mais à présent il n'y a aucun doute que ces mêmes recherches ne deviennent incomparablement plus difficiles, puisqu'il faut aussi avoir égard à l'inclinaison magnétique, dont on n'a encore presque aucune connoissance pour la bien observer, quoique les instrumens inventés par feu Mr. Dieterich de de Bâle, ſur les idées de Mr. Daniel Bernoulli, ſoyent très propres pour cet effet. A cauſe de ce défaut, je ſerai obligé de recourir encore à une autre hypotheſe pour établir la véritable direction magnétique, que je tâcherai pourtant d'approcher de la vérité, autant que les expériences faites ſur les aimans le permettront. Par cette raiſon je ne donne ces recherches que comme un eſſai, pour pénétrer tant ſoit peu dans la véritable Théorie de la Déclinaiſon magnétique, qui eſt ſans doute une des plus épineuſes matieres qu'on ait traitées juſqu'ici.

DÉFINITION 1.

1. *L'axe magnétique de la terre eſt la ligne droite tirée d'un pole magnétique de la terre à l'autre.*

Fig. 2. Que la ſphere, repréſentée dans la figure 2. autour du centre C, ſoit la terre, dont les poles magnétiques ſe trouvent aux points A & B de ſa ſurface, & la ligne droite AB ſera l'axe magnétique de la terre.

Corollaire 1.

2. Lorſque les deux poles magnétiques A & B ſont diamétralement oppoſés ſur la ſurface de la terre, l'axe magnétique AB paſſera par le centre de la terre C, & en ſera un diametre.

Corollaire 2.

3. Mais ſi les deux poles magnétiques ne ſont pas diamétralement oppoſés, l'axe magnétique AB, ne paſſant point par le centre C, ſera plus petit que le diametre, & cela d'autant plus, qu'il ſe trouvera plus éloigné du centre de la terre C.

DÉFINITION 2.

4. *Le centre magnétique eſt le point* D, *qui ſe trouve au milieu de l'axe magnétique* AB, *de ſorte que les diſtances* AD & BD *ſoyent égales entr'elles.*

Co-

Corollaire 1.

5. En tirant donc du centre de la terre C au centre magnétique D la droite CD, elle ſera perpendiculaire ſur l'axe magnétique AB, & marquera la diſtance de l'axe magnétique au centre de la terre C.

Corollaire 2.

6. Plus cette diſtance CD ſera grande, plus ſera petit l'axe magnétique AB. Qu'on tire la ligne CA, qui étant un rayon de la terre, le demi-axe magnétique ſera $DA = \sqrt{(AC^2 - CD^2)}$, & partant l'axe magnétique $AB = 2\sqrt{(AC^2 - CD^2)}$, ou bien on aura $AB^2 = EF^2 - 4CD^2$, la ligne EF repréſentant un diametre de la terre.

DÉFINITION 3.

7. *L'équateur magnétique eſt un grand cercle de la terre perpendiculaire à l'axe magnétique* AB.

Corollaire 1.

8. L'équateur magnétique paſſe donc, tant par le centre de la terre C, que par le centre magnétique D. Or, comme on peut tirer une infinité de grands cercles par les deux centres C & D, celui au plan duquel l'axe magnétique AB eſt perpendiculaire, ſera l'équateur magnétique.

Corollaire 2.

9. Entant que l'axe magnétique AB ne paſſe point par le centre de la terre C, les poles magnétiques A & B ſeront différens des poles de l'équateur magnétique, & ils en ſeront éloignés de part & d'autre d'un arc de grand cercle, dont le ſinus eſt égal à la diſtance CD de l'axe magnétique au centre de la terre.

Corollaire 3.

10. Pour avoir les poles de l'équateur magnétique, on n'a qu'à tirer par le centre de la terre C le diametre *ab*, parallele à l'axe

 magné-

magnétique AB, lequel étant auſſi perpendiculaire à l'équateur magnétique, ſes extrémités *a* & *b* en marqueront les poles: & il eſt évident que la diſtance des centres CD eſt le ſinus des arcs A*a* & B*b*.

DÉFINITION 4.

11. *Le diametre magnétique de la terre eſt celui qui paſſe par le centre magnétique* D *de la terre.*

COROLLAIRE 1.

12. Le diametre magnétique eſt donc la ligne EF, tirée par par le centre de la terre C, qui eſt perpendiculaire à l'axe magnétique AB, & qui paſſe par conſéquent par ſon milieu D, ou le centre magnétique.

COROLLAIRE 2.

13. Le diametre magnétique EF ſe trouve donc auſſi dans l'équateur magnétique, & y marque les points E & F, qui ſont des termes fixes, & propres pour compter de là les autres points.

DÉFINITION 5.

14. *Le premier méridien magnétique eſt le grand cercle de la terre tiré par l'axe magnétique* AB.

COROLLAIRE 1.

15. C'eſt dans ce premier méridien magnétique que ſe trouvent, tant les poles magnétiques A & B, que les poles *a* & *b* de l'équateur magnétique, auquel ledit méridien eſt perpendiculaire.

COROLLAIRE 2.

16. Ce premier méridien magnétique n'eſt déterminé, qu'entant que l'axe magnétique AB n'eſt pas un diametre. Car, ſi les deux poles magnétiques A & B étoient diamétralement oppoſés l'un à l'autre, tout grand cercle paſſant par ces poles n'auroit aucune préférence.

Co-

COROLLAIRE 3.

17. Le premier méridien magnétique est composé de deux parties AEB & AFB, inégales entr'elles lorsque l'axe magnétique AB ne passe point par le centre de la terre. L'une de ces parties sera plus grande qu'un demi grand cercle, & l'autre d'autant plus petite: l'une & l'autre peuvent être regardées comme deux méridiens magnétiques opposés.

DÉFINITION 6.

18. *Toute section plane du globe de la terre, faite par l'axe magnétique* AB, *sera nommée un méridien magnétique.*

COROLLAIRE 1.

19. Il est donc possible de faire passer par chaque lieu de la terre un méridien magnétique; on n'a qu'à concevoir un plan qui passe par le lieu proposé & par les deux poles magnétiques A & B.

COROLLAIRE 2.

20. Tous ces méridiens magnétiques seront donc de petits cercles de la sphere, à l'exception du premier méridien magnétique, qui est un grand cercle, supposé que l'axe magnétique AB ne passe point par le centre de la terre.

REMARQUE.

21. Pour se former une idée juste de la position de chaque méridien magnétique, le moyen le plus naturel est sans doute d'en savoir l'inclinaison au premier méridien magnétique. La 2. figure représente un tel méridien quelconque A*e*B, qui ne passant point par le centre de la terre C, sera un petit cercle de la sphere, duquel il est d'abord clair, que son plan est toujours perpendiculaire à l'équateur magnétique, & qu'il en sera partagé en deux parties égales. Soit donc *e* le point où ce méridien est traversé par l'équateur magnétique, & que E*e* représente l'arc de cet équateur compris entre le premier mé-

ridien AEB & celui-ci AeB, & il eſt clair que cet arc donnera une autre détermination pour la poſition de ce méridien AeB, puiſque cet arc n'eſt pas la meſure de l'angle dont ce méridien eſt incliné au premier AEB. Enſuite, on peut auſſi conſidérer l'angle EAe, que ces deux cercles ou leurs tangentes font entr'elles aux points A ou B, où ils concourent enſemble, & cet angle donnera une troiſieme détermination pour la poſition du méridien AeB, auſſi différente des deux autres. Cependant une de ces trois déterminations étant donnée, on peut trouver par-là les deux autres, comme je le ferai voir dans les problemes ſuivans, où il eſt auſſi fort important de déterminer pour chaque méridien ſon rayon, & le nombre des degrés qu'il contient.

PROBLEME I.

Fig. 2. 22. *Les deux poles magnétiques* A & B *de la terre étant donnés, avec l'inclinaiſon d'un méridien quelconque* AeB *au premier méridien magnétique* AEB, *trouver le rayon de ce méridien* AeB, & *le nombre des degrés qu'il contient.*

SOLUTION.

Soit c le rayon de la terre ou de la ſphere repréſentée dans la figure, & d la diſtance de l'axe magnétique AB au centre de la terre C, de ſorte que $CD = d$, & partant la moitié de l'axe magnétique $AD = BD = \sqrt{(cc - dd)}$; d'où nous voyons que pour le premier méridien magnétique AEB, ſa moitié ou l'arc AE ſurpaſſe le quart d'un grand cercle Ea de l'arc Aa, dont le ſinus eſt $CD = d$, rapporté au rayon $CA = c$. Donc, ſi nous poſons l'angle $ACa = \alpha$, qui marque l'éloignement des poles magnétiques A & B aux poles de l'équateur magnétique a & b, nous aurons $CD = d = c \sin\alpha$ & $AD = BD = c \cos\alpha$, & partant pour le diametre magnétique EF, ſes parties $DE = c + c \sin\alpha$, & $DF = c - c \sin\alpha$. Maintenant, pour le méridien magnétique propoſé AeB, ſoit ſon inclinaiſon au premier méridien $AEB = \phi$, & la ligne De ſon interſection avec l'équateur magnétique. Cela poſé, le plan de l'équateur EDe étant perpendiculaire au

plan

plan du méridien AeB, l'angle EDe fera la mesure de son inclinaison au premier méridien, & partant $EDe = \phi$. Qu'on tire du centre de la terre C sur Ce la perpendiculaire Cc, qui étant perpendiculaire au plan même du méridien AeB, le point c sera son centre. Or le triangle DcC, rectangle à c à cause de $DC = c \sin \alpha$, donne $Cc = c \sin \alpha \sin \phi$, & $Dc = c \sin \alpha \cos \phi$, d'où nous trouvons le rayon du petit cercle, dont notre méridien AeB est une partie, $cA = c\sqrt{(1 - \sin \alpha^2 \sin \phi^2)}$. Enfin, la tangente de l'angle AcD étant $= \frac{AD}{Dc} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \cos \phi}$, son complément à deux angles droits sera la mesure de l'arc Ae, qui est la moitié du méridien AeB.

Corollaire 1.

23. Puisque le rayon du méridien magnétique AeB est $cA = c\sqrt{(1 - \sin \alpha^2 \sin \phi^2)}$, son inclinaison au premier méridien AEB étant $EDe = \phi$, il est évident, que si cette inclinaison évanouit, ou devient égale à deux angles droits, le rayon est $= c$, ou bien dans ce cas le méridien sera un arc de grand cercle.

Corollaire 2.

24. De là il est aussi clair, que parmi tous les méridiens magnétiques celui-là sera une partie du plus petit cercle, dont le plan est perpendiculaire au premier méridien; son rayon sera alors $= c \cos \alpha = AD$ à cause de $\phi = 90°$. Dans ce cas, à cause de $Dc = o$ & de l'angle $AcD = 90°$, ce méridien sera précisément un demi-cercle.

Corollaire 3.

25. L'arc de l'équateur magnétique Ee, compris entre le premier méridien AEB & le proposé AeB, est la mesure de l'angle ECe. Or $ECe = EDe + DeC$; mais $EDe = \phi$ & $\sin DeC = \frac{Cc}{Ce} = \sin \alpha \sin \phi$; donc, si nous posons l'angle $ECe = \psi$, nous aurons $\sin \alpha \sin \phi = \sin DeC = \sin (\psi - \phi)$.

Corollaire 4.

26. Ainsi, connoissant l'inclinaison $EDe = \Phi$, on trouve aisément l'angle $ECe = \psi$; mais réciproquement, l'angle ψ étant donné à cause de $\sin\alpha \sin\Phi = \sin\psi \cos\Phi - \cos\psi \sin\Phi$, on trouve $\operatorname{tag} \Phi = \frac{\sin\psi}{\sin\alpha + \cos\psi}$.

PROBLEME II.

Fig. 2. 27. *Les poles magnétiques de la terre* A & B *étant donnés, avec l'inclinaison d'un méridien magnétique quelconque* AeB *au premier méridien* AEB, *trouver l'angle* EAe, *que font ces deux méridiens entr'eux à leur concurrence dans les poles magnétiques.*

SOLUTION.

Posons comme auparavant l'angle $ACa = \alpha$, & l'inclinaison $EDe = \Phi$, il s'agit ici de trouver l'angle EAe, que font entr'elles les tangentes des deux méridiens au point A. Pour cet effet, j'observe que, dans le plan du premier méridien, l'angle DAE est $= ACE = 90° + \alpha$, & dans le plan du méridien proposé AeB l'angle DAe est $= Ace = 90° + DAe$. Soit l'angle $DAe = \epsilon$, de sorte que $\operatorname{tag} \epsilon = \frac{De}{AD} = \frac{\sin\alpha \cos\Phi}{\cos\alpha}$, ou $\sin\epsilon = \frac{De}{Ae}$

$$= \frac{\sin\alpha \cos\Phi}{\sqrt{(1 - \sin\alpha^2 \sin\Phi^2)}} \text{ \& } \cos\epsilon = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{(1 - \sin\alpha^2 \sin\Phi^2)}}, \text{ \&}$$

Planche XV. Fig. 3. nous aurons l'angle $Ace = 90° + \epsilon$. Qu'on pose maintenant dans la 3. figure sur le plan de la table l'angle $DAE = 90° + \alpha$, & dans un autre plan incliné à celui-là de l'angle $= \Phi$, en le coupant par la ligne D l'angle $DAe = \epsilon$, de sorte qu'il faille trouver l'angle EAe. Pour cet effet, qu'on prenne à volonté les lignes $AE = f$ & $Ae = g$; qu'on tire du point E sur la droite DA prolongée la perpendiculaire EP, & du point e premiérement sur le plan de la table la perpendiculaire eg, & ensuite de q sur DA la perpendiculaire qp, afin que la droite

droite epy soit aussi perpendiculaire. Maintenant les angles EAP $=$ $90^\circ - \alpha$ & $eAp = 90^\circ - \varepsilon$, donnent d'abord

$$AP = f \sin\alpha;\; PE = f \cos\alpha;\; Ap = g \sin\varepsilon;\; pe = g \cos\varepsilon.$$

Or l'inclinaison de nos deux plans ayant pour mesure l'angle epq, nous aurons $epq = \Phi$, & partant $pq = g \cos\varepsilon \cos\Phi$, & $qe = g \cos\varepsilon \sin\Phi$; donc $Pp = f \sin\alpha - g \sin\varepsilon$, & $PE - pq = f \cos\alpha - g \cos\varepsilon \cos\Phi$. Tirons la droite Ee, & puisque

$$Ee^2 = Pp^2 + (PE - pq)^2 + qe^2, \text{ nous aurons}$$

$$Ee^2 = (f \sin\alpha - g \sin\varepsilon)^2 + (f \cos\alpha - g \cos\varepsilon \cos\Phi)^2 + gg(\cos\varepsilon^2 \sin\Phi)^2,$$

laquelle formule étant développée donne

$$Ee^2 = ff + gg - 2fg \sin\alpha \sin\varepsilon - 2fg \cos\alpha \cos\varepsilon \cos\Phi.$$

Or, par la matiere du triangle EAe, on sait qu'il y a

$$Ee^2 = AE^2 + Ae^2 - 2\,AE.AE.\cos EAe = ff + gg - 2fg \cos EAe,$$

d'où l'on tire

$$\cos EAe = \sin\alpha \sin\varepsilon + \cos\alpha \cos\varepsilon \cos\Phi.$$

Substituons maintenant pour $\sin\varepsilon$ & $\cos\varepsilon$ les valeurs données ci-dessus, & nous obtiendrons

$$\cos EAe = \frac{\sin\alpha^2 \cos\Phi + \cos\alpha^2 \cos\Phi}{\sqrt{(1 - \sin\alpha^2 \sin\Phi^2)}} = \frac{\cos\Phi}{\sqrt{(1 - \sin\alpha^2 \sin\Phi^2)}};$$

de là nous concluons $\sin EAe = \dfrac{\sqrt{(\sin\Phi^2 - \cos\alpha^2 \cos\Phi^2)}}{\sqrt{(1 - \sin\alpha^2 \sin\Phi^2)}} = \dfrac{\cos\alpha \sin\Phi}{\sqrt{(1 - \sin\alpha^2 \sin\Phi^2)}}$,

& par conséquent $\tan EAe = \dfrac{\cos\alpha \sin\Phi}{\cos\Phi} = \cos\alpha \tan\Phi$.

Donc l'angle que les deux méridiens AEB & AeB font entr'eux aux poles A & B sur la surface de la terre, savoir l'angle EAe ou EBe, est tel, que sa tangente est $= \cos\alpha \tan\Phi$. Planch. XIV. Fig. 2.

Co-

COROLLAIRE 1.

28. Nommant donc l'inclinaiſon du méridien AeB au premier méridien $AEB = \phi$, l'arc de l'équateur compris entr'eux, ou plutôt l'angle $ECe = \psi$, & l'angle qu'ils font entr'eux aux poles $EAe = \omega$, ces trois angles dépendent en ſorte les uns des autres que $\sin(\psi - \phi) = \sin\alpha \sin\phi$, & $\tan\omega = \cos\alpha \tan\phi$.

COROLLAIRE 2.

29. Or nous avons vu dans l'article 26. que $\tan\phi = \frac{\sin\psi}{\sin\alpha + \cos\psi}$, d'où nous tirons entre les angles ψ & ω cette rélation, $\tan\omega = \frac{\cos\alpha \sin\psi}{\sin\alpha + \cos\psi}$; d'où l'on voit que, ſi $\psi = o$, il y aura auſſi $\omega = o$, & ſi $\cos\psi = -\sin\alpha$, ou $\psi = 90 + \alpha$, l'angle ω devient droit, de même que l'angle ϕ, ce qui arrive dans le méridien perpendiculaire au premier, dont la courbure eſt la plus grande.

COROLLAIRE 3.

30. Puiſque $\tan\omega = \frac{\cos\alpha \sin\psi}{\sin\alpha + \cos\psi}$, il s'enſuit $\sin\omega = \frac{\cos\alpha \sin\psi}{\sqrt{(\sin\alpha^2 + 2\sin\alpha\cos\psi + \cos\psi^2 + \cos\alpha^2 \sin\psi^2)}}$; or $\sin\alpha^2 + \cos\psi^2 + \cos\alpha^2 \sin\psi^2 = 1 - \sin\alpha^2 \cos\psi^2$; donc $\sin\omega = \frac{\cos\alpha \sin\psi}{1 + \sin\alpha \cos\psi}$ & $\cos\omega = \frac{\sin\alpha + \cos\psi}{1 + \sin\alpha \cos\psi}$, d'où l'on tire

$$\cos\psi = \frac{\cos\omega - \sin\alpha}{1 - \sin\alpha \cos\omega}, \quad \& \sin\psi = \frac{\cos\alpha \sin\omega}{1 - \sin\alpha \cos\omega},$$

pour trouver l'angle ψ, l'angle ω étant donné.

PROBLEME III.

31. *Les deux poles magnétiques de la terre* A *&* B *étant donnés pour un lieu quelconque de la terre* L, *trouver l'inclinaison du méridien magnétique à l'horizon de ce même lieu.*

SOLUTION.

Par le lieu proposé de la terre L & par les poles magnétiques A & B, qu'on tire le petit cercle BLA, qui sera un méridien magnétique, dont je suppose qu'on sache l'inclinaison au premier méridien magnétique AEB, ou bien l'angle $EDe = \Phi$, prenant le point e dans l'équation magnétique. Soit c le centre de ce petit cercle, & qu'on tire au centre de la terre C le rayon LC, qui étant perpendiculaire à l'horizon du lieu L, il s'agit de déterminer l'angle, dont ce rayon CL est incliné au plan du méridien magnétique $AeLB$; or la droite Cc étant perpendiculaire à ce même plan, il est évident que l'angle CLc est la mesure de ladite inclinaison, & partant son complément a 90°, ou bien l'angle LCc donnera l'inclinaison cherchée du méridien à l'horizon du lieu L. Or, posant l'angle $ACa = CAB = \alpha$, qui est déterminé par les deux poles magnétiques, nous avons vu ci-dessus que la ligne Cc est $= c \sin \alpha \sin \Phi$; donc le rayon de la terre étant $CL = c$, le cosinus de l'angle cherché LCc sera $= \sin \alpha \sin \Phi$, ou bien au lieu L le méridien magnétique sera incliné à l'horizon d'un angle, dont le cosinus est $= \sin \alpha \sin \Phi$. Fig. 2.

COROLLAIRE 1.

32. De là il est clair que, dans tous les lieux situés sur le même méridien magnétique, l'inclinaison de ce méridien à l'horizon est aussi par tout la même, le cosinus de cette inclinaison étant $= \sin \alpha \sin \Phi$: & l'intersection du méridien magnétique avec l'horizon se fera suivant le méridien magnétique.

COROLLAIRE 2.

33. Le méridien magnétique n'est donc perpendiculaire à l'horizon, que là où l'angle $\Phi = o$, c'est à dire, sous le premier méridien ma-

magnétique. Cependant il faut remarquer que, ſi l'axe magnétique AB paſſoit par le centre de la terre C, partout le méridien magnétique ſeroit vertical, ou perpendiculaire à l'horizon.

Corollaire 3.

34. Si nous nommons l'inclinaiſon du méridien magnétique à l'horizon de quelque endroit $= \eta$, l'inclinaiſon au premier méridien $EDe = \phi$, l'angle $ECe = \psi$ & l'angle $EAe = \omega$, on aura les rapports ſuivans:

$$\cos\eta = \sin\alpha \sin\phi;\ \ \mathrm{tag}\,\eta = \frac{1+\sin\alpha\cos\psi}{\mathrm{ſ.}\,\alpha\ \mathrm{ſ.}\,\psi};\ \ \mathrm{tag}\,q = \frac{\cos\alpha}{\mathrm{ſ.}\,\alpha\ \mathrm{ſ.}\,\omega}.$$

Remarque.

35. De toutes les expériences faites ſur la nature magnétique, il ſemble qu'on puiſſe conclure hardiment, que la direction magnétique ſe trouve toujours dans un plan qui paſſe par les poles magnétiques, ou bien dans un méridien magnétique. Une aiguille aimantée ſuſpendue précisément par ſon centre de gravité, de ſorte qu'à l'égard de la peſanteur elle ſoit indifférente à toutes les directions, prend toujours par la force magnétique de la terre une certaine ſituation, que je nomme la direction magnétique; & il eſt certain que cette direction tombe toujours dans le plan du méridien magnétique, qui paſſe par le point de ſuſpenſion de l'aiguille. Mais il n'eſt pas encore décidé ſur quelle ligne de ce plan la direction magnétique tombe. On ſait bien que, dans l'axe magnétique même, cette direction y tombe auſſi; & enſuite on ne ſauroit douter que, partout dans l'équateur magnétique, elle ne ſoit parallele à l'axe magnétique. Cela pourroit encore paroitre douteux, ſi l'équateur magnétique, où cela arrive, paſſe préciſement par le milieu de l'axe magnétique, comme je l'ai ſuppoſé juſqu'ici. Mais quand même cela arriveroit dans la terre, on me diſpenſera d'y avoir égard; premiérement, parce que cela eſt encore inconnu, & enſuite il eſt toujours bon de commencer ſes recherches par des cas réguliers. Or, pour les lieux hors de l'axe & de l'équateur magnétique, je me

voi

voi obligé de recourir à une nouvelle hypothese, que j'établirai telle, qu'elle ne paroit pas s'écarter sensiblement de la vérité.

HYPOTHESE.

36. *Pour trouver la direction magnétique à un endroit quelconque* L *de la terre, situé dans un méridien magnétique quelconque* A e L B, *qu'on y tire du centre magnétique* D *la droite* D L, *& qu'on fasse l'angle* D L M *égal à l'angle* L D B; *& la ligne* D M *marquera la direction magnétique à l'endroit proposé* L. Fig. 4.

Corollaire 1.

37. Si l'endroit L est pris au point *e*, où le méridien est traversé par l'équateur magnétique, puisqu'alors la ligne D *e* est perpendiculaire à l'axe magnétique A B, la direction magnétique y sera aussi parallele à cet axe A B, & devenant une tangente du méridien magnétique, elle sera horizontale.

Corollaire 2.

38. Mais, plus le lieu L approche de l'un ou l'autre pole magnétique, plus la direction magnétique L M s'approchera de la ligne L D, & dans les poles mêmes, elle tombera dans l'axe magnétique. L'un & l'autre cas est donc d'accord avec l'expérience.

Corollaire 3.

39. Donc, partout dans l'équateur magnétique sur la terre, la direction magnétique est horizontale, & puisque l'inclinaison évanouit, le méridien magnétique, comparé à la méridienne du même endroit, montrera la véritable déclinaison magnétique. Dans ces cas donc, ma théorie précédente est d'accord avec les principes que je viens d'établir ici.

PROBLEME IV.

40. *Pour un lieu quelconque de la terre* L, *déterminer la direction magnétique* L M, *& l'angle qu'elle fait avec la ligne horizontale, tirée dans le plan du méridien magnétique.* Fig. 4.

SOLUTION.

Ayant tiré par le lieu proposé L le méridien magnétique ALB, qui étant un cercle soit son centre en c, & posant le demi-axe magnétique $DA = DB = a$, & le rayon de ce cercle $cL = r$, nous aurons l'éloignement du centre c à l'axe magnétique $Dc = \sqrt{(rr - aa)}$, qui soit pour abréger $Dc = s$. Cela posé, soit de plus l'angle $ecL = \lambda$, qui marque l'éloignement du lieu proposé L de l'équateur magnétique par le nombre de degrés contenus dans l'arc du méridien magnétique eL. Maintenant, pour trouver l'angle LDB, auquel est égal l'angle DLM, nous aurons d'abord la ligne $DL = \sqrt{(rr + ss + 2rs \cos\lambda)}$, qui soit $DL = u$, & de là nous trouvons

$$\sin LDc = \frac{r \sin\lambda}{u};\ \cos LDc = \frac{r\cos\lambda + s}{u};$$

$$\sin DLc = \frac{s \sin\lambda}{u};\ \cos DLc = \frac{r + s\cos\lambda}{u}.$$

Donc l'angle DLM sera le complément de l'angle LDc à 90°, & partant

$$\sin DLM = \frac{r\cos\lambda + s}{u},\ \&\ \cos DLM = \frac{r\sin\lambda}{u}.$$

Or, le rayon cL étant perpendiculaire à la tangente du méridien magnétique en L, qui est horizontale & la même avec laquelle la direction magnétique LM fait l'angle que nous cherchons TLM, ayant tiré la dite tangente LT, cet angle TLM sera le complément de l'angle $cLM = DLM + DLc$, d'où la composition des angles nous fournit

$$\sin TLM = \cos cLM = \frac{rr\sin\lambda - ss\sin\lambda}{uu},\ \&$$

$$\cos TLM = \sin cLM = \frac{rr\cos\lambda + 2rs + ss\cos\lambda}{uu}.$$

De là nous déduisons

sin

$$\sin \tfrac{1}{2}\, TLM = \frac{(r-s)\sin \frac{1}{2}\lambda}{u} \;\&\; \cos \tfrac{1}{2}\, TLM = \frac{(r+s)\cos \frac{1}{2}\lambda}{u}.$$

Par conséquent l'angle cherché TLM se trouvera le plus aisément par cette formule,

$$\tan \tfrac{1}{2}\, TLM = \frac{r-s}{r+s} \tan \tfrac{1}{2}\lambda.$$

Corollaire 1.

41. Nous voyons donc que l'angle TLM, que fait la direction magnétique LM avec la tangente du méridien magnétique, n'évanouit que dans l'équateur magnétique, où l'angle $\lambda = o$. Car la distance $Dc = s = \surd(rr - aa)$ ne sauroit devenir égale au rayon $cL = r$, à moins que l'axe magnétique AB n'évanouisse lui-même.

Corollaire 2.

42. Sous le méridien magnétique, qui est perpendiculaire au premier méridien magnétique, nous avons vu que l'intervalle $Dc = s$ évanouit. Donc, pour ces lieux de la terre, nous aurons $\tan \frac{1}{2} TLM = \tan \frac{1}{2}\lambda$, & partant l'angle $TLM = \lambda = ecL$.

PROBLEME V.

43. *Les deux poles magnétiques de la terre* A *&* B *étant donnés, trouver pour un lieu quelconque de la terre* L *l'inclinaison de l'aiguille aimantée.* Fig. 2.

SOLUTION.

Soit AEB le premier méridien magnétique, c le rayon de la terre, & l'angle $ACa = CAD = \alpha$, de sorte que le demi-axe magnétique soit $AD = BD = c \cos\alpha$, & la distance $CD = c \sin\alpha$. Ensuite, qu'on tire par le lieu proposé L le méridien magnétique AeB, dont le centre soit en c, & son inclinaison au premier méridien, ou l'angle $EDe, = \Phi$; & nous avons vû que $Cc = c \sin\alpha \sin\Phi$, $Dc = c \sin\alpha \cos\Phi$, & le rayon du méridien magnétique $cL = c\surd(1$

 $-$ sin

$- \sin\alpha^2 \sin\phi^2)$. Soit de plus dans ce méridien l'angle eCL $= \lambda$, le point e étant pris dans l'équateur magnétique, & soit aussi LM la direction magnétique déterminée dans le probleme précédent. Donc, pour ramener la solution à ce cas, nous aurons

DA $= a = c \cos\alpha$; $r = c\sqrt{(1 - \sin\alpha^2 \sin\phi^2)}$ & $s = c \sin\alpha \cos\phi$, & de là $uu = cc(1 + \text{s}.\alpha^2(\cos\phi^2 - \text{s}.\phi^2) + 2\sin\alpha\cos\phi\cos\lambda\sqrt{(1 - \text{s}.\alpha^2 \text{s}.\phi^2)})$.

Cela posé, nous venons de trouver dans le plan du méridien magnétique AeB l'angle cLM exprimé de cette sorte,

$$\cos c\text{LM} = \frac{(rr - ss)\sin\lambda}{uu} = \frac{cc \cos\alpha^2 \sin\lambda}{uu} \text{ \&}$$

$$\sin c\text{LM} = \frac{(rr + ss)\cos\lambda + 2rs}{uu}.$$

Maintenant, le rayon CL étant perpendiculaire à l'horizon du lieu L, nous n'avons qu'à chercher l'angle CLM, pour avoir le complément de l'inclinaison magnétique. Pour cet effet, qu'on tire dans le plan du méridien magnétique AeB, de son centre c sur LM, la perpendiculaire cM; & on aura LM $= \frac{ccr \cos\alpha^2 \sin\lambda}{uu}$. Or, si l'on tiroit la ligne CM, elle seroit aussi perpendiculaire à LM, d'où la fraction $\frac{\text{LM}}{\text{GL}}$ donnera le cosinus de l'angle CLM, & partant le sinus de l'inclinaison magnétique cherchée; ce sinus sera donc $= \frac{cr \cos\alpha^2 \sin\lambda}{uu} =$

$$\frac{\cos\alpha^2 \sin\lambda \sqrt{(1 - \sin\alpha^2 \sin\phi^2)}}{1 + \sin\alpha^2\cos\phi^2 - \sin\alpha^2\sin\phi^2 + 2\sin\alpha\cos\phi\cos\lambda\sqrt{(1 - \sin\alpha^2\sin\phi^2)}},$$

ou bien, par nos dénominations précédentes, $= \frac{r(rr - ss)\sin\lambda}{cuu}$, où $uu = rr + ss + 2rs\cos\lambda$.

Co-

Corollaire 1.

44. Sous l'équateur magnétique, où $\lambda = o$, l'inclinaison magnétique est partout nulle, ou bien la direction magnétique y est horizontale, & partout perpendiculaire à l'équateur magnétique.

Corollaire 2.

45. Sous le premier méridien magnétique, où l'angle $\Phi = o$, le sinus de l'inclinaison magnétique sera $= \frac{\operatorname{cos}\alpha^2 \ \operatorname{sin}\lambda}{1 + \operatorname{sin}\alpha^2 + 2\operatorname{sin}\alpha \ \operatorname{cos}\lambda}$, & partant son cosinus $= \frac{2\operatorname{sin}\alpha + (1 + \operatorname{sin}\alpha^2)\operatorname{cos}\lambda}{1 + \operatorname{sin}\alpha^2 + 2\operatorname{s.}\alpha \operatorname{cos}\lambda}$. La direction magnétique sera donc verticale là où $\operatorname{cos}\lambda = -\frac{2\operatorname{sin}\alpha}{1 + \operatorname{sin}\alpha^2}$ & $\operatorname{sin}\lambda = \frac{1 - \operatorname{sin}\alpha^2}{1 + \operatorname{sin}\alpha^2}$, ou bien $\operatorname{tag}\frac{1}{2}\lambda = \frac{1 + \operatorname{sin}\alpha}{1 - \operatorname{sin}\alpha}$.

Corollaire 3.

46. Sous le méridien magnétique, qui est perpendiculaire au premier méridien, où $\Phi = 90°$, le sinus de l'inclinaison magnétique sera $= \frac{\operatorname{cos}\alpha^3 \ \operatorname{sin}\lambda}{\operatorname{cos}\alpha^2} = \operatorname{cos}\alpha \ \operatorname{sin}\lambda$; & puisque ce méridien est un demi-cercle, posant $\lambda = 90°$, on aura sous les poles magnétiques mêmes l'inclinaison $= 90° - \alpha$.

Remarque.

47. Notre formule trouvée pour le sinus de l'inclinaison magnétique, deviendra plus simple, si, au lieu de l'angle $EDe = \Phi$, nous introduisons dans le calcul l'angle ecB, qui détermine la moitié du méridien magnétique. Posons donc cet angle $EcB = 90° + \sigma$, de sorte que σ exprime l'angle DBc ou DAc. Ayant donc $\operatorname{cos}\sigma = \frac{a}{r} = \frac{\operatorname{cos}\alpha}{\sqrt{(1 - \operatorname{sin}\alpha^2 \operatorname{sin}\Phi^2)}}$, & $\operatorname{tag}\sigma = \frac{Dc}{DA} = \frac{\operatorname{sin}\alpha \operatorname{cos}\Phi}{\operatorname{cos}\alpha}$, nous en

en tirerons $\sqrt{(1 - \sin\alpha^2 \sin\Phi^2)} = \frac{\cos\alpha}{\cos\sigma}$; $\sin\Phi^2 = \frac{\cos\sigma^2 - \cos\alpha^2}{\sin\alpha^2 \cos\sigma^2}$ & $\cos\Phi = \frac{\cos\alpha \sin\sigma}{\sin\alpha \cos\sigma}$, lesquelles valeurs étant substituées, nous aurons le sinus de l'inclinaison magnétique $= \frac{\cos\alpha \cos\sigma \sin\lambda}{1 + 2\sin\sigma \cos\lambda + \sin\sigma^2}$.

Or cette même substitution nous donne outre cela

$$r = \frac{c\cos\alpha}{\cos\sigma};\ s = \frac{c\cos\alpha \sin\sigma}{\cos\sigma}\ \&\ u = \frac{c\cos\alpha}{\cos\sigma}\sqrt{(1 + 2\sin\sigma\cos\lambda + \sin\sigma^2)},$$

& les angles que nous avons nommés ci-dessus $ECe = \psi$ & $EBe = \omega$, sont déterminés ainsi,

$$\cos\psi = \frac{\cos\alpha^2 - \cos\sigma^2 (1 - \sin\sigma)}{\sin\alpha \cos\sigma^2}\ \&\ \cos\omega = \frac{\sin\sigma}{\sin\alpha}.$$

Mais, par rapport à l'angle $DAc = \sigma$, il faut remarquer qu'il ne sauroit jamais devenir plus grand que l'angle $DAC = \alpha$; or, pour le premier méridien magnétique, on aura $\sigma = \alpha$, & pour celui qui y est perpendiculaire $\sigma = 0$. La formule trouvée nous montrera les lieux où la direction magnétique devient verticale, en posant le sinus de l'inclinaison égal à l'unité; de là nous aurons

$$\cos\lambda = \frac{-2\sin\sigma(1 + \sin\sigma^2) + \cos\alpha\cos\sigma^2\sqrt{(\sin\sigma^2 - \sin\alpha^2)}}{4\sin\sigma^2 + \cos\alpha^2\cos\sigma^2}.$$

Or, puisque l'angle σ ne sauroit surpasser l'angle α, cette formule est toujours imaginaire, à moins qu'on ne prenne $\sigma = \alpha$, c'est-à-dire sous le premier méridien. Posons donc $\sigma = \alpha$, & nous aurons $\cos\lambda = \frac{-2\sin\alpha(1 + \sin\alpha^2)}{4\sin\alpha^2 + \cos\alpha^4} = -\frac{2\sin\alpha}{1 + \sin\alpha^2}$, comme ci-dessus, où je remarque, puisque $\frac{2\sin\alpha}{1 + \sin\alpha^2} > \sin\alpha$, que ces lieux tombent dans la moindre partie AFB du premier méridien, comme dans les points i, i, en sorte que $\cos Fi = \frac{2\sin\alpha}{1 + \sin\alpha^2}$ & $\sin$

$Fi =$

$F i = \frac{1 - \sin \alpha^2}{1 + \sin \alpha^2}$; donc, puiſque l'arc $FA = FB = 90° - \alpha$, on aura $\cos A i = \cos B i = \frac{2 - 2 \cos \alpha^2 + \cos \alpha^3}{1 + \sin \alpha^2}$ & $\sin A i = \sin B i = \frac{\sin \alpha \cos \alpha \, (2 - \cos \alpha)}{1 + \sin \alpha^2}$; d'où nous voyons que, ſi l'angle α eſt fort petit, l'arc $A i$ & $B i$ devient à peu près égal à $A C a = \alpha$, & plus exactement $= \alpha - \alpha^3 + \frac{3}{4}\alpha^5 - \frac{1727}{2526}\alpha^7$. Il n'y a donc que deux points où la direction magnétique eſt verticale.

PROBLEME VI.

48. *Si l'on connoiſſoit les deux endroits ſur la terre, où la direction magnétique eſt verticale, déterminer la poſition de l'axe magnétique* AB, *& les deux poles magnétiques ſur la ſurface de la terre.*

SOLUTION.

Soyent i & i les deux lieux ſur la terre, où la direction magnétique eſt verticale, ou bien l'inclinaiſon de 90°, qu'on découvrira d'autant plus aiſément, que dans ces lieux la bouſſole doit être abſolument indifférente à toutes les directions horizontales; ainſi, ſi l'on pouvoit faire partout des expériences avec la bouſſole, on connoitroit facilement ces deux lieux i, i, où la direction magnétique eſt verticale. Alors on n'aura qu'à tirer par ces deux points un grand cercle ſur la terre pour avoir le premier méridien magnétique; enſuite, on diviſera l'arc $i i$ au point F en deux parties égales, & le grand cercle tiré par F perpendiculairement ſur le premier méridien ſera l'équateur magnétique. Enfin, poſant l'arc $F i = \mathfrak{G}$, & pour les poles magnétiques A & B, qui ſont auſſi également éloignés du point F, l'arc $FA = 90° - \alpha$, les équations trouvées ci-deſſus $\cos \mathfrak{G} = \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin \alpha^2}$, ou $\sin \mathfrak{G} = \frac{1 - \sin \alpha^2}{1 + \sin \alpha^2}$, donneront $\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \sin \mathfrak{G}}{1 + \sin \mathfrak{G}}} = \operatorname{tag}(45° - \tfrac{1}{2}\mathfrak{G})$,

 ou

ou bien cof $FA = tag\,(45° - \frac{1}{2}Fi)$. C'eſt donc par cette formule qu'on définira aiſément la poſition de l'axe magnétique AB avec les deux poles magnétiques A & B ſur la terre.

Corollaire 1.

49. En prenant le plus petit arc de grand cercle entre les points i & i, les poles magnétiques A & B tombent toujours hors de cet arc, ou bien ils ſeront plus éloignés entr'eux que les points i & i. Dans le ſeul cas où les points i & i ſeroient éloignés de 180° entr'eux, les poles magnétiques A & B conviendroient avec les deux points i & i.

Corllaire 2.

50. Si l'arc Fi ne differe que fort peu de 90°, qu'on poſe $Fi = \beta = 90 - \gamma$, & on aura ſin $\alpha = tag\,\frac{1}{2}\gamma$; & puiſque γ eſt un angle fort petit, on en déduit $\alpha = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{16}\gamma^3 + \frac{3}{256}\gamma^5$ &c., où il faut remarquer, qu'après avoir tiré le diametre ab parallele à la corde ii, il y aura $aA = \alpha$ & $ai = \gamma$, de ſorte que ſi l'angle γ eſt très petit, le pole A tombe dans le milieu de l'arc ai.

Remarque.

51. Il eſt ici très remarquable, que deux ſeules obſervations ſuffiſent pour établir l'état magnétique de la terre, & que pour cet effet il n'eſt pas même néceſſaire de pouvoir obſerver l'inclinaiſon magnétique, puiſque c'eſt un caractere infaillible de l'inclinaiſon verticale, que la bouſſole n'y eſt plus déterminée à aucune direction. Pourvu donc qu'on parvint à ces lieux de la terre, rien ne ſeroit plus aiſé que de s'aſſurer de cette propriété; cependant il arrivera déjà à une étendue conſidérable autour de ces points, que la bouſſole ne marquera plus une direction fixe; mais d'un côté il ne ſera pas difficile de prendre le milieu d'une telle contrée, & de l'autre côté il ne s'agit point ici du plus haut degré de préciſion. Toutes les autres obſervations ne nous ſauroient jamais conduire à un tel degré de préciſion, & s'il étoit poſſible de bien diſtinguer les lieux où l'inclinaiſon eſt nulle, ou la

direc-

direction magnétique horizontale, nous n'en pourrions conclure que la position de l'équateur magnétique, pendant que celle de l'axe magnétique nous demeureroit entiérement inconnue. Je regarderai donc les poles magnétiques comme connus, & je m'en vai déveloper les phénomenes qui regardent la déclinaison magnétique, où il faut d'abord ramener à l'horizon l'aiguille aimantée, avant qu'on la compare avec la ligne méridienne de chaque lieu.

PROBLEME VII.

52. *Dans un lieu quelconque de la terre* L, *trouver sur l'horizon le point vers lequel la boussole sera dirigée.* Fig. 1. & Fig. 5.

SOLUTION.

Qu'on conçoive une sphere décrite autour du lieu L, dont le rayon soit exprimé par l'unité (fig. 5.); que le point Z marque le zénith de ce lieu, & C le nadir, de sorte que la droite LC sera dirigée vers le centre de la terre, & que le grand cercle HTN en représente l'horizon, sur lequel soit T le point par où passe le méridien magnétique BTA, qui étant un plan tiré par le lieu L sera dans cette sphere un grand cercle, incliné à l'horizon de l'angle HTA ou BTN, dont le cosinus est $= \sin\alpha \sin\Phi = \frac{\sqrt{(\cos\sigma^2 - \cos\alpha^2)}}{\cos\sigma}$, & $\sin BTN = \frac{\cos\alpha}{\cos\sigma}$.
Soit maintenant LM la direction magnétique, & nous avons trouvé dans le §. 40.

$$\sin TLM = \frac{(rr - ss)\sin\lambda}{uu} \ \&\ \cos TLM = \frac{2rs + (rr + ss)\cos\lambda}{uu}.$$

Or, par les angles α. σ & λ, dont je me suis servi pour marquer le lieu L par rapport aux poles magnétiques de la terre, nous avons

$$r = \frac{c\cos\alpha}{\cos\sigma};\ s = \frac{c\cos\alpha\sin\sigma}{\cos\sigma}\ \&\ u = \frac{c\cos\alpha}{\cos\sigma}\sqrt{(1 + 2\sin\sigma\cos\lambda + \sin\sigma^2)},$$

& ces valeurs nous fourniront

sin

$$\sin TM = \frac{\cos\sigma^2 \sin\lambda}{1+2\sin\sigma\cos\lambda+\sin\sigma^2} \;\&\; \cos TM = \frac{2\sin\sigma + \cos\lambda(1+\sin\sigma^2)}{1+2\sin\sigma\cos\lambda+\sin\sigma^2}.$$

Qu'on tire à préſent par le point M le cercle vertical ZMC, coupant l'horizon en $\mathfrak{C}$, & ce ſera le point vers lequel la bouſſole ſera dirigée. Le triangle ſphérique TM$\mathfrak{C}$, rectangle en $\mathfrak{C}$, nous donnera donc d'abord l'inclinaiſon magnétique $\mathfrak{C}$M, par la formule $\sin \mathfrak{C}M = \sin TM . \sin BTN$, & pour le lieu du point $\mathfrak{C}$ dans l'horizon, $\text{tag}\, T\mathfrak{C} = \text{tag}\, TM \cos BTN$, d'où nous tirons

$$\sin M\mathfrak{C} = \frac{\cos\alpha \cos\sigma \sin\lambda}{1 + 2\sin\sigma \cos\lambda + \sin\sigma^2} \quad \&$$

$$\text{tag}\, T\mathfrak{C} = \frac{\cos\sigma \sin\lambda \sqrt{(\cos\sigma^2 - \cos\alpha^2)}}{2\sin\sigma + \cos\lambda\,(1+\sin\sigma^2)}.$$

Mais, pour mieux connoitre le point T, où l'horizon eſt coupé par le méridien magnétique, concevons la ſphere diſpoſée en ſorte, que le point B réponde dans le ciel au point vers lequel l'axe magnétique eſt dirigé; donc cet arc TB meſurera l'angle que fait dans la fig. 2. la tangente du méridien magnétique en L avec l'axe AB; or, puiſque Lc eſt perpendiculaire à ladite tangente, & eD perpendiculaire à l'axe magnétique, cet angle-là ſera égal à l'angle ecL $= \lambda$, qui ſera donc la meſure de l'arc BT dans la fig. 5, & le cercle HZBN ſera le cercle vertical, qui paſſe par les poles magnétiques marqués dans le ciel. Par-là on connoitra d'abord l'élévation du pole magnétique, ou l'arc BN, par la formule, $\sin BN = \sin BT . \sin BTN = \frac{\cos\alpha \sin\lambda}{\cos\sigma}$, & enſuite la déclinaiſon du point T depuis le point N par la formule,

$$\text{tag}\, NT = \text{tag}\, BT \cos BTN = \frac{\sin\lambda \sqrt{(\cos\sigma^2 - \cos\alpha^2)}}{\cos\lambda \cos\sigma}.$$

Corollaire I.

53. Si le pole magnétique B au ciel étoit le même que le pole boréal du monde, le grand cercle HZN feroit le méridien du lieu L,

&

& le point N marqueroit le vrai Nord dans l'horizon. Ce cas auroit lieu, si l'axe magnétique étoit parallele à l'axe du monde, sans qu'il fût nécessaire qu'il passât par le centre de la terre.

COROLLAIRE 2.

54. Dans ce cas donc, l'arc $N\beta$ marqueroit la véritable déclinaison magnétique, qui étant la somme des arcs NT & $T\beta$, on auroit pour la déclinaison,

$$\mathrm{tag}\; N\beta = \frac{2 \sin\lambda\,(\sin\sigma + \cos\lambda)\sqrt{(\cos\sigma^2 - \cos\alpha^2)}}{\cos\sigma(\cos\alpha^2\, s\lambda^2 + 2\cos\lambda^2 + 2\, s\sigma \cos\lambda - \cos\sigma^2)}, \text{ ou}$$

$$\mathrm{tag}\; N\beta = \frac{2 \sin\lambda\,(\sin\sigma + \cos\lambda)\sqrt{(\cos\sigma^2 - \cos\alpha^2)}}{\cos\sigma\,(\sin\sigma\, 2\cos\lambda)^2 + \sin\alpha^2 \sin\lambda^2 \cos\sigma}.$$

PROBLEME VIII.

55. *La position d'un lieu sur la terre étant déterminée par les angles σ & λ, qui ont été introduits dans les problemes précédens, trouver tant la longitude que la latitude magnétique du même lieu, par rapport à l'équateur & au premier méridien magnétique.*

SOLUTION.

Dressons pour cet effet la fig. 6. semblable à la fig. 2, où AB soit l'axe magnétique, EAFB le premier méridien, & le cercle EQF l'équateur magnétique. Qu'on conçoive tiré le diametre ab parallele à l'axe magnétique AB, & soyent les angles $ACa = Bcb = \alpha$, de sorte que α marque l'éloignement de l'axe magnétique AB de l'axe de la terre ab, qui lui est parallele. Soit L le lieu proposé de la terre, par lequel on tire le méridien magnétique ALB coupant l'équateur en e, & dont l'inclinaison au premier méridien est l'angle $EDe = \Phi$, pour lequel nous avons $\cos\Phi = \frac{\cos\alpha \sin\sigma}{\sin\alpha\cos\sigma}$ & $s\Phi = \frac{\sqrt{(\cos\sigma^2 - \cos\alpha^2)}}{\sin\alpha \cos\sigma}$. Qu'on tire dans le plan de l'équateur, du centre de la terre C sur la droite De, la perpendiculaire Cc, & le point c sera le centre du méridien

Planch. XV. Fig. 6.

ridien

ridien magnétique, & cL son rayon. Or, posant le rayon de la terre $CE = CF = CL = c$, nous avons trouvé

$CD = c \sin\alpha$; $DA = DB = c \cos\alpha$; $Dc = c\,s\alpha \cos\Phi$; $Cc = c\,s\alpha\, s\Phi$

& $cL = c\sqrt{(1 - \sin\alpha^2 \sin\Phi^2)}$, ou bien $Dc = \frac{c \cos\alpha\, s\sigma}{\cos\sigma}$; $Cc = \frac{c\sqrt{(\cos\sigma^2 - \cos\alpha^2)}}{\cos\sigma}$ & $cL = \frac{c \cos\alpha}{\cos\sigma}$. Ensuite, pour le lieu L, nous avons posé l'angle dans le petit cercle $ecL = \lambda$; donc, si nous abaissons du lieu L sur l'équateur magnétique la perpendiculaire LP, nous aurons

$$LP = \frac{c \cos\alpha \sin\lambda}{\cos\sigma} \;\&\; cP = \frac{c \cos\alpha \cos\lambda}{\cos\sigma},$$

$$\text{donc } DP = \frac{c \cos\alpha (\sin\sigma + \cos\lambda)}{\cos\sigma}.$$

Qu'on tire maintenant du pole de l'équateur magnétique b par le lieu L le grand cercle bLQ, & le rayon CQ passera par le point P; & il est clair que la latitude magnétique du lieu L sera exprimée par l'angle LCQ; donc le sinus étant $= \frac{LP}{LC}$, le sinus de la latitude sera $\frac{\cos\alpha \sin\lambda}{\cos\sigma}$, qui est en même tems celui de l'élévation magnétique BN dans la fig. 5, comme nous avons déjà trouvé précédemment. Or, pour la longitude magnétique du lieu L, comptée depuis le premier méridien magnétique aEb, sa mesure sera l'angle ECQ. Pour trouver cet angle, nous avons dans le triangle DCP les côtés $CD = c \sin\alpha$, & $DP = \frac{c \cos\alpha (\sin\sigma + \cos\lambda)}{\cos\sigma}$, avec l'angle compris entr'eux $CDP = \Phi$, d'où nous tirons

$$\operatorname{tag} ECQ = \frac{\cos\alpha \sin\Phi (\sin\sigma + \cos\lambda)}{c \cos\alpha \cos\Phi (s\sigma + \cos\lambda) - c\, s\alpha \cos\sigma},$$

ou

ou $\operatorname{tag} ECQ = \frac{\operatorname{cof}\alpha\,(\sin\sigma + \operatorname{cof}\lambda)\,\sqrt{(\operatorname{cof}\sigma^2 - \operatorname{cof}\alpha^2)}}{\operatorname{cof}\alpha^2 \sin\sigma \operatorname{cof}\lambda + \operatorname{cof}\alpha^2 - \operatorname{cof}\sigma^2}$;

ou bien le triangle LCP donne $CP = c\sqrt{\left(1 - \frac{\operatorname{cof}\alpha^2 \ \sin\lambda^2}{\operatorname{cof}\sigma^2}\right)}$,

d'où nous trouvons

$$\text{ſ}\,ECQ = \frac{DP\ \text{ſ}\Phi}{CP} = \frac{\operatorname{cof}\alpha\,(\text{ſ}\sigma + \operatorname{cof}\lambda)\sqrt{(\operatorname{cof}\sigma^2 - \operatorname{cof}\alpha^2)}}{\text{ſ}\alpha \operatorname{cof}\sigma \sqrt{(\operatorname{cof}\sigma^2 - \operatorname{cof}\alpha^2\ \text{ſ}\lambda^2}}.$$

Corollaire 1.

56. Si $\lambda = o$, ce qui arrive dans l'équateur magnétique, la latitude du lieu évanouit; or, pour la longitude du point e, où le méridien magnétique passe par l'équateur, on aura

$$\operatorname{tag} ECe = \frac{\operatorname{cof}\alpha\,(1 + \text{ſ}\sigma)\sqrt{(\operatorname{cof}\sigma^2 - \operatorname{cof}\alpha^2)}}{\operatorname{cof}\alpha^2(1 + \sin\sigma) - \operatorname{cof}\sigma^2} = \frac{\operatorname{cof}\alpha\sqrt{(\operatorname{cof}\sigma^2 - \operatorname{cof}\alpha^2)}}{\sin\sigma - \sin\alpha^2},$$

& le $\operatorname{cof} ECe = \frac{\text{ſ}\sigma - \text{ſ}\alpha^2}{\text{ſ}\alpha(1 - \text{ſ}\sigma)}$; donc $\operatorname{tag}\frac{1}{2} ECe = \sqrt{\frac{(1 + \text{ſ}\alpha)(\text{ſ}\alpha - \text{ſ}\sigma)}{(1 - \text{ſ}\alpha)(\text{ſ}\alpha + \text{ſ}\sigma)}}$

$$= \frac{\operatorname{tag}\frac{\alpha - \sigma}{2}}{\operatorname{tag}\frac{90 - \alpha}{2}}.$$

Corollaire 2.

57. Pour le méridien magnétique, qui est perpendiculaire au premier, on a $\sigma = o$, & la latitude du lieu L est telle que son sinus $= \operatorname{cof}\alpha \sin\lambda$, & la tangente de la longitude $= \frac{\sin\alpha \operatorname{cof}\alpha \operatorname{cof}\lambda}{-\sin\alpha^2} = -\frac{\operatorname{cof}\lambda}{\operatorname{tag}\alpha}$, ou bien la longitude comptée du point E surpasse 90°, & si $\lambda = o$, la longitude sera $= 90° + \alpha$, & si $\lambda = 90°$, elle sera $= 180°$.

PRO-

PROBLEME IX.

Fig. 6. 58. *La latitude & la longitude magnétique d'un lieu de la terre L étant données, trouver la direction magnétique dans cet endroit, & la direction de la bouſſole.*

SOLUTION.

Ayant pris le diametre ab parallele à l'axe magnétique AB, pour avoir le premier méridien magnétique EAFB avec l'équateur magnétique EF, ſoyent les arcs $Aa = Bb = \alpha$, ſuppoſant le rayon de la ſphere $= 1$, de ſorte que $CD = \sin\alpha$, & $DA = DB = \operatorname{cof}\alpha$. Par le lieu donné L, qu'on tire du pole de l'équateur b le grand cercle cercle bLQ, & poſons la latitude magnétique $LQ = \mu$ & la longitude $EQ = \nu$; de là nous aurons

$LP = \text{ſ}\mu$; $CP = \operatorname{cof}\mu$, & $DP = \sqrt{(\text{ſ}\alpha^2 + 2\,\text{ſ}\alpha \operatorname{cof}\mu \operatorname{cof}\nu + \operatorname{cof}\mu^2)} = p$, enſuite $\sin EDP = \dfrac{\operatorname{cof}\mu \sin\nu}{p}$, & $\operatorname{cof} EDP = \dfrac{\sin\alpha + \operatorname{cof}\mu \operatorname{cof}\nu}{p}$; or EDP eſt l'angle qui eſt nommé ci-deſſus $= \Phi$, de ſorte que tag $= \dfrac{\operatorname{cof}\mu \sin\nu}{\sin\alpha + \operatorname{cof}\mu \operatorname{cof}\nu}$. Après avoir tiré du centre C ſur DP la perpendiculaire Cc, on aura $Cc = \dfrac{\sin\alpha \operatorname{cof}\mu \sin\nu}{p}$ & $DC = s = \dfrac{\sin\alpha\,(\text{ſ}\alpha + \operatorname{cof}\mu \operatorname{cof}\nu)}{p}$, & de là le rayon du petit cercle ALB tiré des poles magnétiques par le lieu L, $cL = \sqrt{\left(1 - \dfrac{\text{ſ}\alpha^2 \operatorname{cof}\mu^2\, \text{ſ}\nu^2}{pp}\right)} = r$. Or, l'angle σ étant celui que fait le rayon du petit cercle cA avec l'axe magnétique, nous aurons $\operatorname{tag}\sigma = \dfrac{\sin\alpha\,(\text{ſ}\alpha + \operatorname{cof}\mu \operatorname{cof}\nu)}{p \operatorname{cof}\alpha}$ $\sin\sigma = \dfrac{\text{ſ}\alpha\,(\text{ſ}\alpha + \operatorname{cof}\mu \operatorname{cof}\nu)}{pr}$ & $\operatorname{cof}\sigma = \dfrac{\operatorname{cof}\alpha}{r}$. Enfin pour l'angle $ecL = \lambda$ nous aurons

ſin

$$\sin\lambda = \frac{LP}{cL} = \frac{s\mu}{r};\ \cos\lambda = \frac{\cos\mu\,(s\alpha\cos\nu + \cos\mu)}{pr}\ \&\ \mathrm{tag}\,\lambda$$
$$= \frac{p\sin\mu}{\cos\mu\,(s\alpha\cos\nu + \cos\mu)}.$$

Donc, puisque $r = \frac{\cos\alpha}{\cos\sigma}$, nous aurons

$$\sqrt{\left(1 - \frac{\cos\alpha^2}{\cos\sigma^2}\right)} = \frac{\sqrt{(\cos\sigma^2 - \cos\alpha^2)}}{\cos\sigma} = \sqrt{(1 - rr)} = \frac{\sin\alpha\cos\mu\, s\nu}{p},$$

& partant pour la fig. 5. nous obtiendrons par le §. 52,

1°. l'élévation du pole magnétique $BN = \mu$,

2°. l'angle BTN, dont le méridien magnétique BTA est incliné à l'horizon,

$$\sin BTN = \frac{\cos\alpha}{\cos\sigma} = r,\ \&\ \cos BTN = \frac{\sin\alpha\cos\mu\sin\nu}{p},$$

3°. l'arc de l'horizon NT, ou l'angle NLT,

$$\mathrm{tag}\ NT = \mathrm{tag}\,\lambda\sqrt{\left(1 - \frac{\cos\alpha^2}{\cos\sigma^2}\right)} = \frac{\sin\alpha\sin\mu\sin\nu}{\sin\alpha\cos\nu + \cos\mu},$$

4°. l'arc TM dans le méridien magnétique depuis l'horizon T jusqu'à la direction magnétique LM, à cause de $uu = DL^2 = pp + s\mu^2 = \sin\alpha^2 + 2s\alpha\cos\mu\cos\nu + 1$ & $rr - ss = \cos\alpha^2$

$$\sin TM = \frac{\cos\alpha^2\, s\mu}{r\,(s\alpha^2 + 2s\alpha\cos\mu\cos\nu + 1)},\ \&$$

$$\mathrm{tag}\ TM = \frac{p\cos\alpha^2\sin\mu}{pp\,(1 + s\alpha\cos\mu\cos\nu) + s\alpha\, s\mu^2\,(s\alpha\cos\mu\cos\nu)}.$$

De là on trouve l'inclinaison magnétique $\mathfrak{E}M$,

$$\sin \mathfrak{E}M = \frac{\cos\alpha^2\sin\mu}{\sin\alpha^2 + 2\sin\alpha\cos\mu\cos\nu + 1},$$

& enſuite l'arc de l'horizon Tε,

$$\text{tag } T\varepsilon = \frac{\sin\alpha \cos\alpha^2 \sin\mu \cos\mu \sin\nu}{pp\,(1 + \sin\alpha \cos\mu \cos\nu) + \sin\alpha \sin\mu^2 (\sin\alpha + \cos\mu \cos\nu)}, \text{ ou}$$

$$\text{tag } T\varepsilon = \frac{\sin\alpha \cos\alpha^2 \sin\mu \cos\mu \sin\nu}{(\sin\alpha^2 + 2\sin\alpha \cos\mu \cos\nu + 1)(1 + \sin\alpha \cos\mu \cos\nu) - \cos\alpha^2 \sin\mu^2},$$

& en ajoutant enſemble les arcs NT & Tε, on trouve

$$\text{tag } N\varepsilon = \frac{2\sin\alpha \sin\mu \sin\nu}{(\sin\alpha^2 + 1)\cos\mu + 2\sin\alpha \cos\nu}.$$

Maintenant, tranſportons dans la fig. 6. ce que nous venons de trouver pour la figure 5, & d'abord il eſt clair que ſur la ſurface de la terre l'arc Lε marque la méridenne magnétique, ou la même qui eſt indiquée par la droite LN dans la fig. 5. Enſuite, le petit cercle LB marque ſur la terre la même ligne, qui eſt indiquée par la droite LT dans la fig. 5. Enfin, tirons ſur la ſurface de la terre la ligne $\alpha\varepsilon$, ſur laquelle la bouſſole ſera diſpoſée, & nous aurons l'angle bLε, ou la déclinaiſon de la bouſſole de la méridienne magnétique Lb déterminée de cette ſorte,

$$\text{tag } bL\varepsilon = \frac{2\sin\alpha \sin\mu \sin\nu}{(1 + \sin\alpha^2)\cos\mu + 2\sin\alpha \cos\nu}.$$

Corollaire I.

59. Si, au lieu des poles magnétiques A & B, nous conſidérons les points i & i, où la direction magnétique devient verticale, & que nous nommions l'arc $bi = \gamma$, à cauſe de $\sin\gamma = \frac{2\sin\alpha}{1 + \sin\alpha^2}$ & $\cos\gamma = \frac{\cos\alpha^2}{1 + \sin\alpha^2}$, nous aurons pour la déclinaiſon de la bouſſole $\text{tag } bL\varepsilon = \frac{\sin\gamma \sin\mu \sin\nu}{\cos\mu + \sin\gamma \cos\nu}$.

Co-

COROLLAIRE 2.

60. La même conſidération nous conduira auſſi à une expreſſion plus ſimple pour l'inclinaiſon de l'aiguille aimantée au deſſous de l'horizon, dont le ſinus ſera $= \frac{\operatorname{cof} \gamma \ \operatorname{fin} \mu}{1 + \operatorname{fin} \gamma \ \operatorname{cof} \mu \ \operatorname{cof} \nu} = \operatorname{fin} \beta M$ (fig. 5.) &, par la combinaiſon de ces deux formules, $\frac{\operatorname{fin} b L \beta}{\operatorname{tag} \beta M} =$ $\operatorname{tag} \gamma \ \operatorname{fin} \nu$.

REMARQUE 1.

61. En cherchant la tangente de la ſomme des deux arcs NT & Tβ par les tangentes de chacun, le calcul devient fort embarraſſé; mais on découvre un diviſeur commun pour le numérateur & le dénominateur, par le moyen duquel on parvient à la formule que j'ai trouvée. Or cette formule eſt d'autant plus remarquable qu'en introduiſant l'arc $b i = \gamma$, elle ne differe de celle qui exprime tag NT $=$ tag bLB, que par l'arc γ, qui eſt ici au lieu de l'arc α, d'où nous comprenons, que ſi l'on coupoit la ſphere par un plan, qui paſſât par le lieu L & les deux points i & i, le petit cercle qui en réſulteroit ſur la ſurface, marqueroit préciſément en L la direction de la bouſſole Lβ; ou bien la déclinaiſon bLβ eſt égale à l'angle, que fait le petit cercle, tiré par les points i, i & F, avec l'arc du grand cercle bL.

REMARQUE 2.

62. Comme la Théorie de la déclinaiſon magnétique que j'avois donnée autrefois étoit fondée ſur ce faux principe, que la direction de la bouſſole étoit partout marquée par les tangentes des petits cercles tirés par les deux poles magnétiques ſur la ſurface de la terre, il eſt à préſent aiſé de corriger cette errreur, en ſubſtituant au lieu des deux poles magnétiques les deux points i & i, où la direction magnétique eſt verticale. Maintenant donc je puis aſſurer hardiment, que la méthode que j'y ai donnée pour trouver la déclinaiſon de la bouſſole à tous les endroits de la ſurface de la terre, eſt entierement d'accord

avec les principes que je viens d'établir ici, pourvu qu'on entende par les points que j'y avois nommés les poles magnétiques de la terre, les points où la direction magnétique est verticale. Donc, puisque cette correction ne change rien dans la description des lignes que j'y ai marquées à la maniere de Halley, la méthode même que j'y ai enseignée est très juste & ne demande aucune correction. Mais celle que je viens de développer ici, a cet avantage sur la précédente, qu'elle nous découvre en même tems l'inclinaison de l'aiguille aimantée en chaque lieu de la terre, pendant que dans la premiere l'article de l'inclinaison n'a point été considéré. Cependant tout cela doit s'entendre conformément à l'hypothese qui me sert ici de fondement, par laquelle je suppose, qu'à un lieu quelconque on trouve la direction magnétique LM, en tirant de L au milieu D de l'axe magnétique AB la droite LD, & prenant l'angle DLM égal à l'angle LDB; & si cette hypothese étoit fausse, il ne faudroit pas être surpris que mes déterminations ne fussent pas d'accord avec la vérité.

Planch. XIV. Fig. 4.

DÉFINITION 7.

63. *Les routes magnétiques sont des lignes tirées sur la surface de la terre, dont les tangentes marquent en chaque lieu la direction de la boussole.*

COROLLAIRE 1.

64. Donc, si en partant d'un lieu on marchoit toujours suivant la direction de la boussole, le chemin parcouru seroit une route magnétique, & il est évident que par chaque lieu de la terre il doit passer une telle route magnétique.

COROLLAIRE 2.

65. Il est clair aussi que, sur la surface de la terre, il doit y avoir une infinité de telles routes magnétiques; & comme il y a une infinité de lieux situés dans une même route, il y en a aussi une infinité qui se trouvent dans des routes différentes.

RE-

REMARQUE.

66. Il semble qu'un grand nombre de telles routes magnétiques décrites sur la surface de la terre donneroit une idée plus nette de la direction de la boussole, que les lignes Halleyennes, puisque ces routes marqueroient presque la marche de la matiere magnétique, qui dirige la boussole. Il n'y a aussi aucun doute, que ces lignes ne soyent beaucoup plus simples & plus aisées à tracer sur la surface de la terre, que les lignes Halleyennes, quand même nous n'aurions pas déjà observé, que toutes ces routes sont de petits cercles tirés par les deux points i, i de la terre, où l'inclinaison magnétique est de 90°. Mais, puisque cette observation n'est due qu'à quelque hazard, qui nous a porté à comparer la tangente de l'angle $bL\beta$ avec celle de l'angle bLB, il sera bon de trouver cette même vérité par l'analyse.

PROBLEME X.

67. *Déterminer la route magnétique, qui passe par un lieu proposé quelconque sur la surface de la terre.* Planch. XV. Fig. 7.

SOLUTION.

Soit L le lieu proposé de la terre, par lequel on tire du pole b de l'équateur magnétique l'arc de grand cercle bLQ, tombant perpendiculairement en Q sur l'équateur EF; & puisque ce lieu est supposé connu, on aura sa latitude magnétique $LQ = \mu$, & sa longitude EQ, ou l'angle $EbQ = \nu$. Soyent de plus dans le premier méridien magnétique $EaFb$, les points i, i, où la direction magnétique est verticale, & posons l'arc $bi = \gamma$: cela posé, il s'agit de tirer par L une ligne $L\beta$ sur la surface de la terre, qui fasse avec l'arc bL un angle $bL\beta$ tel, qu'il soit $\operatorname{tag} bL\beta = \frac{\sin\gamma \sin\mu \sin\nu}{\cos\mu + \sin\gamma \cos\nu}$. Pour cet effet, posons l'angle $ibL = x$ & l'arc $bL = y$, de sorte que $\mu = 90° - y$ & $\nu = 180° - x$, & partant $\operatorname{tag} bL\beta = \frac{\sin\gamma \cos y \sin x}{\sin y - \sin\gamma \cos x}$:

 qu'on

qu'on tire l'arc bl infiniment proche de bL, pour avoir l'élément de la courbe cherchée Ll, & puiſque l'angle $Lbl = dx$, en tirant Lm perpendiculaire à bL, nous aurons $Lm = dx \sin y$ & $ml = dy$, d'où réſulte $\frac{dx \sin y}{dy.} = \operatorname{tag} Llb = \operatorname{tag} bL\beta = \frac{\sin \gamma \operatorname{cof} y \sin x}{\operatorname{f} y - \operatorname{f} \gamma \operatorname{cof} x}$, & partant entre x & y cette équation différentielle,

$$dx\, \operatorname{f} y^2 - dx\, \operatorname{f} \gamma\, \operatorname{f} y \operatorname{cof} x = dy\, \operatorname{f} \gamma \operatorname{cof} y \sin x, \text{ ou bien}$$

$$dx = \frac{dx\, \operatorname{f} \gamma\, \operatorname{f} y \operatorname{cof} x + dy\, \operatorname{f} \gamma \operatorname{cof} y\, \operatorname{f} x}{\sin y^2} = \frac{\sin \gamma}{\operatorname{f} y^2} d \,.\, \sin y \sin x.$$

Diviſons par $\sin x^2$ pour avoir cette équation intégrable,

$$\frac{dx}{\sin x^2} = \sin \gamma \,.\, \frac{d \,.\, \sin y \sin x}{\sin y^2 \sin x^2},$$

dont l'intégrale eſt $\frac{-\operatorname{cof} x}{\sin x} = -\frac{\sin \gamma}{\sin y\, \operatorname{f} x} - \text{Conſt}$, ou

$$\operatorname{cof} x\, \operatorname{f} y = \sin \gamma + C \sin x \sin y; \text{ donc } \sin y = \frac{\sin \gamma}{\operatorname{cof} x - C\, \operatorname{f} x}.$$

Poſons cette conſtante $C = -\operatorname{tag} \varepsilon$, pour avoir

$$\sin y = \frac{\sin \gamma \operatorname{cof} \varepsilon}{\operatorname{cof} (x - \varepsilon)}.$$

Maintenant, pour approfondir la nature de cette courbe, tirons le grand cercle bK, faiſant avec l'arc biF l'angle $ibK = \varepsilon$, le point K étant ſitué dans l'équateur magnétique EF, & puiſque l'angle $KbL = x - \varepsilon$, nous aurons

$\sin y = \sin bL = \frac{\sin \gamma \operatorname{cof} \varepsilon}{\operatorname{cof} KbL}$; or joignant l'arc de grand cercle KL, le triangle KbL, dont le côté bK eſt un quart de cercle, donne $\operatorname{cof} KL = \sin bL \operatorname{cof} KbL$, de ſorte que $\operatorname{cof} KL = \sin \gamma \operatorname{cof} \varepsilon$, & partant l'arc KL conſtant, d'où l'on voit que la route cherchée eſt un petit cercle, dont le centre K ſe trouve dans l'équateur mag-

magnétique; mais nous en connoitrons aussi aisément le rayon KL, qui sera égal à l'arc de grand cercle Ki, puisque le triangle ibK, où le côté $bi = \gamma$, l'angle $ibK = \epsilon$, & le côté $bK = 90°$, donne cos $Ki = \sin\gamma \cos\epsilon$, & partant $KL = Ki$. Par conséquent, toutes les routes magnétiques sont des cercles décrits sur la surface de la terre, qui passent par les deux points i & i, où la direction magnétique est verticale, & pour avoir la route magnétique qui passe par le lieu donné L, on n'a qu'à décrire un cercle, qui passe par ce lieu & en même tems par les deux points i & i.

Corollaire 1.

68. Un vaisseau donc qui cingleroit toujours selon la direction de sa boussole, au lieu de décrire une ligne loxodromique, décriroit un cercle sur la surface de la mer, & parviendroit enfin à l'un ou l'autre endroit i, où la direction magnétique est verticale & la boussole perd tout usage.

Corollaire 2.

69. Ces routes magnétiques sont toutes de petits cercles de la sphere, dont pourtant les diametres ne sauroient être plus petits que l'intervalle ii; il n'y en a qu'une seule qui soit un grand cercle, qui est le premier méridien magnétique, sous lequel la déclinaison $bL\mathfrak{G}$ est partout nulle.

PROBLEME XI.

70. *La position des poles magnétiques étant donnée par rapport aux poles du monde, si l'on connoit la longitude & la latitude géographique d'un lieu sur la terre, trouver la longitude & la latitude magnétique du même lieu.*

SOLUTION.

Soit Π le pole boréal du monde & le grand cercle ΠG un méridien fixe, duquel on compte la longitude des lieux sur la terre. Fig. 6.
Qu'on tire de Π au pole boréal de l'équateur magnétique b l'arc du grand cercle Πb, & le cercle EbF étant le premier méridien magnétique,

que, & i le lieu où l'inclinaiſon eſt verticale, la poſition de l'état magnétique par rapport aux poles du monde ſera déterminée par les quatre élémens ſuivans,

l'arc $bi = \gamma$; l'angle $ib\Pi = \delta$; l'arc $b\Pi = \epsilon$ & l'angle $G\Pi b = \zeta$.

Maintenant, pour un lieu propoſé de la terre L, poſons

1°. Sa diſtance au pole boréal $\Pi L = p$, qui eſt le complément de ſa latitude géographique,

2°. Sa longitude géographique, ou l'angle $G\Pi L = q$.

Cela poſé, pour en trouver, tant la longitude magnétique ou l'angle $EbL = \nu$, que la latitude magnétique $LQ = \mu$, dont le complément eſt l'arc $bL = 90° - \mu$, on n'a qu'à réſoudre le triangle ſphérique $\Pi b L$, dans lequel on connoit les deux côtés $\Pi b = \epsilon$, $\Pi L = p$, avec l'angle $b\Pi L = \zeta + q$, & de là on trouve

$$\operatorname{cof} bL = \operatorname{fin} \mu = \operatorname{cof} \epsilon \operatorname{cof} p + \operatorname{fin} \epsilon \operatorname{fin} p \operatorname{cof} (\zeta + q),$$

& enſuite l'angle $\Pi b L = 180° - \delta - \nu$, par la formule

$$\operatorname{tag} \Pi b L = -\operatorname{tag} (\delta + \nu) = \frac{\operatorname{fin} p \operatorname{fin} (\zeta + q)}{\operatorname{cof} p \operatorname{fin} \epsilon - \operatorname{fin} p \operatorname{cof} \epsilon \operatorname{cof} (\zeta + q)},$$

$$\text{de ſorte que } \operatorname{tag} (\delta + \nu) = \frac{\operatorname{fin} p \operatorname{fin} (\zeta + q)}{\operatorname{cof} \epsilon \operatorname{fin} p \operatorname{cof} (\zeta + q) - \operatorname{fin} \epsilon \operatorname{cof} p};$$

enfin le même triangle donne auſſi à connoitre l'angle $bL\Pi$ par cette formule

$$\operatorname{tag} bL\Pi = \frac{\operatorname{fin} \epsilon \operatorname{fin} (\zeta + q)}{\operatorname{cof} \epsilon \operatorname{fin} p - \operatorname{fin} \epsilon \operatorname{cof} p \operatorname{cof} (\zeta + q)}.$$

Cet angle $bL\Pi$ étant retranché de l'angle $bL\beta$, déterminé ci-deſſus, laiſſera l'angle $\Pi L\beta$, qui eſt la véritable déclinaiſon de la bouſſole depuis la méridienne du lieu L. Or, ayant trouvé les angles μ & ν, on aura

$$\operatorname{tag} bL\beta = \frac{\operatorname{fin} \gamma \operatorname{fin} \mu \operatorname{fin} \nu}{\operatorname{cof} \mu + \operatorname{fin} \gamma \operatorname{cof} \nu},$$

&

& pour le même lieu on obtient aussi aisément l'inclinaison de l'aiguille aimantée, dont le sinus est $= \frac{\cos\gamma \sin\mu}{1 + \sin\gamma \cos\mu \cos\nu}$.

Corollaire 1.

71. Ayant trouvé tag $(\delta + \nu) = \frac{\sin p \sin(\zeta + q)}{\cos\epsilon \sin p \cos(\zeta+q) - \sin\epsilon \cos p}$, on en tire pour la longitude magnétique, ou l'angle EbL $= \nu$,

$$\text{tag}\,\nu = \frac{\cos\delta \sin p \sin(\zeta+q) - \sin\delta \cos\epsilon \sin p \cos(\zeta+q) + \sin\delta \sin\epsilon \cos p}{\sin\delta \sin p \sin(\zeta+q) + \cos\delta \cos\epsilon \sin p \cos(\zeta+q) - \cos\delta \sin\epsilon \cos p},$$

& de là

$$\sin\nu = \frac{\cos\delta \sin p \sin(\zeta+q) - \sin\delta \cos\epsilon \sin p \cos(\zeta+q) + \sin\delta \sin\epsilon \cos p}{\cos\mu},$$

$$\cos\nu = \frac{\sin\delta \sin p \sin(\zeta+q) + \cos\delta \cos\epsilon \sin p \cos(\zeta+q) - \cos\delta \sin\epsilon \cos p}{\cos\mu}.$$

Corollaire 2.

72. On n'a donc qu'à substituer ces valeurs de $\sin\mu$, $\sin\nu$ & $\cos\nu$ dans la formule tag bL$\text{Б} = \frac{\sin\gamma \sin\mu \sin\nu}{\cos\mu + \sin\gamma \cos\nu}$, & ensuite la tangente de la véritable déclinaison ΠLБ $= b$LБ $= b$LΠ deviendra rationelle, puisque $\cos\mu^2$ qui y entre est $= 1 - \sin\mu^2$.

Corollaire 3.

73. Or, pour l'inclinaison magnétique, son sinus sera exprimé plus simplement, puisque, tant $\sin\mu$, que $\cos\mu \cos\nu$, sont des expressions rationelles. Posant donc l'inclinaison de l'aiguille aimantée $= \theta$, on aura

$$\sin\theta = \frac{\cos\gamma\,(\cos\epsilon \cos p + \sin\epsilon \sin p \cos(\zeta + q))}{1 + \sin\gamma \sin\delta \sin p \sin(\zeta+q) + \sin\gamma \cos\delta(\cos\epsilon \sin p \cos(\zeta+q) - \sin\epsilon \cos p)}.$$

PROBLEME XII.

74. *Pour un lieu quelconque de la terre, dont on connoit la longitude & la latitude géographique, trouver la déclinaison de la bousſole depuis la méridienne de ce lieu.*

SOLUTION.

Que toutes les dénominations demeurent les mêmes que dans le probleme précédent, mais qu'on poſe pour abréger,

$$\cos\epsilon\cos p + \sin\epsilon\sin p\cos(\zeta + q) = \mathrm{P},$$
$$\sin\epsilon\cos p - \cos\epsilon\sin p\cos(\zeta + q) = \mathrm{Q},$$
$$\cos\epsilon\sin p - \sin\epsilon\cos p\cos(\zeta + q) = \mathrm{R},$$

& on aura entre les lettres P, Q, R, ces rélations,

$$\mathrm{P}\cos\epsilon + \mathrm{Q}\sin\epsilon = \cos p\,; \qquad \mathrm{P}\cos p + \mathrm{R}\sin p = \cos\epsilon,$$
$$\mathrm{P}\sin\epsilon - \mathrm{Q}\cos\epsilon = \sin p\cos(\zeta + q);\ \mathrm{P}\sin p - \mathrm{R}\cos p = \sin\epsilon\cos(\zeta + q),$$
$$\mathrm{PP} + \mathrm{QQ} = \cos p^2 + \sin p^2\cos(\zeta + q)^2 = 1 - \sin p^2\sin(\zeta + q)^2,$$
$$\mathrm{PP} + \mathrm{RR} = \cos\epsilon^2 + \sin\epsilon^2\cos(\zeta + q)^2 = 1 - \sin\epsilon^2\sin(\zeta + q)^2,$$
$$\mathrm{Q} + \mathrm{R} = \sin(\epsilon + p)(1 - \cos(\zeta + q)),$$
$$\mathrm{Q} - \mathrm{R} = \sin(\epsilon - p)(1 + \cos(\zeta + q)).$$

Cela poſé, nous aurons

$$\sin\mu = \mathrm{P};\ \sin\nu\cos\mu = \cos\delta\sin p\sin(\zeta + q) + \mathrm{Q}\sin\delta,$$
$$\&\quad \cos\nu\cos\mu = \sin\delta\sin p\sin(\zeta + q) - \mathrm{Q}\cos\delta,$$

& partant $\operatorname{tag} b\mathrm{L}\mathcal{C} = \dfrac{\mathrm{P}\sin\gamma(\cos\delta\sin p\sin(\zeta + q) + \mathrm{Q}\sin\delta)}{1 - \mathrm{PP} + \sin\gamma(\sin\delta\sin p\sin(\zeta + q) - \mathrm{Q}\cos\delta)}$

or $\operatorname{tag} b\mathrm{L}\Pi = \dfrac{\sin\epsilon\sin(\zeta + q)}{\mathrm{R}}$, d'où l'on tire $\operatorname{tag}\Pi\mathrm{L}\mathcal{C} =$

$$\frac{\mathrm{PR}\sin\gamma(\cos\delta\sin p\sin(\zeta + q) + \mathrm{Q}\sin\delta) - (1 - \mathrm{PP})\sin\epsilon\sin(\zeta + q) - \sin\gamma\sin\epsilon\sin(\zeta + q)(\sin\delta\sin p\sin(\zeta + q) - \mathrm{Q}\cos\delta)}{\mathrm{P}\sin\gamma\sin\epsilon\sin(\zeta + q)(\cos\delta\sin p\sin(\zeta + q) + \mathrm{Q}\sin\delta) + \mathrm{R}(1 - \mathrm{PP}) + \mathrm{R}\sin\gamma(\sin\delta\sin p\sin(\zeta + q) - \mathrm{Q}\cos\delta)},$$

ou bien $\operatorname{tag}\Pi\mathrm{L}\mathcal{C} =$

$$\frac{\sin\gamma\cos\delta\sin(\zeta+q)(\mathrm{PR}\sin p+\mathrm{Q}\sin\epsilon)+\sin\gamma\sin\delta(\mathrm{PQR}-\sin\epsilon\sin p\sin(\zeta+q)^2)-(1-\mathrm{PP})\sin\epsilon\sin(\zeta+q)}{\sin\gamma\cos\delta(\mathrm{P}\sin\epsilon\sin p\sin(\zeta+q)^2-\mathrm{QR})+\sin\gamma\sin\delta\sin(\zeta+q)(\mathrm{PQ}\sin\epsilon+\mathrm{R}\sin p)+\mathrm{R}(1-\mathrm{PP})}.$$

Or, en développant ces expressions, on trouve

$$\mathrm{PR}\sin p+\mathrm{Q}\sin\epsilon=(1-\mathrm{PP})\cos p\sin(\zeta+q),$$

$$\mathrm{PQR}-\sin\epsilon\sin p\sin(\zeta+q)^2=-(1-\mathrm{PP})(\sin\epsilon\sin p+\cos\epsilon\cos p\cos(\zeta+q)),$$

$$\mathrm{P}\sin\epsilon\sin p\sin(\zeta+q)^2-\mathrm{QR}=(1-\mathrm{PP})\cos(\zeta+q),$$

$$\mathrm{PQ}\sin\epsilon+\mathrm{R}\sin p=+(1-\mathrm{PP})\cos\epsilon,$$

d'où l'on voit qu'en divisant le numérateur & dénominateur par $1-\mathrm{PP}$, notre formule se réduira à celle-ci, $\mathrm{tag}\,\Pi\mathrm{L}\mathfrak{C}=$

$$\frac{\sin\gamma\cos\delta\cos p\sin(\zeta+q)-\sin\gamma\sin\delta(\sin\epsilon\sin p+\cos\epsilon\cos p\cos(\zeta+q))-\sin\epsilon\sin(\zeta+q)}{\sin\gamma\cos\delta\cos(\zeta+q)+\sin\gamma\sin\delta\cos\epsilon\sin(\zeta+q)+\cos\epsilon\sin p-\sin\epsilon\cos p\cos(\zeta+q)}.$$

COROLLAIRE 1.

75. Puisque six angles ou arcs γ, δ, ϵ, ζ, & p, q, concourent à déterminer la déclinaison de la boussole, on ne sauroit espérer que cette formule pût être réduite à une plus grande simplicité.

COROLLAIRE 2.

76. Si le lieu proposé se trouve sous l'équateur, de sorte que l'arc p devienne $=90°$, notre formule devient beaucoup plus simple, & l'on aura

$$\mathrm{tag}\,\Pi\mathrm{L}\mathfrak{C}=-\frac{\sin\gamma\sin\delta\sin\epsilon-\sin\epsilon\sin(\zeta+q)}{\sin\gamma\cos\delta\cos(\zeta+q)+\sin\gamma\sin\delta\cos\epsilon\sin(\zeta+q)+\cos\epsilon}.$$

PROBLEME XIII.

77. *Ayant observé en plusieurs lieux de la terre, & cela en même tems, la déclinaison de la boussole, déterminer la position des poles magnétiques, & de là la déclinaison pour tous les autres lieux de la terre.*

SOLUTION.

La formule que je viens de trouver pour la déclinaison de la boussole en général, suffit pour résoudre ce probleme, en définissant Fig. 6.

par

par plusieurs observations la juste valeur des quatre angles γ, δ, ϵ, ζ. Or, pour en faire l'application à des observations actuelles, il faut bien établir en quel sens sont pris les angles qui mesurent, tant la longitude des lieux, que la déclinaison de la boussole. Pour cet effet, je m'arrêterai à la représentation de la figure en supposant que le grand cercle EQF est dirigé de l'orient à l'occident. Donc, ayant pris un méridien fixe ΠG pour y rapporter la longitude de tous les lieux L, je suppose que cela se fasse de l'orient à l'occident, d'une maniere contraire à celle dont on se sert dans la Géographie. Chaque observation nous fournit donc trois quantités connues,

1°. La distance du lieu L au pole arctique Π, ou l'arc $\Pi L = p$,

2°. La longitude de ce lieu depuis le méridien fixe ΠG comptée de l'orient à l'occident, ou l'angle $G\Pi L = q$,

3°. La déclinaison de la boussole depuis la méridienne du lieu vers l'occident; soit cette déclinaison $\Pi L \mathfrak{G} = \omega$, qui marque combien le bout boréal de l'aiguille s'écarte du vrai nord vers l'occident.

Cela posé, nous avons trouvé cette équation, $\tan \omega =$

$$\frac{\sin\gamma\cos\delta\cos p\sin(\zeta+q)-\sin\gamma\sin\delta\sin\epsilon\,\mathrm{s}\,p-\sin\gamma\sin\delta\cos\epsilon\cos p\cos(\zeta+q)-\mathrm{s}\,\epsilon\,\mathrm{s}(\zeta+q)}{\sin\gamma\cos\delta\cos(\zeta+q)+\sin\gamma\sin\delta\cos\epsilon\sin(\zeta+q)+\cos\epsilon\sin p-\sin\epsilon\cos p\cos(\zeta+q)},$$

où, pour séparer l'angle inconnu ζ du connu q, il faut développer les formules $\sin(\zeta+q)$ & $\cos(\zeta+q)$, d'où l'on obtiendra le numérateur $=$

$$\sin\gamma\cos\delta\sin\zeta\cos p\cos q+\sin\gamma\cos\delta\cos\zeta\cos p\,\mathrm{s}\,q-\mathrm{s}\,\gamma\,\mathrm{s}\,\delta\,\mathrm{s}\,\epsilon\,\mathrm{s}\,p-\mathrm{s}\,\epsilon\,\mathrm{s}\,\zeta\cos q-\mathrm{s}\,\epsilon\cos\zeta\,\mathrm{s}\,q$$
$$-\sin\gamma\sin\delta\cos\epsilon\cos\zeta\cos p\cos q+\sin\gamma\sin\delta\cos\epsilon\sin\zeta\cos p\cos q,$$

le dénominateur $=$

$$\sin\gamma\cos\delta\cos\zeta\cos q-\sin\gamma\cos\delta\sin\zeta\sin q+\cos\epsilon\,\mathrm{s}\,p-\mathrm{s}\,\epsilon\cos\zeta\cos p\cos q+\mathrm{s}\,\epsilon\,\mathrm{s}\,\zeta\cos p\,\mathrm{s}\,q$$
$$+\sin\gamma\sin\delta\cos\epsilon\sin\zeta\cos q+\sin\gamma\sin\delta\cos\epsilon\cos\zeta\sin q.$$

Posons maintenant pour abréger

$$\sin\gamma\,(\cos\delta\sin\zeta-\sin\delta\cos\epsilon\cos\zeta)=A\sin\epsilon,$$
$$\sin\gamma\,(\cos\delta\cos\zeta+\sin\delta\cos\epsilon\sin\zeta)=B\sin\epsilon,$$

&

& nous aurons $\mathrm{tag}\,\omega =$

$$\frac{A\cos p\cos q + B\cos p\sin q - \sin\zeta\cos q - \cos\zeta\sin q - \sin\gamma\sin\delta\sin p}{B\cos q - A\sin q + \sin\zeta\cos p\sin q - \cos\zeta\cos p\cos q + \cot\epsilon\sin p},$$

où il faut remarquer que $\sin\gamma\ \sin\delta = (B\sin\zeta - A\cos\zeta)\ \mathrm{tag}\,\epsilon$ & $\sin\gamma\cos\delta = (A\sin\zeta + B\cos\zeta)\sin\epsilon$, de forte qu'il n'y a ici que quatre quantités inconnues A, B, ϵ & ζ, pour la détermination desquelles quatre obfervations font fuffifantes. Pour rendre cette forme encore plus commode, pofons $A = C\cos\zeta$ & $B = D\cos\zeta$, ou

$\sin\gamma(\cos\delta\sin\zeta - \sin\delta\cos\epsilon\cos\zeta) = C\sin\epsilon\cos\zeta$ & $\sin\gamma(\cos\delta\cos\zeta + \sin\delta\cos\epsilon\sin\zeta) = D\sin\epsilon\cos\zeta$,

enfuite foit $\frac{\cot\epsilon}{\cos\zeta} = E$ & $\frac{C - D\,\mathrm{tag}\,\zeta}{E} = F$, pour avoir

$$\mathrm{tag}\,\omega = \frac{C\cos p\cos q + D\cos p\sin q - \sin q - \mathrm{tag}\,\zeta\cos q + F\sin p}{D\cos q + C\sin q - \cos p\cos q + \mathrm{tag}\,\zeta\cos p\sin q + E\sin p},$$

où nous avons 5 quantités inconnues C, D, E, F & $\mathrm{tag}\,\zeta$; mais il y a

$$C - D\ \mathrm{tag}\,\zeta = EF, \text{ ou } \mathrm{tag}\,\zeta = \frac{C - EF}{D}.$$

Or, quoique quatre obfervations foyent fuffifantes pour nous découvrir les valeurs des lettres C, D, E & F, il fera bon d'y en employer plufieurs, à moins que les déclinaifons ne foyent très exactes, afin qu'en prenant un milieu entre les différens réfultats, on foit d'autant plus fûr de leurs juftes valeurs. Enfuite, ayant trouvé ces valeurs avec l'angle ζ, la formule $\cot\epsilon = E\cos\zeta$ donnera l'angle ϵ, & de là on trouve

$$\mathrm{tag}\,\delta = \frac{D\,\mathrm{tag}\,\zeta - C}{(C\,\mathrm{tag}\,\zeta + D)\cos\epsilon}, \ \&\ \sin\gamma = \frac{D\sin\zeta - C\cos\zeta}{E\sin\delta} = \frac{-F\cos\zeta}{\sin\delta}.$$

Enfin, pour connoître les poles magnétiques, ou plutôt les lieux où l'inclinaifon eft verticale, on prendra du méridien fixe ΠG vers l'orient l'angle $G\Pi b = \zeta$, & l'arc $\Pi b = \epsilon$, pour avoir le pole boréal b de l'équateur magnétique, & de l'arc $b\Pi$ on prendra vers l'occident l'angle $\Pi b B = \delta$, pour avoir le premier méridien magnétique, dans le-

quel

quel prenant l'arc $bi = \gamma$, on aura le lieu boréal i, où la direction magnétique est verticale.

Corollaire 1.

78. L'équation trouvée pour la déclinaison de la boussole peut être représentée de cette sorte,

$$\operatorname{tag}\omega = \frac{a\sin p + f\cos p\cos q + g\cos p\sin q - h\sin q - k\cos q}{b\sin p - f\sin q + g\cos q - h\cos p\cos q - k\cos p\sin q},$$

où $ab = fh + gk$, & ayant trouvé ces coëfficiens, on aura

$$\operatorname{tag}\zeta = \frac{-k}{h};\ \cot\epsilon = \frac{b\cos\zeta}{h};\ \operatorname{tag}\delta = \frac{ab}{(fk-gh)\cos\epsilon}\ \&\ \sin\gamma = \frac{-a\cos\zeta}{h\sin\delta}.$$

Corollaire 2.

79. En employant les mêmes lettres a, b, f, g, h, k, l'inclinaison magnétique θ se trouvera exprimée ainsi, $\sin\theta =$

$$\frac{(b\cos p + h\sin p\cos q + k\sin p\sin q)\sqrt{(bb - aa + hh + kk - ff - gg)}}{bb + hh + kk + (ak + bg)\sin p\cos q - (ah + bf)\sin p\sin q + (fk + gh)\cos p},$$

à cause de

$$\sin\zeta = \frac{-k}{\sqrt{(hh+kk)}};\ \sin\epsilon = \frac{\sqrt{(hh+kk)}}{\sqrt{(bb+hh+kk)}};\ \sin\delta = \frac{a\sqrt{(bb+hh+kk)}}{\sqrt{(hh+kk)(aa+ff+gg)}};$$

$$\cos\zeta = \frac{h}{\sqrt{(hh+kk)}};\ \cos\epsilon = \frac{b}{\sqrt{(bb+hh+kk)}};\ \cos\delta = \frac{fk-gh}{\sqrt{(hh+kk)(aa+ff+gg)}},$$

$$\&\ \sin\gamma = \frac{-\sqrt{(aa+ff+gg)}}{\sqrt{(bb+hh+kk)}}.$$

Corollaire 3.

80. Pourvu donc qu'on ait trouvé pour quelque tems proposé ces lettres a, b, f, g, h, k, cela suffit pour déterminer, tant la déclinaison de la boussole ω, que l'inclinaison θ, pour tous les lieux de la surface de la terre, sans qu'on connoisse en détail les poles magnétiques.

Remarque.

81. Pourvu qu'on ait quatre ou plusieurs bonnes observations sur la déclinaison de la boussole, faites en même tems & en des endroits fort éloignés les uns des autres, le calcul ne sera pas difficile pour trouver les valeurs des lettres a, b, f, g, h, k. Car chaque observation fournit une telle équation,

$$o = a \sin p - b \,\mathrm{f}\, p \,\mathrm{tag}\, \omega + f(\cos p \cos q + \sin q \,\mathrm{tag}\, \omega) - h(\mathrm{f}\, q - \cos p \cos q \,\mathrm{tag}\, \omega)$$
$$+ g(\cos p \sin q - \cos q \,\mathrm{tag}\, \omega) + k(\cos q + \cos p \,\mathrm{f}\, q \,\mathrm{tag}\, \omega),$$

& puisqu $ab = fh + gk$, quatre telles équations suffisent pour trouver toutes les lettres; mais on fera très bien d'y en employer au moins cinq, pour voir si, après en avoir calculé le rapport entre toutes les 6 lettres, il en résulte $ab = fh + gk$. Cette condition pourra servir à corriger les fautes qui pourroient s'être glissées dans les observations. De telles fautes ne sont que trop à craindre, surtout dans les observations faites sur mer, & il seroit à souhaiter qu'on fût aussi soigneux de faire de telles observations sur terre que sur mer, ce qui nous mettroit en état d'entreprendre ces déterminations avec beaucoup plus de confiance. Au reste, des observations faites dans une contrée médiocre, en remarquant la différence qui s'y trouve dans la déclinaison, peuvent servir à déterminer la route magnétique qui passe par cette contrée.

PROBLEME XIV.

82. *Ayant observé la déclinaison de la boussole 1°. en L, 2°. sous le même méridien en N, & 3°. sous le même parallele en M, la différence de latitude & de longitude étant donnée, trouver sur la surface de la terre le centre K de la route magnétique qui passe par le lieu L.* Fig. 8.

SOLUTION.

Soit la distance du lieu proposé L au pole boréal du monde $\Pi L = p$, duquel le lieu M situé sous le même parallele, soit éloigné en longitude vers l'orient de l'angle $L \Pi M = m$; or, pour le lieu N situé

situé sous le même méridien, soit l'arc LN $=n$, dont il est plus éloigné du pole Π que L. Dans ces trois endroits, soit observée la déclinaison de la boussole vers l'occident 1°. en L $=\omega$; 2°. en M $=\omega+\mu$, & 3°. en N $=\omega+\nu$; où je suppose que les trois lieux L, M & N, n'étant point fort éloignés entr'eux, les différences dans la déclinaison μ & ν sont fort petites.

De là on connoitra la déclinaison de la boussole pour un lieu moyen quelconque l; car, soit pour ce lieu la différence en longitude ou l'angle $L\Pi l = x$, & la distance du pole $\Pi l = p+y$, & on conclura qu'en l la déclinaison sera $=\omega+\frac{\mu x}{m}-\frac{\nu y}{n}$. Qu'on considere maintenant Ll comme l'élément de la route magnétique qui passe par L, & son centre K sera situé quelque part sur l'arc du grand cercle LK, tiré perpendiculairement sur la direction de la boussole $L\mathfrak{S}$, de sorte que l'angle $\Pi LK = 90° + \omega$. Soit l'arc cherché $LK = z$, qu'on tire l'arc de grand cercle ΠK, & soit l'angle $K\Pi L = s$, pour avoir dans le triangle sphérique ΠLK,

$$\operatorname{cos}\Pi K = \operatorname{cos}p\operatorname{cos}z - \operatorname{f}p\operatorname{f}z\operatorname{sin}\omega \;\&\; \operatorname{tag}s = \frac{\operatorname{sin}z\operatorname{cos}\omega}{\operatorname{f}p\operatorname{cos}z+\operatorname{cos}p\operatorname{f}z\operatorname{sin}\omega},$$

$$\&\; \operatorname{f}\Pi K\,.\operatorname{f}s = \operatorname{f}z\operatorname{cos}\omega,\;\&\; \operatorname{f}\Pi K\,.\operatorname{cos}s = \operatorname{f}p\operatorname{cos}z + \operatorname{cos}p\operatorname{f}z\operatorname{sin}\omega.$$

Maintenant, le triangle sphérique ΠlK différant infiniment peu du triangle ΠLK, considérons les différences comme des différentiels, & posons $\Pi l = p+\mathrm{d}p$, l'angle $K\Pi l = s+\mathrm{d}s$, & la déclinaison de la boussole en l, ou l'angle $Llm = \omega+\mathrm{d}\omega$, les quantités ΠK & $LK = z$ demeurant constantes. Cela remarqué, la premiere équation différentiée donne

$$o = \mathrm{d}p\operatorname{f}p\operatorname{cos}z + \mathrm{d}p\operatorname{cos}p\operatorname{f}z\operatorname{f}\omega + \mathrm{d}\omega\operatorname{f}p\operatorname{f}z\operatorname{cos}\omega,\text{ ou }\mathrm{d}p = \frac{-\mathrm{d}\omega\operatorname{f}p\operatorname{f}z\operatorname{cos}\omega}{\operatorname{f}p\operatorname{cos}z+\operatorname{cos}p\operatorname{f}z\operatorname{f}\omega},$$

& la troisieme,

$$\mathrm{d}s\operatorname{f}\Pi K.\operatorname{cos}s = -\mathrm{d}\omega\operatorname{f}z\operatorname{f}\omega;\text{ donc }\mathrm{d}s = \frac{-\mathrm{d}\omega\operatorname{f}z\operatorname{f}\omega}{\operatorname{f}p\operatorname{cos}z+\operatorname{cos}p\operatorname{f}z\operatorname{f}\omega}.$$

Or,

Or, en comparant ces valeurs avec la variation dans la déclinaiſon, nous aurons $x = \mathrm{d}s$ & $y = \mathrm{d}p$, & partant

$$\omega + \mathrm{d}\omega = \omega + \frac{\mu x}{m} + \frac{\nu y}{n}, \text{ ou } \mathrm{d}\omega = \frac{\mu x}{m} + \frac{\nu y}{n} = \frac{\mu\,\mathrm{d}s}{m} + \frac{\nu\,\mathrm{d}p}{n}.$$

Subſtituons ici les valeurs trouvées, & nous obtiendrons

$$\mathrm{f}p \operatorname{cof} z + \operatorname{cof} p\, \mathrm{f}z\, \mathrm{f}\omega = -\frac{\mu}{m} \mathrm{f}z\, \mathrm{f}\omega - \frac{\nu}{n} \mathrm{f}p\, \mathrm{f}z \operatorname{cof}\omega,$$

& par conſéquent pour le rayon cherché LK $= z$,

$$\cot z = -\frac{\operatorname{cof} p\ \mathrm{f}\omega}{\sin p} - \frac{\mu\, \mathrm{f}\omega}{m\, \mathrm{f}p} - \frac{\nu \operatorname{cof}\omega}{n},$$

ou bien $\operatorname{tag} z = \dfrac{-\, mn \sin p}{mn \operatorname{cof} p\, \mathrm{f}\omega + n\mu\, \mathrm{f}\omega + m\nu\, \mathrm{f}p \operatorname{cof}\omega}$.

Corollaire 1.

83. Par ce moyen on connoitra un point K dans l'équateur magnétique, & puiſqu'une autre opération ſemblable nous découvrira une autre route magnétique, dont le centre eſt auſſi dans cet équateur, on ſera en état de tirer l'équateur magnétique ſur le globe terreſtre.

Corollaire 2.

84. Ayant tracé ſur le globe les deux petits cercles qui marquent des routes magnétiques, leurs interſections montreront les deux points i & i, où l'inclinaiſon eſt verticale; & de là on aura tous les élémens pour déterminer partout, tant la déclinaiſon de la bouſſole, que l'inclinaiſon magnétique.

Remarque.

85. Ayant tiré ſur le globe de la terre une route magnétique, elle marquera dans tous les lieux par où elle paſſe la déclinaiſon de la bouſſole. Donc, ſi l'on connoit dailleurs quelque part dans ce cercle la déclinaiſon, cela ſervira, ou à confirmer la concluſion qu'on en a

 tirée

tirée, ou à la corriger, en cas que cette derniere observation ne fût pas d'accord. Cependant on comprend aisément que cette opération exige des observations faites avec toute l'exactitude possible, puisque la moindre erreur y seroit de la plus grande conséquence; & par cette raison on ne sauroit appliquer cette méthode à des observations faites en mer. Il n'est pas aussi nécessaire que les trois observations soyent précisément faites en trois lieux L, M & N, tels que j'ai supposé; mais, pourvu que les trois lieux different d'une maniere quelconque, tant en longitude qu'en latitude, on en tirera aisément la formule $\omega - \frac{\mu x}{m} + \frac{\nu y}{n}$, en regardant comme inconnues les fractions $\frac{\mu}{m}$ & $\frac{\nu}{n}$, pour les déterminer ensuite par les déclinaisons observées en M & N, de quelque maniere que differe l'un & l'autre, tant en longitude qu'en latitude, du lieu principal L.

APPLICATION DE CETTE THÉORIE

à la détermination de l'état magnétique de la terre pour l'an 1756.

86. Dans le L Volume des Transactions, on trouve une grande liste d'observations faites dans cette année sur la déclinaison de la boussole, que j'ai représentées dans la table ci-jointe. Pour déterminer par-là l'état magnétique de la terre, je commence par considérer quelques endroits où la déclinaison a été nulle, ce qui est arrivé dans la Mer Atlantique aux lieux suivans, dont la distance au pole boréal est posée $= p$, & la longitude comptée du méridien de Londres $= q$.

Lieux où la déclinaison a été nulle en 1756.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
$p = 60°$;	$p = 65°$;	$p = 70°$;	$p = 75°$;	$p = 80°$;	$p = 85°$;	$p = 90°$;
$q = 75°$;	$q = 55°$;	$q = 47°\frac{1}{2}$;	$q = 42°$;	$q = 37°\frac{1}{2}$;	$q = 33°$;	$q = 31°$;

VIII.

VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.
$p = 95°$;	$p = 100°$;	$p = 105°$;	$p = 110°$;	$p = 115°$;	$p = 120°$;
$q = 30°$;	$q = 28°$;	$q = 27°$;	$q = 25°$;	$q = 23°$;	$q = 21°$;

XIV.	XV.
$p = 125°$;	$p = 130°$;
$q = 19°$;	$q = 17°$;

à quoi j'ajoute deux obſervations faites ſous l'équateur aux Indes orientales, où la déclinaiſon étoit pareillement nulle :

$$p = 90° ; \quad p = 90°;$$
$$q = -79° ; \quad q = -94°.$$

87. Puiſque dans ces obſervations la déclinaiſon de la bouſſole a été nulle, ou $\omega = o$, notre équation ſera

$$a \sin p + f \cos p \cos q + g \cos p \sin q - h \sin q + k \cos q = o,$$

dont il faut déterminer les lettres a, f, g, h, k. Pour cet effet, je commence par les obſervations faites ſous l'équateur même, pour leſquelles ayant, à cauſe de $p = 90$;

$$a - h \sin q + k \cos q = o,$$

les trois obſervations rapportées pour ce cas fourniſſent

$$a - 0{,}515\, h + 0{,}857\, k = o$$
$$a + 0{,}981\, h + 0{,}191\, k = o$$
$$a + 0{,}997\, h - 0{,}070\, k = o;$$

de là en prenant les différences,

$$1496\, h - 666\, k = o$$
$$\&\ 1512\, h - 927\, k = o,$$

qui n'étant point d'accord, ce dont il ne faut pas être ſurpris, vu que les obſervations Indiennes paroiſſent ſujettes à caution, j'ai lieu de ſoupçonner que la derniere eſt plus juſte, & de là ſe tirent les déterminations ſuivantes,

$$a = -h \quad \& \quad k = 1\tfrac{3}{4}\, h,$$

qu'il faut rectifier par les autres obſervations.

88. J'appliquerai donc le calcul aux autres obſervations où la déclinaiſon a été nulle, qui fourniſſent les équations ſuivantes :

$$
\begin{array}{rl}
\text{I.} & 0{,}866a - 0{,}966h + 0{,}259k + 0{,}130f + 0{,}483g = 0 \\
\text{II.} & 0{,}906a - 0{,}819h + 0{,}574k + 0{,}242f + 0{,}346g = 0 \\
\text{III.} & 0{,}939a - 0{,}737h + 0{,}675k + 0{,}231f + 0{,}252g = 0 \\
\text{IV.} & 0{,}966a - 0{,}669h + 0{,}743k + 0{,}192f + 0{,}173g = 0 \\
\text{V.} & 0{,}985a - 0{,}609h + 0{,}793k + 0{,}138f + 0{,}106g = 0 \\
\text{VI.} & 0{,}996a - 0{,}544h + 0{,}838k + 0{,}073f + 0{,}047g = 0 \\
\text{VII.} & 1{,}000a - 0{,}515h + 0{,}857k \phantom{+ 0{,}000f + 0{,}000g} = 0 \\
\text{VIII.} & 0{,}996a - 0{,}500h + 0{,}866k - 0{,}076f - 0{,}044g = 0 \\
\text{IX.} & 0{,}985a - 0{,}469h + 0{,}883k - 0{,}153f - 0{,}082g = 0 \\
\text{X.} & 0{,}966a - 0{,}454h + 0{,}891k - 0{,}231f - 0{,}118g = 0 \\
\text{XI.} & 0{,}939a - 0{,}422h + 0{,}906k - 0{,}310f - 0{,}145g = 0 \\
\text{XII.} & 0{,}906a - 0{,}391h + 0{,}920k - 0{,}389f - 0{,}165g = 0 \\
\text{XIII.} & 0{,}866a - 0{,}358h + 0{,}934k - 0{,}467f - 0{,}179g = 0 \\
\text{XIV.} & 0{,}819a - 0{,}325h + 0{,}945k - 0{,}542f - 0{,}187g = 0 \\
\text{XV.} & 0{,}766a - 0{,}292h + 0{,}956k - 0{,}615f - 0{,}188g = 0.
\end{array}
$$

89. Il eſt extrêmement difficile de ſatisfaire à toutes ces conditions, de ſorte que les erreurs ne deviennent aſſez conſidérables ; mais il ne faut pas douter non plus, que les obſervations elles-mêmes ne ſoyent très groſſieres. Après pluſieurs eſſais, j'ai trouvé que les valeurs ſuivantes rempliſſent le mieux toutes ces conditions, pourvu qu'on excepte la premiere, qu'on ne ſauroit accorder en aucune maniere avec les autres ;

$$a = -366;\ h = 900;\ k = 1000;\ f = 200\ \&\ g = 1333,$$

d'où, puiſque $ab = fh + gk$, on tire $b = -4135$.

Mais on ne ſauroit ſe fier aſſez à ces déterminations, tant à cauſe des obſervations, que parce que les coëfficiens des lettres h & k ont tous les mêmes ſignes, & que ceux de f & g ſont trop petits. Il eſt donc néceſſaire de développer encore pluſieurs autres obſervations, pour obtenir des équations où il regne une plus grande variété parmi les coëfficiens.

90.

90. Avant que d'appliquer notre équation générale

$$o = a\sin p - b\sin p\,\mathrm{tag}\,\omega + f(\cos p\cos q + \sin q\,\mathrm{tag}\,\omega) - h(\cos p\cos q\,\mathrm{tag}\,\omega - \sin q)$$
$$+ g(\cos p\sin q - \cos q\,\mathrm{tag}\,\omega) + k(\cos p\sin q\,\mathrm{tag}\,\omega + \cos q)$$

à des obſervations où la déclinaiſon n'eſt pas nulle, il eſt bon de la réſoudre dans une forme plus propre pour le calcul. Pour cet effet, par les trois angles p, q & ω, donnés pour chaque obſervation, je cherche deux angles nouveaux μ & ν par les formules ſuivantes:

$$\frac{\cos p}{\mathrm{tag}\,\omega} = \mathrm{tag}\,\mu \quad \& \ \cos p\,\mathrm{tag}\,\omega = \mathrm{tag}\,\nu,$$

& alors notre équation deviendra

$$o = a\sin p - b\sin p\,\mathrm{tag}\,\omega + \frac{f\,\mathrm{tag}\,\omega}{\cos\mu}\sin(\mu + q) + \frac{h}{\cos\nu}\sin(\nu - q)$$
$$- \frac{g\,\mathrm{tag}\,\omega}{\cos\mu}\cos(\mu + q) + \frac{k}{\cos\nu}\cos(\nu - q),$$

qui, étant diviſée par ſin p, donne

$$o = a - b\,\mathrm{tag}\,\omega + \frac{f\,\mathrm{tag}\,\omega\,\mathrm{sec}\,\mu}{\sin p}\sin(\mu + q) + \frac{h\,\mathrm{sec}\,\nu}{\sin p}\sin(\nu - q)$$
$$- \frac{g\,\mathrm{tag}\,\omega\,\mathrm{sec}\,\mu}{\sin p}\cos(\mu + q) + \frac{k\,\mathrm{sec}\,\nu}{\sin p}\cos(\nu - q),$$

& maintenant il ſera aiſé de développer cette forme par les logarithmes.

91. Outre le grand nombre des Obſervations rapportées ci-deſſus, le même Mémoire dans les Tranſactions fournit encore quelques obſervations faites dans le Détroit & la Baye de Hudſon; j'en ai tiré les ſuivantes,

$p =$	30°	30°	30°	31°	28°	28°	27°	27°	29°	32°	31°
$q =$	4°	10	27	45	65	71	79	83	86	92°	95
$\omega =$	18°	20	25	31	41	41	43	40	35	17	8.

Comme ces obſervations paroiſſent plus exactes que les autres, & qu'elles contiennent des déclinaiſons très conſidérables, elles doivent fournir des déterminations plus préciſes. Je mettrai donc ici quelques échantillons du calcul :

$p =$	$30°$	$30°$	$31°$	$28°$	$27°$
$q =$	$4°$	27	45	65	79
$\omega =$	$18°$	25	31	41	43
tag $\omega =$	0,3249	0,4663	0,6008	0,8693	0,9325
l sin $p =$	9,69897	9,69897	9,71184	9,67161	9,65704
l cos $p =$	9,93753	9,93753	9,93306	9,94593	9,94988
l tag $\omega =$	9,51177	9,66867	9,77877	9,93916	9,96965
l tag $\mu =$	10,42576	10,26886	10,15429	10,00677	9,98023
l tag $\nu =$	9,44930	9,60620	9,71183	9,88519	9,91953
$\mu =$	$69°,26'$	$61°,42'$	$54°,58'$	$45°,27'$	$43°,42'$
$\mu + q =$	73, 26	88, 42	99, 58	110,27	122,42
l tag $\omega =$	9,51177	9,66867	9,77877	9,93916	9,96965
l sec $\mu =$	10,45432	10,32414	10,24105	10,15395	10,14088
l cosec $p =$	0,30103	0,30103	0,28816	0,32839	0,34296
	0,26712	0,29384	0,30798	0,42150	0,45349
l sin $(\mu + q) =$	9,98159	9,99989	9,99339	+9,97173	9,92506
l cos $(\mu + q) =$	9,45504	8,35578	−9,23823	−9,54331	−9,73259
	0,24871	0,29373	0,30137	0,39323	+0,37855
	9,72216	8,64962	−9,54621	−9,96481	−0,18608
coëff $f =$	+ 1,7730	+1,9667	+2,0016	+ 2,4730	+ 2,3908
coëff $g =$	− 0,5274	−0,0446	+0,3517	+ 0,9222	+ 1,5350
$\nu =$	$15°,43'$	$22°,0'$	$27°,15'$	$37°,31'$	$39°,43'$
$\nu - q =$	11, 43	− 5°	−17°,45	−27, 29	−39, 17
l sec $\nu =$	10,01655	10,03283	10,05109	10,10063	10,11395
l cosec $p =$	0,30103	0,30103	0,28816	0,32839	0,34296
	10,31758	10,33386	10,33925	10,42902	10,45691
l sin $(\nu - q) =$	9,30765	−8,94030	−9,48411	−9,66416	−9,80151
l cos $(\nu - q) =$	9,99085	+9,99834	+9,97882	+9,94799	9,88875
	9,62523	−9,27416	−9,82336	−0,15318	−0,25842
	0,30843	0,33220	0,31807	0,37701	0,34566
coëff $h =$	+ 0,4219	−0,1880	−0,6658	−1,4219	−1,8131
coëff $k =$	+ 2,0344	+2,0800	+2,1488	+2,3824	+2,2165.

92. Ajoutons à ces obſervations encore deux des autres rapportées dans la table ci-jointe, l'une où $p = 125°$, $q = 35°$ &

$\omega =$

$\omega = - 8°, 15'$, & l'autre où $p = 125°$, $q = -40°$, $\omega = 27°$, & en choisissant les 5. suivantes,

$$\begin{array}{lllll} p = 90°; & p = 30°; & p = 27°; & p = 125°; & p = 125°, \\ q = 31; & q = 4°; & q = 79; & q = 35°; & q = -40°, \\ \omega = 0; & \omega = 18°; & \omega = 43; & \omega = -8°,15'; & \omega = 27°, \end{array}$$

on aura ces 5. équations à résoudre,

$$\begin{aligned} 0 &= 1000a - 0b - 515h + 857k \\ 0 &= 1000a - 325b + 422h + 2034k + 1773f - 527g \\ 0 &= 1000a - 932b - 1813h + 2216k + 2391f + 1535g \\ 0 &= 1000a + 145b - 617h + 1058k - 663f - 248g \\ 0 &= 1000a - 509b + 511h + 1165k - 936f - 26g, \end{aligned}$$

d'où l'on tire les valeurs suivantes,

$$a = -120;\ b = 2466;\ h = 1000;\ k = 741;\ f = -47;$$
$$g = 1752;$$

mais il est aussi clair, que la valeur de b ne sauroit être telle qu'elle devint $ab = fh + gk$.

93. C'est sans doute un accident bien facheux pour la théorie que je viens de développer, & il semble qu'elle en feroit totalement renversée. Les partisans de feu Mr. Halley ne manqueront pas d'en tirer cette conséquence, que, pour expliquer les phénomenes de la déclinaison magnétique, il faut absolument avoir recours à quatre poles magnétiques. Mais les raisons alléguées ci-dessus me paroissent encore trop fortes, pour que je veuille entierement renoncer à cette idée; & il se présente d'abord une source très naturelle, qui nous pourra fournir une correction suffisante. Pour cet effet, je crois qu'on n'aura qu'à employer cette rectification, que le centre magnétique ne doit pas être pris au milieu de l'axe magnétique. J'avois introduit cette supposition uniquement pour la commodité du calcul; mais

mais à présent je ne doute plus que ce centre ne soit considérablement éloigné du milieu de l'axe. Ainsi on n'aura qu'à entreprendre de nouveau toutes les recherches que j'ai développées ici, en regardant le centre magnétique D comme situé dans un point quelconque de l'axe magnétique AB, afin que le vrai lieu en puisse ensuite être déterminé par les observations. Cette correction est si naturelle, qu'il est même très probable que ce centre magnétique est très différent du milieu de l'axe magnétique, attendu que, quelle que soit la cause de la force magnétique, elle ne sera jamais également distribuée par toute la longueur de l'axe magnétique. Mais il est aussi certain que cette circonstance rendra le calcul beaucoup plus difficile; cependant la question est assez importante pour qu'on y apporte tous les soins imaginables.

Ouest. Londres. Est.

Latitude.

	w 80	75	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120
50°					w							w 21	w 20½	w 20	w 19¾	w 19⅔																									
45					18¾	17	16	15¼	15	15½	15½	16	16	16¼	16⅓	16⅓																									
40			12¾	12	11	10	9¾	9½	10	11¼	12¾	13⅓	14¼	14½	15																										
35		7	6¾	6	5½	5	5¾	6½	7¼	8¾	10½	12½	13	13⅓	14⅓																										
30	0	0	½	1	1½	2¾	3	4	5½	7	9	10½	12	12¾	13⅓																										
25	-3	-3	-2½	-2½	-1½	0	1	2½	3½	5½	7½	9½	11																w 6	w 4½	w 2½										
20	-6	-5½	-5	-4	3½	-2	-½	1½	2½	4	5½	8	10																6	4½	2½				-1						
15	-8	-7½	-7	-6	-5	-3½	-2½	-1	½	3½	4½	6½	9														9½	7½	6	4½	2½	1½	0	-½	-½	1½					
10					-6½	— 5¾	— 4	— 2½	-1	+ 1	3	5½	8	10													10½	8	6	4½	3	-1	-½	-1	-½	½					
5						— 6⅓	— 5½	— 4	— 3½	— ½	1½	4½	7½	9½	11½	13	15⅔							16⅓	17½	13¼	11	8½	6	4½	2½	1½	-½	-1½	-½	½					
0							— 6½	— 5	— 3½	— 1½	+ ½	4	6½	9	11	13½	15⅔						16⅔	17½	16½	14½	11½	8½	6	4½	3¼	1½	-½	-1½	-1	½	1			Equateur.	
5'										— 2½	0	3	6	8½	10½	13	15	16	17						17	16	12½	9½	6½	4½	3	1	0	-½	-½	1½	1½				
10										-3½	-1	2	4½	7½	10½	12½	14½	15½	16½	17½					19½	18	14½	10½	7½	5	3½	2	1½	1½	1½	1	2	2½	3½		
15									-6½	-4½	-2	1	4	7	9½	12	14	15½	16½						20	19½	16½	12½	9	6	4½	3½	2½	2½	2½	2½	3½	3½	4		
20									-7½	-5	-2½	0	3	6	9	11½	13½	15	16½	17½				22	22	21¼	19	15	11½	8	6	5	4½	4½	4½	4½	4½	4½			
25										-6	-3½	-1	2½	4½	7½	10	12½	14½	16	18				23½	23½	21	21	18	14½	12	9½	8	7½	7½	7	6½	6				
30										-7½	-4½	-2	½	3½	6½	9	12	14	15½	18			23½	24½	25½	24½	23½	21	18	15	13	11½	10½	10½	9½	9					
35										-8½	-6	-3	-½	2½	3½	8	10½	13	15½	17½	20	22½	24½	26	27	26½	25	23	21	19	17	15½	14½	13½	12½						
40											-6½	-4	-1½	3½	4½	7	9½	12	14½	17½	20	22½	25½	27	28½	27½	26	24½	23	21	19½	18½	17½								

Fig. 1.

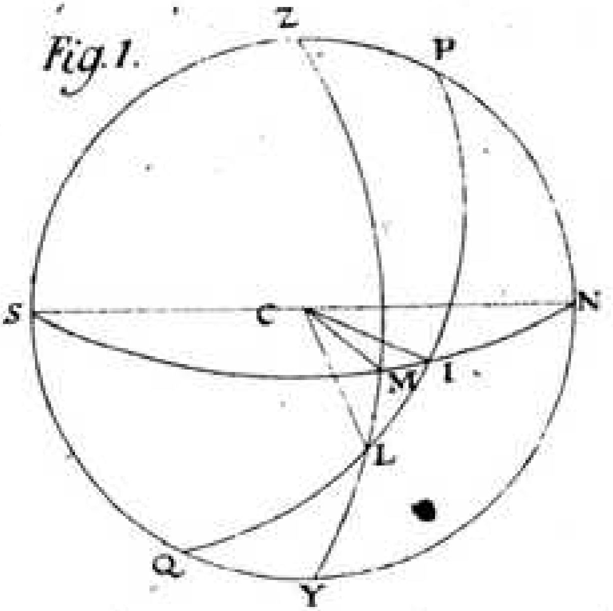


Fig. 2.

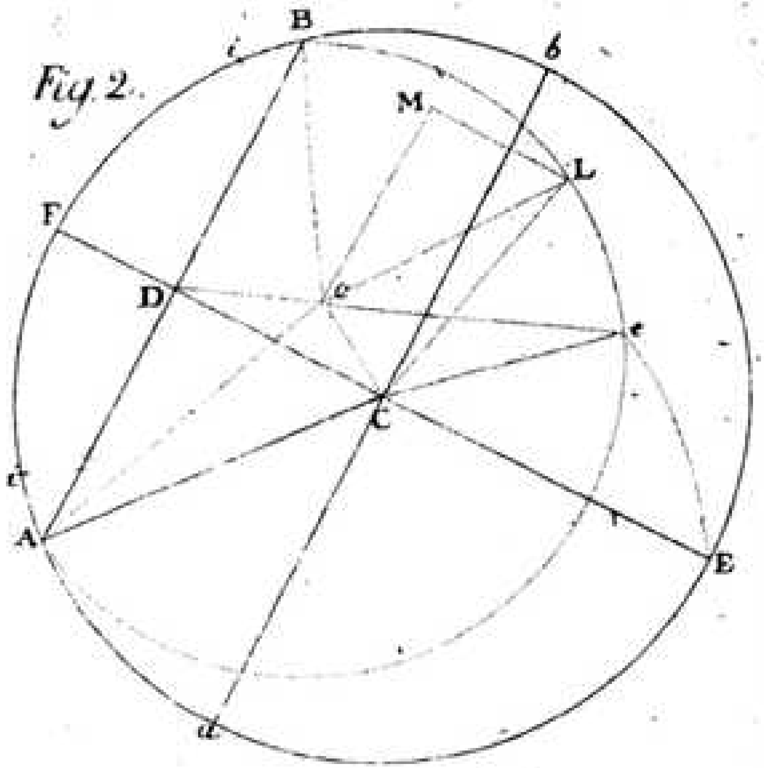


Fig. 5.

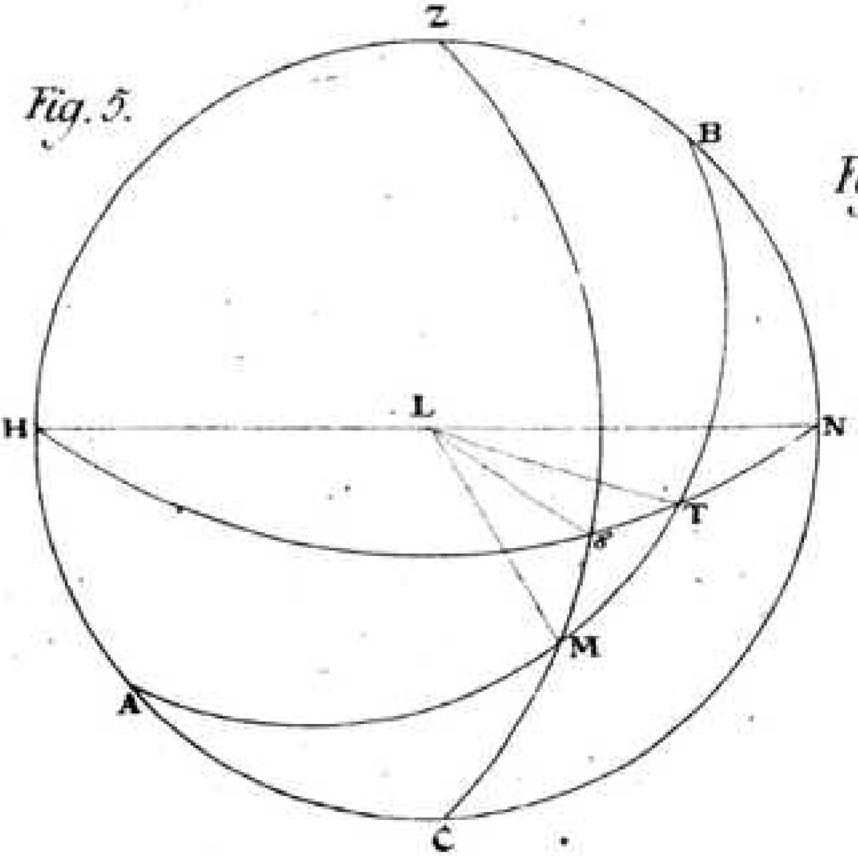
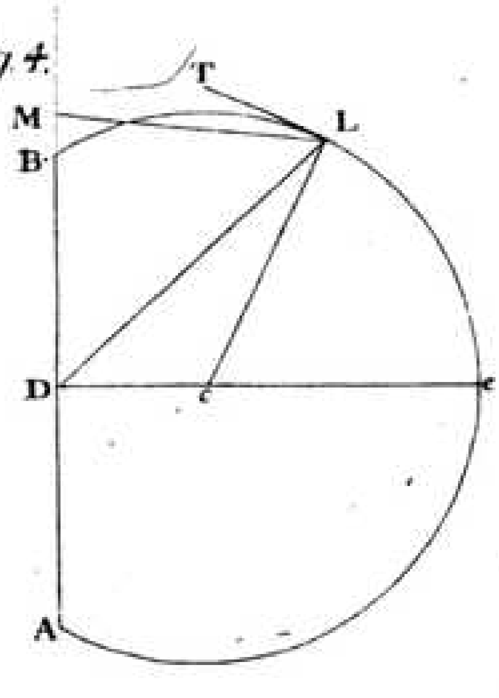


Fig. 4.



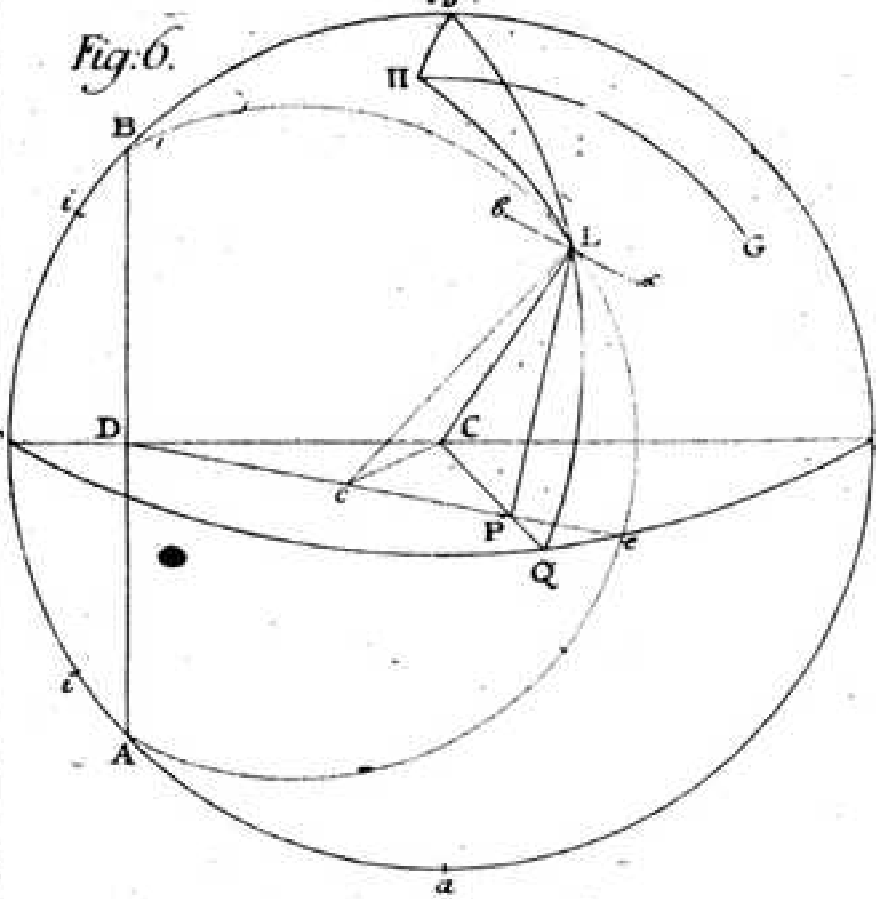


Fig. 6.

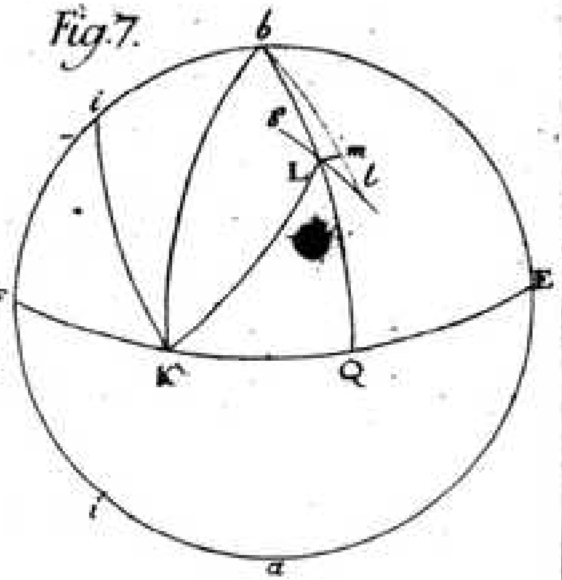


Fig. 7.

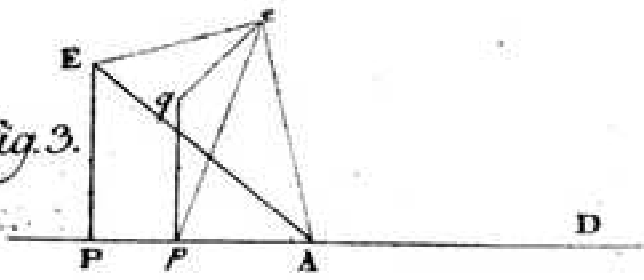


Fig. 3.

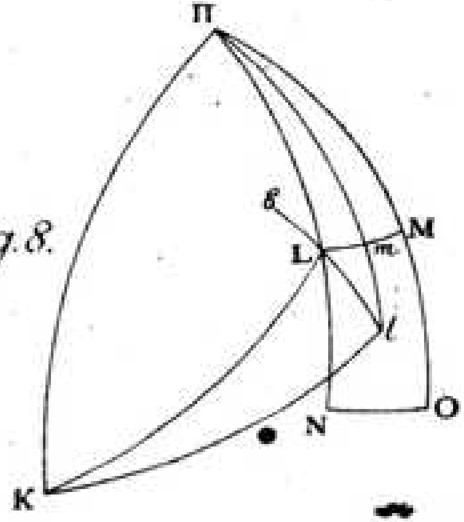


Fig. 8.