RECHERCHES
SUR LES MOYENS
DE
DIMINUER OU DE RÉDUIRE MEME A' RIEN
LA CONFUSION CAUSÉE PAR L'OUVERTURE DES VERRES.

PAR M. EULER.

1.

Dans mon Mémoire précédent sur la confusion des verres dioptriques causée par leur ouverture, les premieres recherches rouloient sur l'espace de diffusion FG, qui est produit par un verre quelconque PP, qui représente en F l'image du point lumineux E par les rayons, qui passent par le milieu du verre. J'y ai considéré d'abord comme données tant la distance du point lumineux E devant le verre $AE = a$, que la distance de l'image principale F derriere le verre $BF = \alpha$: ensuite j'ai remarqué que cette représentation peut être produite par une infinité de verres, dont j'ai déterminé la figure des deux faces PAP & PBP, en sorte que posant le rayon de courbure de la face antérieure $PAP = f$, & celui de la face postérieure $PBP = g$, ces deux rayons doivent avoir les grandeurs suivantes en négligeant l'epaisseur du verre Planche Fig. 1.

$$f = \frac{(n-1)\,a\alpha}{\nu\,(a+\alpha)} \;\&\; g = \frac{(n-1)\,a\alpha}{\mu\,(a+\alpha)},$$

où n est $= \frac{31}{20}$, & μ & ν sont deux nombres pris à volonté, en sorte que $\mu + \nu = 1$

 2. En-

2. Ensuite, pour trouver l'espace de diffusion FG, que ce verre produit à cause de son ouverture, je pose le demi-diametre de son ouverture $= x$, & pour abréger soit $\nu\alpha - \mu\alpha = A$. Cela posé, j'ai trouvé que l'espace de diffusion sera

$$FG = \frac{(a+\alpha)xx}{2n(n-1)^2a^3\alpha}(n^3(aa-a\alpha+\alpha\alpha)-n(2n+1)(a-\alpha)A+(n+2)A^2),$$

lequel devient le plus petit, si l'on prend $A = \frac{n(2n+1)(a-\alpha)}{2(n+2)}$, d'où il s'ensuit:

$$\mu = \frac{n(2n+1)\alpha+(4+n-2nn)a}{2(n+2)(a+\alpha)} \;\&\; \nu = \frac{n(2n+1)a+(4+n-2nn)\alpha}{2(n+2)(a+\alpha)}.$$

Or ces valeurs étant substituées donnent

$$f = \frac{2(n-1)(n+2)a\alpha}{n(2n+1)a+(4+n-2nn)\alpha} \;\&\; g = \frac{2(n-1)(n+2)a\alpha)}{n(2n+1)\alpha+(4+n-2nn)a},$$

& alors l'espace de diffusion le plus petit sera:

$$FG = \frac{n(a+\alpha)xx}{8(n+2)(n-1)^2a^3\alpha}((4n-1)(a+\alpha)^2+4(n-1)^2a\alpha).$$

3. Il n'est donc pas possible de rendre cet espace de diffusion plus petit, que lorsqu'on donne aux faces du verre les courbures que je viens d'indiquer; & puisqu'il est très important, dans tous les instrumens dioptriques, de donner aux verres la figure qui produise le moindre espace de diffusion par rapport à leur ouverture, cette figure que j'ai assignée, sera celle qu'on doit tâcher de donner à tous les verres. Mais on peut combiner deux ou plusieurs verres en sorte que, tant dans la Théorie que dans la pratique, on les puisse regarder comme un verre simple, pourvu que les épaisseurs de ces verres prises ensemble soient encore assès petites, pour qu'on les puisse négliger à l'égard des autres quantités qui entrent dans le calcul. Je me propose donc de chercher l'espace de diffusion qui convient à de tels verres compo-

sés

ſés, pour voir s'il n'eſt pas poſſible de joindre en ſorte deux ou pluſieurs verres, que l'eſpace de diffuſion devienne encore plus petit, que dans le cas d'un verre ſimple; ce qui fourniroit ſans doute les moyens les plus ſurs pour porter les verres à un plus haut dégré de perfection.

4. Or je ferai voir, qu'en combinant deux ou pluſieurs verres enſemble, on peut non ſeulement très conſidérablement diminuer l'eſpace de diffuſion, mais auſſi le réduire ſouvent abſolument à rien. Pour entreprendre cette recherche, je commencerai par la combinaiſon de deux verres, & leur ſuppoſant d'abord une figure quelconque, pour ſatisfaire aux deux diſtances propoſées tant du point lumineux E que de ſon image principale, je chercherai l'eſpace de diffuſion; enſuite j'enſeignerai, quelles figures on doit donner à ces deux verres, pour que l'eſpace de diffuſion devienne le plus petit, d'où je tirerai la conſtruction des verres compoſés de deux, qui ſera la plus parfaite. Enſuite je traiterai de la même maniere les verres qui feront compoſés de trois ou quatre, pour en tirer tous les avantages pour la conſtruction tant des Téleſcopes que des Microſcopes.

PROBLEME I.

5. *Lorsque deux verres étant joints enſemble en A repréſentent le point lumineux E, par l'image principale en G, trouver l'eſpace de diffuſion qui répond à leur ouverture.* Fig. 5.

SOLUTION.

Conſidérons d'abord les deux verres comme éloignés l'un de l'autre de l'intervalle AB, pour avoir le cas traité dans le ſeptieme probleme du Mémoire précédent, & poſant les diſtances

$$EA = a,\ AF = \alpha,\ FB = b,\ \&\ AG = \beta,$$

nous aurons la diſtance de foyer du premier verre $p = \frac{a\alpha}{a + \alpha}$, & celle de l'autre $q = \frac{b\beta}{b + \beta}$, & l'eſpace de diffuſion

$$Gg = \frac{\beta\beta}{bb} \cdot \frac{xx}{aap} (Naa - \mathfrak{L} a\alpha + M\alpha\alpha) + \frac{xx}{\alpha\alpha q} (N'bb - \mathfrak{L}' b\beta + M'\beta\beta).$$

Mais introduisons plutôt la forme employée cy-dessus, & soyent f, g, les rayons des faces du premier verre PP, & f', g', ceux de l'autre QQ; de sorte que nous ayons:

$$f = \frac{(n-1)\,a\alpha}{\nu\,(a+\alpha)}; \quad g = \frac{(n-1)\,a\alpha}{\mu\,(a+\alpha)},$$

$$f' = \frac{(n-1)\,b\beta}{\nu'\,(b+\beta)}; \quad g' = \frac{(n-1)\,b\beta}{\mu'\,(b+\beta)},$$

prenant $\mu + \nu = 1$ & $\mu' + \nu' = 1$. Soit ensuite $\nu a - \mu\alpha = A$, & $\nu' b - \mu' b = B$, & marquant par x le demi-diametre de l'ouverture du verre PP, l'espace de diffusion sera

$$Gg = \frac{\beta\beta}{bb} \cdot \frac{(a+\alpha)\,xx}{2n(n-1)^2 a^3\alpha} (n^3(aa - a\alpha + \alpha\alpha) - n(2n+1)(a+\alpha)A + (n+2)AA)$$

$$+ \frac{b+\beta)\,xx}{2n(n-1)^2\alpha\alpha\, b\beta} (n^3(bb - b\beta + \beta\beta) - n(2n+1)(b-\beta)B + (n+2)BB).$$

Faisons maintenant évanouir la distance des verres $AB = \alpha + b$, & posons $b = -\alpha$, & dans ce cas l'espace de diffusion sera:

$$Gg = \frac{(a+\alpha)\,\beta\beta xx}{2n(n-1)^2 a^3\alpha^3} (n^3(aa - a\alpha + \alpha\alpha) - n(2n+1)(a-\alpha)A + (n+2)AA)$$

$$+ \frac{(\alpha-\beta)\,xx}{2n\,(n-1)^2\alpha^3\beta} (n^3(\alpha\alpha + \alpha\beta + \beta\beta) + n(2n+1)(\alpha+\beta)B + (n+2)BB).$$

Les quantités qui nous sont ici préscrites, sont 1°. la distance de l'objet devant le verre $AE = a$, & la distance de l'image principale derriere le verre, qui est $= \beta$; de sorte que nous ayons encore dans le calcul trois quantités arbitraires α, A, & B, qui recevant une infinité de déterminations, il y aura une infinité de combinaisons de deux verres, qui étant posés en A représentent l'image principale de l'objet E,

au

au même point G: Mais l'eſpace de diffuſion Gg dépend principalement des valeurs arbitraires α, A, B.

COROLLAIRE 1.

6. Si l'on prenoit $\alpha = \beta$, ou $b + \beta = 0$, le ſecond verre deviendroit plan des deux côtés, & ne changeroit rien dans la réfraction du premier verre. Nous aurions donc le cas d'un ſeul verre expliqué cy-deſſus, & l'eſpace de diffuſion feroit le même que j'y ai rapporté.

COROLLAIRE 2.

7. Nous parviendrons encore au cas d'un ſeul verre en prenant $\alpha = -a$; car alors le premier verre PP deviendra plan des deux côtés: & l'eſpace de diffuſion ſera déterminé par le ſeul verre ſecond par la formule rapportée cy-deſſus.

COROLLAIRE 3.

8. Si l'on prenoit α fort petit, il eſt évident que l'eſpace de diffuſion deviendroit fort grand, puisque le cube de α ſe trouve dans le dénominateur. Il n'eſt donc pas avantageux de prendre $\alpha < \beta$, car, quoique le ſecond membre de notre expreſſion devienne négatif, le premier en devient d'autant plus grand.

COROLLAIRE 4.

9. Or poſons $\alpha = \infty$, & à cauſe de $A = -\mu\alpha$ & $B = -\nu'\alpha$, l'expreſſion pour l'eſpace de diffuſion deviendra

$$Gg = \frac{\beta\beta xx}{2n(n-1)^2 a^3}\,(n^3 - n(2n+1)\mu + (n+2)\mu\mu),$$

$$+ \frac{xx}{2n\,(n-1)^2\beta}\,(n^3 - n(2n+1)\nu' + (n+2)\nu'\nu'),$$

laquelle ſera la plus petite, quand on prendra les nombres μ & ν' tels, que l'un & l'autre membre ſéparément obtienne la plus petite valeur; puisque aucun ne ſauroit devenir négatif.

PRO-

PROBLEME II.

10. *Trouver la figure des deux verres, qui étant joints ensemble en A représentent l'image principale du point E en G, & qui produisent en même tems le plus petit espace de diffusion Gg.*

SOLUTION.

Ayant déterminé dans le probleme précédent en général l'espace de diffusion Gg, de quelque figure que soient les deux verres, nous n'avons qu'à considérer l'expression qui y a été trouvée. Elle est composée de deux membres, & renferme trois quantités arbitraires α, A & B, qui ne dépendent point l'une de l'autre: d'où il est d'abord clair, qu'on peut séparément chercher les valeurs de A & de B, qui rendent cette expression la plus petite. Or cette détermination nous montre que chaque verre doit séparément avoir la figure la plus avantageuse, que j'ai décrite cy-dessus. Savoir le verre PP doit avoir une telle figure, qu'il soit

$$f = \frac{2(n-1)(n+2)a\alpha}{n(2n+1)a+(4+n-2nn)\alpha};\quad g = \frac{2(n-1)(n+2)a\alpha}{n(2n+1)\alpha+(4+n-2nn)a},$$

$$f' = \frac{2(n-1)(n+2)b\beta}{n(2n+1)b+(4+n-2nn)\beta};\quad g' = \frac{2(n-1)(n+2)b\beta}{n(2n+1)\beta+(4+n-2nn)b},$$

où il faut remarquer qu'il est $b = -\alpha$: Alors l'espace de diffusion sera exprimé en sorte

$$Gg = \frac{n(a+\alpha)\beta\beta xx}{8(n+2)(n-1)^2 a^3\alpha^3}((4n-1)(a+\alpha)^2+4(n-1)^2 a\alpha)$$

$$+\frac{n(\alpha-\beta)xx}{8(n+2)(n-1)^2\alpha^3\beta}((4n-1)(\alpha-\beta)^2-4(n-1)^2\alpha\beta),$$

& maintenant il s'agit encore de déterminer la quantité α en sorte que cette expression devienne la plus petite.

Pour abréger cette formule, posons suivant le §. 47 du Mém. précédent

$\mu =$

$$\mu = 0{,}93819 \quad \& \ \nu = 0{,}23269,$$

ſans confondre ces lettres avec celles qui ſont employées au commencement; & l'eſpace de diffuſion ſera

$$Gg = \frac{\mu\beta\beta xx\,(a+\alpha)}{a^3\alpha^3}\left((a+\alpha)^2 + \nu a\alpha\right)$$

$$+ \frac{\mu xx\,(\alpha-\beta)}{\alpha^3\beta}\left((b+\beta)^2 + \nu b\beta\right), \text{ ou}$$

$$Gg = \mu xx\left(\frac{\beta\beta(a+\alpha)^3}{a^3\alpha^3} + \frac{\nu\beta\beta(a+\alpha)}{aa\alpha\alpha} + \frac{(\alpha-\beta)^3}{\alpha^3\beta} - \frac{\nu(\alpha-\beta}{\alpha\alpha}\right)$$

Il faut donc déterminer α en ſorte que cette quantité développée devienne un *minimum*

$$\frac{\beta\beta}{\alpha^3} + \frac{3\beta\beta}{aa\alpha} + \frac{3\beta\beta}{a\alpha\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{3}{\alpha} + \frac{3\beta}{\alpha\alpha} + \nu\left(\frac{\beta\beta}{aa\alpha} + \frac{\beta\beta}{a\alpha\alpha} - \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha\alpha}\right),$$

d'où par la différentiation réſulte cette équation:

$$\frac{-3\beta\beta}{aa\alpha\alpha} - \frac{6\beta\beta}{a\alpha^3} + \frac{3}{\alpha\alpha} - \frac{6\beta}{\alpha^3} + \nu\left(\frac{-\beta\beta}{aa\alpha\alpha} - \frac{2\beta\beta}{a\alpha^3} + \frac{1}{\alpha\alpha} - \frac{2\beta}{\alpha^3}\right) = 0,$$

qui étant diviſée par $\nu + 3$, donne

$$\frac{1}{\alpha\alpha}\left(1 - \frac{\beta\beta}{aa}\right) = \frac{2\beta}{\alpha^3}\left(1 + \frac{\beta}{a}\right), \text{ ou}$$

$$\alpha\left(1 - \frac{\beta}{a}\right) = 2\beta, \text{ de ſorte que } \alpha = \frac{2a\beta}{a-\beta}.$$

De là nous aurons: $a + \alpha = \dfrac{a(a+\beta)}{a-\beta}$, $\alpha - \beta = \dfrac{\beta(a+\beta)}{a-\beta}$,

& partant $\dfrac{a\alpha}{a+\alpha} = p = \dfrac{2a\beta}{a+\beta}$; $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta} = \dfrac{2a\beta}{a+\beta} = q$.

Or puiſque $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{2\beta} - \dfrac{1}{2a}$; la quantité, par laquelle μxx eſt multipliée ſera

$$\frac{\beta\beta}{a^3}+\frac{3\beta}{2aa}-\frac{3\beta\beta}{2a^3}+\frac{3}{4a}-\frac{3\beta}{2aa}+\frac{3\beta\beta}{4a^3}+\frac{1}{\beta}-\frac{3}{2\beta}+\frac{3}{2a}$$

$$+\frac{3}{4\beta}-\frac{3}{2a}+\frac{3\beta}{4aa}$$

$$+\nu\left(\frac{\beta}{2aa}-\frac{\beta\beta}{2a^3}+\frac{1}{4a}-\frac{\beta}{2aa}+\frac{\beta\beta}{4a^3}-\frac{1}{2\beta}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{4\beta}-\frac{1}{2a}+\frac{\beta}{4aa}\right)$$

qui ſe réduit à:

$$\frac{\beta\beta}{4a^3}+\frac{3\beta}{4aa}+\frac{1}{4\beta}+\frac{3}{4a}+\nu\left(\frac{1}{4a}-\frac{1}{4\beta}+\frac{\beta}{4aa}-\frac{\beta\beta}{4a^3}\right),$$

ou bien à

$$\frac{(a+\beta)^3}{4a^3\beta}-\frac{\nu(a+\beta)(aa-2a\beta+\beta\beta)}{4a^3\beta},$$

& partant l'eſpace de diffuſion ſera:

$$Gg=\frac{\mu(a+\beta)xx}{4a^3\beta}((a+\beta)^2-\nu(a-\beta)^2).$$

Mais, puiſque $(a-\beta)^2=(a+\beta)^2-4a\beta$, il ſera

$$Gg=\frac{\mu(a+\beta)xx}{a^3\beta}\left(\frac{1-\nu}{4}(a+\beta)^2+\nu a\beta\right).$$

Or, poſant $1,62740=\sigma$, & $0,19078=\tau$, nous avons

$$\frac{1}{f}=\frac{\sigma}{\alpha}+\frac{\tau}{a};\ \frac{1}{g}=\frac{\sigma}{a}+\frac{\tau}{\alpha};\ \frac{1}{f'}=\frac{\sigma}{\beta}-\frac{\tau}{\alpha};\ \frac{1}{g'}=\frac{\sigma}{\alpha}+\frac{\tau}{\beta}.$$

Donc, à cauſe de $\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{2\beta}-\frac{1}{2a}$, nous aurons pour les rayons des faces de nos deux verres à joindre

$$\frac{1}{f}=\frac{\sigma}{2\beta}+\frac{2\tau-\sigma}{2a};\ \frac{1}{g}=\frac{2\sigma-\tau}{2a}+\frac{\tau}{2\beta};\ \frac{1}{f'}=\frac{2\sigma\tau}{2\beta}+\frac{\tau}{2a};\ \frac{1}{g'}=\frac{\sigma}{2a}+\frac{2\tau\cdot\sigma}{2\beta},$$

ou

$$\text{ou } f = \frac{2a\beta}{\sigma a + (2\tau - \sigma)\beta};\ g = \frac{2a\beta}{\tau a + (2\sigma - \tau)\beta};$$

$$f' = \frac{2a\beta}{\tau\beta + (2\sigma - \tau)a};\ g' = \frac{2a\beta}{\sigma\beta + (2\tau - \sigma)a}.$$

Corollaire 1.

11. Donc, ſi la diſtance de l'objet au verre eſt $= a$, & la diſtance de l'image derriere le verre $= \alpha$, qui eſt nommée β dans la ſolution, le verre compoſé de deux, qui produit le moindre eſpace de diffuſion, doit être formé en ſorte qu'il ſoit

	le rayon de ſa face antérieure	le rayon de ſa face poſtérieure
pour le premier verre	$\frac{2a\alpha}{1,62740\,a - 1,24584\,\alpha}$;	$\frac{2a\alpha}{0,19078\,a + 3,06402\,\alpha}$
pour le ſecond verre	$\frac{2a\alpha}{0,19078\,\alpha + 3,06402\,a}$;	$\frac{2a\alpha}{1,62740\,\alpha - 1,24584\,a}$

& alors, le demi-diametre de l'ouverture étant $= x$, l'eſpace de diffuſion ſera:

$$\frac{\mu(a+\alpha)xx}{a^3\alpha}\left(\frac{1-\nu}{4}(a+\alpha)^2 + \nu a\alpha\right) \text{ ou puiſque } \nu = 0,23269$$

$$\frac{\mu(a+\alpha)xx}{a^3\alpha}\left(0,19183\,(a+\alpha)^2 + \nu a\alpha\right).$$

Corollaire 2.

12. Mais, pour les mêmes diſtances a & α, ſi l'on n'employoit qu'un verre ſimple, qui produiſit le moindre eſpace de diffuſion, en prenant

	le rayon de la face antérieure	le rayon de la face poſtérieure
de ce verre .	$\frac{a\alpha}{1,62740\,a + 0,19078\,\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{1,62740\,\alpha + 0,19078\,a}$,

l'eſl'espace de diffusion sera

$$\frac{\mu\,(a + \alpha)\,xx}{a^3\alpha}\left((a + \alpha)^2 + \nu a\alpha\right),$$

d'où l'on voit qu'en employant le verre double, la confusion est très considérablement diminuée.

Corollaire 3.

13. Il est remarquable que les deux verres, qui joints ensemble produisent la moindre confusion, doivent avoir la même distance de foyer, qui est double de celle qui convient à un verre simple, qui représenteroit l'objet au même endroit.

SCHOLIE I.

14. Pour rendre la recherche du *minimum* plus aisée, il sera à propos de comparer d'abord ensemble les distances de nos deux verres. Posons donc $\frac{a\alpha}{a+\alpha} = \frac{u\alpha\beta}{\alpha-\beta}$, & nous aurons $\alpha = \frac{(1+u)a\beta}{a-u\beta}$; de là $a + \alpha = \frac{a\,(a+\beta)}{a-u\beta}$; d'où il suit $\frac{a\alpha}{a+\alpha} = \frac{(1+u)\,a\beta}{a+\beta}$ & $\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta} = \frac{(1+u)\,a\beta}{u\,(a+\beta)}$.

Or l'expression pour l'espace de diffusion étant réduite à cette forme

$$+\ \frac{\mu\beta\beta xx\,(a+\alpha)}{u\alpha}\left(\frac{(a+\alpha)^2}{aa\alpha\alpha} + \frac{\nu}{a\alpha}\right),$$

$$+\ \frac{\mu\beta\beta xx\,(\alpha-\beta)}{u\beta}\left(\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha\alpha\beta\beta} - \frac{\nu}{\alpha\beta}\right),$$

notre substitution donne

$$\frac{\mu\beta xx\,(a+\beta)}{(1+u)\,a}\left(\frac{(a+\beta)^2}{(1+u)^2\,aa\beta\beta} + \frac{\nu\,(a-u\beta)}{(1+u)\,aa\beta}\right)$$

+

$$+\frac{\mu\varsigma xx.u(a+\epsilon)}{(1+u)a}\left(\frac{uu(a+\epsilon)^2}{(1+u)^2aa\epsilon\epsilon}-\frac{v(a-u\epsilon)}{(1+u)a\varsigma\epsilon}\right),$$

qui se réduit à

$$\frac{\mu xx(a+\epsilon)}{a^3\epsilon}\left(\frac{(1+u^3)(a+\epsilon)^2}{(1+u)^3}+\frac{v(a-u\epsilon)(\epsilon-ua)}{(1+u)^2}\right).$$

Il faut donc chercher u, pour que cette quantité

$$\frac{(1-u+uu)(a+\epsilon)^2+v(a-u\epsilon)(\epsilon-ua)}{(1+u)^2},$$

devienne un *minimum;* or cette recherche demeure la même, quoique nous ajoutions à cette quantité une constante quelconque: soutrayons donc $va\epsilon$, pour avoir cette formule à rendre un *minimum*:

$$\frac{(1-u+uu)(a+\epsilon)^2-vu(a+\epsilon)^2}{(1+u)^2},$$

ou, en divisant par $(a+\epsilon)^2$ celle-cy:

$$\frac{1-u+uu-vu}{(1+u)^2}=1-\frac{(v+3)u}{(1+u)^2}.$$

Tout revient donc à rendre un *maximum* cette formule $\frac{u}{(1+u)^2}$, ce qui arrive évidemment en prenant $u=1$, tout comme nous l'avons trouvé.

SCHOLIE II.

15. On peut encore plus promtement arriver à ce *minimum* en remarquant que $(a-u\epsilon)(\epsilon-ua)=-u(a+\epsilon)^2+(1+u)^2a\epsilon$, d'où l'espace de diffusion devient exprimé en sorte:

$$\frac{\mu xx(a+\epsilon)}{a^3\epsilon}\left(\frac{1-(v+1)u+uu}{(1+u)^2}(a+\epsilon)^2+va\epsilon\right).$$

Or, si l'on n'employoit qu'un seul verre, l'espace de diffusion seroit:

$$\frac{\mu xx\,(a+\mathfrak{G})}{a^3\mathfrak{G}}\,((a+\mathfrak{G})^2+\nu a\mathfrak{G}),$$

d'où l'on voit qu'en joignant deux verres, l'eſpace de diffuſion ne devient plus petit, qu'entant que l'expreſſion $\frac{1-(\nu+1)u+uu}{(1+u)^2}$ ou $1-\frac{(\nu+3)u}{(1+u)^2}$, pourra être rendue moindre que l'unité, ce qui arrive, quand cette expreſſion $\frac{u}{(1+u)^2}$ ſera un *maximum*, ou celle-cy $\frac{(1+u)^2}{u}$, ou bien $\frac{1}{u}+u$ un *minimum*. Or, pour cet effet, il faut qu'il ſoit $u=1$. Cette forme nous donne encore à connoitre, qu'il eſt impoſſible de rendre le cöefficient $\frac{1-(\nu+1)u+uu}{(1+u)^2}$ égal à zéro, puisque $\nu=0,23269$: donc, à moins que $\mathfrak{G}$ ne ſoit une quantité négative, il eſt impoſſible que l'eſpace de diffuſion évanouiſſe entierement; en ne joignant que deux verres. Cette forme que nous venons de donner à l'expreſſion pour l'eſpace de diffuſion, nous rendra plus aiſées les recherches ſuivantes ſur les verres triples & quadruples.

PROBLEME III.

Fig. 6. 16. *Lorsque trois verres joints enſemble en* A *repréſentent l'objet* E, *par l'image principale en* H, *trouver l'eſpace de diffuſion* Hh, *que produit une ouverture donnée de ces verres.*

SOLUTION.

Conſidérons d'abord les trois verres comme éloignés entr'eux, pour avoir le cas traité dans le VIII Probleme du Mémoire précédent; & poſons comme là les diſtances

$EA=a$; $FB=b$; $GC=c$;
$AF=\alpha$; $BG=\mathfrak{G}$; $CH=\gamma$;

&

& nous n'aurons qu'à ſuppoſer $a + b = 0$, & $\beta + c = 0$. Or, puiſque nos recherches aboutiſſent principalement à chercher de tels verres, qui produiſent le moindre eſpace de diffuſion, il faut donner à chaque verre une telle figure, qu'il ſoit

Pour le verre	le rayon de la face antérieure	le rayon de la face poſtérieure
PP - - -	$\dfrac{a\alpha}{\sigma a + \tau\alpha}$;	$\dfrac{a\alpha}{\sigma\alpha + \tau a}$,
QQ - - -	$\dfrac{b\beta}{\sigma b + \tau\beta}$;	$\dfrac{b\beta}{\sigma\beta + \tau b}$,
RR - - -	$\dfrac{c\gamma}{\sigma c + \tau\gamma}$;	$\dfrac{c\gamma}{\sigma\gamma + \tau c}$;

ſoient de plus les diſtances de foyer du verre

$$PP = p = \frac{a\alpha}{a+\alpha};\ QQ = q = \frac{b\beta}{b+\beta};\ RR = r = \frac{c\gamma}{c+\gamma},$$

& poſant le demi-diametre de l'ouverture $= x$, l'eſpace de diffuſion a été trouvé exprimé en ſorte:

$$Hh = \mu xx\left(\frac{\beta\beta\gamma\gamma((a+\alpha)^2 + \nu a\alpha)}{aabbccp} + \frac{\gamma\gamma((b+\beta)^2 + \nu b\beta)}{\alpha\alpha ccq} + \frac{bb((c+\gamma)^2 + \nu c\gamma)}{\alpha\alpha\beta\beta r}\right).$$

Poſons maintenant la diſtance de foyer qui conviendroit à un ſeul verre rapporté aux diſtances a & γ. $= \pi$, de ſorte que $\pi = \dfrac{a\gamma}{a+\gamma}$, & ſuppoſons:

$$p = A\pi;\quad q = B\pi;\quad \& \ r = C\pi.$$

Ayant donc

$$\frac{a\alpha}{a+\alpha} = A\pi;\ \frac{b\beta}{b+\beta} = B\pi;\ \frac{c\gamma}{c+\gamma} = C\pi,$$

l'eſpace de diffuſion ſera exprimé en ſorte

Hh

$$Hh = \frac{\mu rx}{aa\pi}\left(\frac{\xi\epsilon\gamma\gamma((a+\alpha)^2+\nu a\alpha)}{Abbcc}+\frac{aa\gamma\gamma((b+\epsilon)^2+\nu b\epsilon)}{Baacc}+\frac{aabb((c+\gamma)^2+\nu c\gamma)}{C\alpha\alpha\xi\epsilon}\right).$$

Mais, puisque $\alpha = -b$ & $\epsilon = -c$, nous aurons

$$\frac{-ab}{a-b} = \frac{Aa\gamma}{a+\gamma}, \quad \text{donc } b = \frac{Aa\gamma}{(A-1)\gamma - a},$$

$$\frac{-bc}{b-c} = \frac{Ba\gamma}{a+\gamma}, \text{ donc } c = \frac{Ba\gamma b}{Ba\gamma - ab - b\gamma} = \frac{AB\,a\gamma}{(AB-A-B)\gamma-(A+B)a}$$

$$\frac{c\gamma}{c+\gamma} = \frac{Ca\gamma}{a+\gamma}, \quad \text{donc } c = \frac{Ca\gamma}{\gamma-(C-1)a},$$

& partant les nombres A, B, C, doivent être tels, qu'il ſoit:

$$ABC - AB - AC - BC = 0, \text{ ou } 1 = \frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}.$$

Poſons donc $\frac{1}{A} = \mathfrak{A}$, $\frac{1}{B} = \mathfrak{B}$, & $\frac{1}{C} = \mathfrak{C}$, de ſorte que:

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C} = 1; \; \& \; b = \frac{a\gamma}{(1-\mathfrak{A})\gamma - \mathfrak{A}a}, \; c = \frac{a\gamma}{\mathfrak{C}\gamma-(1-\mathfrak{C})a},$$

& à cauſe de $\alpha = -b$; & $b = -c$, l'eſpace de diffuſion ſera

$$Hh = \frac{\mu rx}{aa\pi}\left(\frac{\mathfrak{A}\gamma\gamma((a-b)^2-\nu ab)}{bb}+\frac{\mathfrak{B}aa\gamma\gamma((b-c)^2-\nu bc)}{bbcc}+\frac{\mathfrak{C}aa((c+\gamma)^2+\nu c\gamma)}{cc}\right).$$

Or ayant

$$\frac{a}{b} = 1-\mathfrak{A}-\frac{\mathfrak{A}a}{\gamma}, \; \frac{\gamma}{c} = \frac{\mathfrak{C}\gamma}{a}-1+\mathfrak{C}, \; \& \; b-c = \frac{-\mathfrak{B}bc(a+\gamma)}{a\gamma},$$

notre expreſſion prendra cette forme:

$$Hh = \frac{\mu rx}{aa\pi}\left(\mathfrak{A}\gamma\gamma\left(\left(\frac{a}{b}-1\right)^2-\frac{\nu a}{b}\right)+\mathfrak{B}^3\,(a+\gamma)^2\right.$$
$$\left.-\frac{\nu\mathfrak{B}aa\gamma\gamma}{bc}+\mathfrak{C}aa\left(\left(1+\frac{\gamma}{c}\right)^2+\frac{\nu\gamma}{c}\right)\right),$$

qui

qui se réduit à celle-cy:

$$Hh = \frac{\mu x x}{aa\pi}\left(\left(\mathfrak{A}^3 + \mathfrak{B}^3 + \mathfrak{C}^3\right)(a+\gamma)^2 + \nu\left(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{C} - \mathfrak{A} - \mathfrak{C}\right)(a+\gamma)^2 + \nu a\gamma\right),$$

ou à cette autre

$$Hh = \frac{\mu x x}{aa\pi}(a+\gamma)^2 - (\nu+3)\left(\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\mathfrak{A} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{C}\mathfrak{C} + \mathfrak{A} + \mathfrak{C}\right)(a+\gamma)^2 + \nu a\gamma).$$

Mais, pour la construction des verres qui produisent cet espace de confusion, puisque nous avons

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\mathfrak{A}}{\gamma} + \frac{\mathfrak{A}-1}{a};\ \frac{1}{b} = \frac{-\mathfrak{A}}{\gamma} - \frac{\mathfrak{A}+1}{a};\ \frac{1}{\mathfrak{b}} = \frac{1-\mathfrak{C}}{\gamma} - \frac{\mathfrak{C}}{a};\ \frac{1}{c} = \frac{\mathfrak{C}-1}{\gamma} + \frac{\mathfrak{C}}{a},$$

si nous nommons les rayons des faces antérieures de nos trois verres f, f', f'', & des postérieures g, g', g'', nous aurons

$$\frac{1}{f} = \frac{\sigma\mathfrak{A}}{\gamma} + \frac{\sigma\mathfrak{A} - \sigma + \tau}{a};\ \frac{1}{g} = \frac{\sigma + \tau\mathfrak{A} - \tau}{a} + \frac{\tau\mathfrak{A}}{\gamma},$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{\sigma - \sigma\mathfrak{C} - \tau\mathfrak{A}}{\gamma} - \frac{\sigma\mathfrak{C} - \tau\mathfrak{A} + \tau}{a};\ \frac{1}{g'} = \frac{\tau - \sigma\mathfrak{A} - \tau\mathfrak{C}}{\gamma} - \frac{\sigma\mathfrak{A} + \sigma - \tau\mathfrak{C}}{a},$$

$$\frac{1}{f''} = \frac{\sigma - \tau + \tau\mathfrak{C}}{\gamma} + \frac{\tau\mathfrak{C}}{a};\ \frac{1}{g''} = \frac{\sigma\mathfrak{C} - \sigma + \tau}{\gamma} + \frac{\sigma\mathfrak{C}}{a}.$$

Corollaire 1.

17. Puisque $\pi = \frac{a\gamma}{a+\gamma}$, l'espace de diffusion pourra être exprimé de cette façon:

$$Hh = \frac{\mu x x(a+\gamma)}{a^3 g}\left(\left(1 - (\nu+3)(\mathfrak{A}+\mathfrak{C})(\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{A} - \mathfrak{C} + 1)\right)(a + \gamma^2 + \nu a\gamma\right),$$

ou bien

$$\mathrm{H}h = \frac{\mu rx(a+\gamma)}{a^3\gamma}((1-(\nu+3)(1-\mathfrak{A})(1-\mathfrak{C})(\mathfrak{A}+\mathfrak{C}))(a+\gamma)^2+\nu a\gamma),$$

d'où l'on voit, que si l'on prenoit ou $\mathfrak{A} = 1$, ou $\mathfrak{C} = 1$, ou $\mathfrak{A} = -\mathfrak{C}$, on auroit le même espace de diffusion que dans le cas d'un verre simple.

Corollaire 2.

18. Or l'espace de diffusion deviendra plus petit que dans le cas d'un verre simple, si l'on prend pour $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{C}$ des nombres positifs moindres que l'unité: & dans ce cas ledit espace deviendra le plus petit, en prenant $\mathfrak{A} = \mathfrak{C} = \frac{1}{3}$, de sorte que $\mathfrak{B} = \frac{1}{3}$; & partant $p = q = r = 3\pi$. Or alors l'espace de diffusion sera

$$\mathrm{H}h = \frac{\mu xx(a+\gamma)}{a^3\gamma}\left(\left(\frac{1}{9}-\frac{8\nu}{27}\right)(a+\gamma)^2+\nu a\gamma\right), \text{ ou}$$

$$\mathrm{H}h = \frac{\mu xx(a+\gamma)}{a^3\gamma}(0{,}04217\,(a+\gamma)^2+\nu a\gamma),$$

& partant plus petit que dans le cas de deux verres.

Corollaire 3.

19. Mais, posant $\mathfrak{A} = \frac{1}{3}$ & $\mathfrak{C} = \frac{1}{3}$, nous aurons pour les rayons des faces de nos trois verres:

$$\frac{1}{f} = \frac{\sigma}{3\gamma} + \frac{3\tau-2\sigma}{3a}, \text{ ou } f = \frac{3a\gamma}{\sigma a+(3\tau-2\sigma)\gamma},$$

$$\frac{1}{g} = \frac{3\sigma-2\tau}{3a} + \frac{\tau}{3\gamma}, \text{ ou } g = \frac{3a\gamma}{(3\sigma-2\tau)\gamma+\tau a},$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{2\sigma-\tau}{3\gamma} + \frac{2\tau-\sigma}{3a}, \text{ ou } f' = \frac{3a\gamma}{(2\sigma-\tau)a+(2\tau-\sigma)\gamma},$$

$$\frac{1}{g'} = \frac{2\sigma-\tau}{3a} + \frac{2\sigma-\tau}{3\gamma}, \text{ ou } g' = \frac{3a\gamma}{(2\sigma-\tau)\gamma+(2\tau-\sigma)a},$$

$$\frac{1}{f''} = \frac{3\sigma - 2\tau}{3\gamma} + \frac{\tau}{3a}, \text{ ou } f'' = \frac{3a\gamma}{(3\sigma - 2\tau)a + \tau\gamma},$$

$$\frac{1}{g''} = \frac{\sigma}{3a} + \frac{3\tau - 2\sigma}{3\gamma}, \text{ ou } g'' = \frac{3a\gamma}{\sigma\gamma + (3\tau - 2\sigma)a},$$

COROLLAIRE 4.

20. Donc, si la distance de l'objet avant le verre est $= a$, & celle de l'image derriere le verre $= \alpha$, le verre triple qui produit la moindre confusion, doit être composé de trois verres simples, dont les faces soient formées en sorte :

	le rayon de la face antérieure	le rayon de la face postérieure
pour le premier verre	$\frac{3a\alpha}{1,62740a - 2,68246\alpha}$;	$\frac{3a\alpha}{4,50064\alpha + 0,19078a}$
pour le second verre	$\frac{3a\alpha}{3,06402a - 1,24584\alpha}$;	$\frac{3a\alpha}{3,06402\alpha - 1,24584a}$
pour le troisieme verre	$\frac{3a\alpha}{4,50064a + 0,19078\alpha}$;	$\frac{3a\alpha}{1,62740\alpha - 2,68246a}$;

& alors l'espace de diffusion sera

$$\frac{\mu(a+\alpha)xx}{a^3\alpha}\left(\frac{3-8\nu}{27}(a+\alpha)^2 + \nu a\alpha\right), \text{ ou à cause de } \nu = 0,23269,$$

$$\frac{\mu(a+\alpha)xx}{a^3\alpha}(0,04217(a+\alpha)^2 + \nu a\alpha).$$

PROBLEME IV.

21. *L'espace de diffusion, en employant un verre triple, ayant été trouvé exprimé en sorte dans le probleme précédent :*

$$\frac{\mu xx(a+\gamma)}{a^3\gamma}((1-(\nu+3)(1-\mathfrak{A})(1-\mathfrak{C})(\mathfrak{A}+\mathfrak{C}))(a+\gamma)^2 + \nu a\gamma),$$

 trou-

trouver les cas où le coefficient de $(\alpha + \gamma)^2$ dans cette expression évanouit entierement.

SOLUTION.

Il s'agit donc de trouver les nombres $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{C}$, qui satisfassent à cette équation :

$$1 = (\nu + 3)(1 - \mathfrak{A})(1 - \mathfrak{C})(\mathfrak{A} + \mathfrak{C}).$$

Posons pour cet effet $\mathfrak{A} + \mathfrak{C} = 2\eta$, & $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = z$, pour avoir

$$\mathfrak{A} = \eta + \sqrt{(\eta\eta - z)}, \text{ \& } \mathfrak{C} = \eta - \sqrt{(\eta\eta - z)}.$$

Or alors notre équation prendra cette forme :

$$1 = 2(\nu + 3)\eta(1 - 2\eta + z), \text{ d'où l'on tire}$$

$$z = 2\eta - 1 + \frac{1}{2(\nu + 3)\eta}, \text{ \& partant}$$

$$\eta\eta - z = (\eta - 1)^2 - \frac{1}{2(\nu + 3)\eta}.$$

Il faut donc prendre pour η un tel nombre que cette formule $(\eta - 1)^2 - \frac{1}{2(\nu + 3)\eta}$, obtienne une valeur positive.

Cherchons d'abord la valeur pour η, qui rendra cette quantité égale à zéro, ou soit

$$\eta(\eta - 1)^2 = \frac{1}{2(\nu + 3)} = 0{,}15467,$$

& il est évident que η doit être un nombre positif.

Soit I. η un nombre > 1, & sa valeur, qui satisfait à cette équation, se trouve $\eta = 1{,}33966$, & ce sera aussi la valeur de $\mathfrak{A}$ & de $\mathfrak{C}$; d'où l'on aura $\mathfrak{B} = -1{,}67932$.

Soit II. η moindre que 1, & posons $\eta = 1 - v$, pour avoir à résoudre cette équation $vv - v^3 = 0{,}15467$: or cela est impossible, car la plus grande valeur que $vv - v^3$ puisse recevoir est

eſt $= 0,14815$, & partant notre équation n'a qu'une racine, qui eſt $\eta = 1,33966$, auquel cas $(\eta - 1)^2 - \frac{1}{2(\nu + 3)\eta}$ évanouit.

Mais, puisque $\mathfrak{A} + \mathfrak{C} = 1 - \mathfrak{B}$, & que l'équation à réſoudre a cette forme: $1 = (\nu + 3)(1 - \mathfrak{A})(1 - \mathfrak{B})(1 - \mathfrak{C})$, il eſt évident que les trois nombres $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ peuvent être changés entr'eux à volonté, de ſorte qu'ayant trouvé trois nombres pour $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, ces mêmes nombres pourront être pris, en quelqu'autre ordre qu'on mette les lettres $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$; ainſi le cas trouvé fournit d'abord trois ſolutions:

I. $\mathfrak{A} = 1,33966$; $\mathfrak{B} = -1,67932$; $\mathfrak{C} = 1,33966$,
II. $\mathfrak{A} = 1,33966$; $\mathfrak{B} = 1,33966$; $\mathfrak{C} = -1,67932$,
III. $\mathfrak{A} = -1,67932$; $\mathfrak{B} = 1,33966$; $\mathfrak{C} = 1,33966$,

& ſi les valeurs de $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{C}$ n'avoient pas été égales entr'elles, on en auroit pu tirer ſix ſolutions différentes. Or il eſt clair que la formule

$$\sqrt{(\eta\eta - 2)} = \sqrt{\left((\eta - 1)^2 - \frac{0,15467}{\eta}\right)},$$ ſera toujours réelle,

quand on prend ou η négatif ou poſitif, mais plus grand que $1,33966$.

Prenons donc, pour donner un exemple du dernier cas, $\eta = \frac{3}{2}$, & ayant alors $\sqrt{(\eta\eta - 2)} = \sqrt{(\frac{1}{4} - 0,10311)} = 0,38323$, on trouvera $\mathfrak{A} = 1,88323$; $\mathfrak{C} = 1,11677$; & $\mathfrak{B} = -2$, & partant on aura de là ſix ſolutions, ſelon les diverſes combinaiſons des lettres $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}, \mathfrak{B}$, avec les trois nombres trouvés.

Prenons auſſi pour η un nombre négatif, & ſoit $\eta = -\frac{1}{4}$: donc $\mathfrak{A} + \mathfrak{C} = -\frac{1}{2} = 1 - \mathfrak{B}$, & partant $\mathfrak{B} = \frac{3}{2}$. De là on aura

$$\sqrt{(\eta\eta - 2)} = \sqrt{(\tfrac{25}{16} + 0,61868)} = 1,47828,$$

donc $\mathfrak{A} = 1,22828$, & $\mathfrak{C} = -1,72828$, & $\mathfrak{B} = 1,50000$: ſoit $\eta = -\frac{1}{6}$, & partant $\mathfrak{A} + \mathfrak{C} = -\frac{1}{3} = 1 - \mathfrak{B}$, donc $\mathfrak{B} = 1\frac{1}{3}$. Or $\sqrt{(\eta\eta - 2)} = \sqrt{(\tfrac{49}{36} + 0,92802)} = 1,51298$, donc $\mathfrak{A} = 1,34632$, & $\mathfrak{C} = -1,67964$, & $\mathfrak{B} = 1,33333$, & cette ſolution approche fort de la premiere. Or la premiere a cet avantage qu'aucun des trois nombres trouvés n'eſt auſſi grand, que dans les autres ſolutions: ce qui eſt un avantage réel, puiſque les faces des verres deviennent alors le moins courbes, & ſont par conſéquent ſuſceptibles d'une plus grande ouverture.

Corollaire I.

22. Donc, ſi nous poſons la diſtance de l'objet avant le verre $= a$, & celle de l'image après le verre $= \alpha$, nous pourrons fournir une infinité de verres triples, qui produiſent l'eſpace de diffuſion $= \frac{\mu x x (a + \alpha)}{a^3 \alpha} \cdot \nu a \alpha = \frac{\mu \nu x x (a + \alpha)}{a a}$; dont voici la conſtruction

I. Verre Triple.

23.

	Rayon de la face	
du verre	antérieure	poſtérieure
premier	$\frac{a\alpha}{+2,18016a+0,74354\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{1,69220\alpha+0,25558a}$
ſecond	$\frac{a\alpha}{-0,80834a-2,24496\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{-0,80834\alpha-2,24496a}$
troiſieme	$\frac{a\alpha}{+1,69220a+0,25558\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{+2,18016\alpha+0,74354a}$

II. Verre Triple.

24.

	Rayon de la face	
du verre	antérieure	poſterieure
premier	$\frac{a\alpha}{+2,18016a+0,74354\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{+1,69220\alpha+0,25558a}$
ſecond	$\frac{a\alpha}{+4,10475a+2,66813\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{-0,23238\alpha-1,66900a}$
troiſieme	$\frac{a\alpha}{+1,11624a-0,22038\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{-2,73293\alpha-4,16955a}$

III.

III. Verre Triple.

25.

Rayon de la face

du verre	antérieure	postérieure
premier	$\frac{a\alpha}{-2{,}73293a-4{,}16955\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{+1{,}11624\alpha-0{,}32038a}$
second	$\frac{a\alpha}{-0{,}23238a-1{,}66900\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{+4{,}10475\alpha+2{,}66813a}$
troisieme	$\frac{a\alpha}{+1{,}69220a+0{,}25558\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{+2{,}18016\alpha+0{,}74354a}$

IV. Verre Triple.

26.

Rayon de la face

du verre	antérieure	postérieure
premier	$\frac{a\alpha}{+1{,}99890a+0{,}56228\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{1{,}67095\alpha+0{,}23433a}$
second	$\frac{a\alpha}{-1{,}04803a-2{,}48465\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{-0{,}65767\alpha-2{,}09429a}$
troisieme	$\frac{a\alpha}{+1{,}72279a+0{,}28617\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{+2{,}44110\alpha+1{,}00448a}$

V. Verre Triple.

27.

Rayon de la face

du verre	antérieure	postérieure
premier	$\frac{a\alpha}{1{,}99890a+0{,}56228\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{+1{,}67095\alpha+0{,}23433a}$
second	$\frac{a\alpha}{+4{,}20567a+2{,}76905\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{-0{,}04177\alpha-1{,}47839a}$
troisieme	$\frac{a\alpha}{+1{,}10689a+0{,}32973\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{-2{,}81260\alpha-4{,}24922a}$

VI. Verre Triple.

28.

du verre	Rayon de la face antérieure	Rayon de la face postérieure
premier	$\frac{a\alpha}{+2,44110a+1,00448\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{+1,72279\alpha+0,28617a}$
second	$\frac{a\alpha}{+4,15383a+2,71721\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{-0,48397\alpha-1,92059a}$
troisieme	$\frac{a\alpha}{+1,10689a-0,32973\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{-2,81260\alpha-4,24922a}$

VII. Verre Triple.

29.

du verre	Rayon de la face antérieure	Rayon de la face postérieure
premier	$\frac{a\alpha}{-2,81260a-4,24922\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{+1,10689\alpha-0,32973a}$
second	$\frac{a\alpha}{-0,48397a-1,92059\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{+4,15383\alpha+2,71721a}$
troisieme	$\frac{a\alpha}{+1,72279a+0,28617\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{+2,44110\alpha+1,00448a}$

VIII. Verre Triple.

30.

du verre	Rayon de la Face antérieure	Rayon de la Face postérieura
premier	$\frac{a\alpha}{-2,81260a-4,24922\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{+1,10689\alpha-0,32973a}$
second	$\frac{a\alpha}{-0,04177a-1,47839\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{+4,20567\alpha+2,76905a}$
troisieme	$\frac{a\alpha}{+1,67095a+0,23433\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{+1,99890\alpha+0,56228a}$

IX. Verre Triple.

31.

du verre	Rayon de la face antérieure	Rayon de la face postérieure
premier	$\frac{a\alpha}{+2,44110a+1,00448\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{+1,72279\alpha+0,28617a}$
second	$\frac{a\alpha}{-0,65767a-2,09429\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{-1,04803\alpha-2,48465a}$
troisieme	$\frac{a\alpha}{+1,67095a+0,23433\alpha}$;	$\frac{a\alpha}{+1,99890\alpha+0,56228a}$

SCHOLIE I.

32. Voilà donc IX verres triples, qui produisent l'effet souhaité; dont les trois premiers sont tirés des valeurs 1,33966, 1,33966 & — 1,67932 trouvées pour les lettres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, & les six autres des valeurs

1,22828, 1,50000, & — 1,72828.

Parmi les trois verres de tous ces cas, il y en a toujours un qui est concave, ou dont la distance de foyer est négative, celle des deux autres étant positive. Ainsi le premier verre, qui regarde l'objet, est concave dans les cas: I, IV, & IX: & le troisieme verre est concave dans les cas: II, V, & VI. Ensuite il est aussi bon de remarquer, que les cas I & II ont le premier verre commun, & le troisieme est commun aux cas I & III: or les cas II & III n'ont aucun verre commun. De même, dans les six autres cas, le premier verre est commun aux cas IV & V; & aussi aux cas VII & VIII; & encore aux cas VI & IX; or le troisieme verre est commun aux cas IV & VII, & aussi aux cas V & VI: & encore aux cas VIII & IX.

SCHOLIE II.

33. Ayant dans ce probleme déterminé le cas, où dans l'espace de diffusion

$$\frac{\mu x x(a+\gamma)}{a^3\gamma}\left((1-(\nu+3)(1-\mathfrak{A})(1-\mathfrak{B})(1-\mathfrak{C})(a+\gamma)^2+\nu a\gamma\right),$$

le cöefficient du terme $(a+\gamma)^2$ évanouir, nous avons trouvé que des trois nombres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, deux ſont toujours poſitifs & le troiſieme négatif. De là nous pourrons aiſément réſoudre les cas où le cöefficient de $(a+\gamma)^2$ deviendra même négatif. Car cela arrivera, ou ſi un des nombres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, qui eſt poſitif, eſt plus petit qu'il n'a été trouvé dans notre probleme, ou ſi celui qui eſt négatif, eſt pris plus grand. Or il eſt ſouvent bon d'avoir de tels verres, qui produiſent un eſpace de diffuſion dans l'expreſſion duquel le cöefficient de $(a+\gamma)^2$, ou de $(a+\alpha)^2$, à laquelle forme je réduis toujours les expreſſions, ſoit un nombre négatif, mais très petit: il ſera donc toujours fort aiſé de remplir cette condition, en prenant ou un des nombres poſitifs $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, un peu plus grand qu'il ne doit être pour le cas, où le cöefficient de $(a+\alpha)^2$ doit entierement évanouir.

PROBLEME IV.

Fig 7. 34. *Lorsque quatre verres joints enſemble en* A *repréſentent l'objet* E *par l'image principale en* I, *trouver l'eſpace de diffuſion* Ii, *que produit une ouverture donnée des verres.*

SOLUTION.

Conſidérons d'abord les quatre verres comme éloignés entr'eux, pour avoir le cas traité dans le IX Probleme du Mémoire précédent, & poſons comme là

$$EA = a;\ FB = b;\ GC = c;\ HD = d,$$
$$AF = \alpha;\ BG = \beta;\ CH = \gamma;\ DI = \delta,$$

& nous n'aurons qu'à ſuppoſer $\alpha + b = 0$; $\beta + c = 0$ & $\gamma + d = 0$, ou $\alpha = -b$; $\beta = -c$, & $\gamma = -d$. Enſuite, ſuppoſons comme auparavant les quatre verres tels, que chacun produiſe déjà le plus petit eſpace de diffuſion, & partant leurs faces ſeront telles.

		Le rayon de la face	
du verre		antérieure	poſtérieure
premier	- -	$\dfrac{a\alpha}{\sigma a + \tau\alpha}$;	$\dfrac{a\alpha}{\sigma\alpha + \tau a}$,
ſecond	- -	$\dfrac{b\beta}{\sigma b + \tau\beta}$;	$\dfrac{b\beta}{\sigma\beta + \tau b}$,
troiſieme	- -	$\dfrac{c\gamma}{\sigma c + \tau\gamma}$;	$\dfrac{c\gamma}{\sigma\gamma + \tau c}$,
quatrieme	-	$\dfrac{d\delta}{\sigma d + \tau\delta}$:	$\dfrac{d\delta}{\sigma\delta + \tau d}$.

Soient de plus les diſtances de foyer de ces verres

du premier $p = \dfrac{a\alpha}{a+\alpha}$; du ſecond $q = \dfrac{b\beta}{b+\beta}$;

du troiſieme $r = \dfrac{c\gamma}{c+\gamma}$; & du quatrieme $= \dfrac{d\delta}{d+\delta}$,

& poſant le demi-diametre de l'ouverture du verre $= x$, l'eſpace de diffuſion ſera:

$$Ii = \frac{\mu xx}{aa}\left\{\begin{array}{l} + \dfrac{\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta((a+\alpha)^2 + \nu a\alpha)}{bbccddp} + \dfrac{aa\gamma\gamma\delta\delta((b+\beta)^2 + \nu b\beta)}{\alpha\alpha ccddq} \\ + \dfrac{aabb\delta\delta((c+\gamma)^2 + \nu c\gamma)}{\alpha\alpha\beta\beta ddr} + \dfrac{aabbcc((d+\delta)^2 + \nu d\delta)}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma s} \end{array}\right\}.$$

Soit maintenant la diſtance de foyer qui conviendroit à un ſeul verre rapporté aux diſtances a & δ, $= \pi$, de ſorte que $\pi = \dfrac{a\delta}{a+\delta}$, & ſuppoſons

$$p = \frac{\pi}{\mathfrak{A}};\quad q = \frac{\pi}{\mathfrak{B}};\quad r = \frac{\pi}{\mathfrak{C}};\quad \&\quad s = \frac{\pi}{\mathfrak{D}},$$

& à cause de $\frac{bb}{\alpha\alpha} = 1$; $\frac{cc}{\beta\beta} = 1$; $\frac{dd}{\gamma\gamma} = 1$, l'espace de diffusion sera exprimé ainsi:

$$\mathrm{I}i = \frac{\mu r x}{aa\pi}\left\{\begin{array}{l} +\frac{\mathfrak{A}\delta\delta}{bb}((a+\alpha)^2 + \nu a\alpha) + \frac{\mathfrak{B}aa\delta\delta}{bbcc}((b+\beta)^2 + \nu b\beta) \\ +\frac{\mathfrak{C}aa\delta\delta}{ccdd}((c+\gamma)^2 + \nu c\gamma) + \frac{\mathfrak{D}aa}{dd}((d+\delta)^2 + \nu d\delta) \end{array}\right\}.$$

Or les équations

$$\frac{\mathfrak{A}ab}{b-a} = \frac{a\delta}{a+\delta};\ \frac{\mathfrak{B}bc}{c-b} = \frac{a\delta}{a+\delta};\ \frac{\mathfrak{C}cd}{d-c} = \frac{a\delta}{a+\delta};\ \frac{\mathfrak{D}d\delta}{d+\delta} = \frac{a\delta}{a+\delta},$$

donnent

$$\frac{a}{b} = 1 - \mathfrak{A} - \frac{\mathfrak{A}a}{\delta},\ \text{ou}\ \frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A}(a+\delta)}{a\delta},$$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{b} - \frac{\mathfrak{B}(a+\delta)}{a\delta} = \frac{1}{a} - \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})(a+\delta)}{a\delta},$$

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{c} - \frac{\mathfrak{C}(a+\delta)}{a\delta} = \frac{1}{a} - \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})(a+\delta)}{a\delta}:$$

or on trouve aussi $\frac{1}{d} = \frac{\mathfrak{D}(a+\delta)}{a\delta} - \frac{1}{\delta}$,

d'où il suit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} = 1$.

Mais, posant $\alpha = -b$; $\beta = -c$, & $\gamma = -d$, l'expression de $\mathrm{I}i$ prendra cette forme:

$$\mathrm{I}i = \frac{\mu x x}{aa\pi}\left\{\begin{array}{l} +\mathfrak{A}\delta\delta((\frac{a}{b}-1)^2 - \frac{\nu a}{b}) + \mathfrak{B}aa\delta\delta\left(\frac{1}{cc} - \frac{2}{bc} + \frac{1}{bb} - \frac{\nu}{bc}\right) \\ +\mathfrak{C}aa\delta\delta\left(\frac{1}{dd} - \frac{2}{cd} + \frac{1}{cc} - \frac{\nu}{cd}\right) + \mathfrak{D}aa((1+\frac{\delta}{d})^2 + \frac{\nu\delta}{d}) \end{array}\right),$$

ou bien celle-cy:

$\mathrm{I}i =$

$$Li = \frac{\mu\delta\delta x}{\pi}\begin{cases} +\mathfrak{A}\left(\frac{1}{aa}-\frac{\nu-2}{ab}+\frac{1}{bb}\right)+\mathfrak{B}\left(\frac{1}{bb}-\frac{\nu-2}{bc}+\frac{1}{cc}\right) \\ +\mathfrak{C}\left(\frac{1}{cc}-\frac{\nu-2}{cd}+\frac{1}{dd}\right)+\mathfrak{D}\left(\frac{1}{dd}+\frac{\nu+2}{d\delta}+\frac{1}{\delta\delta}\right). \end{cases}$$

Or, faisant ici les substitutions, on parviendra à cette expression

$$Li = \frac{\mu xx(a+\delta)}{a^3\delta}((1-(\nu+3)(1-\mathfrak{A})(1-\mathfrak{B})(1-\mathfrak{C})(1-\mathfrak{D}))(a+\delta)^2+\nu a\delta).$$

Et en introduisant ces lettres $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, dont la somme doit être égale à l'unité, les faces des verres doivent être faites conformément aux formules suivantes:

	Rayon de la face	
du verre	antérieure	postérieure
premier -	$\frac{a\delta}{\sigma\mathfrak{A}a+\tau(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\delta-\sigma(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\delta}$.	

	Rayon de la face	
du verre	antérieure	postérieure
premier -	$\frac{a\delta}{\sigma\mathfrak{A}a+\tau\mathfrak{A}\delta-(\sigma-\tau)(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\delta}$;	$\frac{a\delta}{\sigma\mathfrak{A}\delta+(\sigma-\tau)(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\delta+\tau\mathfrak{A}a}$
second -	$\frac{a\delta}{\sigma\mathfrak{B}a+(\sigma-\tau)\mathfrak{A}a+\tau\mathfrak{B}\delta-(\sigma-\tau)(\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\delta}$;	$\frac{a\delta}{\sigma\mathfrak{B}\delta+(\sigma-\tau)(\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\delta+\tau\mathfrak{B}a-(\sigma-\tau)\mathfrak{A}a}$
troisieme	$\frac{a\delta}{\sigma\mathfrak{C}a+(\sigma-\tau)(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})a+\tau\mathfrak{C}\delta-(\sigma-\tau)\mathfrak{D}\delta}$;	$\frac{a\delta}{\sigma\mathfrak{C}\delta+(\sigma-\tau)\mathfrak{D}\delta+\tau\mathfrak{C}a-(\sigma-\tau)(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})a}$
quatrieme	$\frac{a\delta}{\sigma\mathfrak{D}a+(\sigma-\tau)(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})a+\tau\mathfrak{D}\delta}$;	$\frac{a\delta}{\sigma\mathfrak{D}\delta+\tau\mathfrak{D}a-(\sigma-\tau)(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})a}$

Or les nombres $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ sont tels, que posant $\frac{a\delta}{a+\delta}=\pi$, il soit

$$p=\frac{\pi}{\mathfrak{A}};\ q=\frac{\pi}{\mathfrak{B}};\ r=\frac{\pi}{\mathfrak{C}};\ \&\ s=\frac{\pi}{\mathfrak{D}};$$

& on pourra prendre pour $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, tels nombres qu'on voudra, pourvu qu'il soit $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D}=1$.

Corollaire I.

35. Donc, si la distance de l'objet avant le verre est $=a$, & celle de l'image derriere le verre $=\alpha$, & qu'on veuille employer un verre quadruple, en sorte que posant $\frac{a\alpha}{a+\alpha}=\pi$, les distances de foyer des quatre verres soient

$$p=\frac{\pi}{\mathfrak{A}};\quad q=\frac{\pi}{\mathfrak{B}};\quad r=\frac{\pi}{\mathfrak{C}};\quad s=\frac{\pi}{\mathfrak{D}};$$

de sorte qu'il soit $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D}=1$.

Les faces des quatre verres doivent être travaillées en sorte, qu'il soit:

La face Pour le premier verre

antérieure $=\dfrac{a\alpha}{\sigma\mathfrak{A}a-\sigma(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\alpha+\tau(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\alpha}$

postérieure $=\dfrac{a\alpha}{\tau\mathfrak{A}a-\tau(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\alpha+\sigma(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\alpha}$

La face Pour le second verre

antérieure $=\dfrac{a\alpha}{\sigma(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})a-\tau\mathfrak{A}a-\sigma(\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\alpha+\tau(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\alpha}$

postérieure $=\dfrac{a\alpha}{\tau(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})a-\sigma\mathfrak{A}a-\tau(\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\alpha+\sigma(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\alpha}$

Lr face Pour le troisieme verre

antérieure $=\dfrac{a\alpha}{\sigma(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})a-\tau(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})a-\sigma\mathfrak{D}\alpha+\tau(\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\alpha}$

postérieure $=\dfrac{a\alpha}{\tau(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})a-\sigma(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})a-\tau\mathfrak{D}\alpha+\sigma(\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\alpha}$

La face | Pour le quatrieme verre

antérieure $= \dfrac{a\alpha}{\sigma(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D})a-\tau(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})a+\tau\mathfrak{D}\alpha}$,

postérieure $= \dfrac{a\alpha}{\tau(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\alpha-\sigma(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})\alpha+\sigma\mathfrak{D}\alpha}$,

& alors, si l'on donne à ce verre une ouverture dont le demi-diamerre est $= x$, l'espace de diffusion sera:

$$\frac{\mu x.x(a+\alpha)}{a^3\alpha}((1-(\nu+3)(1-\mathfrak{A})(1-\mathfrak{B})(1-\mathfrak{C})(1-\mathfrak{D})(a+\alpha)^2+\nu a\alpha).$$

Corollaire. 2.

36. Si l'on met $\mathfrak{D} = 0$, les faces du dernier verre deviennent paralleles entr'elles, & ce verre ne produisant aucune réfraction, on aura le cas des verres triples expliqué auparavant: & si l'on met $\mathfrak{C} = 0$ & $\mathfrak{D} = 0$, on aura le cas de deux verres, ou des verres doubles expliqué cy-dessus; & posant $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$ & $\mathfrak{D}$, il en résulte le cas d'un verre simple, auquel à cause de $\mathfrak{A} = 1$ l'espace de diffusion devient $= \dfrac{\mu x x(a+\alpha)}{a^3\alpha}((a+\alpha)^2+\nu a\alpha)$.

Corollaire 3.

37. Si un seul des quatre nombres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, est pris égal à l'unité, de sorte que la somme des trois autres soit $= 0$, l'espace de diffusion sera le même que dans le cas d'un seul verre, & partant on ne gagnera rien pour la diminution de la confusion.

Corollaire 4.

38. L'évolution du cas des verres quadruples nous met en état d'assigner aisément les formules pour la construction des verres quintuples & sextuples, & de tous les suivans: & de déterminer en même tems l'espace de diffusion qu'une ouverture quelconque produira.

COROLLAIRE 5.

59. Si l'on prend les nombres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, positifs & moindres que l'unité, le cöefficient de $(a+\alpha)^2$ deviendra plus petit que l'unité. Or il sera le plus petit en prenant ces nombres égaux entr'eux. Posons donc pour ce cas

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{B}=\mathfrak{C}=\mathfrak{D}=\tfrac{1}{4},$$

& l'espace de diffusion que ce verre quadruple, produira sera

$$\frac{\mu xx(a+\alpha)}{a^3\alpha}((1-\frac{3^4}{4^4}(\nu+3)(a+\alpha)^2+\nu a\alpha), \text{ ou bien}$$

$$\frac{\mu xx(a+\alpha)}{a^3\alpha}(-0{,}02284(a+\alpha)^2+\nu a\alpha).$$

Or pour ce cas les quatre verres doivent être formés en sorte.

	Rayon de la face	
du verre	antérieure	postérieure
premier	$=\dfrac{4a\alpha}{\sigma a-(3\sigma-4\tau)\alpha}$;	$\dfrac{4a\alpha}{\tau a+(4\sigma-3\tau)\alpha}$;
second	$=\dfrac{4a\alpha}{(2\sigma-\tau)a-(2\sigma-3\tau)\alpha}$;	$\dfrac{4a\alpha}{(2\tau-\sigma)a+(3\sigma-2\tau)\alpha}$;
troisieme	$=\dfrac{4a\alpha}{(3\sigma-2\tau)a-(\sigma-2\tau)\alpha}$;	$\dfrac{4a\alpha}{(3\tau-2\sigma)a+(2\sigma-\tau)\alpha}$;
quatrieme	$=\dfrac{4a\alpha}{(4\sigma-3\tau)a+\tau\alpha}$;	$\dfrac{4a\alpha}{(4\tau-3\sigma)a+\sigma\alpha}$,

ou, en substituant pour σ & τ leurs valeurs,

	Rayon de la face	
du verre	antérieure	postérieure
premier	$=\dfrac{4a\alpha}{1{,}62740a-4{,}11908\alpha}$;	$\dfrac{4a\alpha}{5{,}93726\alpha+0{,}15078a}$;

second

second $= \frac{4a\alpha}{3{,}06402a - 2{,}68246\alpha}$; $\frac{4a\alpha}{4{,}50064\alpha - 1{,}24584a}$;

troisieme $= \frac{4a\alpha}{4{,}50064a - 1{,}24584\alpha}$; $\frac{4a\alpha}{3{,}06402\alpha - 2{,}68246a}$;

quatrieme $= \frac{4a\alpha}{5{,}93726a + 0{,}19078\alpha}$; $\frac{4a\alpha}{1{,}62740\alpha - 4{,}11908a}$.

PROBLEME V.

40. *Ayant trouvé l'espace de diffusion pour les verres quadruples en général, déterminer les cas où, dans l'expression de l'espace de diffusion, le coëfficient du membre $(a + \alpha)^2$ évanouisse.*

SOLUTION.

Pour que l'espace de diffusion devienne $= \frac{\mu\nu xx\,(a + \alpha)}{aa}$, il faut déterminer les nombres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, en sorte qu'il soit

$$(1 - \mathfrak{A})\,(1 - \mathfrak{B})\,(1 - \mathfrak{C})\,(1 - \mathfrak{D}) = \frac{1}{\nu + 3} = 0{,}30934,$$

ce qui se peut faire d'une infinité de manieres, de sorte pourtant qu'il soit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} = 1$. Or, afin que les rayons des faces ne deviennent pas trop petits, il faut que ces nombres soient aussi petits qu'il est possible; & il est évident qu'il y aura des cas où ces nombres seront à peu près égaux: posons donc

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{4} + z;\ \mathfrak{B} = \tfrac{1}{4} + z;\ \mathfrak{C} = \tfrac{1}{4} + z,\ \&\ \mathfrak{D} = \tfrac{1}{4} - 3z,$$

pour avoir

$$(\tfrac{3}{4} - z)^3\ (\tfrac{3}{4} + 3z) = 0{,}30934, \text{ ou}$$

$$0{,}00715 = \tfrac{27}{8}zz - 6z^3 + 3z^4,$$

d'où nous tirons à peu près

$$\text{ou } z = 0{,}04787, \text{ ou } z = -0{,}04419,$$

& la premiere valeur donne

 $\mathfrak{A} =$

$\mathfrak{A} = 0,29787$; $\mathfrak{B} = 0,29787$; $\mathfrak{C} = 0,29787$; $\mathfrak{D} = 0,10639$.

Or ces nombres approcheront encore plus de l'égalité, si nous posons

$\mathfrak{A} = \frac{1}{4} + z$; $\mathfrak{B} = \frac{1}{4} - z$; $\mathfrak{C} = \frac{1}{4} + z$; $\mathfrak{D} = \frac{1}{4} - z$,

d'où l'on trouve $z = 0,07962$, & partant

$\mathfrak{A} = 0,32962$; $\mathfrak{B} = 0,17038$; $\mathfrak{C} = 0,32962$; $\mathfrak{D} = 0,17038$;

& puisqu'il est permis de changer l'ordre de ces nombres à plaisir, ces valeurs nous fourniront la construction des verres quadruples suivans.

I. Verre Quadruple.

	Rayon de la face	
du verre	antérieure	postérieure
premier -	$\frac{4a\alpha}{2,14569a - 3,60079\alpha}$;	$\frac{4a\alpha}{5,99802\alpha + 0,25154a}$;
second - -	$\frac{4a\alpha}{3,00326a - 2,74322\alpha}$;	$\frac{4a\alpha}{3,96235\alpha - 1,76413a}$;
troisieme -	$\frac{4a\alpha}{5,01893a - 0,72755\alpha}$;	$\frac{4a\alpha}{3,12478\alpha - 2,62170a}$;
quatrieme	$\frac{4a\alpha}{5,87650a + 0,13002\alpha}$;	$\frac{4a\alpha}{1,10911\alpha - 4,63737a}$.

II. Verre Quadruple.

	Rayon de la face	
du verre	antérieure	postérieure
premier -	$\frac{4a\alpha}{1,10911a - 4,63737\alpha}$;	$\frac{4a\alpha}{5,87650\alpha + 0,13002a}$;
second - -	$\frac{4a\alpha}{3,12478a - 2,62170\alpha}$;	$\frac{4a\alpha}{5,01893\alpha - 0,72755a}$;
troisieme -	$\frac{4a\alpha}{3,96235a - 1,76413\alpha}$;	$\frac{4a\alpha}{3,00326\alpha - 2,74322a}$;

qua-

quatrieme $\frac{4a\alpha}{5,99802a + 0,25154\alpha}$; $\frac{4a\alpha}{2,14569\alpha - 3,60079a}$.

CONCLUSION.

41. Puiſque je ſuppoſe que ces verres multiples ſont joints immédiatement enſemble, de ſorte que tant leur épaiſſeur que leurs diſtances entr'elles puiſſent être négligées dans le calcul, on pourra dans la compoſition de pluſieurs verres, dont j'ai déterminé la confuſion dans le Mémoire précédent, regarder ces verres multiples comme des verres ſimples, & les ſubſtituer à leur place, entant qu'ils ſont rapportés aux mêmes deux diſtances a, α, ou b, β, ou c, γ &c. auxquelles les ſimples ont été rapportés. Par ce moyen, il y aura beaucoup à gagner, puisque ces verres multiples produiront une beaucoup plus petite confuſion; laquelle peut même quelquefois être réduite à rien. Or le calcul, pour déterminer la quantité de la confuſion, ne devient pas pour cela plus difficile, & pourra même reſter le même comme il eſt détaillé vers la fin du Mémoire précédent, pourvu qu'on y faſſe quelques petits changemens, lorsqu'on fait uſage de quelque verre multiple au lieu d'un verre ſimple. Car, de quelque verre qu'on ſe ſerve, ſoit qu'il ſoit ſimple ou multiple, lorsqu'il eſt déterminé par les deux diſtances a & α, & que le demi-diametre de ſon ouverture eſt $= x$, l'eſpace de diffuſion eſt toujours contenu dans cette forme

$$\frac{\mu x x (a + \alpha)}{a^3 \alpha} (\lambda (a + \alpha)^2 + \nu a \alpha),$$

& toute la différence ſe trouve dans le ſeul caractere λ, lequel devient $= 1$, lorsque le verre eſt ſimple: or, pour les verres doubles les plus parfaits, on doit mettre $\lambda = 0,19183$, ſuivant le §. 11. Quand le verre eſt triple de la conſtruction du §. 20, on aura $\lambda = 0,04217$; mais, quand il eſt de la conſtruction décrite au §. 22. alors il y aura $\lambda = 0$. Quand on fera uſage d'un verre quadruple de la conſtruction du §. 39, on mettra $\lambda = -0,02289$, mais les verres quadruples de la derniere conſtruction §. 40 auront $\lambda = 0$. Cela remarqué,

qué, les formules données dans les §§. 54. 55. 56 &c. feront rendues plus générales pour s'étendre auffi à des verres multiples quelconques, quand on multipliera les formules $(a+\alpha)^2$, $(b+\beta)^2$, $(c+\gamma)^2$ &c. par les nombres λ, λ', λ'' &c. dont chacun obtiendra fa valeur déterminée par la nature du verre auquel il fe rapporte. Enfuite, les derniers membres de chaque cas doivent auffi être multipliés par un femblable nombre λ; ainfi, pour le cas d'un feul verre, la confufion fera $\frac{\mu x^3}{4} \cdot \frac{\lambda}{aap}$, pour le cas de deux verres, elle fera:

$$\frac{\mu b x^3}{4\alpha}\left(\frac{\lambda(a+\alpha)^2+\nu a\alpha}{aabbp}+\frac{\lambda'}{\alpha\alpha q}\right),$$

pour le cas de trois verres:

$$\frac{\mu bcx^3}{4\alpha\beta}\left(\frac{\beta\beta(\lambda(a+\alpha)^2+\nu a\alpha)}{aabbccp}+\frac{\lambda'(b+\beta)^2+\nu b\beta}{\alpha\alpha ccq}+\frac{\lambda''bb}{\alpha\alpha\beta\beta r}\right),$$

où λ fe rapporte au premier verre, λ' au fecond, λ'' au troifieme &c. Il feroit fuperflu de répéter ici avec cette correction les formules pour les cas de 4, 5 & 6 verres.