RECHERCHES
SUR
LA CONFUSION DES VERRES DIOPTRIQUES
CAUSÉE PAR LEUR OUVERTURE.

PAR M. L. EULER.

I.

Il y a deux défauts principaux, auxquels les verres dioptriques ſont aſſujettis, l'un vient de la diverſe réfrangibilité des rayons de lumiere, & l'autre de la figure des verres. Je me propoſe d'examiner ici ce dernier défaut, & de déterminer exactement la quantité de la confuſion qui eſt cauſée par la figure ſphérique des verres. Car, quoique les Geométres ayent aſſès bien réuſſi à trouver de telles figures, qui ne produiroient aucune confuſion, les ouvriers n'ont pas encore trouvé moyen de donner aux verres ces figures: la figure ſphérique étant l'unique qu'on puiſſe imprimer au verre avec le dégré de préciſion que le but de ces verres exige. Je ſuppoſe donc que les faces des verres ſoient travaillées exactement ſur des baſſins ſpériques; & puiſque cette figure n'a pas la propriété, que tous les rayons, qui viennent d'un point de l'objet, ſoient réunis par la réfraction dans un ſeul point, il en naîtra une confuſion dans l'image formée, qui ſera d'autant plus grande, plus on donnera d'ouverture au verre. C'eſt à cauſe de cette circonſtance qu'on dit, que cette confuſion vient de l'ouverture du verre; & partant mes recherches rouleront ſur la quantité de la confuſion, qu'un verre, dont les faces ſont parfaitement ſphériques, doit produire à cauſe de ſon ouverture.

Planche V. Fig. 1.

2. Pour donner une idée plus nette de cette confusion, considérons un verre PP, dont les deux faces PMAMP & PNBNP, soient parfaitement sphériques. La ligne EF tirée par les centres de ces deux sphéricités représentera l'axe du verre. Soit E, un point lumineux situé dans l'axe du verre, & les rayons qui sont transmis par le milieu du verre AB, représenteront l'image dans un certain point de l'axe F. Or les rayons qui passent par les bords du verre MM, concourent avec l'axe dans un autre point G; de sorte que si ceux-cy étoient transmis tous seuls, l'image du point lumineux seroit représentée en G. D'où l'on comprend que les rayons qui passent entre le milieu & les bords du verre, représenteront l'image entre les points F & G de l'axe, de sorte que tout l'espace FG sera rempli d'images du point lumineux E; je nommerai cet espace FG l'espace de diffusion de l'image: & il est clair que c'est de là que la confusion tire son origine, dont je déterminerai ensuite la juste quantité.

3. Pour déterminer cet espace de diffusion FG, on n'a qu'à chercher en général le point G, où un rayon quelconque EM, qui passe par le verre hors de l'axe, rencontrera l'axe après la réfraction. Car alors, faisant évanouir l'intervalle AM, on aura le point F, où les rayons qui passent par le milieu du verre, représenteront l'image; & posant ensuite l'intervalle AM égal au demi-diametre de l'ouverture du verre, on trouvera le point G, où les rayons qui passent par les bords du verre, concourront avec l'axe. L'intervalle entre ces deux points F & G, sera ce que je nomme l'espace de diffusion FG; d'où il est evident, que cet espace sera d'autant plus grand, plus sera grande l'ouverture du verre: car, si l'ouverture MM évanouïssoit, l'espace de diffusion se réduiroit aussi à rien.

4. Voilà donc la question à laquelle mes recherches se réduisent: *Les deux faces sphériques PAP & PBP, avec l'épaisseur AB du verre étant données, de même que le lieu du point lumineux E, trouver le point G, où un rayon EM, qui passe par le verre dans un point donné M, coupera l'axe du verre EF.*

5. Pour

5. Pour cet effet, il faut confidérer féparément les deux réfractions, qui fe font tant à l'entrée M du rayon EM dans le verre, qu'à fon iffue en N: dans la premiere le rayon paffe de l'air dans le verre, & le finus d'incidence fera à celui de réfraction comme 31 à 20, pour les rayons d'une moyenne réfrangibilité, auxquels je me borne ici uniquement; me réfervant de traiter à part de la confufion qui eft caufée par la différente réfrangibilité des rayons. Donc, au point N, où les rayons fortent du verre en l'air, le finus d'incidence fera à celui de réfraction comme 20 à 31. Or je mettrai ici pour la commodité du calcul la fraction $\frac{31}{20} = n$.

6. Pour repréfenter ces chofes plus fenfiblement, foit AM la face antérieure du verre, dont le centre foit en C, & le demi-diametre $CA = CM = f$; enfuite foit BN la face poftérieure du verre, fon centre en D, & fon demi-diametre $DB = DN = g$: or la diftance de ces deux faces ou l'épaiffeur du verre foit nommée $AB = d$. Que le point lumineux E fe trouve devant le verre à la diftance $AE = a$, & foit la diftance du point M à l'axe $= x$, de forte que, fi le point M eft pris dans les bords du verre, x foit égal au demi-diametre de fon ouverture. J'envifage donc le verre comme convexe de fes deux côtés, ce qui n'empêche pas que les recherches fuivantes ne s'étendent auffi à des verres concaves, puisqu'on n'aura qu'à prendre négatif le demi diametre d'une face concave. Fig. 1.

7. La commodité du calcul exige, qu'au lieu de x, nous y introduifions l'angle $AEM = \Phi$, qu'il fera permis de regarder comme affès petit, pour qu'il foit affès exactement $\sin\Phi = \Phi - \frac{1}{6}\Phi^3$, ce qui ne s'écarte pas fenfiblement de la vérité, quand même l'angle Φ eft de plufieurs dégrés: car, foit $\Phi = 30°$, & cette formule donne $\sin\Phi = 0{,}499675$, qui ne differe de la vérité que de $0{,}000325$; mais pofant $\Phi = 15°$, cette formule donne $\sin\Phi = 0{,}258809$, le véritable finus de 15° étant $= 0{,}258819$, de forte que l'erreur n'eft que $0{,}00001$: d'où l'on peut juger, à quel degré notre formule approche de la verité. Réciproquement donc auffi, lorsque le

 finus

finus d'un angle moindre que de 30° eft $= s$, l'angle même fera affès exactement $= s + \frac{1}{6}s^3$.

8. Ayant donc pofé l'angle AEM $= \phi$, puisqu'il eft affès petit, nous aurons affès près $x = a\phi$. Enfuite, pofons auffi pour abréger le calcul EC $= c$, de forte qu'il foit $c = a + f$, & prolongeons le rayon une fois rompu MN, jufqu'à fa rencontre avec l'axe en O. C'eft ce point O qu'il faut déterminer, avant qu'on puiffe trouver le point G, où le rayon rencontre l'axe après avoir fouffert la double réfraction.

9. Cherchons donc d'abord le point O, & puifque dans le triangle ECM font donnés les deux côtés CM $= f$, & CE $= c$, avec l'angle CEM $= \phi$, on en tire

$$f : \text{fin}\ \phi = c : \text{fin EM}m,\ \text{d'où fin EM}m = \frac{c\ \text{fin}\ \phi}{f},$$

& puifque fin $\phi = \phi - \frac{1}{6}\phi^3$ nous aurons:

$$\text{fin EM}m = \frac{c}{f}\left(\phi - \frac{1}{6}\phi^3\right),$$

& partant l'angle même:

$$\text{EM}m = \frac{c}{f}\left(\phi - \frac{1}{6}\phi^3\right) + \frac{c^3}{6f^3}\left(\phi - \frac{1}{6}\phi^3\right)^3.$$

Donc, en négligeant les puiffances de ϕ qui furpaffent la troifieme:

$$\text{EM}m = \frac{c}{f}\,\phi + \frac{c\,(cc - ff)}{6f^3}\,\phi^3,$$

d'où, fi nous retranchons l'angle CEM $= \phi$, il reftera l'angle

$$\text{ECM} = \frac{c - f}{f}\,\phi + \frac{c\,(cc - ff)}{6f^3}\,\phi^3.$$

10. Or EMm eft l'angle d'incidence du rayon EM fur le verre & CMO l'angle de réfraction; donc puifque les finus de ces deux

deux angles font entr'eux comme n à 1, & que nous venons de trouver

$$\sin \mathrm{EM}m = \frac{c}{f}\left(\Phi - \tfrac{1}{6}\Phi^3\right)$$

nous aurons:

$$\sin \mathrm{CMO} = \frac{c}{nf}\left(\Phi - \tfrac{1}{6}\Phi^3\right)$$

& partant cet angle lui-même fera

$$\mathrm{CMO} = \frac{c}{nf}\,\Phi + \frac{c\,(cc - nnff)}{6n^3f^3}\,\Phi^3.$$

Otons cet angle de l'angle $\mathrm{ECM} = \frac{c-f}{f}\,\Phi + \frac{c\,(cc-ff)}{6f^3}\,\Phi^3$,

pour avoir l'angle

$$\mathrm{COM} = \frac{(n-1)\,c - nf}{nf}\,\Phi + \frac{c\,((n^3-1)\,cc - nn\,(n-1)\,ff)}{6n^3f^3}\,\Phi^3.$$

De là le finus de cet angle fe trouvera:

$$\sin \mathrm{COM} = \frac{(n-1)\,c - nf}{nf}\,\Phi + \frac{3(n-1)c^3 + 3(n-1)^2ccf - 4n(n-1)cff + nnf^3}{6nnf^3}\,\Phi^3,$$

& puifque $\sin \mathrm{COM} : \mathrm{CM} = \sin \mathrm{CMO} : \mathrm{CO}$, nous aurons

$$\mathrm{CO} = \frac{\mathrm{CM}\ \sin \mathrm{CMO}}{\sin \mathrm{COM}},$$ & par conféquent:

$$\mathrm{CO} = \frac{\frac{c}{n} - \frac{c}{6n}\,\Phi\Phi}{\frac{(n-1)c - nf}{nf} + \frac{3(n-1)c^3 + 3(n-1)^2ccf - 4n(n-1)cff + nnf^3}{6nnf^3}\,\Phi\Phi}.$$

11. Or, parceque $\Phi\Phi$ eft une quantité affès petite, cette expreffion fe change en cette forme

CO

$$CO = \frac{cf}{(n-1)c-nf} - \frac{cf}{6((n-1)c-nf)}\Phi\Phi -$$
$$\frac{c(3(n-1)c^3+3(n-1)^2ccf-4n(n-1)cff+nnf^3)}{6nf((n-1)c-nf)^2}\Phi\Phi,$$

& par la réduction en celle-ci:

$$CO = \frac{cf}{(n-1)c-nf} - \frac{(n-1)cc(cc+(n-1)cf-nff)}{2nf((n-1)c-nf)^2}\Phi\Phi, \text{ ou bien}$$

$$CO = \frac{cf}{(n-1)c-nf} - \frac{(n-1)cc(c-f)(c+nf)}{2nf((n-1)(c-nf)^2}\Phi\Phi.$$

Ajoutons y $AC = f$, pour avoir

$$AO = \frac{nf(c-f)}{(n-1)c-nf} - \frac{(n-1)cc(c-f)(c+nf)}{2nf((n-1)c-nf)^2}\Phi\Phi,$$

& l'angle AOM est $= \frac{(n-1)c-nf}{nf}\Phi + \frac{c((n^3-1)cc-nn(n-1)ff)}{6n^3f^3}\Phi^3$.

12. Ayant ainsi trouvé le point O avec l'angle AOM, que fait le rayon une fois rompu avec l'axe, nous en déterminerons par une opération semblable le point G, où le rayon aprés les deux réfractions rencontrera l'axe.

13. Pour cet effet, posons la distance $DO = e$, & l'angle $DON = \psi$, le demi-diametre de la face sphérique BM étant $= g$, & nous aurons $\sin \psi = \psi - \frac{1}{6}\psi^3$. Or la résolution du triangle DON donne: DN : sin DON = DO : sin ONn, & partant:

$$\sin ONn = \frac{e}{g}(\psi - \tfrac{1}{6}\psi^3),$$

d'où nous conclurons l'angle même:

$$ONn = \frac{e}{g}\psi + \frac{e(ee-gg)}{6g^3}\psi^3,$$

Otons

Otons en l'angle DON $=\psi$ pour avoir l'angle

$$ODn = \frac{e-g}{g}\psi + \frac{e(ee-gg)}{6g^3}\psi^3.$$

14. Or ONn = DNM est l'angle d'incidence à la seco . de réfraction en N, & GNn l'angle de réfraction; d'où l'on tire

$$\sin ONn : \sin GNn = 1 : n \text{ ou } \sin GNn = n \sin ONn,$$

donc: $\sin GNn = \frac{ne}{g}(\psi - \frac{1}{6}\psi^3,$

& partant l'angle même:

$$GNn = \frac{ne}{g}\psi + \frac{ne(nnee-gg)}{6g^3}\psi^3.$$

Otons de cet angle l'angle ODN $= \frac{e-g}{g}\psi + \frac{e(ee-gg)}{6g^3}\psi^3$,

& le reste sera l'angle

$$DGN = \frac{(n-1)e+g}{g}\psi + \frac{e((n^3-1)ee-(n-1)gg}{6g^3}\psi^3,$$

& son sinus

$$\sin DGN = \frac{(n-1)e+g}{g}\psi + \frac{3n(n-1)e^3-3(n-1)^2eeg-4(n-1)egg-g^3}{6g^3}\psi$$

15. Enfin le triangle DGN donne DG $=\frac{\text{DN} \sin GNn}{\sin DGN}$, ou bien

$$DG = \frac{ne\psi - \frac{1}{6}ne\psi^3}{\frac{(n-1)e-g}{g}\psi + \frac{3n(n-1)e^3-3(n-1)^2eeg-4(n-1)egg-g^3}{6g^3}\psi^3},$$

dont la valeur approchante est

$$DG = \frac{neg}{(n-1)e+g} - \frac{neg}{6((n-1)e+g}\psi^2$$

$$-\frac{ne(3n(n-1)e^3-3(n-1)^2eeg-4(n-1)eeg+g^3)}{6g((n-1)e+g^2}\psi^2,$$

qui se réduit à

$$DG=\frac{neg}{(n-1)e+g}-\frac{n(n-1)ee(e-g)(ne+g)}{2g((n-1)e+g)^2}\psi^2.$$

Otons en $BD=g$ pour avoir

$$BG=\frac{g(e-g)}{(n-1)e+g}-\frac{n(n-1)ee(e-g)(ne+g)}{2g((n-1)e+g)^2}\psi^2,$$

& nous avons déjà trouvé l'angle

$$BGN=\frac{(n-1)e+g}{g}\psi+\frac{e((n^2-1)ee-(n-1)gg)}{6g^3}\psi^3.$$

16. Maintenant, nous n'avons qu'à mettre ici au lieu de e & ψ les valeurs que nous avons trouvées cy-dessus. Or, puisque $DO=e$, il s'ensuit $BO=e-g$ & $AO=d+e-g$, d'où

$$e=\frac{nf(c-f)}{(n-1)c-nf}+g-d-\frac{(n-1)cc(c-f)(c+nf)}{2nf((n-1)c-nf)^2}\Phi\Phi, \&$$

$$\psi=\frac{(n-1)c-nf)}{nf}\Phi+\frac{c((n^3-1)cc-nn(n-1)ff)}{6n^3f^3}\Phi^3.$$

Mais posons pour abréger $e=P-Q\Phi\Phi$, de sorte que

$$P=\frac{nf(c-f)}{(n-1)c-nf}+g-d \,\&\, Q=\frac{(n-1)cc(c-f)(c+nf)}{2nf((n-1)c-nf)^2},$$

& ces valeurs substituées, en négligeant les plus hautes puissances de Φ, donneront

$$BG=\frac{g(P-g-Q\Phi\Phi)}{(n-1)P+g-(n-1)Q\Phi\Phi}-\frac{n(n-1)PP(P-g)(nP+g)((n-1)c-nf)^2}{2nnffg((n-1)P+g)^2}\Phi\Phi,$$

& développant le premier nombre:

BG

$$BG = \frac{g(P-g)}{(n-1)P+g} - \frac{gQ}{(n-1)P-g}\Phi\Phi + \frac{(n-1)gQ(P-g)}{((n-1)P+g)^2}\Phi\Phi$$
$$- \frac{n(n-1)PP(P-g)(nP+g)((n-1)c-nf)^2}{2nnffg((n-1)P+g)^2}\Phi\Phi,$$

qui se réduit à cette forme:

$$BG = \frac{g(P-g)}{(n-1)P+g} - \frac{ngg\,Q}{((n-1)P+g)^2}\Phi\Phi$$
$$- \frac{n(n-1)PP(P-g)(nP+g)((n-1)c-nf)^2}{2nnffg((n-1)P+g)^2}\Phi\Phi,$$

& n'ayant pas besoin de connoitre l'angle BGN à ce dégré de précision, nous aurons

$$BGN = \frac{((n-1)c-nf)((n-1)P+g)}{nfg}\Phi.$$

17. Posons pour abréger $(n-1)c - nf = nh$, & nous aurons

$$P = \frac{f(c-f)+h(g-d)}{h};\ Q = \frac{(n-1)cc(c-f)(c-h)}{2nnfhh},$$

$$P-g = \frac{f(c-f)-dh}{h};\ (n-1)P+g = \frac{ff+nh(f+g)-(n-1)dh}{h},$$

$$nP+g = \frac{cf+nfh+(n+1)gh-ndh}{h};$$ d'où l'on tirera

$$BG = \frac{fg(c-f)-dgh}{ff+nh(f+g)-(n-1)dh} - \frac{(n-1)ccgg(c-f)(c-h)}{2nf(ff+nh(f+g)-(n-1)dh)^2}\Phi\Phi$$
$$- \frac{n(n-1)(f(c-f)+h(g-d))^2(f(c-f)-dh)(cf+nfh+(n+1)gh-ndh)}{2ffg(ff+nh(f+g-(n-1)dh)^2}\Phi\Phi.$$

Au lieu de c nous pouvons aussi introduire la distance $EA = a$, alors ayant $c = a+f$, il devient $(n-1)a - f = nh$, &

$$BG = \frac{afg - dgh}{(n-1)af+ngh-(n-1)dh} - \frac{(n-1)gg(a+f)^2(a+f-h)}{2nf((n-1)af+ngh-(n-1)dh)^2}\Phi\Phi$$
$$- \frac{n(n-1)(af+h(g-d))^2(af-dh)(naf+(n+1)gh-ndh)}{2ffg((n-1)af+ngh-(n-1)dh)^2}\Phi\Phi.$$

18. Poſons l'angle Φ infiniment petit pour avoir dans la premiere figure le point F, où l'image formée par les rayons infiniment proches de l'axe ſe trouve, & nous aurons $BF = \frac{g(af - dh)}{(n-1)af+ngh-(n-1)dh}$. Mais ayant $nh = (n-1)a - f$, cette valeur étant ſubſtituée donnera

$$BF = \frac{nafg + dfg - (n-1)adg}{n(n-1)a(f+g) - nfg + (n-1)df - (n-1)^2 ad}.$$

Donc, ſi la diſtance $EA = a$ du point lumineux eſt ſuppoſée infinie, BF ſera la diſtance du foyer de ce verre, laquelle ſera donc

$$= \frac{nfg - (n-1)dg}{n(n-1)(f+g)-(n-1)^2 d} = \frac{g}{n-1} \cdot \frac{nf - (n-1)d}{nf + ng - (n-1)d}.$$

19. Puiſque la diſtance BF peut être regardée comme connue, poſons $BF = \alpha$, de ſorte que:

$$\begin{aligned} &n(n-1)a\alpha(f+g) - nafg + (n-1)adg - dfg = 0. \\ &-(n-1)^2 a\alpha d \qquad\qquad -n\alpha fg + (n-1)\alpha df. \end{aligned}$$

Ayant alors pour nos formules trouvées cy-deſſus §. 16. $P = \frac{g(\alpha + g)}{g - (n-1)\alpha}$, nous trouverons pour le point G la diſtance

$$BG = \alpha - \frac{(n-1)a(a+f)^2(a+(n+1)f)(g-(n-1)\alpha)^2}{2nnfgg((n-1)a-f)^2}\Phi\Phi$$
$$- \frac{(n-1)\alpha(\alpha+g)^2(\alpha+(n+1)g)((n-1)a-f)^2}{2nnff(g-(n-1)\alpha)^2}\Phi\Phi,$$

&

& l'angle $BGN = \frac{g((n-1)a-f)}{f(g-(n-1)\alpha)}\Phi$, l'angle AEM étant $=\Phi$, où il faut remarquer que ces formules ne renferment plus l'épaiſſeur du verre $AB = d$, celle-ci étant éliminée par le moyen de l'équation trouvée entre a, α, f, g & d, d'où l'on a

$$d = \frac{naf(g-(n-1)\alpha) - ng\alpha((n-1)a-f)}{((n-1)a-f)(g-(n-1)\alpha)}.$$

20. Or l'équation trouvée entre a, α, f, g & d, ſe réduit à cette forme :

$$((na+n\alpha+d)f-(n-1)\,a\,(n\alpha+d))\,((na+n\alpha+d)g - (n-1)\,\alpha\,(na+d)) = nn\,(n-1)^2\,aa\alpha\alpha,$$

qui, à cauſe des facteurs, où les deux quantités f & g ſont ſéparées, eſt fort commode pour trouver ces quantités f & g, les diſtances $AE = a$ & $BF = \alpha$, avec l'épaiſſeur $BA = d$, étant données.

21. Ces formules que je viens de trouver, renferment tout ce qui régarde la Dioptrique des verres ſphériques. Mais je me borne ici principalement à chercher l'eſpace de diffuſion FG, pour en déterminer enſuite la quantité de la confuſion, dont la viſion des objets en les régardant par de tels verres ſera troublée. Mais, pour traiter cette matiere plus diſtinctement, il ſera bon de comprendre tous les articles qu'elle renferme dans les problemes ſuivans.

PROBLEME I.

22. *Tant l'épaiſſeur du verre* AB, *que la diſtance* EA *du point lumineux avant le verre, & la diſtance de l'image principale* BF *derriere le verre étant données, déterminer la ſphéricité des deux faces* PAP *&* PBP *du verre.* Fig. 1.

SOLUTION.

Soit l'épaiſſeur du verre $AB = \alpha$, la diſtance du point lumineux E avant le verre $AE = a$, & que l'image principale, qui eſt celle que forment les rayons, qui passent par le milieu du verre, doive tomber au point F, sa distance derriere le verre étant $BF = \alpha$. Considérons maintenant le verre comme convexe de ses deux côtés, & soit le demi-diametre de la courbure de la face antérieure $PAP = f$, & de la face postérieure $PBP = g$: ce sont donc ces deux quantités f & g, qu'il faut déterminer. Or, posant la raison du sinus d'incidence à celui de réfraction de l'air dans le verre comme $n : 1$, les quantités f & g doivent être telles, que cette équation soit remplie:

$$((na + n\alpha + d) f - (n - 1) a (n\alpha + d)) ((na + n\alpha + d) g - (n - 1) \alpha (na + d)) = nn (n - 1)^2 aa\alpha\alpha,$$

d'où l'on voit, que notre probleme est indéterminé, & que les deux demi-diametres f & g peuvent être déterminés d'une infinité de manieres différentes. Pour donner donc une solution générale posons:

$$(na + n\alpha + d) f - (n - 1) a (n\alpha + d) = \frac{\mu}{\nu} n (n - 1) a\alpha,$$

$$(na + n\alpha + d) g - (n - 1) \alpha (na + d) = \frac{\nu}{\mu} n (n - 1) a\alpha,$$

d'où nous tirons:

$$f = \frac{(n - 1) a (\mu n\alpha + \nu n\alpha + \nu d)}{\nu (na + n\alpha + d)} = \frac{(n - 1) a ((\mu + \nu) n\alpha + \nu d)}{\nu (n (a + \alpha) + d)},$$

$$g = \frac{(n - 1) \alpha (\nu na + \mu na + \mu d)}{\mu (na + n\alpha + d)} = \frac{(n - 1) \alpha ((\mu + \nu) na + \mu d)}{\mu (n (a + \alpha) + d)},$$

& puisqu'on peut prendre à volonté les nombres μ & ν, ces formules fournissent une infinité de verres, qui satisferont à la question.

Corollaire.

23. Puisqu'il s'agit ici uniquement du rapport des nombres μ & ν, qui est arbitraire, rien n'empêche, que nous ne puissions poser $\mu + \nu = 1$, & les déterminations des rayons de courbure f & g deviendront plus simples:

$f =$

$$f = \frac{(n-1)\,a\,(n\alpha + \nu d)}{\nu\,(n\,(a+\alpha)+d)} \;\&\; g = \frac{(n-1)\,\alpha\,(na+\mu d)}{\mu\,(n\,(a+\alpha)+d)}.$$

PROBLEME II.

24. *Ayant trouvé par le probleme précédent tous les verres possibles, dont l'épaisseur est* AB $=$ d, *qui représentent le point lumineux* E *par les rayons qui passent par le milieu du verre au point* F, *si l'on donne au verre une certaine ouverture* MM, *trouver l'espace de diffusion de l'image* FG.

SOLUTION.

Posant les distances AE $= a$, BF $= \alpha$, les rayons de courbure des deux faces du verre PAP, PBP doivent être tels, qu'il soit

$$f = \frac{(n-1)\,a\,(n\alpha + \nu d)}{\nu\,(n(a+\alpha)+d)} \;\&\; g = \frac{(n-1)\,\alpha\,(na+\mu d)}{\mu\,(n(a+\alpha)+d)},$$

prenant pour μ & ν des nombres quelconques qu'il soit $\mu + \nu = 1$, soit maintenant le demi-diametre de l'ouverture du verre AM $= x$, & posant l'angle AEM $= \Phi$, nous aurons $x = a\Phi$, ou $\Phi = \frac{x}{a}$.

Or, substituant pour f & g les valeurs trouvées, à cause de

$$a + f = \frac{na\,(n\alpha + \nu a - \mu a + \nu d)}{\nu\,(n\,(a+\alpha)+d)};\; \alpha + g = \frac{n\alpha\,(na + \mu\alpha - \nu a + \mu d)}{\mu\,(n\,(a+\alpha)+d)},$$

$$a + (n+1)\,f = \frac{na\,(nn\alpha + \nu a - \mu\alpha + n\nu d)}{\nu\,(n\,(a+\alpha)+d)};\; \alpha + (n+1)\,g$$

$$= \frac{n\alpha\,(nna + \mu\alpha - \nu a + n\mu d)}{\mu\,(n\,(a+\alpha)+d)},$$

$$(n-1)\,a - f = \frac{n\,(n-1)\,a\,(\nu a - \mu\alpha)}{\nu\,(n\,(a+\alpha)+d)};\; g - (n-1)\,\alpha = \frac{n\,(n-1)\,\alpha\,(\nu a - \mu\alpha)}{\mu\,(n\,(a+\alpha)+d)},$$

nous obtiendrons :

$$\mathrm{BG} = \alpha - \frac{na\,(n\alpha + \nu a - \mu\alpha + \nu d)^2\,(nn\alpha + \nu a - \mu\alpha + n\nu d)}{2\,(n-1)^2\,(n\alpha + \nu d)\,(na + \mu d)^2}\,\Phi\Phi$$

$$-\frac{n\alpha(na+\mu\alpha-\nu a+\mu d)^2\,(nna+\mu\alpha-\nu a+n\mu d)}{2\,(n-1)^2\,(na+\mu d)\,(n\alpha+\nu d)^2}\,\Phi\Phi,$$

qui étant plus petit, le point G tombera plus près du verre que le point F, & l'intervalle de diffusion sera:

$$FG=\frac{\begin{array}{l}+na(n\alpha+\nu d)(n\alpha+\nu a-\mu\alpha+\nu d)^2\,(nn\alpha+\nu a-\mu\alpha+n\nu d)\\+n\alpha(na+\mu d)(na+\mu\alpha-\nu a+\mu d)^2\,(nna+\mu\alpha-\nu a+n\mu d)\end{array}}{2\,(n-1)^2\,(na+\mu d)^2\,(n\alpha+\nu d)}\,\Phi\Phi.$$

Corollaire 1.

25. Puisque $\Phi=\frac{x}{a}$, l'espace de diffusion sera

$$FG=\frac{\begin{array}{l}+na(n\alpha+\nu d)(n\alpha+\nu a-\mu\alpha+\nu d)^2\,(nn\alpha+\nu a-\mu\alpha+n\nu d)\\+n\alpha(na+\mu d)(na+\mu\alpha-\nu a+\mu d)^2\,(nna+\mu\alpha-\nu a+n\mu d)\end{array}}{2\,(n-1)^2\,(na+\mu d)^2\,(n\alpha+\nu d)^2}\cdot\frac{xx}{aa},$$

il est donc proportionnel au quarré du demi-diametre de l'ouverture du verre; & partant à l'ouverture même.

Corollaire 2.

26. Si l'épaisseur du verre est si petite, qu'on la peut négliger sans une erreur sensible, il faut prendre

$$f=\frac{(n-1)\,a\alpha}{\nu\,(a+\alpha)}\ \&\ g=\frac{(n-1)\,a\alpha}{\mu\,(a+\alpha)},$$

& l'espace de diffusion sera

$$FG=\frac{(n\alpha+\nu a-\mu\alpha)^2\,(nn\alpha+\nu a-\mu\alpha)+(na+\mu\alpha-\nu a)^2\,(nna+\mu\alpha-\nu a)}{2\,nn\,(n-1)^2\,a\alpha}\cdot\frac{xx}{aa},$$

prenant μ & ν en sorte qu'il soit $\mu+\nu=1$.

Corollaire 3.

26. Pour réduire cette formule, posons $\nu a-\mu\alpha=t$, pour avoir:

FG

$$FG = \frac{(n\alpha + t)^2\,(nn\alpha + t) + (na - t)^2\,(nna - t)}{2nn\,(n - 1)^2\,a\alpha} \cdot \frac{xx}{aa},$$

qui se réduit à cette forme:

$$FG = \frac{(a + \alpha)xx}{2n(n-1)^2 a^3 \alpha}\left(n^3(aa - a\alpha + \alpha\alpha) - n(2n+1)(a - \alpha)t + (n+2)tt\right),$$

& ensuite à celle-ci

$$FG = \frac{(a + \alpha)xx}{2n(n-1)^2 a^3 \alpha}\begin{cases} + aa\,(n^3 - n\,(2n + 1)\,\nu + (n + 2)\nu\nu) \\ - a\alpha\,(n^3 - n\,(2n + 1) + 2\,(n + 2)\mu\nu) \\ + \alpha\alpha\,(n^3 - n\,(2n + 1)\mu + (n + 2)\mu\mu). \end{cases}$$

COROLLAIRE 4.

28. Enfin en général, quoique l'épaisseur du verre ne soit pas évanouissante, nous pourrons déterminer l'angle BGN, qui est trouvé cy-dessus $= \dfrac{g\,((n - 1)\,a - f)}{f\,(g - (n - 1)\,\alpha)} - \Phi$. Il sera donc, après avoir substitué les valeurs assignées pour f & g:

$$BGN = \frac{na + \mu d}{n\alpha + \nu d} \cdot \frac{x}{a},$$

& au cas de $d = 0$, on aura $BGN = \dfrac{x}{\alpha}$.

PROBLEME III.

29. *L'épaisseur du verre étant négligée, déterminer entre tous les verres* PP, *qui représentent le point lumineux* E, *dans le même point* F, *celui, qui produit le moindre espace de diffusion* FG.

SOLUTION.

Posant les distances $AE = a$, & $BF = \alpha$, les rayons des deux faces du verre doivent être pris tels, qu'il soit:

$$f = \frac{(n - 1)\,a\alpha}{\nu\,(a + \alpha)} \quad \& \quad g = \frac{(n - 1)\,a\alpha}{\mu\,(a + \alpha)},$$

 où

où les nombres μ & ν font arbitraires pourvu qu'il foit $\mu + \nu = 1$. Il s'agit donc de trouver les valeurs de ces deux nombres, afin que l'efpace de diffufion FO devienne le plus petit, pendant qu'on donne au verre la même ouverture. Soit donc le demi-diametre de l'ouverture AM $= x$, & pofant $\nu a - \mu \alpha = t$, l'efpace de diffufion eft trouvé:

$$FG = \frac{(a+\alpha)xx}{2n(n-1)^2 a^3 \alpha}(n^3(aa - a\alpha + \alpha\alpha) - n(2n+1)(a-\alpha)(t + (n+2)tt),$$

où la feule quantité t renferme les nombres μ & ν. Cherchons donc la valeur de t, pour que cette expreffion $n^3 (aa - a\alpha + \alpha\alpha) - n(2n+1)(a-\alpha)t + (n+2)tt$, devienne la plus petite, cequi arrive en prenant $t = \frac{n(2n+1)(a-\alpha)}{2(n+2)}$: & alors cette quantité fera

$$n^3 (aa - a\alpha + \alpha\alpha) - \frac{nn(2n+1)^2 (a-\alpha)^2}{4(n+2)},$$

qui fe réduit à

$$\frac{nn}{4(n+2)}((4n-1)aa + 2(2nn+1)a\alpha + (4n-1)\alpha\alpha),$$

ou bien à cette forme

$$\frac{nn}{4(n+2)}((4n-1)(a+\alpha)^2 + 4(n-1)^2 a\alpha).$$

Donc le plus petit efpace de diffufion fera

$$FG = \frac{n(a+\alpha)xx}{8(n+2)(n-1)^2 a^3 \alpha}((4n-1)(a+\alpha)^2 + 4(n-1)^2 a\alpha).$$

Or, pour trouver les nombres μ & ν, puifque $t = \nu a - \mu\alpha$, nous aurons:

$$n(2n+1)a - n(2n+1)\alpha = 2(n+2)\nu a - 2(n+2)\mu\alpha.$$

Mais, à caufe de $\nu = 1 - \mu$, il s'enfuit

$\mu =$

$$\mu = \frac{n(2n+1)\,a + (4+n-2nn)\,a}{2\,(n+2)\,(a+\alpha)} \;\&$$

$$\nu = \frac{n\,(2n+1)\,a + (4+n-2nn)\,\alpha}{2\,(n+2)\,(a+\alpha)},$$

& de là les rayons des deux faces du verre seront

$$f = \frac{2\,(n-1)\,(n+2)\,a\alpha}{n\,(2n+1)\,a + (4+n-2nn)\,\alpha},$$

$$g = \frac{2\,(n-1)\,(n+2)\,a\alpha}{n\,(2n+1)\,\alpha + (4+n-2nn)\,a}.$$

Corollaire 1.

30. Si la distance du point lumineux E est infinie, pour avoir le moindre espace de diffusion, il faut prendre

$$f = \frac{2\,(n-1)\,(n+2)\,\alpha}{n\,(2n+1)} \;\&\; g = \frac{2\,(n-1)\,(n+2)\,\alpha}{4+n-2nn},$$

& partant le rapport des rayons des deux faces du verre sera

$$f : g = 4+n-2nn : n\,(2n+1),$$

& l'espace de diffusion sera alors $= \dfrac{n\,(4n-1)}{8\,(n+2)\,(n-1)^2} \cdot \dfrac{xx}{\alpha}$.

Corollaire 2.

31. Si nous supposons avec M. Huygens la raison de réfraction de l'air dans le verre $n : 1$ comme $3 : 2$, nous aurons comme lui pour le cas, où le point lumineux est éloigné à l'infini, $f : g = 1 : 6$. Mais, puisqu'il est plus exactement $n : 1 = 31 : 20$, le rapport entre f & g sera $f : g = 146 : 1271 = 1 : 8\frac{103}{146}$.

SCHOLION.

32. Ayant déterminé les verres qu'il faut employer, pour que le point lumineux E, dont la distance au verre est $EA = a$, soit représenté à la distance $BF = \alpha$, en négligeant l'épaisseur du

verre

verre, le §. 18 nous fournit cette égalité $\alpha = \frac{afg}{(n-1)a(f+g)-fg}$. Donc, en posant la distance de l'objet EA $= a$ infinie, la distance du foyer de ces verres sera $= \frac{fg}{(n-1)(f+g)}$: or les rayons des faces f & g, doivent être tellement déterminés par les distances données a & α, qu'il soit $(n-1)\,a\alpha\,(f+g) = (a+\alpha)fg$, de sorte que $\frac{fg}{f+g} = \frac{(n-1)\,a\alpha}{a+\alpha}$. Par conséquent la distance de foyer de ces verres sera $= \frac{a\alpha}{a+\alpha}$, ou pour que le point lumineux E soit représenté en F, il faut employer un verre dont la distance de foyer soit $= \frac{a\alpha}{a+\alpha}$. Donc, si nous posons la distance de foyer $= p$, nous aurons $p = \frac{a\alpha}{a+\alpha}$, ou $\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}$: & la distance de foyer du verre PP étant $= p$, si le point lumineux E se trouve devant le verre à la distance AE $= a$, son image sera présentée derriere le verre en F, à la distance BF $= \frac{ap}{a+p}$. Ensuite, pour que la distance de foyer du verre devienne $= p$, les rayons de ses faces doivent être pris en sorte qu'il soit $f = \frac{(n-1)p}{\nu}$ & $g = \frac{(n-1)p}{\mu}$, prenant $\mu + \nu = 1$, & alors l'espace de diffusion produit par le verre, dont le demi-diametre de l'ouverture est AM $= x$, sera

FG

$$FG = \frac{xx}{p} \cdot \frac{1}{2n(n-1)^2 aa} \left\{ \begin{array}{l} + aa(n^3 - n(2n+1)\nu + (n+2)\nu\nu) \\ - a\alpha(n^3 - n(2n+1) + (n+2)\mu\nu) \\ + \alpha\alpha(n^3 - n(2n+1)\mu + (n+2)\mu\mu). \end{array} \right.$$

Et ſi l'on prend:

$$\mu = \frac{n(2n+1)\alpha + (4+n-2nn)a}{2(n+2)(a+\alpha)} \;\&\; \nu = \frac{n(2n+1)a + (4+n-2nn)\alpha}{2(n+2)(a+\alpha)},$$

pour avoir le plus petit eſpace de diffuſion, cet eſpace ſera alors

$$FG = \frac{xx}{p} \cdot \frac{n}{8(n+2)(n-1)^2 aa} \left((4n-1)(a+\alpha)^2 + 4(n-1)^2 a\alpha,\right.$$

d'où l'on voit que cet eſpace FG, ſoit qu'il ſoit le plus petit ou non, eſt toujours un multiple de $\frac{xx}{p}$: & partant, pour abréger, dans la ſuite je poſerai $FG = \frac{xx}{p}$ A. De même maniere, ſi l'on employe un autre verre, dont la diſtance de foyer ſoit $= q$, la diſtance du point lumineux devant lui $= b$, celle de l'image préſentée derriere lui $= \mathfrak{b}$, de ſorte que $q = \frac{b\mathfrak{b}}{b+\mathfrak{b}}$, & que le demi-diametre de l'ouverture ſoit $= y$, je marquerai l'eſpace de diffuſion par $\frac{yy}{q}$. B: où B dépend de la même maniere des diſtances b & $\mathfrak{b}$ & des faces du verres, comme il a été enſeigné par rapport à A.

PROBLEME IV.

33. *L'eſpace de diffuſion* FG *étant donné, lorsqu'un oeil regarde l'image répandue par cet eſpace à une diſtance* FO, *où il voit diſtinctement les objets, déterminer la confuſion dont la viſion ſera troublée.* Fig. 3.

SOLUTION.

Soit l'eſpace de diffuſion $FG = s$, & F le point où l'image formée par les rayons qui paſſent par le milieu de quelque verre, ſera repréſentée, & G le lieu de l'image formée par les rayons qui paſſent par les bords du verre, & qui coupent l'axe GO ſous un certain angle, qui ſoit $= \omega$. Que l'oeil ſe trouve maintenant en O, & ſoit la diſtance $OF = l$, à laquelle l'oeil voit diſtinctement les objets: or nous pouvons regarder l'oeil comme une petite chambre obſcure, formée d'un petit verre convexe oOo, dont la diſtance de foyer ſoit $= v$. L'image F ſera donc repréſentée en f, de ſorte que $Of = \frac{lv}{l - v}$, mais l'image G renvoyant dans l'oeil les rayons Go, Go, ſuppoſé que la pupille ſoit aſſès large pour les recevoir, l'intervalle Oo ſera $= (l + s)\,\omega$, & l'image G ſera repréſentée en g, de ſorte que $Og = \frac{(l + s)\,v}{l + s - v}$, & partant $fg = \frac{svv}{(l - v)\,(l + s - v)}$. Donc, ſi la rétine ſe trouvoit en f, l'image de G y ſeroit repréſentée par un cercle dont le rayon $f\phi = \frac{Oo.\ fg}{OG} = \frac{s\,\omega\,v}{l - v}$. Mais, ſi la rétine étoit entre les points f & g, ce rayon $f\phi$ deviendroit plus petit, & évanouïroit même, ſi elle étoit en g; mais alors des images moyennes entre F & G y ſeroient exprimées par des cercles, & en cherchant le point entre f & g, où la rétine recevroit le moindre cercle, on trouve que le rayon de ce cercle ſera $= \frac{s\,\omega\,v}{4\,l}$, où je néglige v par rapport à la diſtance l. Poſant donc $v = 1$ pouce, le rayon de ce cercle ſera $= \frac{s\,\omega}{4\,l}$ pouce. Nous pourrons donc prendre le rayon de ce cercle pour la juſte meſure de la confuſion qui réſulte de l'eſpace de diffuſion $FG = s$, avec l'obliquité des rayons qui forment

le

le point G, laquelle eſt ſuppoſée $= \omega$. Or on ſuppoſe communément la diſtance l infiniment grande, ce que je ferai auſſi dans la ſuite pour la commodité du calcul; mais de là il ne faut pas conclure, que la quantité de la confuſion $\frac{s\omega}{4l}$ ſe réduiſe à rien, car nous verrons bientôt, que dans ce cas la quantité s devient auſſi infiniment grande, de ſorte que $\frac{s\omega}{4l}$, ne laiſſe pas d'être une quantité finie.

Corollaire.

34. Si l'ouverture de la pupille étoit moindre que la baſe du cone lumineux $o\,G\,o$, il n'y entreroit aucun rayon du point G, & la confuſion ſeroit cauſée par les points de l'eſpace FG, plus proches du point F; la confuſion ſeroit donc alors moindre.

PROBLEME V.

35. *Si l'on regarde par un ſeul verre* PP *un objet* E, *déterminer la confuſion cauſée par l'ouverture du verre.*

SOLUTION.

Soit la diſtance de foyer du verre PP $= p$, le rayon de ſa face antérieure PAP $= f$, de la poſtérieure PBP $= g$, & prenant $n = \frac{31}{20}$, & les nombres μ & ν à volonté, qu'il ſoit $\mu + \nu = 1$, on doit prendre en négligeant l'épaiſſeur du verre $f = \frac{(n-1)p}{\nu}$ $= \frac{11p}{20\nu}$ & $g = \frac{(n-1)p}{\mu} = \frac{11p}{20\mu}$. Soit maintenant la diſtance de l'objet AE $= a$, & que ſon image formée par les rayons qui paſſent par le milieu du verre, tombe en F, poſant la diſtance BF $= \alpha$, & on aura $\alpha = \frac{ap}{a-p}$. Mais, en quelque point de l'axe O que l'oeil ſe trouve, il faut que la diſtance OF ſoit infinie, & partant

$\alpha =$

$\alpha = \infty$ & $a = p$, dont la diſtance de l'objet EA $= a$ doit être égale à la diſtance de foyer du verre p. Poſons à préſent le demi-diametre de l'ouverture du verre AM $= x$, & mettons pour abréger

$$\frac{n^3 - n(2n+1)\mu + (n+2)\mu\mu}{2n(n-1)^2} = \mathrm{M},$$

$$\frac{n^3 - n(2n+1)\nu + (n+2)\nu\nu}{2n(n-1)^2} = \mathrm{N},$$

$$\frac{n^3 - n(2n+1) + 2(n+2)\mu\nu}{2n(n-1)^2} = \mathrm{L},$$

l'eſpace de diffuſion ſera:

$$\mathrm{FG} = \frac{xx}{p} \cdot \frac{1}{aa}(\mathrm{N}aa - \mathrm{L}a\alpha + \mathrm{M}\alpha\alpha),$$

ou à cauſe de $\alpha = \infty$, nous aurons $\mathrm{FG} = s = \dfrac{xx}{p} \cdot \dfrac{\mathrm{M}\alpha\alpha}{aa}$; enſuite l'angle de l'obliquité des rayons au point G étant $= \dfrac{x}{\alpha} = \omega$, & la diſtance BO finie, on aura $l = -\alpha$, ou $l = \alpha$, puisque le ſigne ne fait rien dans la meſure de la confuſion $\dfrac{s\omega}{4l}$, la confuſion ſera $= \dfrac{x^3}{p} \cdot \dfrac{\mathrm{M}}{4aa}$, & à cauſe de $a = p$, elle ſera $= \frac{1}{4}\mathrm{M} \cdot \dfrac{x^3}{p^3}$.

Corollaire 1.

36. C'eſt le cas des microſcopes ſimples: & l'on voit, que pour que la confuſion devienne également inſenſible, les verres étant ſemblables, il faut que les demi-diametres de leurs ouvertures ſoient proportionnels à leurs diſtances de foyer.

Corollaire 2.

37. Puisque $n = \frac{31}{20} = 1,55$, nous aurons:

M $=$

$$M = 3{,}971075 - 6{,}776960\,\mu + 3{,}785658\,\mu\mu,$$
$$N = 3{,}971075 - 6{,}776960\,\nu + 3{,}785658\,\nu\nu,$$
$$L = 3{,}971075 - 6{,}776860 \quad + 7{,}571316\,\mu\nu.$$

Donc, si le verre est plano-convexe, & qu'il tourne sa face plane vers l'objet, on aura $\nu = 0$, $\mu = 1$, donc $M = 0{,}979873$, & la confusion $= 0{,}244968 \cdot \frac{x^3}{p^3}$. Mais, s'il tournoit sa convexité vers l'objet, à cause de $\mu = 0$ & $\nu = 1$, il seroit $M = 3{,}971075$, & la confusion $= 0{,}992769 \cdot \frac{x^3}{p^3}$, seroit plus de 4 fois plus grande que dans le cas précédent.

Corollaire 3.

38. Si l'on faisoit le verre également convexe de part & d'autre, ce qui arrive en prenant $\mu = \nu = \frac{1}{2}$, on auroit $M = 1{,}529064$, & la confusion seroit $= 0{,}382266 \cdot \frac{x^3}{p^3}$; elle tiendroit donc un certain milieu entre les deux cas précédens, & seroit à la premiere confusion comme 3 à 2 à peu près.

Corollaire 4.

39. Mais, pour que la confusion devienne la plus petite pour la même ouverture du verre, il faut prendre $\mu = \frac{n\ (2n + 1)}{2\ (n + 2)}$ $= 0{,}895070$ & $\nu = 0{,}104930$, d'où résulte $M = 0{,}938192$, & la plus petite confusion sera $= 0{,}234548 \cdot \frac{x^3}{p^3}$.

PROBLEME VI.

40. *L'espace de diffusion* FG *avec l'obliquité des rayons en* G *étant donné, cassé par un verre quelconque, s'il se trouve en* B *un au-* Fig. 4.

ere verre QBQ, *trouver l'espace de diffusion* Hh, *que cet autre verre produira.*

SOLUTION.

Soit l'espace de diffusion $FG = s$, & l'obliquité des rayons en G, ou l'angle $BGM = \omega$, ensuite la distance $BF = b$, par rapport à laquelle l'espace $FG = s$ peut être considéré comme fort petit: soit de plus la distance de foyer du verre $QQ = q$, & l'image du point F sera représentée en H, ensorte que $bH = \frac{bq}{b-q}$, qui soit $= \beta$, & partant $q = \frac{b\beta}{b+\beta}$. C'est donc de ces deux distances b & β, que le verre peut être déterminé d'une infinité de manieres, comme je l'ai fait voir cy-dessus. Maintenant, si le point G jettoit des rayons qui passassent par le milieu du verre, ils présenteroient son image en η, de sorte que $H\eta = \frac{\beta\beta}{bb} \cdot s$; mais les rayons qui partent du point G, étant obliques, passeront par le verre au point M, de sorte que $BM = b\omega$, ce qui tient lieu du demi-diametre de l'ouverture du verre: & à cause de cela l'image du point sera représentée en h, & on aura:

$$\eta h = \frac{bb\omega\omega}{q} \cdot \frac{1}{bb} (Nbb - \mathfrak{L}b\beta + M\beta\beta),$$

& l'obliquité des rayons en h sera $= \frac{b\omega}{\beta}$. Donc l'espace de diffusion tout entier sera:

$$Hh = \frac{\beta\beta}{bb} \cdot FG + \frac{\omega\omega}{q} (Nbb - \mathfrak{L}b\beta + M\beta\beta).$$

COROLLAIRE.

41. Si un oeil placé en O regardoit cette image diffuse Hh; premierement il faudroit que la distance $bH = \beta$ fut infinie, & ensuite la quantité de confusion feroit $l\omega$

$$\frac{b\omega}{\beta} \cdot Hh \cdot \frac{1}{4l} = \frac{b\omega}{4\beta^2} \cdot Hh, \text{ à cause de } l = \beta.$$

Cette confusion seroit donc, puisque $\beta = \omega$,

$$\frac{\omega}{4b} \cdot FG + \frac{b\omega^3}{4q} \cdot M = \frac{\omega}{4b}, FG + \tfrac{1}{4}M \cdot \frac{b\omega^3}{q}.$$

PROBLEME VII.

42. *Si l'on regarde par deux verres* PP *&* QQ, *placés sur le même axe à la distance* AB, *un objet* E, *determiner la confusion qui sera causée par l'ouverture des verres,*

SOLUTION.

Que les rayons, qui passent par le milieu des verres, présentent l'objet par le premier verre PP en F, & ensuite par le second verre en G. Qu'on pose les distances:

$EA = a$, $AF = \alpha$, $FB = b$, & $BG = \beta$, donc $AB = \alpha + b$, soit de plus la distance de foyer du verre $PP = p$, & du verre $QQ = q$, & on aura $p = \frac{a\alpha}{a+\alpha}$ & $q = \frac{b\beta}{b+\beta}$. Posons outre cela le demi-diametre de l'ouverture du verre $PP = x$, & du verre $QQ = \eta$: supposons maintenant que les faces des verres soient déterminées des distances a, α & b, β, par les nombres μ & ν, comme il est enseigné cy-dessus; & le verre PP produira l'espace de diffusion:

$$Ff = \frac{xx}{aap}(Naa - \mathfrak{L}a\alpha + M\alpha\alpha),$$

& l'obliquité des rayons en f sera $= \frac{x}{\alpha}$. Maintenant, par le probleme précédent, le second verre QQ produira l'espace de diffusion

$$Gg = \frac{\beta^2}{bb} \cdot Ff + \frac{xx}{\alpha\alpha q}(N'bb - \mathfrak{L}'b\beta + M'\beta^2),$$

à cauà cause de $\omega = \frac{x}{\alpha}$, pourvu qu'il soit $\eta > \frac{bx}{\alpha}$. J'ajoute ici aux lettres N, L, M de petites barres, pour les distinguer de celles qui conviennent au verre PP: car, puisque les nombres μ & ν peuvent être différens dans les deux verres, cette distinction est nécessaire.

Maintenant, pour que l'oeil placé en O regarde son objet comme éloigné à l'infini, il faut qu'il soit $\beta = \infty$, & alors la confusion sera $= \frac{bx}{4\alpha\beta\beta} \cdot Gg = \frac{x}{4\alpha b} \cdot Ff + \frac{1}{4} M' \cdot \frac{bx^3}{\alpha^3 q}$,

où il faut remarquer qu'à cause de $\beta = \infty$, il y a $b = q$.

Donc la quantité de confusion cherchée est:

$$\frac{x^3}{4aa\alpha bp}(Naa - \mathfrak{L}a\alpha + M\alpha\alpha) + \frac{1}{4} M' \cdot \frac{x^3}{\alpha^3}, \text{ ou bien}$$

$$\frac{x^3}{4\alpha}\left(\frac{Naa - \mathfrak{L}a\alpha + M\alpha\alpha}{aabp} + \frac{M'}{\alpha\alpha}\right).$$

Corollaire I.

43. Si les verres ont la forme qui leur convient, pour que chacun produise le moindre espace de diffusion, il faut en substituant pour n sa valeur $\frac{31}{20}$, qu'il soit

pour le verre PP le rayon de sa face

antérieure $= \frac{a\alpha}{1,62740\, a + 0,19078\, \alpha}$, & de la

postérieure $= \frac{a\alpha}{1,62740\, \alpha + 0,19078\, a}$;

pour le verre QQ le rayon de sa face

antérieure $= \frac{b\mathfrak{C}}{1,62740\, b + 0,19078\, \mathfrak{C}}$, & de la

po

$$\text{postérieure} = \frac{l\beta}{1,62740\,\beta + 0,19078\,l}.$$

COROLLAIRE 2.

44. Or, donnant aux verres cette forme qui leur est la plus propre, l'espace de diffusion produit par le verre PP est

$$Ff = \frac{xx}{aap}\,(0,93819\,(a+\alpha)^2 + 0,21831\,a\alpha),\ \text{ou bien}$$

$$Ff = \frac{xx}{aap}\cdot 0,93819\,((a+\alpha)^2 + 0,23269\,a\alpha).$$

Nous n'aurons donc qu'à mettre au lieu de $\mathfrak{N}aa - \mathfrak{L}a\alpha + \mathfrak{M}\alpha\alpha$ cette valeur $0,93819\,((a+\alpha)^2 + 0,23269\,a\alpha)$, de sorte que:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N} = 0,93819 \quad \& \quad \mathfrak{L} = 2,09469.$$

COROLLAIRE 3.

45. Dans notre cas donc la confusion sera

$$\frac{0,23455\,x^3}{\alpha}\left(\frac{(a+\alpha)^2 + 0.23269\,a\alpha}{aabp} + \frac{1}{a\alpha}\right),$$

quand on donne aux deux verres la figure marquée, qui produit le moindre espace de diffusion. Et alors la confusion causée dans la vision sera aussi la plus petite.

COROLLAIRE 4.

46. En général donc, si un verre QQ, dont la distance de foyer est $= q$, représente un objet qui se trouve devant lui à la distance $= b$, à une distance derriere lui qui est $= \mathfrak{b}$, de sorte que $q = \frac{l\mathfrak{b}}{b+\mathfrak{b}}$, & que les faces du verre soient prises comme dans le coroll. 3. le demi-diametre de son ouverture étant $= \eta$, l'espace de diffusion sera:

$$\frac{0,93819\ \eta\eta}{bbq}((b+\beta)^2+0,23269\ b\beta).$$

SCHOLIE.

47. Puisque je ne considérerai dans la suite que des verres qui produisent déjà le moindre espace de diffusion, ces deux nombres 0,93819 & 0,23269 se rencontreront toujours, je mettrai pour abréger μ pour le premier, & ν pour l'autre, n'ayant plus besoin de ces deux lettres pour marquer généralement les faces des verres. Ainsi, dans le cas du dernier corollaire, l'espace de diffusion sera $=$

$\frac{\mu\eta\eta}{bbq}((b+\beta)^2+\nu b\beta)$, posant toujours $\mu = 0,93819$ & $\nu = 0,23269$: pourvu que les faces de ce verre soient formées suivant les formules données (43).

PROBLEME VIII.

Planche VI. Fig. 6. 48. *Si l'on regarde un objet* E *par trois verres* PP, QQ *&* RR, *rangés sur le même axe, déterminer la confusion causée par leur ouverture.*

SOLUTION.

Que les rayons qui passent par le milieu des verres, représentent successivement l'image de l'objet en F, G & H, & qu'on nomme les distances:

$EA = a$, $AF = \alpha$; $FB = b$; $BG = \beta$; $GC = c$; & $CH = \gamma$;

& les distances des verres seront $AB = \alpha + b$ & $BC = \beta + c$. Soient aussi p, q, r les distances de foyers des trois verres, & on aura

$$p = \frac{a\alpha}{a+\alpha};\ q = \frac{b\beta}{b+\beta};\ r = \frac{c\gamma}{c+\gamma}.$$

Je suppose de plus ces verres formés en sorte, que posant pour abréger les nombres

$1,62740 = \sigma$ & $0,19078 = \tau$,

les

les rayons des faces soyent:

Rayon de la face		Pour le verre P P	Pour le verre QQ	Pour le verre R R
antérieure	$=$	$\frac{a\alpha}{\sigma a + \tau\alpha}$	$\frac{b\beta}{\sigma b + \tau\beta}$	$\frac{c\gamma}{\sigma c + \tau\gamma}$
postérieure	$=$	$\frac{a\alpha}{\sigma\alpha + \tau a}$	$\frac{b\beta}{\sigma\beta - \tau b}$	$\frac{c\gamma}{\sigma\gamma + \tau c}$

Cela posé, soit le demi-diametre de l'ouverture du verre PP $= x$, & l'espace de diffusion causé par le premier verre sera: $Ff = \frac{\mu xx}{aap}((a + \alpha)^2 + \nu a\alpha)$, & l'obliquité des rayons en $f = \frac{x}{\alpha}$. De là il s'ensuit que l'espace de diffusion produit par le second verre QQ sera

$$Gg = \frac{\beta\beta}{bb}\cdot Ff + \frac{\mu xx}{\alpha\alpha q}((b + \beta)^2 + \nu b\beta),$$

& l'obliquité des rayons en $g = \frac{bx}{\alpha\beta}$ De la même maniere nous conclurons l'espace de diffusion produit par le troisieme verre RR,

$$Hh = \frac{\gamma\gamma}{cc}\cdot Gg + \frac{\mu bbxx}{\alpha\alpha\beta\beta\nu}((c + \gamma)^2 + \nu c\gamma).$$

Maintenant pour procurer à l'oeil placé en O une vision juste il faut qu'il soit $\gamma = \infty$ & $l = \infty$, d'où la confusion causée dans la vision sera $= \frac{bcx}{4\alpha\beta\gamma\gamma}\cdot Hh$. Or, substituant les valeurs de Gg & Ff, nous aurons

$$Hh = \frac{\mu\beta\beta\gamma\gamma xx}{aabbccp}((a+\alpha)^2 + \nu a\alpha) + \frac{\mu\gamma\gamma xx}{\alpha\alpha ccq}((b + \beta)^2 + \nu b\beta)$$
$$+ \frac{\mu bbxx}{\alpha\alpha\beta\beta r}((c + \gamma)^2 + \nu c\gamma),$$

d'où

d'où l'on obtient à cause de $\gamma = \infty$ la confusion cherchée

$$\frac{\mu bcx^3}{4\alpha\text{ϐ}}\left(\frac{\text{ϐϐ}(a+\alpha)^2 + \nu a\alpha}{aabbccp} + \frac{(b+\text{ϐ})^2 + \nu b\text{ϐ}}{\alpha\alpha ccq} + \frac{bb}{\alpha\alpha\beta\beta r}\right),$$

mais il faut pour cela qu'il soit:

$$\text{le demi-diametre de l'ouverture}\begin{cases}\text{du verre QQ} > \dfrac{bx}{\alpha},\\[2ex] \text{du verre RR} > \dfrac{bcx}{\alpha\beta},\end{cases}$$

puisque, sans cette condition, les rayons qui passent par les bords du premier verre PP, ne seroient pas transmis par les deux autres verres.

Corollaire 1.

49. S'il n'y avoit que les deux verres PP & QQ, nous avons trouvé dans le probleme précédent, que la confusion seroit

$$\frac{\mu bx^3}{4\alpha}\left(\frac{(a+\alpha)^2 + \nu a\alpha}{aabbp} + \frac{1}{\alpha\alpha q}\right),$$

& cette forme peut mieux être comparée avec celle que nous venons de trouver pour trois verres, & que nous trouverons pour plusieurs.

Corollaire 2.

50. Puisque la vision juste exige, qu'il soit $\gamma = \infty$, il y aura $r = c$, tout comme il doit y avoir dans le cas de deux verres $q = b$, & dans le cas d'un seul verre $p = a$; or, dans le cas d'un seul verre, la confusion est $= \frac{\mu x^3}{4} \cdot \frac{1}{aap}$.

PROBLEME IX.

Fig. 7. 51. *Si l'on regarde un objet* E *par quatre verres* PP, QQ, RR *&* SS, *rangés sur le même axe* EO, *déterminer la confusion causée par l'ouverture des verres.*

SOLUTION.

Que les rayons qui passent par le milieu des verres représentent successivement l'image de l'objet en F, G, H & I, & qu'on nomme les distances

EA $= a$; AF $= \alpha$; FB $= b$; BG $= \beta$; GC $= c$; CH $= \gamma$; HD $= d$; & DI $= \delta$,

& les intervalles entre les verres seront

AB $= \alpha + b$; BC $= \beta + c$; CD $= \gamma + d$.

Soient aussi p, q, r, s les distances de foyer de nos quatre verres, & on aura:

$$p = \frac{a\alpha}{a+\alpha};\ q = \frac{b\beta}{b+\beta};\ r = \frac{c\gamma}{c+\gamma};\ \&\ s = \frac{d\delta}{d+\delta}.$$

Je suppose ces verres formés selon la regle prescrite cy-dessus de sorte qu'il y ait:

Pour le verre	le rayon de la face antérieure	le rayon de la face postérieure
le premier PP	$\frac{a\alpha}{\sigma a + \tau\alpha}$	$\frac{a\alpha}{\sigma\alpha + \tau a}$
le second QQ	$\frac{b\beta}{\sigma b + \tau\beta}$	$\frac{b\beta}{\sigma\beta + \tau b}$
le troisieme RR	$\frac{c\gamma}{\sigma c + \tau\gamma}$	$\frac{c\gamma}{\sigma\gamma + \tau c}$
le quatrieme SS	$\frac{d\delta}{\sigma d + \tau\delta}$	$\frac{d\delta}{\sigma d + \tau\delta}$

posant $\sigma = 1,62740$ & $\tau = 0,19078$.

Maintenant, pour trouver les espaces de diffusion, nous pourrons d'abord commencer par le troisieme Hh, qui a été trouvé dans le probleme précédent

$$Hh = \mu xx \left(\frac{\beta\beta\gamma\gamma((a+\alpha)^2 + \nu a\alpha)}{aabbccp} + \frac{\gamma\gamma(b+\beta)^2 + \nu b\beta)}{\alpha\alpha ccq} + \frac{bb(c+\gamma)^2 + \nu c\gamma)}{\alpha\alpha bbr} \right),$$

& l'obliquité en h étant $= \frac{bcx}{\alpha\beta\gamma}$, l'espace quatrieme de diffusion sera

$$Ii = \frac{\delta\delta}{dd} Hh + \frac{\mu bbccxx}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma s}((d+\delta)^2 \nu d\delta).$$

Or, prenant $\delta = \infty$ en quelqu'endroit de l'axe O, derriere le verre SS, que se trouve l'oeil, la confusion causée dans la vision sera $= \frac{bcdx}{4\alpha\beta\gamma\delta\delta} . Ii$: cette confusion sera donc

$$\frac{\mu bcdx^3}{4\alpha\beta\gamma} \left\{ \begin{array}{l} + \frac{\beta\beta\gamma\gamma((a+\alpha)^2 + \nu a\alpha)}{aabbccddp} + \frac{\gamma\gamma((b+\beta)^2 + \nu b\beta)}{\alpha\alpha ccddq} \\ + \frac{bb((c+\gamma)^2 + \nu c\gamma)}{\alpha\alpha\beta\beta ddr} + \frac{bbcc}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma s} \end{array} \right\},$$

pourvu qu'il soit comme je suppose

$$\text{le demi-diametre de l'ouverture} \left\{ \begin{array}{l} \text{du verre QQ} > \frac{bx}{\alpha}, \\ \text{du verre RR} > \frac{bcx}{\alpha\beta}, \\ \text{du verre SS} > \frac{bcdx}{\alpha\beta\gamma}. \end{array} \right.$$

Et puisque $\delta = \infty$, il y aura $s = d$.

Or pour le probleme suivant nous aurons l'espace de diffusion

$$Ii = \mu xx \left\{ \begin{array}{l} + \frac{\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta((a+\alpha)^2 + \nu a\alpha)}{aabbccddp} + \frac{\gamma\gamma\delta\delta((b+\beta)^2 + \nu b\beta)}{\alpha\alpha ccddq} \\ + \frac{bb\delta\delta((c+\gamma)^2 + \nu c\gamma)}{\alpha\alpha bbddr} + \frac{bbcc((d+\delta)^2 + \nu d\delta)}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma s} \end{array} \right\}.$$

PRO-

PROBLEME X.

52. *Si l'on regarde un objet* E *par* 5 *verres* PP, QQ, RR, SS *&* TT *rangés sur le même axe* EO, *déterminer la confusion causée par l'ouverture de ces verres.* Fig. 1.

SOLUTION.

Que les rayons qui passent par le milieu des verres, représentent successivement l'image de l'objet dans les points F, G, H, I & K, & qu'on nomme les distances

$$EA = a;\ FB = b;\ GC = c;\ HD = d;\ IE = e,$$

$$AF = \alpha;\ BG = \beta;\ CH = \gamma;\ DI = \delta;\ EK = \epsilon.$$

Soient aussi p, q, r, s, t les distances de foyer de ces cinq verres de sorte que

$$p = \frac{a\alpha}{a+\alpha};\ q = \frac{b\beta}{b+\beta};\ r = \frac{c\gamma}{c+\gamma};\ s = \frac{d\delta}{d+\delta};\ t = \frac{e\epsilon}{e+\epsilon},$$

& si nous supposons que les faces de chaque verre soient formées selon nos formules trouvées pour qu'elles produisent le moindre espace de diffusion, nous déterminerons aisément la confusion dont la vision sera troublée. Pour cet effet la distance ϵ doit être infinie, & partant $t = e$; & alors la confusion causée dans la vision sera:

$$\frac{\mu bcdex^3}{4\alpha\beta\gamma\delta}\left\{\begin{array}{l} +\dfrac{\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta\,((a+\alpha)^2+\nu a\alpha)}{aabbccddeep}, \\ +\dfrac{\gamma\gamma\delta\delta\,((b+\beta)^2+\nu b\beta)}{\alpha\alpha ccddeeq}, \\ +\dfrac{bb\delta\delta\,((c+\gamma)^2+\nu c\gamma)}{\alpha\alpha\beta\beta ddeer}, \\ +\dfrac{bbcc\,(d+\delta)^2+\nu d\delta)}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma ees}, \\ +\dfrac{bbccdd}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta t}, \end{array}\right.$$

pourvu que ces conditions ayent lieu, que

$$\text{le demi-diametre de l'ouverture}\begin{cases}\text{du verrre QQ} > \dfrac{bx}{\alpha},\\[2ex] \text{du verre RR} > \dfrac{bcx}{\alpha\beta},\\[2ex] \text{du verre SS} > \dfrac{bcdx}{\alpha\beta\gamma},\\[2ex] \text{du verre TT} > \dfrac{bcdex}{\alpha\beta\gamma\delta}.\end{cases}$$

CONCLUSIONS.

53. Donc, si le nombre des verres est quelconque, on aura les distances de foyer p, q, r, s, t, u &c. puisque chacune est déterminée par la distance de l'image, dont ce verre reçoit les rayons, & par la distance de l'image qui est présentée par ce verre, savoir ces distances étant

$$EA = a;\ FB = b;\ GC = c;\ HD = d;\ IE = e \text{ \&c.}$$
$$AF = \alpha;\ BG = \beta;\ CH = \gamma;\ DI = \delta;\ EK = \epsilon \text{ \&c.}$$

les distances de foyer seront

$$p = \frac{a\alpha}{a+\alpha};\ q = \frac{b\beta}{b+\beta};\ r = \frac{c\gamma}{c+\gamma};\ s = \frac{d\delta}{d+\delta};\ t = \frac{e\epsilon}{e+\epsilon} \text{ \&c.}$$

& les intervalles entre les verres

$$AB = \alpha + b;\ BC = \beta + c;\ CD = \gamma + d;\ DE = \delta + e \text{ \&c.}$$

Or, pour les faces de chaque verre, je suppose qu'elles sont formées en sorte qu'elles produisent le moindre espace de diffusion. Ainsi, posant $\sigma = 1,52740$ & $\tau = 0,19078$, les verres doivent être construits en sorte.

Pour

Pour le	Rayon de la face antérieure	Rayon de la face postérieure
premier verre PP	$\frac{a\alpha}{\sigma a + \tau\alpha}$	$\frac{a\alpha}{\sigma\tau + \tau a}$
second verre QQ	$\frac{b\beta}{\sigma b + \tau\beta}$	$\frac{b\beta}{\sigma\beta + \tau b}$
troisieme verre RR	$\frac{c\gamma}{\sigma c + \tau\gamma}$	$\frac{c\gamma}{\sigma\gamma + \tau c}$
quatrieme verre SS	$\frac{d\delta}{\sigma d + \tau\delta}$	$\frac{d\delta}{\sigma\delta + \tau d}$
&c.	&c.	&c.

Ensuite le demi-diametre de l'ouverture du premier verre PP étant posé AP $= x$, je suppose

le demi-diametre de l'ouverture

du verre QQ $> \frac{bx}{\alpha}$,

du verre RR $> \frac{bcx}{\alpha\beta}$,

du verre SS $> \frac{bcdx}{\alpha\beta\gamma}$,

du verre TT $> \frac{bcdex}{\alpha\beta\gamma\delta}$,

&c.

Cela posé, en marquant pour abréger les nombres

$$0,93819 = \mu \quad \& \; 0,23269 = \nu,$$

la confusion pour chaque nombre de verres causée dans la vision sera, comme les cas suivans la marquent.

I. Cas.

54. Lorsqu'il n'y a qu'un ſeul verre PP; on aura $\alpha = \infty$ & $p = a$; & la confuſion ſera:

$$\frac{\mu x^3}{4} \cdot \frac{1}{aap}.$$

II. Cas.

55. Lorsqu'il y a deux verres PP & QQ; on aura $\beta = \infty$ & $q = b$; & la confuſion ſera:

$$\frac{\mu b x^3}{4\alpha} \left\{ \begin{array}{l} + \dfrac{(a + \alpha)^2 + \nu a \alpha}{aabbp}, \\ + \dfrac{1}{\alpha\alpha q} \end{array} \right\}.$$

III. Cas.

56. Lorsqu'il y a trois verres PP, QQ & RR; on aura $\gamma = \infty$ & $r = c$; & la confuſion ſera:

$$\frac{\mu b c x^3}{4\alpha\beta} \left\{ \begin{array}{l} + \dfrac{\beta\beta((a + \alpha)^2 + \nu a \alpha)}{aabbccp}, \\ + \dfrac{(b + \beta)^2 + \nu b \beta}{\alpha\alpha ccq}, \\ + \dfrac{bb}{\alpha\alpha\beta\beta r}. \end{array} \right.$$

IV. Cas.

57. Lorsqu'il y a quatre verres PP, QQ, RR & SS; on aura $\delta = \infty$ & $s = d$; & la confuſion ſera:

$$\frac{\mu b c d x^3}{4\alpha\beta\gamma}\left\{\begin{array}{l} + \dfrac{\beta\beta\gamma\gamma\,((a+\alpha)^2 + \nu a\alpha)}{aabbccddp}, \\[2ex] + \dfrac{\gamma\gamma\,((b+\beta)^2 + \nu b\beta)}{\alpha\alpha ccddq}, \\[2ex] + \dfrac{bb\,((c+\gamma)^2 + \nu c\gamma)}{\alpha\alpha\beta\beta ddr}, \\[2ex] + \dfrac{bbcc}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma s}. \end{array}\right.$$

V. Cas.

57. Lorsqu'il y a cinq verres PP, QQ, RR, SS & TT, on aura $\epsilon = 0$, $t = e$; & la confusion sera:

$$\frac{\mu b c d e x^3}{4\alpha\beta\gamma\delta}\left\{\begin{array}{l} + \dfrac{\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta\,((a+\alpha)^2 + \nu a\alpha)}{aabbccddeep}, \\[2ex] + \dfrac{\gamma\gamma\delta\delta\,((b+\beta)^2 + \nu b\beta)}{\alpha\alpha ccddeeq}, \\[2ex] + \dfrac{bb\delta\delta\,((c+\gamma)^2 + \nu c\gamma}{\alpha\alpha\beta\beta ddeer}, \\[2ex] + \dfrac{bbcc\,((d+\delta)^2 + \nu d\delta)}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma ees}, \\[2ex] + \dfrac{bbccdd}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta t}. \end{array}\right.$$

VI. Cas.

59. Lorsqu'il y a six verres PP, QQ, RR, SS, TT & VV; on aura $\zeta = 0$, & $v = f$; & la confusion sera exprimée en sorte:

$\mu b c$

$$\frac{\mu bcdefx^3}{4\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}\left\{\begin{array}{l}
+\dfrac{\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta\varepsilon\varepsilon\,((a+\alpha)^2+\nu a\alpha)}{aabbccddeeffp},\\
+\dfrac{\gamma\gamma\delta\delta\varepsilon\varepsilon\,((b+\beta)^2+\nu b\beta)}{\alpha\alpha ccddeeffq},\\
+\dfrac{bb\delta\delta\varepsilon\varepsilon\,((c+\gamma)^2+\nu c\gamma)}{\alpha\alpha\beta\beta ddeeffr},\\
+\dfrac{bbcc\varepsilon\varepsilon\,((d+\delta)^2+\nu d\delta)}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma eeffs},\\
+\dfrac{bbccdd\,((e+\varepsilon)^2+\nu e\varepsilon)}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta fft},\\
+\dfrac{bbccddee}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta\varepsilon\varepsilon v}.
\end{array}\right.$$

SCHOLIE.

60. Ces formules suffisent pour nous faire connoître la loi, par le moyen de laquelle on les pourra continuer à de plus grands nombres de verres. Or ces formules sont de la derniere importance dans la Théorie des Télescopes & Microscopes, puisqu'on en peut déterminer d'abord la confusion, avec laquelle ces instrumens nous représentent les objets: or je ne parle ici que de la confusion, qui est causée par l'ouverture des verres. Cette confusion est donc proportionnelle au cube du demi-diametre de l'ouverture du premier verre, qu'on nomme l'objectif; de sorte que, si l'on doubloit ce demi-diametre dans le même instrument, la disposition des verres demeurant aussi la même, la confusion deviendroit huit fois plus grande. Ainsi réciproquement, en rétrécissant le demi-diametre de l'ouverture de l'objectif à la moitié, on rendra par ce moyen la confusion huit fois plus petite.

61. Mais, en rétrécissant le diametre de l'ouverture de l'objectif, la clarté dont on voit les objets en devient plus petite selon la raison

ſon quarrée; par cette raiſon on eſt obligé de ſouffrir quelque petite confuſion pour ne pas perdre trop de la clarté. L'expérience nous a donc donné à connoitre un certain degré de confuſion, que nous pouvons aiſément admettre, ſans que la viſion en ſoit ſenſiblement troublée. Pour connoitre ce degré, il ſuffit que nous ſachions pour un ſeul inſtrument l'ouverture du verre objectif qui peut être admiſe. Mr. Huygens a remarqué que, dans une lunette à deux verres, où la diſtance de foyer de l'objectif étoit de 30 pieds, ou de 360 pouces, & celui de l'oculaire de trois pouces, l'objectif peut bien admettre une ouverture, dont le demi-diametre eſt $1\frac{1}{2}$ pouce. Nous n'avons donc qu'à mettre dans notre formule du II. Cas, $a = \infty$, $\alpha = p = 360$, $b = 3$, $q = 3$, & $x = 1\frac{1}{2}$, & l'expreſſion de la confuſion devient $= \frac{\mu}{460000}$ pouces, à peu près. Mais, puiſque la diſtance de foyer de l'objectif étoit ſi grande, peut-être que ce verre a eu quelque petit défaut, qui a été cauſe qu'il n'a pas admis une plus grande ouverture. Examinons donc encore un autre exemple d'une bonne lunette à deux verres, dont l'objectif avoit 144 pouces de foyer, & l'oculaire 3 pouces, le demi-diametre de l'ouverture de celui-là étant 1 pouce: ces valeurs étant ſubſtituées donnent la confuſion $= \frac{\mu}{250000}$, presque deux fois plus grande que dans la lunette précédente. D'où je conclus que dans les lunettes on peut bien ſouffrir une confuſion, qui étant exprimée ſelon notre maniere ne ſurpaſſe pas $\frac{\mu}{300000}$ pouce.

62. Or dans les Microſcopes on ſouffre ordinairement une beaucoup plus grande confuſion; car, dans un microſcope ſimple, on ne doute pas de donner au verre une ouverture, dont le demi-diametre ſoit la dixieme partie de la diſtance de foyer du verre, & on le fait ordinairement encore plus grand. Or poſant dans notre formule du premier cas $\frac{x}{a}$, ou $\frac{x}{p} = \frac{1}{10}$, la confuſion ſera $= \frac{\mu}{4000}$, de ſor-

te que dans les Microſcopes nous ſouffrons une confuſion à peu près 100 fois plus grande que dans les Téleſcopes: d'où l'on voit qu'il s'en faut beaucoup, que les Microſcopes ſoient encore portés au même degré de perfection que les Téleſcopes. Mais, comme j'ai ſuppoſé dans les formules qui expriment pour chaque cas la confuſion, que tous les verres ayent la forme qui leur convient pour que chacun produiſe déjà le moindre eſpace de diffuſion, & que dans les exemples examinés les verres n'ont pas eu cette forme avantageuſe, la confuſion qu'on y ſouffre actuellement y ſera plus grande: d'où il ſemble que faiſant uſage de cette figure dans les Téleſcopes, nous pourrons bien admettre une confuſion, dont la quantité ne ſurpaſſe pas le terme $\frac{\mu}{200000}$: & ſi l'on pouvoit ramener au même terme la confuſion des Microſcopes, il n'y a aucun doute que ces inſtrumens ne fuſſent portés à un beaucoup plus haut dégré de perfection.

63. Les formules que je viens de trouver pour la confuſion, peuvent auſſi ſervir à découvrir dans chaque cas de pluſieurs verres la plus avantageuſe diſpoſition, afin qu'il en réſulte la moindre confuſion du côté de leur ouverture. Car, ayant déjà donné à chaque verre la figure qui produit le moindre eſpace de diffuſion, on peut outre cela, ſurtout lorsqu'il y a pluſieurs verres, trouver un tel arrangement, que quelques unes des parties dont l'expreſſion de la confuſion eſt compoſée, deviennent négatives, & qu'elles diminuent par conſéquent la quantité de celles qui ſont poſitives: ou peut-être même ſera-t-il quelquefois poſſible que par ce moyen l'expreſſion tout entiere de la confuſion fut réduite à rien: ce qui ſeroit ſans doute la plus haut dégré de perfection dont ces inſtrumens ſont ſuſceptibles. Mais on ne ſauroit entreprendre cette recherche ſans qu'on ait égard aux autres qualités que tant les Téleſcopes que les Microſcopes doivent avoir.

RE-