METHODVS FACILIS MOTVS CORPORVM COELESTIVM VTCVNQVE PERTVRBATOS AD RATIONEM CALCVLI ASTRONOMICI REVOCANDI.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Cum hanc inuestigationem, quomodo motus corporum coelestium ob actionem mutuam perturbentur, iam saepius essem aggressus, in calculos plerumque nimis prolixos et operosos sum delapsus, quos vero denique post multas ambages ad formulas multo simpliciores reducere licuit. Causa autem huius prolixitatis manifesto in multitudine elementorum, quae in calculum introduci oportet, est sita: neque enim solum ad cunctas determinationes, quibus motus corporis perturbantis continetur, est respiciendum, sed etiam ipsa motus perturbatio, quatenus non fit in eodem plano, plurima postulat elementa, quibus ea pro more apud Astronomos recepto ad variationes inde in linea nodorum et orbitae inclinatione oriundas referatur. Quodsi omnes istae considerationes simul in calcu-

calculum ingerantur; mirum ſane non eſt, maximam hinc moleſtiam et confuſionem oriri debere, cui euitandae aliud remedium non ſupereſſe videtur, niſi vt omnia elementa ſollicite diſtinguantur, et ſingulae operationes ita inſtituantur, vt in eas non plura admittantur elementa, quam in eam neceſſario ingrediuntur. Ita enim commodiſſime cauebitur, ne attentio noſtra nimia elementorum multitudine obruatur.

II.

Praecipua quidem huius inueſtigationis pars ad mechanicam eſt referenda, cum motus perturbatio ex viribus corporis perturbantis ſit definienda; principia autem mechanica ita ſunt comparata, vt ex iis locus corporis, cuius motus quaeritur, ad quoduis tempus per ternas coordinatas inuicem normales commodiſſime determinetur; verum altera pars haud leuiorem euolutionem requirit, qua locus in priori parte definitus ad morem in Aſtronomia receptum reduci debet, quo ſcilicet diuerſa coeli loca per longitudinem et latitudinem exprimi ſolent. Atque hanc poſteriorem partem, quam geometricam appellare licet, probe diſtingui conuenit a priori, quae tota mechanicae eſt tribuenda. Obſeruaui autem, has duas partes non ſolum commode a ſe inuicem ſeparari, ſed etiam vtramque tum multo faciliori negotio pertractari poſſe, quam ſi ambas coniunctim expedire vellemus. Quamuis autem

autem inueſtigatio mechanica geometricam praecedere debere videatur, tamen ſatis concinne a parte geometrica exordiri licet, cum nihil impediat, quominus locum corporis, cuius motum quaerimus, tanquam cognitum, ac per ternas coordinatas definitum ſpectemus. Hanc ordinis inuerſionem ideo ſequi eſt viſum, quod euolutio partis geometricae plura inſignia ſuppeditet ſubſidia, quibus deinceps in parte mechanica calculi labor non mediocriter ſubleuabitur. Hoc ſcilicet modo id potiſſimum lucri conſequimur, quod dum partem geometricam tractamus, nullae quantitates ad vires perturbantes relatae in calculum ingrediantur.

Pars Geometrica.

III.

Motum igitur corporis Z iam ita determinatum aſſumo, vti per principia mechanica immediate definiri ſolet. Primum ſcilicet motus ad certum quoddam punctum A, quod vt fixum ſpectatur, etiamſi forte ipſum verſetur in motu referri ſolet, tum vero conſideratur planum quoddam per id punctum tranſiens pariter vti fixum, quod ipſo tabulae plano repraeſentetur, in quo accepta linea fixa AB, ad quoduis tempus locus corporis Z per ternas coordinatas inter ſe normales AX, XY et YZ ita definitur, vt primo ex loco Z in planum illud fixum demittatur perpendiculum ZY, tum vero Tab. II. Fig. 1.

to ex Y ad rectam AB ducatur normalis YX. Vocemus ergo has coordinatas:

$$AX = X, \quad XY = Y \quad \text{et} \quad YZ = Z$$

quarum valores ad quoduis tempus elapsum $= t$ vt cogniti spectantur. Hinc igitur statim habetur distantia corporis Z a puncto fixo A quae si breuitatis gratia dicatur $AZ = v$ erit $vv = XX + YY + ZZ$.

Tum vero momento temporis dt corpus ex Z in z progredi concipiamus, vt sit $Az = v + dv$, et angulus elementaris $ZAz = d\Phi$, quem corpus Z interea ex A in orbita sua conficere cernitur, eritque vti constat, $Zz = \sqrt{(dv^2 + vvd\Phi^2)}$, at per coordinatarum elementa est etiam $Zz = \sqrt{(dX^2 + dY^2 + dZ^2)}$, vnde fit

$$dv^2 + vvd\Phi^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$$

sicque patet, quomodo angulum elementarem $d\Phi$ per coordinatas exprimi conueniat, quod vero mox succinctius ostendetur.

IV.

Per elementum Zz cum puncto fixo A certum planum determinatur, in quo nunc quidem corpus Z moueri censetur: hoc planum alicubi secabit planum tabulae fixum; fiat ergo haec intersectio secundum rectam AN, quae in Astronomia linea nodorum appellatur, et cuius variatio ob perturbationem motus corporis Z potissimum est inuestiganda; deinde etiam angulum, quo planum NAZ ad pla-

planum fixum inclinatur, notari conuenit, qui simpliciter in Astronomia inclinatio vocatur, et ob motus perturbationem insignes mutationes subire potest. Pro his ergo nouis elementis ponamus:

Longitudinem lineae nodorum seu angulum $BAN = \psi$

Inclinationem orbitae ZAN ad planum fixum $= \omega$

et argumentum latitudinis seu angulum $NAZ = \sigma$

quae vt ad coordinatas reuocemus, tam ex Y quam ex Z ad lineam nodorum AN agamus normales YO et ZO, sicque angulus YOZ ipsam inclinationem ω metietur. At ob angulum $NAZ = \sigma$ et distantiam $AZ = v$ habebimus:

$$AO = v \cos.\sigma \quad \text{et} \quad ZO = v \sin.\sigma$$

hincque porro

$$ZY = v \sin.\sigma \sin.\omega \quad \text{et} \quad OY = v \sin.\sigma \cos.\omega$$

vnde ob angulum $BAN = \psi = XYO$, concludimus:

$$AX = v \cos.\sigma \cos.\psi - v \sin.\sigma \cos.\omega \sin.\psi$$

$$\text{et } XY = v \cos.\sigma \sin.\psi + v \sin.\sigma \cos.\omega \cos.\psi.$$

Quare ternae nostrae coordinatae ita hinc definiuntur, vt sit

$$X = v(\cos.\sigma \cos.\psi - \sin.\sigma \cos.\omega \sin.\psi)$$

$$Y = v(\cos.\sigma \sin.\psi + \sin.\sigma \cos.\omega \cos.\psi)$$

$$\text{et } Z = v \sin.\sigma \sin.\omega$$

vbi praeterea notetur esse tang. anguli $NAY = \text{tang.}\,\sigma\,\text{cos.}\,\omega$, qui angulus dicitur longitudo puncti Z a nodo.

V.

Cum nunc angulus BAY in Astronomia exhibeat longitudinem, angulus vero ZAY latitudinem puncti Z, siquidem planum tabulae eclipticam referat, et recta AB ad principium arietis sit porrecta; quas denominationes autem quoque in latiori sensu accipere licet: habebimus

longitudinem puncti Z seu angulum $BAY = \psi + NAY$

existente $\text{tang.}\,NAY = \text{tang.}\,\sigma\,\text{cos.}\,\omega$

pro latitudine vero seu angulo ZAY erit

$\text{sin.}\,ZAY = \frac{ZY}{AZ} = \text{sin.}\,\sigma\,\text{sin.}\,\omega$

Tab. II. Fig. 2. quae eaedem formulae vulgo ex trigonometria sphaerica elici solent. In superficie scilicet sphaerica centro A descripta circulus maximus BNY repraesentet planum fixum, et punctum B sit initium, a quo longitudo computatur. Porro sit N nodus et NZ orbita, ad quam nunc motus corporis Z refertur, tum ex Z ad circulum BNY ducatur arcus normalis ZY; quo facto arcus BNY praebet longitudinem, arcus vero ZY latitudinem puncti Z, ad quas inueniendas primo habemus:

arcum BN, seu longitudinem nodi $= \psi$

angulum ZNY seu inclinationem $= \omega$

et arcum NZ seu argumentum latitudinis $= \sigma$.

Ex

Ex his resolutio trianguli sphaerici rectanguli NYZ dat

$\text{sin.}\,ZY = \text{sin.}\,\sigma\,\text{sin.}\,\omega$ et $\text{tang.}\,NY = \text{tang.}\,\sigma\,\text{cos.}\,\omega$

prorsus vt ante.

IV.

Quamuis autem tam linea nodorum, quam inclinatio sit variabilis; tamen quia ambo puncta Z et z ad idem planum NAZ pertinent, per differentiationem a puncto Z ad z perueniri debet, etiamsi angulus $BAN = \psi$ et inclinatio ω pro constantibus habeantur, dum scilicet angulus $NAZ = \sigma$ angulo elementari $ZAz = d\Phi$ crescere sumatur vt sit $d\sigma = d\Phi$. Deinde vero etiam per differentiationem ad idem punctum z perueniri necesse est, si tam linea nodorum, quam inclinatio variabiles statuantur, quoniam punctum z quoque ad orbitam variatam pertinere debet, hic vero non amplius differentiale $d\sigma$ ipsi $d\Phi$ aequale est ponendum, sed ipsi proprius valor est tribuendus, qui simul ab orbitae mutatione pendet. Cum igitur haec duplex differentiatio eodem perducere debeat, aequationes hinc adipiscemur, quibus certae relationes inter variationes in orbita ortas definiuntur, quae in sequenti calculo maximum praestabunt vsum. Neque vero hoc solum in differentialibus ipsarum coordinatarum locum habet, sed etiam quantitatum inde deriuatarum, cuiusmodi sunt:

$$\frac{X}{Z} = \frac{\text{cos.}\,\sigma\,\text{cos.}\,\psi}{\text{sin.}\,\sigma\,\text{sin.}\,\omega} - \frac{\text{cos.}\,\omega\,\text{sin.}\,\psi}{\text{sin.}\,\omega} \quad \text{et} \quad \frac{Y}{Z} = \frac{\text{cos.}\,\sigma\,\text{sin.}\,\psi}{\text{sin.}\,\sigma\,\text{sin.}\,\omega} + \frac{\text{cos.}\,\omega\,\text{cos.}\,\psi}{\text{sin.}\,\omega}$$

qua-

quarum ergo differentialia duobus illis modis sumta eosdem valores praebere debent.

VII.

Prima igitur differentiatio sumtis angulis ψ et ω constantibus et $d\sigma = d\Phi$ dat:

$$d.\frac{X}{Z} = \frac{-d\Phi \cos.\psi}{\sin.\sigma^2 \sin.\omega} \text{ et } d.\frac{Y}{Z} = \frac{-d\Phi \sin.\psi}{\sin.\sigma^2 \sin.\omega}.$$

Pro altera differentiatione notentur primo hae formulae:

$$\frac{X}{Z}\cos.\psi + \frac{Y}{Z}\sin.\psi = \frac{\cos.\sigma}{\sin.\sigma \sin.\omega} \text{ et } \frac{Y}{Z}\cos.\psi - \frac{X}{Z}\sin.\psi = \frac{\cos.\omega}{\sin.\omega}$$

quae more consueto differentiatae praebent:

$$\cos.\psi\, d.\frac{X}{Z} + \sin.\psi\, d.\frac{Y}{Z} - d\psi\left(\frac{Y}{Z}\cos.\psi - \frac{X}{Z}\sin.\psi\right) = \frac{-d\sigma}{\sin.\sigma^2 \sin.\omega} - \frac{d\omega \cos.\sigma \cos.\omega}{\sin.\sigma \sin.\omega^2}$$

$$\cos.\psi\, d.\frac{Y}{Z} - \sin.\psi\, d.\frac{X}{Z} - d\psi\left(\frac{X}{Z}\cos.\psi + \frac{Y}{Z}\sin.\psi\right) = \frac{-d\omega}{\sin.\omega^2}$$

vnde prioribus valoribus substitutis colligitur:

$$-\frac{d\Phi \cos.\psi^2}{\sin.\sigma^2 \sin.\omega} - \frac{d\Phi \sin.\psi^2}{\sin.\sigma^2 \sin.\omega} + \frac{d\psi \cos.\omega}{\sin.\omega} = \frac{-d\sigma}{\sin.\sigma^2 \sin.\omega} - \frac{d\omega \cos.\sigma \cos.\omega}{\sin.\sigma \sin.\omega^2}$$

$$-\frac{d\Phi \sin.\psi \cos.\psi}{\sin.\sigma^2 \sin.\omega} + \frac{d\Phi \sin.\psi \cos.\psi}{\sin.\sigma^2 \sin.\omega} - \frac{d\psi \cos.\sigma}{\sin.\sigma \sin.\omega} = \frac{-d\omega}{\sin.\omega^2}$$

quae formae contrahuntur in has:

$$-\frac{d\Phi}{\sin.\sigma^2 \sin.\omega} + \frac{d\psi \cos.\omega}{\sin.\omega} = \frac{-d\sigma}{\sin.\sigma^2 \sin.\omega} - \frac{d\omega \cos.\sigma \cos.\omega}{\sin.\sigma \sin.\omega^2}$$

$$\text{et } -\frac{d\psi \cos.\sigma}{\sin.\sigma \sin.\omega} = \frac{-d\omega}{\sin.\omega^2} \text{ seu } \frac{d\omega}{\sin.\omega} = \frac{d\psi}{\tang.\sigma}$$

qui posterior valor in illa substitutus suppeditat

$$\frac{d\sigma - d\Phi}{\sin.\sigma^2 \sin.\omega} = \frac{-d\psi \cos.\omega}{\sin.\omega} - \frac{d\psi \cos.\sigma^2 \cos.\omega}{\sin.\sigma^2 \sin.\omega} = \frac{-d\psi \cos.\omega}{\sin.\sigma^2 \sin.\omega}$$

seu $d\psi \cos.\omega = d\Phi - d\sigma$.

VIII.

VIII.

Hinc igitur primo discimus variationem in inclinatione orbitae ortam $d\omega$ semper ita pendere a variatione lineae nodorum $d\psi$ vt sit $d\omega = \frac{d\psi \sin.\omega}{\tang.\sigma}$; seu incrementum inclinationis se habebit ad promotionem lineae nodorum, vt sinus inclinationis ad tangentem argumenti latitudinis; vnde sequentia consectaria deducuntur:

1°. Si argumentum latitudinis σ sit vel nullum vel 6^s vbi latitudo est nulla, lineam nodorum quiescere, quantumuis interea varietur inclinatio.

2°. Si argumentum latitudinis σ sit vel 3^s vel 9^s, seu $\tang.\sigma = \infty$ vbi latitudo est maxima, tum inclinationem nullam mutationem pati; quantumuis interea linea nodorum vel progrediatur vel regrediatur.

3°. Si argumentum latitudinis σ vel intra limites 0^s et 3^s vel intra 6^s et 9^s continetur, hoc est dum latitudo crescit, tum inclinationem ω crescere, siquidem linea nodorum progrediatur, sin autem regrediatur, inclinationem decrescere.

4°. Si argumentum latitudinis σ vel intra limites 3^s et 6^s vel intra 9^s et 12^s continetur, hoc est dum latitudo decrescit, tum progrediente linea nodorum inclinationem imminui, ea vero regrediente augeri.

IX.

Deinde obseruandum est, augimentum argumenti latitudinis σ promotioni in propria orbita seu elemento $d\Phi$ non esse aequale, nisi linea nodorum maneat immota; cum inuenerimus $d\sigma = d\Phi - d\psi \cos.\omega$, solo excepto casu, quo inclinatio ω foret angulus rectus. Haec vero phaenomena per trigonometriam sphaericam magis perspicua reddentur. Si enim circulus BNY vt ante repraesentet planum fixum, ad quod motus puncti Z refertur, eiusque motus praesens fiat secundum circulum NZ, vt sit $BN = \psi$; $YNZ = \omega$ et arcus $NZ = \sigma$; at postquam punctum Z per elementum $Zz = d\Phi$ fuerit progressum, eius motus fiat secundum circulum nz, erit promotio lineae nodorum $Nn = d\psi$ inclinatio variata $Ynz = \omega + d\omega$, et argumentum latitudinis $nz = \sigma + d\sigma$. Ducto ergo arculo $n\nu$ ad NZ normali erit $N\nu = d\psi \cos.\omega$ et $n\nu = d\psi \sin.\omega$; inde autem colligitur $Zn = \sigma - d\psi \cos.\omega$, ideoque $nz = \sigma - d\psi \cos.\omega + d\Phi = \sigma + d\sigma$ et consequenter $d\sigma = d\Phi - d\psi \cos.\omega$ vt ante; simul autem intelligimus ob $d\psi \cos.\omega = d\Phi - d\sigma = N\nu$, formulam $d\Phi - d\sigma$ exhibere promotionem lineae nodorum in propria orbita, quia cum nodus fuisset in orbitae NZ puncto N; is iam in eius punctum n seu ν esset translatus. Praeterea ex triangulo sphaerico NnZ colligimus:

Tab. II. Fig. 3.

$$\sin.\omega : \sin.(\omega + d\omega) = \sin.(\sigma - d\psi \cos.\omega) : \sin.\sigma$$

seu

seu $\sin.\omega : \sin.\omega + d\omega \cos.\omega = \sin.\sigma - d\psi \cos.\sigma \cos.\omega : \sin.\sigma$

et diuidendo $\sin.\omega : d\omega \cos.\omega = \sin.\sigma - d\psi \cos.\sigma \cos.\omega : d\psi \cos.\sigma \cos.\omega$

vnde fit $d\omega \sin.\sigma = d\psi \sin.\omega \cos.\sigma$ seu $\frac{d\omega}{\sin.\omega} = \frac{d\psi}{\tang.\sigma}$ prorsus vt ante.

X.

Formulae autem differentiales, ante §. 7. inventae, si euoluantur praebent:

$$\frac{XdZ - ZdX}{ZZ} = \frac{d\Phi \cos.\psi}{\sin.\sigma^2 \sin.\omega} \text{ et } \frac{YdZ - ZdY}{ZZ} = \frac{d\Phi \sin.\psi}{\sin.\sigma^2 \sin.\omega}$$

vnde ob $Z = v \sin.\sigma \sin.\omega$ nanciscimur has formulas notatu dignas:

$$XdZ - ZdX = vvd\Phi \sin.\omega \cos.\psi \text{ et}$$
$$YdZ - ZdY = vvd\Phi \sin.\omega \sin.\psi.$$

Hinc vt dZ eliminemus, si priorem multiplicemus per Y posteriorem vero per X, hoc productum ab illo ablatum relinquet:

$$Z(XdY - YdX) = vvd\Phi \sin.\omega (Y \cos.\psi - X \sin.\psi).$$

Cum autem sit vt vidimus §. 7. $Y \cos.\psi - X \sin.\psi = \frac{Z \cos.\omega}{\sin.\omega}$

haec formula ad insignem simplicitatem contrahitur:

$$XdY - YdX = vvd\Phi \cos.\omega.$$

Hae formulae cum illis, quas statim ab initio inuenimus, coniunctae scilicet hisce:

$$XX + YY + ZZ = vv \text{ et } dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dv^2 + vvd\Phi^2$$

 in

in parte mechanica maximum praestabunt vsum, ad coordinatas ex calculo eliciendas, vt is deinceps eiusmodi quantitatibus, quae in Astronomia vsu sunt receptae, contineatur.

XI.

Tab. II. Fig. 1. Istae autem reductiones Geometricae latissime patent nihilque interest, ad quodnam punctum A, planumque fixum BAY, motum puncti Z referre velimus. Verum si ad vsum astronomicum spectemus, plurimum refert, quomodo tam illud punctum A, quod quasi est centrum motus, quam illud planum, ad quod motus puncti Z per longitudinem et latitudinem refertur, accipiatur, quoniam hinc potissimum simplicitas determinationis pendet. Ad quam electionem instituendam ante omnia notari oportet, cuncta artificia, quae adhuc sunt excogitata, tum solum cum aliquo successu adhiberi posse, cum motus corporis, qui quaeritur, non multum a legibus *Keplerianis* discrepet, ideoque perturbationes admodum fuerint exiguae. Quando autem motus ita est comparatus, vt areae circa quodpiam punctum descriptae sint satis prope tempori proportionales, in hoc puncto aptissime punctum illud fixum A statuitur. Quod cum eueniat, si inter vires corpus sollicitantes, vna reliquas multum superet, in eo puncto, ad quod haec vis dirigitur, punctum A accipi conueniet: Ita si quaestio fuerit de perturbationibus planetae cuiusdam principalis seu come-

cometae, punctum A commodissime in centro solis capietur: sin autem perturbationes in motu lunae, vel alius planetae secundarii factae definiri debeant; tum punctum A in centro terrae vel planetae primarii accipi oportet, ita vt vis corpus propositum Z ad A pellens reliquas vires, quibus hoc corpus simul vrgetur, multum superet.

XII.

Si corpus Z hac sola vi principali sollicitaretur, corpus omnino regulariter circa punctum A in sectione conica reuolueretur, idque perpetuo in eodem plano, ita vt quomodocunque planum fixum BAY acciperetur, neque in linea nodorum neque in inclinatione vnquam vlla mutatio oriretur; interim tamen calculus sine dubio simplicissimus euaderet, si planum fixum in ipso plano motus acciperetur. Verum si motus ab alio corpore coelesti perturbetur, cuiusquidem motum in hac inuestigatione tanquam cognitum assumi oportet, planum fixum conuenientissime cum orbita illius corporis perturbantis congruens sumetur. Ita si perturbationes lunae a sole oriundae quaerantur, planum eclipticae, in quo sol ex terra tanquam centro motus A moueri cernitur, dabit planum fixum BAY; et a quocunque alio corpore perturbatio efficiatur, id planum, in quo hoc corpus ex centro motus A moueri cernitur, erit eligendum. At si hoc corpus ipsum non in eodem plano moueatur, tum pla-

num aliquod medium, commodissime assumetur; vix autem opus videtur, calculum ad istum casum accommodari, quod quidem si vsus postulauerit facile praestabitur.

Pars Mechanica.

XIII.

Tab. II. Fig. 1. In mechanica tractatione tria corpora veniunt consideranda. Primum est id, quod in centro motus A positum vim praecipuam exerit in corpus Z, cuius motum inuestigamus, qualis spectatori in ipso puncto A constituto apparet, huius igitur corporis in A siti massam vocemus $= A$.

Alterum corpus, a cuius actione motus corporis Z perturbatur, in ipso plano fixo BAY vtcunque moueri assumimus, ita vt eius locus ad quoduis tempus assignari possit. Sit massa huius corporis $= B$, idque nunc quidem versetur in S, ita vt sit eius distantia a corpore centrali $AS = u$, et longitudo seu angulus $BAS = \theta$, vnde ex S in rectam fixam AB demisso perpendiculo SP fit $AP = u \cos.\theta$ et $PS = u \sin.\theta$.

Tertium corpus est id ipsum in Z, in cuius motum inquirimus, sit eius massa $= C$, et vt ante posuimus, distantia a centro motus $AZ = v$, vocatis ternis coordinatis orthogonalibus $AX = X$, $XY = Y$

$XY = Y$ et $YZ = Z$, quas vero ex calculo exuimus introducendo sequentia elementa:

1°. longitudinem lineae nodorum $BAN = \psi$

2°. Inclinationem orbitae praesentem $YOZ = \omega$

3°. argumentum latitudinis seu $NAZ = \sigma$.

Denique tempusculo dt a corpore Z angulum elementarem $ZAz = d\Phi$ absolui statuimus. Horum autem elementorum relationes ex parte geometrica sunt repetendae.

XIV.

Quoniam corpus Z ad A vrgetur vi $= \frac{A}{vv}$, contra vero A ad Z trahitur vi $= \frac{C}{vv}$, vt punctum A tanquam quiescens considerari possit, corpus Z ad A attrahi censendum est vi $= \frac{A+C}{vv}$, quae secundum directiones ternarum coordinatarum resoluta dat vires:

$$\text{sec.}\, XA = \frac{A+C}{v^3}.X;\ \text{sec.}\, YX = \frac{A+C}{v^3}.Y;\ \text{sec.}\, ZY = \frac{A+C}{v^3}.Z.$$

Deinde pro vi, qua corpus Z ad S sollicitatur, vocemus breuitatis gratia distantiam $SZ = w$, vt vis ZS sit $= \frac{B}{ww}$, quae resoluitur statim in vires sec. $ZY = \frac{B}{w^3}.Z$ et sec. $YS = \frac{B}{w^3}.YS$, haec vero porro ob $XP = u \cos.\theta - X$ et $PS - XY = u \sin.\theta - Y$ in vires:

$$\text{sec.}\, XP = \frac{B}{w^3}(u \cos.\theta - X) \text{ et sec. } XY = \frac{B}{w^3}(u \sin.\theta - Y).$$

Deni-

Denique quia corpus A quoque ad S vrgetur vi $=\frac{B}{uu}$ haec contrarie in Z translata dabit insuper vires

secundum $XA=\frac{B}{uu}\cos.\theta$ et secundum $YX=\frac{B}{uu}\sin.\theta$

quae vires in corpus Z agentes collectae praebent:

1°. Vim sec. $XA=\frac{A+C}{v^3}X+\frac{B}{v^3}(X-u\cos.\theta)+\frac{B}{uu}\cos.\theta$

2°. Vim sec. $XY=\frac{A+C}{v^3}Y+\frac{B}{v^3}(Y-u\sin.\theta)+\frac{B}{uu}\sin.\theta$

3°. Vim sec. $ZY=\frac{2A+C}{v^3}Z+\frac{B}{v^3}Z$,

quibus cum accelerationes corporis Z secundum easdem directiones sint proportionales, statuamus pro temporis elemento dt constanti sumto:

$$ddX=-\alpha dt^2\left(\frac{A+C}{v^3}X+\frac{B}{v^3}X-Bu\cos.\theta\left(\frac{1}{v^3}-\frac{1}{u^3}\right)\right)$$

$$ddY=-\alpha dt^2\left(\frac{A+C}{v^3}Y+\frac{B}{v^3}Y-Bu\sin.\theta\left(\frac{1}{v^3}-\frac{1}{u^3}\right)\right)$$

$$ddZ=-\alpha dt^2\left(\frac{A+C}{v^3}Z+\frac{B}{v^3}Z\right)$$

vbi constans α ex vnico motu huius generis cognito, veluti ex motu solis apparente, definiri potest.

XV.

Antequam autem has formulas euoluamus, distantiam $SZ=w$ in calculum de nouo introductam accuratius definire debemus. Cum autem manifesto sit:

$$SZ^2=XZ^2+XP^2+(PS-XY)^2$$

habebimus:

$$ww=ZZ+XX+YY+uu-2uX\cos.\theta-2uY\sin.\theta$$

quae

quae forma ob $XX+YY+ZZ=vv$ reducitur ad hanc:

$$ww=vv+uu-2u(X\cos.\theta+Y\sin.\theta).$$

Ex valoribus autem pro X et Y supra §. 4. inuentis colligimus:

$$X\cos.\theta+Y\sin.\theta=v(\cos.\sigma\cos.(\theta-\psi)+\sin.\sigma\cos.\omega\sin.(\theta-\psi))$$

vbi angulus $\theta-\psi$ exprimit distantiam corporis perturbantis S a linea nodorum seu angulum $NAS=\theta-\psi$, ita vt sit

$$ww=vv+uu-2vu\cos.\sigma\cos.(\theta-\psi)+\sin.\sigma\cos.\omega\sin.(\theta-\psi))$$

Verum si iam breuitatis gratia vocemus ang. $SAZ=\mu$ quo distantia corporis Z a corpore perturbante S ex A visa designatur, ob $AZ=v$ et $AS=u$ constat fore

$$ww=vv+uu-2vu\cos.\mu$$

vnde concluditur esse:

$$\cos.\sigma\cos.(\theta-\psi)+\sin.\sigma\cos.\omega\sin.(\theta-\psi)=\cos.\mu$$

id quod facillime per trigonometriam sphaericam probatur. Cum enim in fig. 2. sit $BN=\psi$, $NZ=\sigma$ et ang. $YNZ=\omega$ si capiatur $BS=\theta$, erit $NS=\theta-\psi$, et in triangulo sphaerico latus $SZ=\mu$ ex lateribus $NZ=\sigma$, $NS=\theta-\psi$ cum angulo intercepto $ZNS=\omega$ hoc ipso modo determinatur. Fig. 2.

XVI.

Cum tres aequationes ex principiis mechanicis deductae totidem determinationes suppeditent, totum artificium in hoc constat, quemadmodum eas inde commodissime deriuemus. Ac primo quidem statim se offert haec ratio, qua prima per $2dX$ secunda per $2dY$ et tertia per $2dZ$ multiplicatae in vnam summam colliguntur; quia enim vt supra vidimus est

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dv^2 + vvd\Phi^2$$

et $XX + YY + ZZ = vv$

erit $2dXddX + 2dYddY + 2dZddZ = d.(dv^2 + vvd\Phi^2)$

et $XdX + YdY + ZdZ = vdv$.

Quare memorata ratione peruenietur ad hanc aequationem:

$$d.(dv^2 + vvd\Phi^2) = -2\alpha dt^2\left(\frac{A+C}{vv}dv + \frac{B}{w^3}vdv - Bu(dX\cos.\theta + dY\sin.\theta)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\right)$$

vbi formulam $dX\cos.\theta + dY\sin.\theta$ euolui conuenit. Verum ex formulis supra §. 10. erutis colligimus:

$$dX = \frac{Xdz}{z} - \frac{vd\Phi\cos.\psi}{\sin.\sigma} \quad \text{et} \quad dY = \frac{Ydz}{z} - \frac{vd\Phi\sin.\psi}{\sin.\sigma}$$

ob $Z = v\sin.\sigma\sin.\omega$ vnde fit

$$dX\cos.\theta + dY\sin.\theta = \frac{dz}{z}(X\cos\theta + Y\sin.\theta) - \frac{vd\Phi\cos.(\theta-\psi)}{\sin.\sigma}$$

modo autem vidimus esse

$$X\cos.\theta + Y\sin.\theta = v(\cos.\sigma\cos.(\theta-\psi) + \sin.\sigma\cos.\omega\sin.(\theta-\Phi)) = v\cos.\mu$$

tum

tum vero est $\frac{dz}{z} = \frac{dv}{v} + \frac{d\sigma\cos.\sigma}{\sin.\sigma} + \frac{d\omega\cos.\omega}{\sin.\omega}$, vel

$$\frac{dz}{z} = \frac{dv}{v} + \frac{d\sigma\cos.\sigma}{\sin.\sigma} + \frac{d\psi\cos.\omega}{\tang.\sigma} \quad \text{ob } d\omega = \frac{d\psi\sin.\omega}{\tang.\sigma}.$$

Cum igitur sit $d\Phi = d\sigma + d\psi\cos.\omega$, adipiscimur

$$\frac{dz}{z} = \frac{dv}{v} + \frac{d\Phi}{\tang.\sigma},$$ ita vt sit

$$dX\cos.\theta + dY\sin.\theta = dv\cos.\mu + \frac{vd\Phi\cos.\mu}{\tang.\sigma} - \frac{vd\Phi\cos.(\theta-\psi)}{\sin.\sigma} =$$
$$dv\cos.\mu + \frac{vd\Phi}{\sin.\sigma}(\sin.\sigma\cos.\sigma\cos.\omega\sin.(\theta-\psi) + \cos.\sigma^2\cos.(\theta-\psi) - \cos.(\theta-\psi))$$

ideoque

$$dX\cos.\theta + dY\sin.\theta = dv\cos.\mu - vd\Phi(\sin.\sigma\cos.(\theta-\psi) - \cos\sigma\cos.\omega\sin.(\theta-\psi)).$$

Quocirca aequatio nostra inuenta erit: $d.(dv^2 + vvd\Phi^2)$

$$= -2\alpha dt^2 dv\left(\frac{A+C}{vv} + \frac{Bv}{w^3} - Bu\cos.\mu\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\right)$$
$$- 2\alpha Bdt^2 d\Phi.\, uv(\sin.\sigma\cos.(\theta-\psi) - \cos.\sigma\cos.\omega\sin.(\theta-\psi))\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right).$$

XVII.

Hanc euolutionem formulae $dX\cos.\theta + dY\sin.\theta$ nimis prolixam multo concinnius ex ipsis valoribus pro X et Y inuentis conficere licet. Cum enim eorum differentialia rite prodeant, si anguli ψ et ω vt constantes tractentur et pro $d\sigma$ scribatur $d\Phi$ haec differentiatio praebet:

$$dX = dv(\cos.\sigma\cos.\psi - \sin.\sigma\cos.\omega\sin.\psi) - vd\Phi(\sin.\sigma\cos.\psi + \cos.\sigma\cos.\omega\sin.\psi)$$

$$dY = dv(\cos.\sigma\sin.\psi + \sin.\sigma\cos.\omega\cos.\psi) - vd\Phi(\sin.\sigma\sin.\psi - \cos.\sigma\cos.\omega\cos.\psi)$$

vnde

vnde statim colligitur:

$$dX\cos.\theta + dY\sin.\theta = dv(\cos.\sigma\cos.(\theta-\psi) + \sin.\sigma\cos.\omega\sin(\theta-\psi)$$
$$- vd\Phi.\sin.\sigma\cos.(\theta-\psi) - \cos.\sigma\cos.\omega\sin(\theta-\psi))$$

ad quam formam magis contrahendam obseruo in fig. 2. vbi $NS = \theta - \psi$; $NZ = \sigma$ $SNZ = \omega$ et $SZ = \mu$ fore primo vt supra $\cos.\sigma\cos.(\theta-\psi) + \sin.\sigma\cos.\omega\sin.(\theta-\psi) = \cos.\mu$, deinde vero si ponatur angulus $NZS = \xi$, reperiri

Fig. 2.

$$\cot.\xi = \frac{\sin.\sigma\cos.(\theta-\psi) - \cos.\sigma\cos.\omega\sin.(\theta-\psi)}{\sin.\omega\sin.(\theta-\psi)}$$

vnde concluditur:

$$\sin.\sigma\cos.(\theta-\psi) - \cos.\sigma\cos.\omega\sin.(\theta-\psi) = \frac{\sin.\omega\sin.(\theta-\psi)\cos.\xi}{\sin.\xi}$$
$$= \sin.\mu\cos.\xi$$

ob $\sin.\xi : \sin.(\theta-\psi) = \sin.\omega : \sin.\mu$. Ex his ergo impetramus

$$dX\cos.\theta + dY\sin.\theta = dv\cos.\mu - vd\Phi\sin.\mu\cos.\xi.$$

Vel si in Z ad arcum NZ alium arcum normalem ducamus, in eumque ex S perpendiculum in superficie sphaerica demittamus, quod vocemus $= \nu$ erit $\sin.\nu = \sin.\mu\cos.\xi$ seu

$$\sin.\sigma\cos.(\theta-\psi) - \cos.\sigma\cos.\omega\sin.(\theta-\psi) = \sin.\nu$$

aequatio primam determinationem continens ita se habebit

$$d.(dv^2 + vvd\Phi^2) = -2\alpha dt^2\left(\frac{A+C}{vv}dv + \frac{Bvdv}{w^3} - Bu(dv\cos.\mu - vd\Phi\sin.\nu)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\right).$$

XVIII.

XVIII.

Binas reliquas determinationes, quas aequationes differentio-differentiales ex principiis motus deductae suppeditant, commodissime per sequentes combinationes obtinebimus: Primo ergo harum aequationum §. 14 inuentarum prima per Y multiplicata a secunda per X multiplicata subtrahatur vt prodeat:

$$XddY - YddX = -\alpha dt^2 Bu(Y\cos.\theta - X\sin.\theta)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$$ seu

valoribus pro x et y substitutis

$$XddY - YddX = \alpha Bvudt^2(\cos.\sigma\sin(\theta-\psi) - \sin.\sigma\cos.\omega\cos.(\theta-\psi))\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right).$$

Cum igitur sit $XddY - YddX$ differentiale ipsius $XdY - YdX$ hanc habebimus aequationem:

$$d.vvd\Phi\cos.\omega = \alpha Bvudt^2(\cos.\sigma\sin.(\theta-\psi) - \sin.\sigma\cos.\omega\cos.(\theta-\psi))\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right).$$

Simili modo ex prima ac tertia colligimus

$$XddZ - ZddX = -\alpha BuZdt^2\cos.\theta\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$$ seu

$$XddZ - ZddX = -\alpha Bvudt^2\cos.\theta\sin.\sigma\sin.\omega\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$$

sicque habebitur:

$$d.vvd\Phi\sin.\omega\cos.\psi = -\alpha Bvudt^2\cos.\theta\sin.\sigma\sin\omega\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right).$$

Pari modo secunda aequatio cum tertia coniuncta dat:

$$YddZ - ZddY = -\alpha Bvudt^2\sin.\theta\sin\sigma\sin.\omega\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$$ seu

$$d.vvd\Phi\sin.\omega\sin.\psi = -\alpha Bvudt^2\sin.\theta\sin.\sigma\sin.\omega\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$$

 verum

verum probe eſt notandum, in his tribus aequationibus tantum duas determinationes contineri, cum in binis tertia iam ſponte includatur.

XIX.

Binas poſtremas ita tractemus, vt cum membra priora differentiari debeant, pars communis $vvd\Phi \sin.\omega$ tanquam vnica quantitas ſpectetur, ſicque fiet:

$$\cos.\psi\, d.vvd\Phi \sin.\omega - d\psi \sin.\psi . vvd\Phi \sin.\omega = -\alpha B vudt^2 \cos.\theta \sin.\sigma \sin.\omega \left(\tfrac{1}{\omega^3} - \tfrac{1}{u^3}\right)$$

$$\sin.\psi\, d.vvd\Phi \sin.\omega + d\psi \cos.\psi . vvd\Phi \sin.\omega = -\alpha B vudt^2 \sin.\theta \sin.\sigma \sin.\omega \left(\tfrac{1}{\omega^3} - \tfrac{1}{u^3}\right)$$

vnde d. $vvd\Phi \sin.\omega$ eliminando colligitur

$$d\psi . vvd\Phi \sin.\omega = -\alpha B vudt^2 \sin.\sigma \sin.\omega \sin.(\theta-\psi)\left(\tfrac{1}{\omega^3} - \tfrac{1}{u^3}\right)$$

ſicque variatio lineae nodorum ita definitur vt ſit

$$d\psi = -\frac{-\alpha B u dt^2 \sin.^2\sigma \sin.(\theta-\psi)}{v d\Phi}\left(\tfrac{1}{\omega^3} - \tfrac{1}{u^3}\right)$$

vnde ſimul variatio inclinationis innoteſcit ob $\frac{d\omega}{\sin.\omega} = \frac{d\psi}{\tang.\sigma}$ ſin autem ex illis binis formis membrum $vvd\Phi \sin.\omega$ eliminetur, obtinetur

$$d.vvd\Phi \sin.\omega = -\alpha B vudt^2 \sin.\sigma \sin.\omega \cos.(\theta-\psi)\left(\tfrac{1}{\omega^3} - \tfrac{1}{u^3}\right)$$

quae iam cum prima exuendo angulum ω comparata praebet

$$\cos.\omega\, d.vvd\Phi - d\omega \sin.\omega vvd\Phi = \alpha B vudt^2 (\cos.\sigma \sin.(\theta-\psi) - \sin.\sigma \cos.\omega \cos.(\theta-\psi))\left(\tfrac{1}{\omega^3} - \tfrac{1}{u^3}\right)$$

ſin.

$$\sin.\omega\, d.vvd\Phi + d\omega \cos.\omega . vvd\Phi = -\alpha B vudt^2 (\sin.\sigma \sin.\omega \cos.(\theta-\psi))\left(\tfrac{1}{\omega^3} - \tfrac{1}{u^3}\right)$$

vnde concludimus:

$$d.vvd\Phi = -\alpha B vudt^2 (\sin.\sigma \cos.(\theta-\psi) - \cos.\sigma \cos.\omega \sin.(\theta-\psi))\left(\tfrac{1}{\omega^3} - \tfrac{1}{u^3}\right)$$

ſeu $d.vvd\Phi = -\alpha B vudt^2 \sin.\nu \left(\tfrac{1}{\omega^3} - \tfrac{1}{u^3}\right)$

quae eſt altera determinatio, quam quaeri oportebat.

XX.

Poſtremam hanc aequationem multiplicemus per $2vvd\Phi$ et, integrali ſaltem indicato, fiet

$$v^4 d\Phi^2 = -2\alpha B dt^2 \int v^3 u d\Phi \sin.\nu \left(\tfrac{1}{\omega^3} - \tfrac{1}{u^3}\right)$$

qua aequatione relatio inter angulum elementarem $d\Phi$ et tempusculum dt continetur, vbi quidem manifeſtum eſt, ſi maſſa corporis perturbantis B euanesceret, futurum eſſe $v^2 d\Phi$ tempori dt proportionale, ſeu areas circa A deſcriptas tempori proportionales. Ad hanc aequationem ſi adiungatur primo §. 17. inuenta, pariter integrata quatenus fieri poteſt erit

$$dv^2 + vvd\Phi^2 = 2\alpha dt^2 (A + C)\left(\tfrac{1}{v} - \tfrac{1}{f}\right) - 2\alpha B dt^2 \int \frac{v d\Phi}{\omega^3} + 2\alpha B dt^2 \int u (dv \cos.\mu - v d\Phi \sin.\nu)\left(\tfrac{1}{\omega^3} - \tfrac{1}{u^3}\right)$$

quae aequatio inſuper variationem diſtantiae v cum elemento $d\Phi$ vel tempuſculo dt comparat, quae duae res proprie ad motum corporis Z in ſua orbita

bita ſpectant. Praeterea vero pro ipſius orbitae variatione, habemus:

$$d\psi = \frac{-\alpha B u\, dt^2 \sin.\sigma \sin.(\theta-\psi)}{v\, d\Phi}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)$$

$$\frac{d\omega}{\sin.\omega} = \frac{-\alpha B u\, dt^2 \cos.\sigma \sin.(\theta-\psi)}{v\, d\Phi}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right) = \frac{d\psi}{\tang.\sigma}.$$

Ac denique argumentum latitudinis σ ad eadem elementa reuocatur ope huius aequationis $d\sigma = d\Phi - d\psi \cos.\omega$.

XXI.

Elementum temporis dt cum quantitate conſtante α commodiſſime ex calculo tolletur, ſi motus quidam regularis et cognitus introducatur, veluti motus medius ſolis, vel alius corporis, quod circa centrum virium in circulo vniformiter reuolvitur. Ponamus ergo circa corpus in A poſitum cuius maſſa ſit $= \mathfrak{A}$ aliud corpus, cuius maſſa $= \mathfrak{C}$ ad diſtantiam $= a$ in circulo ita circumferri vt tempore t angulum ipſi proportionalem τ abſoluat, atque noſtrae formulae ad hunc caſum accommodabuntur ſtatuendo $A = \mathfrak{A}$, $C = \mathfrak{C}$ et $B = 0$, ita vt tum fiat $v = a$ et $d\Phi = d\tau$. Motus igitur, quem cognitum aſſumimus, his duabus aequationibus continetur:

$$v^4 d\Phi^2 = 2\alpha D dt^2 \text{ et } dv^2 + vv d\Phi^2 = 2\alpha dt^2 (\mathfrak{A}+\mathfrak{C})\left(\frac{1}{v}-\frac{2}{f}\right)$$

vbi primum conſtantes D et f huic caſui conuenienter definiri oportet. Hunc in finem ex priori valor $2\alpha dt^2 = \frac{v^4 d\Phi^2}{D}$ in altera ſubſtitutus dat: $dv^2 + vv d\Phi^2 = \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{C})v^4 d\Phi^2}{D}\left(\frac{1}{v}-\frac{2}{f}\right)$

ſeu

ſeu $Df dv^2 + Dfvv d\Phi^2 = (\mathfrak{A}+\mathfrak{C})v^3 d\Phi^2 (f-v)$ vnde colligitur

$$d\Phi = \frac{dv\sqrt{Df}}{v\sqrt{(\mathfrak{A}+\mathfrak{C})v(f-v)-Df}}$$

cui aequationi differentiali ſatis fit tribuendo ipſi v eiusmodi valorem conſtantem, quo denominator euanescat, verum alio loco oſtendi, hanc ſolutionem in integrali admitti non poſſe, niſi iſte denominationis factor euanescens ad minimum vnius ſit dimenſionis, vnde neceſſe eſt, vt poſt ſignum radicale idem factor occurrat geminatus ſeu quadratus, vel quod eodem redit, vt etiam differentiale quantitatis poſt ſignum poſitae eundem inuoluat factorem. Poſito ergo hoc differentiali $= 0$, fit $v = \frac{1}{2}f$ quare cum per hypotheſin eſſe debeat $v = a$, erit $f = 2a$, quo caſu ipſe denominator fit $(\mathfrak{A}+\mathfrak{C})aa - 2Da$ nihilo aequandus, ita vt ſit $D = \frac{1}{2}(\mathfrak{A}+\mathfrak{C})a$. Iam in alterutra aequatione ſtatuatur $v = a$ et $d\Phi = d\tau$, eritque $a^4 d\tau^2 = \alpha(\mathfrak{A}+\mathfrak{C})a dt^2$ ſeu $\alpha dt^2 = \frac{a^3 d\tau^2}{\mathfrak{A}+\mathfrak{C}}$.

XXII

Cum igitur ob motum iſtum cognitum ad datum quoduis tempus t innotescat motus medius τ, hic loco temporis in noſtrum calculum introducetur, ſi modo vbique loco αdt^2 ſcribatur valor modo inuentus $\frac{a^3 d\tau^2}{\mathfrak{A}+\mathfrak{C}}$. Statuamus ergo ad noſtras formulas ſimpliciores reddendas primo $\frac{A+C}{\mathfrak{A}+\mathfrak{C}} = m$, deinde $B = n(A+C)$, vt fiat $\alpha dt^2(A+C) = ma^3 d\tau^2$ et $\alpha B dt^2 = mna^3 d\tau^2$ vbi notandum eſt, perturba-

 tiones

tiones fore minimas, si termini numero n affecti fuerint minimi. Nostrae ergo aequationes sequentes induent formas:

1°. $v^4 d\Phi^2 = -2mna^3 d\tau^2 \int v^3 u d\Phi \sin.\nu \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$

2°. $dv^2 + vv d\Phi^2 = 2ma^3 d\tau^2 \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{f}\right) - 2mna^3 d\tau^2 \int \frac{v\,dv}{w^3}$

$$+ 2mna^3 d\tau^2 \int u (dv \cos.\mu - v d\Phi \sin.\nu) \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$$

3°. $d\psi = -mna^3 d\tau^2 . \frac{u \sin.\sigma \sin.(\theta - \psi)}{v d\Phi} \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$

4°. $\frac{d\omega}{\sin.\omega} = -mna^3 d\tau^2 . \frac{u \cos.\sigma \sin.(\theta - \psi)}{v d\Phi} \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) = \frac{d\psi}{\tan.\sigma}$

5°. $d\sigma = d\Phi + mna^3 d\tau^2 \cos.\omega . \frac{u \sin.\sigma \sin.(\theta - \psi)}{v d\Phi} \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) = d\Phi - d\psi \cos.\omega$.

Hisque aequationibus totus corporis Z motus cum omnibus perturbationibus ab actione corporis S orivndis determinatur: vbi imprimis obseruetur formulas integrales, quibus binae priores aequationes sunt affectae, ad perturbationes tantum pertinere ideoque sufficere si earum valores proxime veri colligantur, ex quo his integrationibus negotium approximationis vix impediri est censendum. Mox autem methodum exponam calculum adeo ab his integralibus liberandi.

XXIII.

Statuamus tantisper ad abbreuiandum:

$$\int v^3 u d\Phi \sin.\nu \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) = P$$

$$\int \frac{v\,dv}{w^3} = Q$$

$$\int u (dv \cos.\mu - v d\Phi \sin.\nu) \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) = R$$

vt

vt binae aequationes priores contrahantur in has formas:

1°. $v^4 d\Phi^2 = 2ma^3 d\tau^2 (D - nP)$

2°. $dv^2 + v^2 d\Phi^2 = 2ma^3 d\tau^2 \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{f} - n(Q - R)\right)$

quae solae totum negotium conficerent, si corpus Z in eodem plano mouetur, in quo corpus perturbans S circumferri assumimus; reliquae aequationes ad motum, vt dicitur, latitudinis pertinent, earumque resolutio multo minoribus laborat difficultatibus, vnde omne studium in binis prioribus est consumendum. Inde autem eliminato elemento $d\tau$ haec nascitur aequatio

$$(D - nP)(dv^2 + vv d\Phi^2) = v^4 d\Phi^2 \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{f}\right) - n(Q - R))$$

vnde elicitur:

$$d\Phi = \frac{dv \sqrt{(D - nP)}}{v \sqrt{\left(v - \frac{vv}{f} - nvv(Q - R) - D + nP\right)}}$$

hincque porro $2ma^3 d\tau^2 = \frac{vv\,dv^2}{v - \frac{vv}{f} - nvv(Q - R) - D + nP}$

seu $a d\tau \sqrt{2ma} = \frac{v\,dv}{\sqrt{(-D + nP + v - vv(\frac{1}{f} + nQ - nR))}}$

quarum formularum integratio foret in promtu, si fractio n vel perturbationes in nihilum abirent.

XXIV.

Aequationem illam hac forma repraesentemus:

$$\frac{dv}{vv} \sqrt{(D - nP)} = d\Phi \sqrt{\left(-\frac{1}{f} + n(R - Q) + \frac{1}{v} - \frac{D + nP}{vv}\right)}$$

ex

ex qua discimus distantiam $AZ = v$ tum fieri maximam vel minimam, quando quantitas posteriori signo radicali inuoluta euanescit. Haec autem loca non solum in Astronomia maximi sunt momenti, quia tum corpus Z in absidibus versari dicitur, sed etiam inde eiusmodi egregia subsidia petere licet, quibus motus perturbatus admodum concinne cum motu regulari comparari, eiusque aberrationes ab eo assignari queant. Commodissime hoc praestabitur introducendo in calculum nouum angulum ϑ, qui in Astronomia anomalia vera appellatur, et ita est comparatus, vt eo vel euanescente vel ad duos rectos excrescente distantia v fiat vel minima vel maxima. Quo igitur motus propius ad similitudinem motus regularis in ellipsi facti reducatur, statuamus $v = \frac{p}{1 + q\cos.\vartheta}$, ita vt nunc motus conformis sit motui regulari in eiusmodi ellipsi, cuius semiparameter sit $= p$, excentricitas $= q$, idcoque semi-axis transuersus $= \frac{p}{1 - qq}$, anomalia vera seu angulo ab axe existente $= \vartheta$. Facile autem perspicitur ob perturbationes hanc ellipsis speciem continuo mutari, vnde non solum anomalia ϑ sed etiam litterae p et q vt variabiles sunt spectandae, quarum variationes iam sum inuestigaturus.

XXV.

Quo haec inuestigatio facilior reddatur, ponamus breuitatis gratia:

$$\int -n(R - Q) = M \text{ et } D - nP = N$$

vt

vt habeamus hanc formam euoluendam:

$$\frac{dv}{vv}\sqrt{N} = d\Phi\sqrt{\left(-M + \frac{1}{v} - \frac{N}{vv}\right)}.$$

Quoniam igitur nunc ponimus $v = \frac{p}{1 + q\cos.\vartheta}$ seu $\frac{1}{v} = \frac{1 + q\cos.\vartheta}{p}$ per hypothesin tam casu $\vartheta = 0$, quo fit $\frac{1}{v} = \frac{1 + q}{p}$, quam casu $\vartheta = 180^\circ$, quo casu fit $\frac{1}{v} = \frac{1 - q}{p}$ quantitas $-M + \frac{1}{v} - \frac{N}{vv}$ in nihilum abire debet, ex quo hae duae nascuntur aequationes:

$$-M + \frac{1 + q}{p} - \frac{N(1 + q)^2}{pp} = 0 \text{ et}$$

$$-M + \frac{1 - q}{p} - \frac{N(1 - q)^2}{pp} = 0$$

quarum differentia dat $\frac{2q}{p} - \frac{4Nq}{pp} = 0$, ita vt sit $p = 2N$, seu $N = \frac{1}{2}p$, vnde fit $M = \frac{1 + q}{p} - \frac{(1 + q)^2}{2p} = \frac{1 - qq}{2p}$.

Quodsi ergo nostrae ellipsis semiaxis transuersus ponatur $= r$ vt sit $r = \frac{p}{1 - qq}$, erit $M = \frac{1}{2r}$, ideoque:

$$\int -n(R - Q) = \frac{1 - qq}{2p} = \frac{1}{2r} \text{ et } D - nP = \frac{1}{2}p.$$

XXVI.

His valoribus in nostra aequatione substitutis habebimus:

$$\frac{dv}{vv}\sqrt{\tfrac{1}{2}p} = d\Phi\sqrt{\left(\frac{-1 + qq}{2p} + \frac{1}{v} - \frac{p}{2vv}\right)}$$

in cuius posteriori membro primum pro $\frac{1}{v}$ valorem $\frac{1 + q\cos.\vartheta}{p}$ scribamus, vt fiat:

$$\frac{dv}{vv}\sqrt{\tfrac{1}{2}p} = d\Phi\sqrt{\left(\frac{-1 + qq}{2p} + \frac{1 + q\cos.\vartheta}{p} - \frac{1 - 2q\cos.\vartheta - qq\cos.\vartheta^2}{2p}\right)} \text{ ideoque}$$

$$\frac{dv}{vv}\sqrt{\tfrac{1}{2}p} = d\Phi\sqrt{\frac{qq - qq\cos.\vartheta^2}{2p}} = \frac{q\,d\Phi\sin.\vartheta}{\sqrt{2p}}$$

ita

ita vt sit $\frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\Phi}{p}$ sin. υ; vnde vtique quod nobis erat propositum, agnoscimus, scilicet quoties anomaliae υ sinus euanescit, simul distantiae v differentiale in nihilum abire, eamque propterea vel maximam vel minimam euadere. Tum vero hinc in genere incrementum distantiae v ad elementum $d\Phi$ reducitur, quod ipsum iam cum elemento cognito $d\tau$ ita comparatur, vt ob $D - nP = \frac{1}{2}p$ sit

$$v^4 d\Phi^2 = m a^3 p\, d\tau^2, \text{ seu } vv\,d\Phi = a\,d\tau \sqrt{map}.$$

Cum autem sit $\frac{1}{v} = \frac{1 + q\cos.\upsilon}{p}$ erit

$$\frac{dv}{vv} = \frac{dp(1 + q\cos.\upsilon)}{pp} - \frac{dq\cos.\upsilon + q\,d\upsilon\sin.\upsilon}{p}$$

quae forma ipsi $\frac{q\,d\Phi}{p}$ sin. υ aequalis facta, praebet

$$q(d\Phi - d\upsilon)\sin.\upsilon = \frac{dp}{p}(1 + q\cos.\upsilon) - dq\cos.\upsilon = \frac{dp}{v} - dq\cos.\upsilon$$

qua noua differentialium relatio continetur.

XXVII.

Reliquas determinationes peti oportet ex formulis supra inuentis:

$$p = 2D - 2nP \text{ et } \frac{1}{r} = \frac{1 - qq}{p} = \frac{1}{f} - 2n(R - Q)$$

quae differentiatae et loco P, Q, R valores supra exhibitos restituendo suppeditant,

$$dp = -2n\,dP = -2nv^3 u\,d\Phi \sin.\nu\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$$

$$d.\frac{1}{r} = d.\frac{1 - qq}{p} = 2n\,dQ - 2n\,dR =$$

$$\frac{2nv\,dv}{w^3} - 2nu(dv\cos.\mu - v\,d\Phi\sin.\nu)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right).$$

Cum

Cum autem sit $dv = \frac{qvv\,d\Phi\sin.\upsilon}{p} = \frac{qvv\,d\Phi\sin.\upsilon}{1 + q\cos.\upsilon}$ etiam hoc posterius differentiale ad elementum $d\Phi$ reducitur fietque:

$$d\frac{1}{r} = d.\frac{1 - qq}{p} = \frac{2nqv^3 d\Phi\sin.\upsilon}{pw^3} - 2nvu\,d\Phi\left(\frac{q\cos.\mu\sin.\upsilon}{1 + q\cos.\upsilon} - \sin.\nu\right)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right).$$

Est vero $d.\frac{1 - qq}{p} = \frac{-dp}{pp}(1 - qq) - \frac{2q\,dq}{p}$, ideoque

$$q\,dq = -\frac{dp}{2p}(1 - qq) - \frac{p}{2}d.\frac{1 - qq}{p} \text{ vnde colligitur}$$

$$q\,dq = +\frac{n(1 - qq)}{p}v^3 u\,d\Phi\sin.\nu\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) - \frac{nqv^3 d\Phi\sin.\upsilon}{w^3}$$

$$+ npvu\,d\Phi\left(\frac{q\cos.\mu\sin.\upsilon}{1 + q\cos.\upsilon} - \sin.\nu\right)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$$

quae ob $v = \frac{p}{1 + q\cos.\upsilon}$ contrahitur in hanc

$$q\,dq = nv^2 u\,d\Phi\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\left(q\cos.\mu\sin.\upsilon - \frac{q\sin.\nu(q + 2\cos.\upsilon + q\cos.\upsilon^2)}{1 + q\cos.\upsilon}\right) - \frac{nqv^3 d\Phi\sin.\upsilon}{w^3}$$

quae per q diuisa dat

$$dq = nv^2 u\,d\Phi\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\left(\cos.\mu\sin.\upsilon - \frac{\sin.\nu(q + 2\cos.\upsilon + q\cos.\upsilon^2)}{1 + q\cos.\upsilon}\right) - \frac{nv^3 d\Phi\sin.\upsilon}{w^3}.$$

Denique his valoribus in formula $q(d\Phi - d\upsilon)\sin.\upsilon = \frac{dp}{v} - dq\cos.\upsilon$ substitutis obtinebitur per sin. υ diuisione facta

$$q(d\Phi - d\upsilon) = \frac{nv^3 d\Phi\cos.\upsilon}{w^3} - nv^2 u\,d\Phi\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\left(\cos.\mu\cos.\upsilon + \frac{\sin.\nu\sin.\upsilon(2 + q\cos.\upsilon)}{1 + q\cos.\upsilon}\right).$$

XXVIII.

Nunc igitur omnium quantitatum, quae in nostrum calculum ingrediuntur, incrementa momentanea ad idem elementum $d\Phi$, quod eodem tempusculo

pusculo dt, quo secundum motum medium hic introductum angulus $d\tau$ absoluitur, reduximus, vnde pro quouis tempore minimo illa incrementa facile assignari poterunt. Primo igitur relatio inter angulum elementarem $d\Phi$ et $d\tau$ hac formula exprimitur:

$$vvd\Phi = ad\tau\sqrt{map} \text{ vnde fit } ma^2d\tau^2 = \tfrac{1}{p}v^4d\Phi^2$$

secundo si statuamus $v = \frac{p}{1+q\cos.\upsilon}$ et $r = \frac{p}{1-qq}$ erit

1°. $dp = -2nv^3ud\Phi\sin.\nu\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)$

2°. $d.\frac{1}{r} = \frac{2nqv^3d\Phi\sin.\upsilon}{p\,w^3} - \frac{2nv^3ud\Phi}{p}\left(q\cos.\mu\sin.\upsilon-(1+q\cos.\upsilon)\sin.\nu\right)\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)$

3°. $dq = nv^3ud\Phi\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\left(\cos.\mu\sin.\upsilon-\frac{(q+2\cos.\upsilon+q\cos.\upsilon^2)\sin.\nu}{1+q\cos.\upsilon}\right) - \frac{nv^3d\Phi\sin.\upsilon}{w^3}$

4°. $d\upsilon = d\Phi - \frac{nv^3d\Phi\cos.\upsilon}{q\,w^3} + \frac{nv^3ud\Phi}{q}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\left(\cos.\mu\cos.\upsilon + \frac{(1+q\cos.\upsilon)\sin.\nu\sin.\upsilon}{1+q\cos.\upsilon}\right)$

existente

$$\cos.\mu = \cos.\sigma\cos.(\theta-\psi) + \sin.\sigma\cos.\omega\sin.(\theta-\psi)$$

et $\sin.\nu = \sin.\sigma\cos.(\theta-\psi) - \cos.\sigma\cos.\omega\sin.(\theta-\psi)$

vbi notetur $d\Phi - d\upsilon$ designare promotionem momentaneam lineae absidum in ipsa orbita.

Tertio pro motu in latitudinem has habebimus formulas:

1°. $d\psi = -\frac{nv^3ud\Phi\sin.\sigma\sin.(\theta-\psi)}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)$

2°. $\frac{d\omega}{\sin.\omega} = -\frac{nv^3ud\Phi\cos.\sigma\sin.(\theta-\psi)}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right) = \frac{d\psi}{\tan.\sigma}$

3°. $d\sigma = d\Phi + \frac{nv^3ud\Phi\cos.\omega\sin.\sigma\sin.(\theta-\psi)}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)$

seu $d\sigma = d\Phi - d\psi\cos.\omega$.

XXIX.

XXIX.

Si integratio harum formularum absolui posset, nihil amplius in hac inuestigatione esset desiderandum, cum exinde omnis generis perturbationes, quantumuis fuerint magnae, definire liceret. Cum autem vires Analyseos nondum eousque increuerint, ad approximationes confugere conuenit, quae quidem eo feliciori successu suscipi poterunt, quo minores fuerint perturbationes: quia enim tunc valores quantitatum p et q paruillulum mutantur, eas in integratione formularum littera n affectarum sine errore tanquam constantes spectare licet, quia etiam postmodum methodis vsitatis correctiones necessariae haud difficulter elicientur. Interim tamen si excentricitas q fuerit valde magna, difficultates occurrunt, quas tamen certis artificiis adhibendis superare licebit, quae quidem res optime succedit, si excentricitas q parum ab vnitate discrepat, vti fit in orbitis fere parabolicis cometarum. Maiores autem difficultates se exerunt, quando excentricitas q est quam minima, quia tum variationes anomaliae υ maxime increscunt, verumtamen si vsus veniat, et hic remedium sperari posset. Maxime vero hae operationes ob partem $\frac{1}{w^3}$ impediuntur, quam nisi commode in seriem satis conuergentem conuertere liceat, de integratione omnino erit desperandum, neque tum alia via superesse videtur, nisi vt ex ipsis his formulis differentialibus singulae variationes pro temporis interuallis satis exiguis de-

 fini-

finiantur, earumque summatione integrationis negotium compensetur, vti alia occasione fusius docui.

Applicatio huius Theoriae ad motum Lunae.

XXX.

Statuatur in A centrum terrae, cuius massa sit $=A$, et dum tabula planum ecliptica refert sit nunc quidem sol in S cuius massa sit $=B$, pro quo loco definiendo dirigatur recta AB ad coeli punctum fixum veluti primam stellam arietis, ac ponatur

longitudo solis seu angulus $BAS=\theta$

et distantia solis a terra seu $AS=u$.

Quae elementa vt ex theoria solis definiantur, ponatur semiaxis transuersus orbitae solis $=a$, semiparameter orbitae solis $=b$, excentricitas orbitae eius $=e$, et anomalia vera $=v$; eritque $u=\frac{b}{1-e\cos.v}$. Tum vero si sol secundum motum medium tempore infinite paruo angulum $d\tau$ percurrere statuatur erit $uud\theta=ad\tau\sqrt{ab}$, et $dv=d\theta$, nisi ad motum apogei solis respicere velimus. Est vero $b=a(1-ee)$; vnde fit

$u=\frac{a(1-ee)}{1-e\cos.v}$, et $d\tau=\frac{d\theta(1-ee)^{\frac{3}{2}}}{(1-e\cos.v)^2}$ atque $dv=d\theta$ proxime,

vbi

vbi notetur, neglecta excentricitate orbitae solaris fore $u=a$ et $d\theta=d\tau$.

XXXI.

Sit porro in Z luna, cuius massa $=C$, ac ponatur $\frac{B}{A+C}=n$ existente $\frac{A+C}{A+B}=m$, quoniam angulus elementaris $d\tau$ ex motu medio solis est desumtus, ita, vt sit $\mathfrak{A}=A$ et $\mathfrak{C}=B$; vnde prodit $\frac{B}{A+B}=mn$ seu $m=\frac{1}{n}$, siquidem massa solis B prae massa terrae A vt infinita spectari potest. Iam pro loco lunae statuatur:

longitudo nodi ascendentis seu angulus $BAN=\psi$

inclinatio orbitae lunae ad ecliptica seu $YOZ=\omega$

et argumentum latitudinis seu $NAZ=\sigma$

vnde fit:

longitudo lunae $=\psi+\text{Ang.tang.}(\text{tang.}\sigma\cos.\omega)$

et latitudo borealis $=\text{Ang.sin.}(\sin.\sigma\sin.\omega)$.

Deinde sit distantia lunae a terra $AZ=v$ et distantia lunae a sole $SZ=w$, ac definitis hinc duobus angulis μ et ν vt sit

$$\cos.\mu=\cos.\sigma\cos.(\theta-\psi)+\sin.\sigma\cos.\omega\sin.(\theta-\psi)$$

$$\sin.\nu=\sin.\sigma\cos.(\theta-\Phi)-\cos.\sigma\cos.\omega\sin.(\theta-\psi)$$

erit $ww=vv+uu-2vu\cos.\mu$ seu $w=\sqrt{(vv+uu-2vu\cos.\mu)}$.

XXXII.

His positis si ponamus pro tempore praesente $v=\frac{p}{1-q\cos.v}$ vt p denotet orbitae lunaris parame-

 trum.

trum dimidiam, (q eius excentricitatem, et angulus ϑ eius anomaliam veram; ideoque iam q negatiue accipi debeat; tum vero sit $d\Phi$ angulus a luna circa terram eodem tempore descriptus, quo sol conficit angulum $d\tau$, motu medio. Hinc ergo pro motu lunae definiendo hae habebuntur aequationes:

1°. $vvd\Phi = ad\tau\sqrt{map} = ad\tau\sqrt{\frac{aP}{n}}$

2°. $dp = -2nv^2ud\Phi \sin.\nu\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$

3°. $dq = -nv^2ud\Phi\left(\cos.\mu \sin.\vartheta + \frac{(q-2\cos.\vartheta+q\cos.\vartheta^2)\sin.\nu}{1-q\cos.\vartheta}\right)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$
$+ \frac{nv^3d\Phi \sin.\vartheta}{w^3}$

4°. $\frac{dv}{vv} = -\frac{qd\Phi \sin.\vartheta}{p}$ seu $d.\frac{1}{v} = +\frac{qd\Phi \sin.\vartheta}{p}$

5°. $d\vartheta = d\Phi + \frac{nv^3d\Phi\cos.\vartheta}{qw^3} - \frac{nv^2ud\Phi}{q}\left(\cos.\mu\cos.\vartheta + \frac{(2-q\cos.\vartheta)\sin.\nu\sin.\vartheta}{1-q\cos.\vartheta}\right)$
$\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$

denotante $d\Phi - d\vartheta$ promotionem momentaneam lineae absidum seu apogei lunae in sua orbita:

6°. $d\psi = \frac{-nv^2ud\Phi \sin.\sigma \sin.(\theta-\psi)}{p}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$

7°. $\frac{d\omega}{\sin.\omega} = \frac{d\psi}{\tang.\sigma} = \frac{-nv^2ud\Phi\cos.\sigma \sin.(\theta-\psi)}{q}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$

8°. $d\sigma = d\Phi - d\psi\cos.\omega = d\Phi + \frac{nv^2ud\Phi \sin.\sigma\cos.\omega\sin.(\theta-\psi)}{p}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$.

XXXIII.

Incipiamus ab euolutione formulae $\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}$; quae inde facile instituitur, quod distantia u semper est praemagna prae distantia v; vnde fit

$$\frac{1}{w^3} = (uu - 2vu\cos.\mu + vv)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{u^3} + \frac{3v\cos.\mu}{u^4} + \frac{3vv(5\cos.\mu^2-1)}{2u^5}$$

ideoque $\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3} = \frac{3v\cos.\mu}{u^4} + \frac{3vv(5\cos.\mu^2-1)}{2u^5}$.

Atque

Atque formulae n°. 3 et n°. 5 abibunt in has:

3°. $dq = \frac{nv^2d\Phi \sin.\vartheta}{u^3}\left(1 - 3\cos.\mu^2 + \frac{3v\cos.\mu}{2u}(3 - 5\cos.\mu^2)\right)$
$- \frac{nvvd\Phi \sin.\nu}{1-q\cos.\vartheta}(q - 2\cos.\vartheta + q\cos.\vartheta^2)\left(\frac{3v\cos.\mu}{u^3} + \frac{3vv(5\cos.\mu^2-1)}{2u^4}\right)$

5°. $d\vartheta = d\Phi + \frac{nv^3d\Phi\cos.\vartheta}{qu^3}\left(1 - 3\cos.\mu^2 + \frac{3v\cos.\mu}{2u}(3 - 5\cos.\mu^2)\right)$
$- \frac{nvvd\Phi \sin.\nu \sin.\vartheta}{q(1-q\cos.\vartheta)}\left(\frac{3v\cos.\mu}{u^3} + \frac{3vv(5\cos.\mu^2-1)}{2u^4}\right)(2 - q\cos.\vartheta)$.

Ita vt hinc fit

$dq\cos.\vartheta + q'd\Phi - d\vartheta)\sin.\vartheta = 2nvvnd\Phi \sin.\nu\left(\frac{3v\cos.\mu}{u^3} + \frac{3vv(5\cos.\mu^2-1)}{2u^4}\right)$

quae expressio satis simplex deinceps vsum habere poterit.

XXXIV.

Deinde etiam notetur, cum inclinatio ω sit satis exigua ideoque $\cos.\omega = 1 - \frac{1}{2}\omega\omega$ fore proxime:

$$\cos.\mu = \cos.(\sigma - \theta + \psi) - \tfrac{1}{2}\omega\omega \sin.\sigma \sin.(\theta - \psi)$$
$$\sin.\nu = \sin.(\sigma - \theta + \psi) + \tfrac{1}{2}\omega\omega\cos.\sigma \sin.(\theta - \psi).$$