ſunt, quam ſimpliciſſimae reddantur. Veluti in caſu § 17. ſumſimus $q = \sqrt{\frac{u+1}{2}} + \sqrt{\frac{u-1}{2}}$, ſeu $qq = u + \sqrt{(uu-1)}$, in vltimo vero $q = u + \sqrt{(uu-1)}$: ibi nempe opus non erat, vt $x+y$ rationaliter exprimatur, vnde ſufficiebat ipſi qq formam $u + \sqrt{(uu-1)}$ tribui, hic vero neceſſe erat, vt $x+y$ rationalem conſequatur valorem.

23. Denique caſum ſimpliciorem praetermittere non poſſum, quo proponitur haec aequatio $\frac{dx}{\sqrt{(A+Cxx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A+Cyy)}}$, quam ita refero $\frac{ydx}{xdy} = \sqrt{\frac{Ayy+Cxxyy}{Axx+Cxxyy}} = \sqrt{\frac{P+Q}{P-Q}}$; poſito ergo $x = p(\sqrt{\frac{q+1}{2}} - \sqrt{\frac{q-1}{2}})$ et $y = p(\sqrt{\frac{q+1}{2}} + \sqrt{\frac{q-1}{2}})$ fiet $\frac{-pdq}{2dp\sqrt{(qq-1)}} = \frac{P-\sqrt{(PP-QQ)}}{Q}$ exiſtente

$$\frac{P}{Q} = \frac{Aq+Cpp}{A\sqrt{(qq-1)}} \text{ et } \frac{\sqrt{(PP-QQ)}}{Q} = \frac{\sqrt{(2ACppq+CCp^4+AA)}}{A\sqrt{(qq-1)}}$$

vnde ſumto $pp = r = xy$ erit

$$o = \frac{rdq}{dr} + \frac{Aq+C-\sqrt{(2ACrq+CCrr+AA)}}{A} \text{ hincque}$$

$$\frac{A(rdq+qdr)+Crdr}{\sqrt{(2ACrq+CCrr+AA)}} = dr \text{ cuius integrale eſt}$$

$$Cr+F = \sqrt{(2ACrq+CCrr+AA)} \text{ ſeu}$$

$$FF+2CFr = 2ACrq+AA$$

eſt vero $r = xy$ et $q = \frac{xx+yy}{2xy}$ vnde aequatio integralis eſt $FF + 2CFxy = AA + AC(xx+yy)$.

Sicque haec comparatio inter x et y, quae alias per logarithmos vel arcus circulares oſtendi ſolet, hic algebraice eſt eruta.

DE

DE ARCVBVS CVRVARVM AEQVE AMPLIS EORVMQVE COMPARATIONE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Amplitudinem arcus cuiuscunque lineae curuae cum Celeb. *Ioh. Bernoullio* b. m. voco angulum, quem rectae ad eius terminos normales inter ſe conſtituunt. Ita ſi fuerit AM arcus lineae cuiuscunque curuae, atque ad eius terminos A et M rectae normales ducantur, AO et MO in O concurrentes, angulus AOM erit amplitudo arcus AM. Haec amplitudinis idea perquam ingenioſe ad curuas dimetiendas eſt introducta, propterea quod non vti ceterae relationes, quibus natura curuarum per coordinatas exprimi ſolet, ab hypotheſibus arbitrariis pendet; dum enim relatio inter coordinatas, prouti axis eiusque initium diuerſimode accipitur, plurimum variare poteſt manente eadem linea curua, notio amplitudinis nulli huiusmodi varietati eſt obnoxia, niſi forte quod alio atque alio puncto curuae A pro initio aſſumto angulus AOM quantitate conſtante augeri diminuiue queat, vnde ta- Tab. I. Fig. 1.

 men

men vix ſenſibilis mutatio in calculum redundat. Ex quó amplititudo eſſentialiter ad naturam curuae pertinere eſt cenſenda, dum coordinatae aliaeque relationes extrinſecus pro arbitrio noſtro eo traducuntur.

2. Aeque eſſentialis autem notio amplitudinis lineis curuis eſt ſtatuenda atque notio curuedinis, cuius menſura per radium oſculi exhiberi ſolet quippe qui ex amplitudine expedite definitur. Poſito enim arcu ipſo $AM=s$, eiusque amplitudine ſeu angulo $AOM=\Phi$, ſit MR radius oſculi curvae in M, quo ſcilicet elementum curuae $Mm=ds$, tanquam arcus circuli centro R deſcribi eſt putandum: et cum arcus infinite parum aucti AMm amplitudo ſit angulus $Aom=\Phi+d\Phi$, fiet angulus $MRm=d\Phi$, hincque $RM.d\Phi=Mm=ds$; vnde prodit radius oſculi $MR=\frac{ds}{d\Phi}$. Viciſſim igitur ſi radius oſculi MR vocetur $=r$, ob $r=\frac{ds}{d\Phi}$ habebitur $d\Phi=\frac{ds}{r}$, qua formula ex curua s et radio oſculi r eius amplitudo definitur; ac denique ex amplitudine Φ et radio osculi r ipſa curuae longitudo ita definitur, vt ſit $ds=rd\Phi$ ſeu $s=\int rd\Phi$.

3. Ponamus igitur dari pro curua AM aequationem inter ipſum eius arcum $AM=s$, eiusque amplitudinem ſeu angulum $AOM=\Phi$, quae aequatio ſit ſaltem differentialis; atque tali aequatione natura curuae ita eſſentialiter exprimetur, vt eius vera curuatura vbique quaſi ſponte ſe offerat, nullumque diſcrimen a poſitionibus arbitrariis oriundum locum inueniat; niſi quod dum longitudo arcus ab alio principio A computatur, quo quantitas s augmentum vel decrementum conſtans accipit, ſimul angulus Φ quantitate conſtante ſiue augeatur, ſiue diminuatur. Atque ex tali aequatione facili negotio aequatio inter coordinatas conſuetas elicietur; ſi enim recta AO pro axe aſſumatur, in eumque ex M perpendiculum MP demittatur, vt habeantur coordinatae orthogonales $AP=x$, $PM=y$, ob angulum $AMP=AOM=\Phi$, erit $dx=ds\,\text{ſin.}\Phi$ et $dy=ds\,\text{coſ.}\Phi$; vnde ob aequationem datam inter ds et angulum Φ habebuntur ipſae coordinatae:

$$AP=x=\int ds\,\text{ſin.}\Phi \quad \text{et} \quad PM=y=\int ds\,\text{coſ.}\Phi.$$

Vel ſi in aequatione inter s et Φ ſcribatur $\frac{dx}{ds}$ pro ſin Φ et $\frac{dy}{ds}$ pro coſ. Φ, orietur aequatio differentialis inter coordinatas x et y ob $ds^2=dx^2+dy^2$.

4. Hinc etiam facillime radius oſculi per coordinatas x et y exprimitur; cum enim ſit radius oſculi $r=\frac{ds}{d\Phi}$, ob ſin. $\Phi=\frac{dx}{ds}$, habebimus differentiando: $d\Phi\,\text{coſ.}\Phi=d.\frac{dx}{ds}$; at eſt coſ. $\Phi=\frac{dy}{ds}$, ex quo obtinebitur:

$$d\Phi=\frac{ds}{dy}d.\frac{dx}{ds} \quad \text{et} \quad r=\frac{dy}{d.\frac{dx}{ds}},$$

quae eſt formula nulli ambiguitati obnoxia. Simili autem modo differentiando formulam coſ. $\Phi=\frac{dy}{ds}$ habe-

habebimus $d\Phi \,\text{fin.}\, \Phi = -d.\frac{dy}{ds}$ hincque ob $\text{fin}\,\Phi = \frac{dx}{ds}$ erit

$$d\Phi = -\frac{ds}{dx} d. \frac{dy}{ds} \text{ et } r = \frac{-dx}{d.\frac{dy}{ds}}.$$

quae binae formulae inter fe conueniunt. Pofito enim $dy = p\,dx$, erit $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(1+pp)}}$ et $\frac{dy}{ds} = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$; ficque vtrinque elicitur: $r = \frac{-dx(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}{dp}$.

5. Pro circulo igitur, quoniam eius radius osculi r vbique eft conftans quippe radio, qui fit $= a$ aequalis, habebitur ftatim $a = \frac{ds}{d\Phi}$, hincque $s = a\Phi$; feu quilibet circuli arcus fuae amplitudini eft aequalis. Ex hac fcilicet notiffima circuli proprietate fequitur, omnes circuli arcus aeque amplos fimul inter fe effe aequales; neque vlla alia exiftit linea curua, in qua omnes arcus aeque ampli inter fe effent aequales. Quae proprietas etiam, cum angulus a tangentibus extremis AT et MT ad T formatus fit complementum amplitudinis AOM $= \Phi$ ad duos rectos, ita enunciari poteft, vt datus angulus ATM, vtcunque peripheriae circuli applicetur, ita vt fuis cruribus eam tangat, femper aequales arcus intercipiat. Probe autem notetur, circulum hac proprietate gaudere, quantuscunque angulus ATM accipiatur: nam fi huic angulo ATM determinata quaedam quantitas tribuatur, aliae fortaffe quoque exiftent lineae curuae, ad quas hic angulus applicatus etiam perpetuo aequales arcus intercipiat.

6. Hanc

6. Hanc igitur quaeftionem hic potiffimum tractandam fufcepi, vtrum praeter circulum aliae dentur lineae curuae, ad quas datus angulus ATM ita applicatus, vt cruribus fuis curuam tangat, continuo arcus aequales intercipiat? tum vero fi tales dentur, quomodo eae inueftigari queant? Vel vt hanc quaeftionem ad amplitudinis notionem reuocemus, fit data amplitudo $= \alpha$, quaeriturque, num praeter circulum aliae dentur lineae curuae, quarum omnes arcus eandem amplitudinem α habentes fint inter fe aequales? Nifi enim curuae tractus cufpidibus vel ramis in infinitum porrectis perturbetur, ab eius quouis puncto arcus abfcindi poteft, cuius amplitudo fit $= \alpha$; ficque in eadem curua exhiberi poterunt infiniti arcus eiusdem amplitudinis α, qui an omnes inter fe, nifi curua fuerit circulus, aequales effe queant? hic primum quaeritur.

7. Hanc autem quaeftionem affirmadam effe ex cafu quo amplitudo $\alpha = 180°$ affumitur, ftatim liquet, quippe quo tangentes AT et MT inter fe fiunt parallelae; aequalitas enim talium arcuum aeque amplorum adeo in ellipfi manifefto habet locum. Nam cum omnes diametri perimetrum ellipfis bifariam diuidant, quoniam tangentes ad terminos cuiusque diametri ductae funt inter fe parallelae, omnium femiffium ellipticarum eadem eft amplitudo 180°; ex quo perfpicuum eft ellipfin eiusmodi effe lineam curuam, cuius omnes arcus,

quorum

quorum amplitudo eſt $180°$ ſint inter ſe aequales. Eadem proprietate quoque erunt praeditae omnes aliae curuae in ſe redeuntes centro gaudentes, ex quo concludo etiam praeter circulum innumerabiles alias dari curuas, quarum omnes arcus aliam quandam datam amplitudinem habentes ſint inter ſe aequales. Verum mox patebit menſuram huius amplitudinis datae rationem rationalem ad angulum rectum tenere oportere.

Problema Generale.

Tab. I. Fig. 2. 8. *Inuenire lineam curuam* AMN, *cuius omnes arcus* AF, MN, *quorum eadem eſt amplitudo* $=\alpha$ *ſint inter ſe aequales.*

Solutio.

Sit arcus quicunque a puncto fixo A computatus $AM = s$ eiusque amplitudo $AOM = \Phi$, atque aequatio inter s et Φ eiusmodi eſſe debet, vt ſi loco Φ capiatur $\Phi + \alpha$, arcus s augmentum datum, quod ſit $= a$, accipiat; ſcilicet ſi a puncto indefinito M abſcindatur arcus MN iſti augmento a aequalis, vt eius amplitudo MLN futura ſit $= \alpha$, ideoque totius arcus $AMN = s + a$ amplitudo $= \Phi + \alpha$. Primum igitur patet huic conditioni ſatisfieri, ſi ſtatuatur $s = \frac{a\Phi}{\alpha}$, tum enim poſito $\Phi + \alpha$ loco Φ, arcus s abibit in $s + a$; hac autem poſitione curua quaeſita fit circulus; propterea quod radius

radius osculi $r = \frac{ds}{d\Phi}$ prodit conſtans $= \frac{a}{\alpha}$. Verum hic nobis eſt propoſitum praeter circulum eas inveſtigare lineas curuas, quae huic problemati ſatisfaciant, atque adeo eius ſolutionem generalem adornare.

9. Concipio igitur eiusmodi functionem anguli Φ, quae inuariata maneat, etiamſi pro Φ ſcribatur $\Phi + \alpha$, cuiusmodi functiones per ſinus, tangentesue exprimi poſſe intelliguntur, ſiquidem nouimus infinitorum angulorum communes eſſe ſinus vel tangentes. Quodſi igitur V ſit talis functio anguli Φ, manifeſtum eſt, et huiusmodi aequationem $s = \frac{a\Phi}{\alpha} + V$ conditiones problematis adimplere: nam ſi pro Φ ſcribatur $\Phi + \alpha$, prius membrum $\frac{a\Phi}{\alpha}$ abit in $\frac{a\Phi}{\alpha} + a$, alterum vero V manet inuariatum, vnde aucta amplitudine Φ angulo α, arcus amplitudini $\Phi + \alpha$ reſpondens erit $= \frac{a\Phi}{\alpha} + a + V$, ideoque priorem arcum s ſuperat quantitate conſtante a. Quare cuiuscunque arcus MN cuius amplitudo eſt $= \alpha$, longitudo erit conſtans $= a$, omnino vti problema poſtulat. Tota ergo huius problematis ſolutio huc redit, vt huiusmodi functiones idoneae V exquirantur, quae angulo $\Phi + \alpha$ aeque conueniant atque angulo Φ, ſeu quae nullam mutationem ſubeant, etiamſi pro Φ ſcribatur $\Phi + \alpha$.

10. Nouimus autem, ſi π denotet angulum duorum rectorum, angulum quemcunque ω tam ſinum quam coſinum et tangentem communes habere

bere cum omnibus his angulis innumerabilibus $2\pi+\omega$; $4\pi+\omega$; $6\pi+\omega$; $8\pi+\omega$; etc. qui in hac formula generali $2n\pi+\omega$ continentur, denotante n numerum quemcunque integrum, eumque tam negatiuum quam positiuum. Cum igitur anguli ω et $2n\pi+\omega$ communes habeant sinum, cosinum, et tangentem; etiam anguli $m\Phi$ et $m\Phi+m\alpha$ tam sinum quam cosinum habebunt communem, si fuerit $m\alpha=2n\pi$, ideoque $m=\frac{2n\pi}{\alpha}$. Ex quo tam sinus quam cosinus anguli $\frac{2n\pi\Phi}{\alpha}$ eiusmodi erunt functiones, quae nullam mutationem patiuntur, etiamsi pro Φ scribatur $\Phi+\alpha$. Pro n ergo successiue ponendo 1, 2, 3, 4 etc. tales functiones pro V adhibendae erunt:

$$\text{sin.}\tfrac{2\pi\Phi}{\alpha};\ \text{sin.}\tfrac{4\pi\Phi}{\alpha};\ \text{sin.}\tfrac{6\pi\Phi}{\alpha};\ \text{sin.}\tfrac{8\pi\Phi}{\alpha}\ \text{etc.}$$
$$\text{cos.}\tfrac{2\pi\Phi}{\alpha};\ \text{cos.}\tfrac{4\pi\Phi}{\alpha};\ \text{cos.}\tfrac{6\pi\Phi}{\alpha};\ \text{cos.}\tfrac{8\pi\Phi}{\alpha}\ \text{etc.}$$

11. Quia vero sinus et cosinus angulorum multiplorum per sinum et cosinum anguli simplicis rationaliter exprimuntur, eiusque functiones uniformes sunt censendae, patet functionem quamcunque rationalem tam sinus quam cosinus anguli $\frac{2\pi\Phi}{\alpha}$ pro V vsurpari posse, quoniam istius anguli tam sinus quam cosinus idem manet, etiamsi pro Φ scribatur $\Phi+\alpha$. Functionem autem hanc rationalem esse oportet, vt pro eodem angulo Φ vnicum valorem recipiat; ex quo functiones irrationales excluduntur; si enim tales admittere vellemus, ex angulo $\frac{2\pi\Phi}{\alpha}$ etiam sinus et cosinus angulorum submultiplorum deriuare possemus, qui tamen nullo modo satisfacerent. Pro V itaque assumi debet functio quaecunque rationalis quantitatum sin. $\frac{2\pi\Phi}{\alpha}$ et cos. $\frac{2\pi\Phi}{\alpha}$, vnde perspicuum est, nisi angulus α ad 2π rationem teneat rationalem, has quantitates ne quidem ex angulo Φ assignari posse. Assumta autem pro V tali functione quacunque, aequatio generalis pro curuis problemati satis facientibus erit $s=\frac{a\Phi}{\alpha}+V$.

12. Ex hac aequatione statim aequatio inter coordinatas solitas, elici potest, si enim rectam AE ad curuam in A normalem pro axe assumamus, ad eumque ex M applicatam MP normaliter ducamus, positis $AP=x$ et $PM=y$, ob $ds=\frac{a\,d\Phi}{\alpha}+dV$ habebimus:

$$x=\tfrac{a}{\alpha}(1-\text{cof.}\Phi)+\int dV\,\text{fin.}\Phi \text{ et } y=\tfrac{a}{\alpha}\,\text{fin.}\Phi+\int dV\,\text{cof.}\Phi$$

vnde si formulae $\int dV\,\text{fin.}\Phi$ et $\int dV\,\text{cof.}\Phi$ integrari, ac per sinus et cosinus anguli Φ, eiusue multiplorum exprimi queant, curuae prodibunt algebraicae problemati satisfacientes. Verum ex natura differentiationis constat, differentiale functionis V semper habiturum esse huiusmodi formam $U\,d\Phi$, in qua etiam U futura sit functio rationalis quantitatum sin $\frac{2\pi\Phi}{\alpha}$ et cos $\frac{2\pi\Phi}{\alpha}$. Neque vero hinc vicissim concludere licet, si U fuerit talis functio, etiam integrale

grale $V = \int U d\Phi$ huiusmodi fore functionem, quod tamen natura problematis postulat.

13. Quo nunc in indolem harum curuarum accuratius inquiramus, earum radium osculi contemplemur, qui in M fit $= r$. Cum igitur inuenimus $r = \frac{ds}{d\Phi}$, ob $ds = \frac{a d\Phi}{\alpha} + dV = \frac{a d\Phi}{\alpha} + U d\Phi$ posito $dV = U d\Phi$, erit $r = \frac{a}{\alpha} + U$. Hic igitur statim liquet, radios osculi in M et N inter se fore aequales, quia enim posito $\Phi + \alpha$ loco Φ quantitas U non mutatur, radius quoque osculi eundem retinebit valorem. Sumto ergo quoque ab principio A arcu AF amplitudinis $= \alpha$, vt sit ipse arcus $AF = a$, radius osculi in F aequalis erit radio osculi in A, et cum sit arcus $MN = AF = a$, erit arcus $FN =$ arcui AM. Quare cum radius osculi in N aequalis sit radio osculi in M, arcus FN non solum aequalis, sed etiam similis erit arcui AM, ex quo curua ita erit comparata, vt ex pluribus partibus similibus in eandem plagam se insequentibus componatur. Tot scilicet huiusmodi portiones similes habebit, quoties angulus α continetur in quatuor angulis rectis.

14. Haec consideratio similitudinis, si eam debita attentione tractemus, generalem nobis methodum suppeditabit omnes curuas algebraicas, quae quidem problemati satisfaciant, inueniendi; quae eo magis videtur notatu digna, quod non tam facile ex formulis principalibus supra exhibitis deriuari possit,

possit, vnde non contemnenda subsidia, quae per vniuersam Analysin eximiam vtilitatem sint habitura, hauriri poterunt. Quam ob causam hoc problema imprimis dignum existimaui, quod accuratius euolueretur. Verum ante, quam insignem hunc similitudinis vsum ostendam, haud abs re erit quasdam curuas algebraicas ex formulis primo inuentis elicere, quo simul pateat, quam restricta sit ista via ad curuas algebraicas nobis patefaciendas; hincque praestantia alterius methodi post declarandae eo magis elucescat. Hunc in finem pono breuitatis gratia $\frac{2\pi}{\alpha} = n$, vt V denotet functionem quamcunque vniformem binarum quantitatum $\sin. n\Phi$ et $\cos. n\Phi$: tum igitur erit vt vidimus:

$$x = \frac{a}{\alpha}(1 - \cos.\Phi) + \int dV \sin.\Phi \text{ et } y = \frac{a}{\alpha}\sin.\Phi + \int dV \cos.\Phi.$$

15. Vt iam hinc curuas algebraicas eruamus, pro V sumere poterimus huiusmodi formam:

$$V = \begin{matrix} +A\sin n\Phi + B\sin.2n\Phi + C\sin.3n\Phi + D\sin.4n\Phi + \text{etc.} \\ +\mathfrak{A}\cos.n\Phi + \mathfrak{B}\cos.2n\Phi + \mathfrak{C}\cos.3n\Phi + \mathfrak{D}\cos.4n\Phi + \text{etc.} \end{matrix}$$

atque hinc casum simplicissimum obtinebimus ponendo

$$V = \frac{2b}{n}\sin.n\Phi, \text{ vnde fit } dV = 2b\,d\Phi\cos.n\Phi.$$

Quo valore assumto erit

$$dV\sin\Phi = b\,d\Phi(\sin.(n+1)\Phi - \sin.(n-1)\Phi)$$
$$dV\cos.\Phi = b\,d\Phi(\cos.(n+1)\Phi + \cos.(n-1)\Phi)$$

 quae

quae formulae cum ſint integrabiles, habebimus:

$$x = \frac{a}{\alpha}(1 - \cos.\Phi) + b\left(\frac{1 - \cos.(n+1)\Phi}{n+1} - \frac{1 - \cos.(n-1)\Phi}{n-1}\right)$$
$$y = \frac{a}{\alpha}\sin.\Phi + b\left(\frac{\sin.(n+1)\Phi}{n+1} + \frac{\sin.(n-1)\Phi}{n-1}\right)$$

adiectis ſcilicet eiuſmodi conſtantibus, vt euaneſcente angulo Φ ſimul coordinatae x et y euaneſcant, vti earum aſſumtio poſtulat.

16. Conſideremus caſum, quo omnes arcus, quorum amplitudo eſt 180°, ſeu $\alpha = \pi$, inter ſe debent eſſe aequales; fiet igitur $\frac{2\pi}{\alpha} = n = 2$, et coordinatae curuae ſatisfacientis erunt:

$$x = \frac{a}{\alpha}(1 - \cos.\Phi) + \tfrac{1}{3}b(1 - \cos.3\Phi) - b(1 - \cos.\Phi)$$
$$y = \frac{a}{\alpha}\sin.\Phi + \tfrac{1}{3}b\sin.3\Phi + b\sin.\Phi.$$

Sumatur alia abſciſſa t vt ſit $x = \frac{a}{\alpha} - \frac{2}{3}b - t$, erit

$$t = (\tfrac{a}{\alpha} - b)\cos.\Phi + \tfrac{1}{3}b\cos.3\Phi$$
$$y = (\tfrac{a}{\alpha} + b)\sin.\Phi + \tfrac{1}{3}b\sin.3\Phi$$

ſit porro $\frac{a}{\alpha} - b = f$; $\frac{a}{\alpha} + b = g$, erit $b = \frac{g-f}{2}$, ideoque

$$t = f\cos.\Phi + \tfrac{g-f}{6}\cos.3\Phi;\quad y = g\sin.\Phi + \tfrac{g-f}{6}\sin.3\Phi$$

ſeu ob $\cos.3\Phi = -3\cos.\Phi + 4\cos.\Phi^3$ et $\sin.3\Phi = 3\sin.\Phi - 4\sin.\Phi^3$

$$t = \tfrac{3f-g}{2}\cos.\Phi + \tfrac{2g-2f}{3}\cos.\Phi^3;\quad y = \tfrac{3g-f}{2}\sin.\Phi + \tfrac{2f-2g}{3}\sin.\Phi^3.$$

Vnde eliminando angulo Φ inter coordinatas t et y oritur aequatio ſex dimenſionum.

17. Quoniam igitur nouimus huic caſui ellipſin ſatisfacere, quae vtique poſt circulum eſt curua ſimpliciſſima, euidens eſt; hanc methodum non eſſe aptam ad curuas algebraicas ſimpliciores exhibendas; atque multo minus ad hunc ſcopum pertingere poterimus, ſi angulus α fuerit minor pars aliquota totius peripheriae 2π. Ratio huius defectus in hoc eſt ſita, quod dum pro V functionem algebraicam quantitatum $\sin.n\Phi$ et $\cos n\Phi$ aſſumimus, alias lineas curuas non inueniamus, niſi quarum rectificatio a quadratura circuli pendeat; cum enim habeamus $s = \frac{a\Phi}{\alpha} + V$, quilibet arcus harum curuarum erit aggregatum ex arcu circulari $\frac{a\Phi}{\alpha}$ et linea recta V algebraice aſſignabili. Quare vt curuae algebraicae ſimpliciores inde elici poſſent, pro V functio tranſcendens accipi deberet, quae tamen ita eſſet comparata, vt formulae $dV\sin.\Phi$ et $dV\cos\Phi$ integrationem admitterent: Verum his caſibus iudicium, vtrum functio V debita gaudeat proprietate, difficilius videtur quam vt ei in calculo fidere queamus. Hinc eo magis e re erit vt tradatur

Methodus magis idonea curuas algebraicas ~~huic quae~~ſtioni ſatisfacientes inueniendi.

18. Talem autem methodum conſideratio ſimilitudinis arcuum AM et FN largitur. Cum enim natura problematis hanc ſimilitudinem inuoluat; etiam viciſſim concludere licet omnes curuas, in quibus haec ſimilitudo locum habeat, ſimul problemati ſatisfacere. Namque ſi arcus AMF habeat ampli-

amplitudinem propoſitam $=\alpha$, atque curua vltra F ita protendatur, vt arcus FN ſimilis et aequalis ſit arcui AM, tum ſumto arcu FN aequali arcui AM, tam eius longitudo MFN aequalis erit arcui AMF, quam eius amplitudo MLN aequalis amplitudini $AEF=\alpha$. Quare ad problema reſoluendum ſufficit eiusmodi curuas inueſtigare, quae vltra arcum AF cuius amplitudo eſt $=\alpha$ ita continuentur, vt portio continuata FN ſimilis et aequalis ſit ipſi curuae AM.

19. Siue igitur curua ad axem AE ſiue ad axem FE referatur eadem prodire debet aequatio inter coordinatas; verum ſi recta FE inaequalis fuerit rectae AE hinc quaedam diſparitas naſcitur, vt arcus FN non aeque ad punctum E referatur, atque arcus AM eo refertur: commoditas autem analyſeos poſtulat, vt punctum in calculum introducatur, ad quod arcus ſimiles AM et FN aequaliter referantur. Vt igitur tale punctum inueniamus, per data tria puncta A, E et F circulum deſcribamus AEF, eiusque arcu AEF biſecto in C, erit C hoc punctum quod deſideramus. Cum enim anguli CAE et CFE ſint aequales, arcus AM et FN aequaliter referuntur ad rectas AC et FC, et quia $FC=AC$, horum arcuum quoque par eſt relatio ad punctum C, quod idcirco centrum ſimilitudinis appellari poteſt. Quin etiam angulus ACF, etſi lineae CA et CF in curuam non ſunt normales, ſed quia ſimiliter ad eam ſunt incli-

Tab. I. Fig. 3.

inclinatae, ipſi amplitudini propoſitae α erit aequalis; hoc ergo puncto C tanquam centro ſimilitudinis arcuum AM et FN ad noſtrum inſtitutum vti poterimus.

20. Sumtis ergo a punctis A et F arcubus aequalibus AM et FN ductisque ad C rectis MC et NC, tam ipſae quam anguli ACM et FCN erunt aequales, et cum ſit $MFN=AMF$ etiam amplitudo arcus MFN erit $=\alpha$, tantumque angulum rectae MC et NC, etiamſi ad curuam non fuerint normales, conſtituunt ſcilicet $MCN=\alpha$. Hoc modo conſideratio normalium vel tangentium prorſus ex calculo exuitur, et quaeſtio iam huc eſt reducta, vt eiusmodi quaeratur linea curua AMFN circa punctum fixum C deſcribenda, vt ſi angulo ACM reſpondeat radius CM, idem quoque radius CN conueniat angulo $ACM+\alpha$. Siue poſito angulo $ACM=\omega$ et recta $CM=z$, eiusmodi aequatio inter z et ω eſt quaerenda, quae eadem ſit menſura, etiamſi pro ω ſtatuatur $\omega+\alpha$. Quare ratiocinium vt ſupra inſtituendo, recta z exprimi debebit functione quapiam rationali quantitatum $\sin.\frac{2\pi\omega}{\alpha}$ et $\cos.\frac{2\pi\omega}{\alpha}$, quippe quae ſuos valores, dum $\omega+\alpha$ pro ω ſcribitur, non mutant.

21. Haec conditio ita eſt comparata, vt ſtatim ſine vlla praeuia integratione ad curuas algebraicas deducat, atque adeo inde aequatio generalis pro omnibus curuis algebraicis problemati ſatisfacientibus

tibus exhiberi possit. Si enim Ω denotet functionem quamcunque rationalem binarum quantitatum $\sin. \frac{2\pi\omega}{\alpha}$ et $\operatorname{cos}. \frac{2\pi\omega}{\alpha}$, aequatio haec $z = c\,\Omega$ omnes curuas algebraicas problemati satisfacientes in se complectetur: indeque etiam facile aequatio inter coordinatas consuetas deduci poterit. Sumta namque recta CA pro axe in eamque ex M demisso perpendiculo MP, si vocentur $CP = x$ et $PM = y$, erit primo $z = \sqrt{(xx + yy)}$ tum vero $\sin. \omega = \frac{y}{z}$ et $\operatorname{cos}. \omega = \frac{x}{z}$; ex quibus formulis si secundum praecepta cognita sinus et cosinus anguli multipli $\frac{2\pi\omega}{\alpha}$ definiantur, aequatio inter coordinatas x et y obtinebitur. Ad hoc autem necesse est, vt angulus α, quo amplitudo proposita designatur, rationem teneat rationalem ad angulum rectum; nam si $\frac{2\pi}{\alpha}$ esset numerus irrationalis, euidens est nullam curuam algebraicam esse satisfacturam.

22. Si ergo talis aequatio inter radium z et angulum ω assumatur; necesse est, vt etiam primae conditioni, qua esse debet $s = \frac{a\Phi}{\alpha} + V$ existente V functione quacunque rationali, seu vniformi quantitatum $\sin. \frac{2\pi\Phi}{\alpha}$ et $\operatorname{cos} \frac{2\pi\Phi}{\alpha}$, satisfiat. Prodit autem elementum arcus curuae $ds = \sqrt{(dz^2 + zz\,d\omega^2)}$, et cum Φ denotet amplitudinem arcus AM, si angulus constans CAE ponatur $= \gamma$, reperitur $\frac{dz}{z} = d\omega \operatorname{tang}.(\omega - \Phi + \gamma)$ et $ds = \frac{z\,d\omega}{\operatorname{cos}.(\omega - \Phi + \gamma)} = \frac{dz}{\sin.(\omega - \Phi + \gamma)}$ Vnde non patet, quemadmodum conditioni $s = \frac{a\Phi}{\alpha} + V$ satis-

satisfiat. Quo magis notatu digna est haec altera solutio, quod introducendo nouo angulo ω, multo facilior relatio inter variabiles z et ω sit inuenta, quae neque ipsum arcum s neque eius amplitudinem Φ, circa quas quantitates tamen problema proprie versatur, contineat. Ad quod compendium cum nos consideratio geometrica perduxisset, insigni hoc problema nobis est exemplo, quantum per considerationes geometricas saepenumero solutiones problematum Analyticorum promoueri queant; et quanta subsidia inde in Analysi sint expectanda.

Quaestio 1.

23. *Inuenire omnes curuas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum amplitudo est* 360°, *sint eiusdem magnitudinis.*

Patet, huic quaestioni omnes curuas in se redeuntes satisfacere, atque adeo certo respectu omnes plane curuas, siquidem arcus in infinitum excurrentes in censum admittere velimus. Hoc etiam nostra solutio indicat; nam ob $\alpha = 2\pi$, pro z capi oportet functionem quamcunque binarum quantitatum $\sin \omega$ et $\operatorname{cos}. \omega$. Cum igitur sit $\sin. \omega = \frac{y}{z}$ et $\operatorname{cos}. \omega = \frac{x}{z}$, quaecunque aequatio inter x et y fingatur ponendo $x = z \operatorname{cos}. \omega$ et $y = z \sin. \omega$, resultabit aequatio inter z et ω ex qua z aequabitur functioni cuipiam ipsarum $\sin. \omega$ et $\operatorname{cos}. \omega$, quae etsi forte non

non est rationalis, curuaque ideo variis plexibus constare potest, tamen ad solutionem problematis accommodari potest. Vnde affirmare licebit, si Z fuerit functio quaecunque ipsius $xx+yy$ et quantitatum x et y, tum aequationem $Z=0$ fore pro curua satisfaciente. Interdum quidem fieri potest, si z sit functio irrationalis ipsorum sin ω et cos. ω, vt duo pluresue arcus existant, quorum eadem sit amplitudo $=360°$, quorum non omnes satisfaciant, sed inter eos semper erit vnus adaequate satisfaciens, quem a reliquis facile erit discernere.

Quaestio 2.

24. *Inuenire omnes curuas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum eadem est amplitudo $\alpha=180°$, sint inter se aequales.*

Misso igitur problemate praecedente, cui omnes plane curuae algebraicae satisfaciunt, fit $\alpha=\pi$, et $\frac{2\pi}{\alpha}=2$, atque pro z sumi debebit functio quaecunque binarum quantitatum sin. 2ω et cos. 2ω. Cum ergo sit sin. $2\omega=\frac{2xy}{zz}$ et cos. $2\omega=\frac{xx-yy}{zz}$, si Z denotet functionem quamcunque rationalem harum quantitatum:

$$xx+yy;\quad xy \quad \text{et} \quad xx-yy$$

seu quod eodem redit harum quantitatum:

$$xx,\quad xy,\quad \text{et } yy$$

tum

tum aequatio $Z=0$, problemati generaliter satisfaciet.

25. Ex ordine igitur secundo huic quaestioni in genere satisfacient omnes lineae hac aequatione contentae:

$$Axx+Bxy+Cyy=aa$$

quae complectitur omnes sectiones conicas, per quarum centrum hic axis transire, et abscissae a centro computari assumuntur. Non solum igitur ellipses, vt supra notauimus, hic locum habent, sed etiam hyperbolae, vbi quidem arcus, quorum amplitudo est $180°$ fiunt infiniti. Quae aequatio quomodo satisfaciat, vt appareat, ponatur $x=z$ cos. ω et $y=z$ sin. ω, ex eaque elicietur:

$$z=\frac{a}{\sqrt{(A\,\text{cos.}\,\omega^2+B\,\text{sin.}\,\omega\,\text{cos.}\,\omega+C\,\text{sin.}\,\omega^2)}}$$

quae ob cos. $\omega^2=\frac{1+\text{cos.}\,2\omega}{2}$; sin. $\omega^2=\frac{1-\text{cos.}\,2\omega}{2}$ et sin. ω cos. $\omega=\frac{1}{2}$ sin 2ω reducitur ad hanc formam:

$$z=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{(A+C+(A-C)\,\text{cos.}\,2\omega+B\,\text{sin.}\,2\omega)}}$$

vnde patet valorem ipsius z eundem manere, etiamsi pro ω scribatur $\omega+\pi$; ita vt irrationalitas huius functionis negotium non turbet, quod etiam in reliquis casibus est notandum.

26. Ex ordine tertio nulla curua proprie satisfacit; verum ex ordine quarto habemus hanc aequationem generalem

$$Ax^4+Bx^3y+Cxxyy+Dxy^3+Ey^4+Fxx+Gxy+Hyy+I=0$$

in

in qua tamen, si curua proprie satisfacere debeat, cauendum est, ne curua habitura sit ramos in infinitum extensos; siquidem eorum ratio minus perspicue ad propositum transferri potest, quemadmodum hoc incommodum etiam in hyperbola habet locum. Atque haec est ratio, quod ordo tertius nullarum huiusmodi sit capax, etiam si haec aequatio forte per diuisionem in ordinem tertium migrare possit: si enim esset $E=o$, $H=o$, et $I=o$ diuisione per x facta haberetur aequatio tertii ordinis. Maximum autem incommodum, quod his casibus vsu venit, in hoc consistit, quod arcuum, postquam in infinitum excurrerint, continuationes difficilius perspiciantur, haeque ipsae interdum pro negatiuis sint habendae, id quod scopo, cui propositio problematis est accommodata, plurimum aduersatur.

Quaestio 3.

27. *Inuenire omnes curuas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum eadem amplitudo est $\alpha=120°$, sint eiusdem magnitudinis.*

Hoc ergo casu est $\frac{2\pi}{\alpha}=3$, et z denotabit functionem quamcunque binarum quantitatum sin. 3ω et cos. 3ω: cum ergo sit

$$\text{sin.}\,3\omega=\frac{3xxy-y^3}{z^3} \text{ et } \text{cos.}\,3\omega=\frac{x^3-3xyy}{z^3}$$

patet, si pro Z capiatur functio vtcunque composita ex his tribus formulis:

$$xx+yy;\quad 3xxy-y^3,\quad \text{et } x^3-3xyy$$

tum

tum aequationem $Z=o$ complecti omnes curuas algebraicas quaestioni satisfacientes. Vnde si excludamus in infinitum extensas, post circulum simplicissimae erunt ordinis quarti hac aequatione contentae:

$$(xx+yy)^2+fy(3xx-yy)+gx(xx-3yy)\pm hh(xx+yy)\pm k^4=o.$$

Cum in hac curua omnes arcus amplitudinis 120° sint aequales, etiam eorum dupli, quorum amplitudo est 240° inter se erunt aequales. In genere autem valet, si in curua quapiam arcus amplitudinis α sint aequales, in eadem quoque arcus amplitudinis 2α, 3α, 4α etc. respectiue inter se aequales fore.

Quaestio 4.

28. *Inuenire omnes curuas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum eadem est amplitudo $\alpha=90°$, sint inter se aequales.*

Quia hoc casu est $\frac{2\pi}{\alpha}=4$, pro z sumi debet functio quaecunque binarum quantitatum sin. 4ω et cos. 4ω, vnde cum ob sin. $\omega=\frac{y}{z}$ et cos. $\omega=\frac{x}{z}$ sit

$$\text{sin.}\,4\omega=\frac{4x^3y-4xy^3}{z^4} \text{ et } \text{cos.}\,4\omega=\frac{x^4-6xxyy+y^4}{z^4}$$

si Z denotet functionem vtcunque conflatam ex his tribus formulis

$$xx+yy;\quad xy(xx-yy) \text{ et } x^4-6xxyy+y^4$$

seu

seu ob $x^4 - 6xxyy + y^4 = (xx+yy)^2 - 8xxyy$ ex his tribus.

$$xx+yy;\quad xy(xx-yy)\quad \text{et}\quad xxyy$$

aequatio $Z=0$ complectetur omnes curuas algebraicas quaestioni satisfacientes. Post circulum igitur simplicissimae erunt ex ordine quarto hac aequatione contentae:

$$x^4 + mx^3y - nxxyy - mxy^3 + y^4 \pm ff(xx+yy) \pm g^4 = 0$$

quarum eae, quae vno tractu simplici in se redeunt, modo maxime naturali satisfaciunt, cuiusmodi est $x^4+y^4=g^4$; hoc sensu enim non solum ramos in infinitum extensos, sed etiam plexus plurium tractuum euitari conuenit.

Quaestio 5.

29. *Inuenire omnes curuas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum eadem est amplitudo $\alpha = 72°$ sint inter se aequales.*

Hoc casu habemus $\frac{2\pi}{\alpha} = 5$, et pro z sumenda est functio quaecunque binarum quantitatum sin. 5 ω et cos. 5 ω. Cum vero sit

$$\text{sin. } 5\,\omega = \frac{5x^4y - 10x^2y^3 + y^5}{z^5}\quad \text{et cos. } 5\,\omega = \frac{x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4}{z^5}$$

si Z denotet functionem vtcunque compositam ex his tribus formulis

$$xx+yy;\quad 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5\quad \text{et}\quad x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$$

aequatio $Z=0$ complectetur omnes curuas algebraicas problemati satisfacientes. Vnde si ramos in infinitum extensos euitare volumus, post circulum simplicissimae curuae ad ordinem sextum pertinebunt, hac aequatione contentae:

$$(xx+yy)^3 + fy(5x^4 - 10xxyy + y^4) + gx(x^4 - 10xxyy + 5y^4) \pm hh(xx+yy)^2 \pm k^4(xx+yy) \pm l^6 = 0.$$

In his autem curuis non solum arcus, quorum amplitudo est $72°$ seu $\frac{2\pi}{5}$, sed etiam ii, quorum amplitudo est vel $2.\frac{2\pi}{5}$ vel $3.\frac{2\pi}{5}$, vel $4.\frac{2\pi}{5}$, inter se erunt aequales.

Quaestio 6.

30. *Inuenire omnes curuas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum eadem est amplitudo $\alpha = 60°$, sint inter se aequales.*

Erit igitur $\frac{2\pi}{\alpha} = 6$, et pro z capienda est functio quaecunque harum quantitatum sin. 6 ω et cos. 6 ω. Cum igitur sit

$$\text{sin. } 6\,\omega = \frac{6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5}{z^6}\quad \text{et cos. } 6\,\omega = \frac{x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6}{z^6}$$

si Z denotet functionem vtcunque compositam ex his tribus formulis:

$$xx+yy;\quad xy(3x^4 - 10xxyy + 3y^4);\quad x^6 - 15x^4yy + 15xxy^4 - y^6$$

aequatio $Z=0$ continebit omnes curuas algebraicas quaesito satisfacientes. Tales ergo praeter circulum infra ordinem sextum non dantur, quae autem sunt ex ex hoc ordine ista aequatione generali comprehenduntur:

$$(xx+yy)^3 + mxy(3x^4 - 10xxyy + 3y^4) + n(x^6 - 15x^4yy + 15xxy^4 - y^6) \pm ff(xx+yy)^2 \pm g^4(xx+yy) \pm h^6 = 0.$$

Atque in his curuis non solum arcus amplitudinem 60°, sed etiam amplitudinem 120°, 180°, 240°, et 300° habentes sunt inter se aequales.

Quaestio generalis.

31. *Inuenire curuas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum amplitudo datam ad 360° tenet rationem, sint inter se aequales.*

Sit ergo amplitudo proposita ad 360° vti m ad n seu $\alpha = \frac{m}{n}.2\pi$ ideoque $\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{n}{m}$: atque iam satis notauimus, si arcus amplitudinis $\frac{2\pi}{n}$ fuerint aequales, etiam arcus amplitudinis $\frac{m}{n}.2\pi$ fore inter se aequales, vnde sufficit pro z sumsisse functionem binarum quantitatum $\sin.n\omega$ et $\cos.n\omega$, ita vt numerus m non in computum ingrediatur. Cum autem sit

$$\sin.n\omega = \frac{(x+y\sqrt{-1})^n - (x-y\sqrt{-1})^n}{2z^n\sqrt{-1}} \text{ et } \cos.n\omega = \frac{(x+y\sqrt{-1})^n + (x-y\sqrt{-1})^n}{2z^n}$$

aequatio $Z=0$ continebit omnes curuas algebraicas quaesito satisfacientes, si fuerit Z functio vtcunque ex his tribus formulis conflata:

$$xx+yy;\ \frac{(x+y\sqrt{-1})^n - (x-y\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}} \text{ et } \frac{(x+y\sqrt{-1})^n + (x-y\sqrt{-1})^n}{2}$$

Vel

Vel euolutis his potestatibus, vt imaginaria se destruant, functio Z formata esse debebit ex his tribus formulis:

I. $xx+yy$

II. $nx^{n-1}y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^{n-3}y^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}x^{n-5}y^5 -$ etc.

III. $x^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^{n-4}y^4 -$ etc.

32. Cum mihi igitur fuisset propositum, omnes curuas inuestigare, quae hanc habeant proprietatem, vt omnes earum arcus, qui amplitudinem quandam datam habent, sint inter se aequales; hoc problema equidem ita perfecte solutum dedisse mihi videor, vt nihil praeterea desiderari possit. Primum enim ex natura amplitudinis formulam generalem pro huiusmodi curuis exhibui, quae autem cum in differentialibus subsisteret, et curuas algebraicas difficulter proderet, imprimis simpliciores; similitudinis arcuum ratio, quam indidem obseruare licuit, eximiam patefecit methodum, omnes adeo curuas algebraicas expedite inueniendi. Quod negotium cum primo intuitu maxime arduum esset visum, istud artificium ex natura similitudinis petitum vtique omnem attentionem meretur, neque vllum est dubium, quin inde alia insignia subsidia in Analysin hauriri queant.