CAPUT VII.

DE

INTEGRATIONE AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM PER APPROXIMATIONEM.

Problema 85.

650.

Proposita aequatione differentiali quacunque, ejus integrale completum vero proxime assignare.

Solutio.

Sint x et y binae variabiles, inter quas aequatio differentialis proponitur, atque haec aequatio hujusmodi habebit formam ut sit $\frac{\partial y}{\partial x} = V$, existente V functione quaecunque ipsarum x et y. Jam cum integrale completum desideretur, hoc ita est interpretandum, ut dum ipsi x certus quidem valor puta $x = a$ tribuitur, altera variabilis y datum quemdam valorem puta $y = b$ adipiscatur. Quaestionem ergo primo ita tractemus, ut investigemus valorem ipsius y, quando ipsi x valor paulisper ab a discrepans tribuitur, seu posito $x = a + \omega$, ut quaeramus y. Cum autem ω sit particula minima, etiam valor ipsius y minime a b discrepabit; unde dum x ab a usque ad $a + \omega$ tantum mutatur, quantitatem V interea tanquam constantem spectare licet. Quare posito $x = a$ et $y = b$ fiat $V = A$, et pro hac exigua mutatione habebimus $\frac{\partial y}{\partial x} = A$, ideoque integrando $y = b + A(x - a)$, ejusmodi scilicet constante adjecta, ut posito $x = a$ fiat $y = b$. Statuamus ergo $x = a + \omega$, fietque $y = b + A\omega$. Quemadmodum ergo hic ex valoribus initio datis $x = a$ et $y = b$, proxime sequentes $x = a + \omega$ et $y = b + A\omega$ invenimus, ita ab his simili modo per intervalla minima ulterius progredi licet, quoad tandem ad valores a primitivis quantumvis remotos perveniatur. Quae operationes quo clarius ob oculos ponantur, sequenti modo successive instituantur.

Ipsius	valores successivi
x	$a,\ a',\ a'',\ a''',\ a^{IV},\ \ldots\ldots\ {}'x,\ x$
y	$b,\ b',\ b'',\ b''',\ b^{IV},\ \ldots\ldots\ {}'y,\ y$
V	$A,\ A',\ A'',\ A''',\ A^{IV},\ \ldots\ldots\ {}'V,\ V.$

Scilicet ex primis $x = a$ et $y = b$ datis, habetur $V = A$; tum vero pro secundis erit $b' = b + A(a' - a)$, differentia $a' - a$ minima pro lubitu assumta. Hinc ponendo $x = a'$ et $y = b'$ colligitur $V = A'$, indeque pro tertiis obtinebitur $b'' = b' + A'(a'' - a')$, ubi posito $x = a''$ et $y = b''$ invenitur $V = A''$. Jam pro quartis habebimus $b''' = b'' + A''(a''' - a'')$, hincque ponendo $x = a'''$ et $y = b'''$, colligemus $V = A'''$, sicque ad valores a primitivis quantumvis remotos progredi licebit. Series autem prima valores ipsius x successivos exhibens pro lubitu accipi potest, dummodo per intervalla minima ascendat vel etiam descendat.

Corollarium 1.

651. Pro singulis ergo intervallis minimis calculus eodem modo instituitur, sicque valores, a quibus sequentia pendent, obtinentur. Hoc ergo modo singulis pro x assumtis valoribus, valores respondentes ipsius y assignari possunt.

Corollarium 2.

652. Quo minora accipiuntnr intervalla, per quae valores ipsius x progredi assumuntur, eo accuratius valores pro singulis eliciuntur. Interim tamen errores in singulis commissi, etiamsi sint multo minores, ob multitudinem coacervantur.

Corollarium 3.

653. Errores autem in hoc calculo inde oriuntur, quod in singulis intervallis ambas quantitates x et y ut constantes spectemus, sicque functio V pro constante habeatur. Quo magis ergo valor ipsius V a quovis intervallo ad sequens immutatur, eo majores errores sunt pertimescendi.

Scholion 1.

654. Hoc incommodum imprimis occurrit, ubi valor ipsius V vel evanescit vel in infinitum excrescit, etiamsi mutationes ipsis x et y accidentes sint satis parvae. His autem casibus errores saltim enormes sequenti modo evitabuntur: sit pro initio hujusmodi intervalli $x = a$ et $y = b$, tum vero in ipsa aequatione proposita ponatur $x = a + \omega$ et $y = b + \psi$, ut sit $\frac{\partial \psi}{\partial \omega} = V$, in V autem ita fiat substitutio $x = a + \omega$ et $y = b + \psi$, ut quantitates ω et ψ tanquam minimae spectentur, rejiciendo scilicet altiores potestates prae inferioribus, hoc enim modo plerumque integratio pro his intervallis actu institui poterit. Hac autem emendatione vix unquam erit opus, nisi termini ex ipsis valoribus a et b nati se destruant. Veluti si habeatur haec aequatio $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{aa}{xx - yy}$, ac pro initio debeat esse $x = a$ et $y = a$; jam pro intervallo hinc incipiente ponatur $x = a + \omega$ et $y = a + \psi$ habebiturque $\frac{\partial \psi}{\partial \omega} = \frac{aa}{2a\omega - 2a\psi}$, seu $2\omega \partial \psi - 2\psi \partial \psi = a \partial \omega$, seu $\partial \omega - \frac{2\omega \partial \psi}{a} = \frac{-2\psi \partial \psi}{a}$, quae per $e^{\frac{-2\psi}{a}} = 1 - \frac{2\psi}{a}$ multiplicata et integrata praebet

$$\left(1 - \frac{2\psi}{a}\right) \omega = \frac{-2}{a} \int \left(1 - \frac{2\psi}{a}\right) \psi \partial \psi = -\frac{\psi\psi}{a},$$

quia posito $\omega = 0$ fieri debet $\psi = 0$. Hinc ergo habetur $\omega = \frac{-\psi\psi}{a-2\psi} = \frac{-\psi\psi}{a}$, seu $a(a'-a) = -(b'-b)^2$, existente $b = a$; unde colligitur pro sequente intervallo $b' = b + \sqrt{-a(a'-a)}$, quo casu patet valorem x non ultra a augeri posse, quia y fieret maginarium.

Scholion 2.

655. Passim traduntur regulae aequationum differentialium ntegralia per series infinitas exprimendi, quae autem plerumque hoc vitio laborant, ut integralia tantum particularia exhibeant, praeterquam quod series illae certo tantum casu convergant, neque ergo aliis casibus ullum usum praestent. Veluti si proposita sit aequatio $\partial y + y\,\partial x = a x^n \partial x$, jubemur hujusmodi seriem in genere fingere

$$y = A x^\alpha + B x^{\alpha+1} + C x^{\alpha+2} + D x^{\alpha+3} + E x^{\alpha+4} + \text{etc.}$$

qua substituta fit

$$\left.\begin{array}{l} \alpha A x^{\alpha-1} + (\alpha+1) B x^\alpha + (\alpha+2) C x^{\alpha+1} + (\alpha+3) D x^{\alpha+2} + \text{etc.} \\ \quad\quad\quad + \quad A \quad\quad + \quad B \quad\quad + \quad C \quad + \text{etc.} \\ - a x^n \end{array}\right\} = 0$$

Statuatur ergo $\alpha - 1 = n$, seu $\alpha = n + 1$, eritque $A = \frac{a}{n+1}$, tum vero reliquis terminis ad nihilum reductis

$$B = \frac{-A}{n+2},\ C = \frac{-B}{n+3},\ D = \frac{-C}{n+4},\ \text{etc.}$$

sicque habebitur haec series

$$y = \frac{a x^{n+1}}{n+1} - \frac{a x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{a x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{a x^{n+4}}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \text{ etc.}$$

Verum hoc integrale tantum est particulare, quoniam evanescente x, simul y evanescit, nisi $n+1$ sit numerus negativus; tum vero haec series non convergit, nisi x capiatur valde parvum. Quamobrem

54

hinc minime cognoscere licet valores ipsius y, qui respondeant valoribus quibuscunque ipsius x. Hoc autem vitio non laborat methodus, quam hic adumbravimus, cum primo integrale completum praebeat, dum scilicet pro dato ipsius x valore datum ipsi y valorem tribuit, tum vero per intervalla minima procedens, semper proxime ad veritatem accedat, et quousque libuerit progredi liceat. Sequenti autem modo haec methodus magis perfici poterit.

Problema 86.

656. Methodum praecedentem, aequationes differentiales proxime integrandi, magis perficere, ut minus a veritate aberret.

Solutio.

Proposita aequatione integranda $\frac{\partial y}{\partial x} = V$, error methodi supra expositae inde oritur, quod per singula intervalla functio V ut constans spectetur, cum tamen revera mutationem subeat, praecipue nisi intervalla statuantur minima. Variabilitas autem ipsius V per quodvis intervallum simili modo in computum duci potest, quo in sectione praecedente §. 321. usi sumus. Scilicet si jam ipsi x conveniat y, ex natura differentialium ipsi $x - n\partial x$ vidimus convenire

$$y - n\partial y + \frac{n(n+1)}{1.2.}\partial\partial y - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3.}\partial^3 y + \text{etc.}$$

qui valor sumto n infinito erit

$$y - n\partial y + \frac{nn\partial\partial y}{1.2} - \frac{n^3\partial^3 y}{1.2.3} + \frac{n^4\partial^4 y}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

Statuatur jam $x - n\partial x = a$ et

$$y - n\partial y + \frac{nn\partial\partial y}{1.2} - \frac{n^3\partial^3 y}{1.2.3} + \frac{n^4\partial^4 y}{1.2.3.4} - \text{etc.} = b,$$

hicque valores in quovis intervallo ut primi spectentur, dum extremi per x et y indicantur. Cum igitur sit $n = \frac{x-a}{\partial x}$. fiet

$$y = b + \frac{(x-a)\partial y}{\partial x} - \frac{(x-a)^2\partial\partial y}{1.2\partial x^2} + \frac{(x-a)^3\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3} - \frac{(x-a)^4\partial^4 y}{1.2.3.4\partial x^4} + \text{etc.}$$

quae expressio, si x non multum superat a, valde convergit, ideoque admodum est idonea ad valorem y proxime inveniendum. Verum ad singulos terminos hujus seriei evolvendos, notari oportet esse $\frac{\partial y}{\partial x} = V$, hincque $\frac{\partial \partial y}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial x}$. Cum autem V sit functio ipsarum x et y, si ponamus $\partial V = M \partial x + N \partial y$, ob $\frac{\partial y}{\partial x} = V$, erit $\frac{\partial \partial y}{\partial x^2} = M + NV$, seu exprimendi modo jam supra exposito $\frac{\partial \partial y}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + V\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$, quae expressio uti nata est ex praecedente $\frac{\partial y}{\partial x} = V$, ita ex ea nascetur sequens

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \left(\frac{\partial \partial V}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + 2V\left(\frac{\partial \partial V}{\partial x \partial y}\right) + V\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + VV\left(\frac{\partial \partial V}{\partial y^2}\right).$$

Quoniam vero ipse valor ipsius y nondum est cognitus, hoc modo saltem obtinetur aequatio algebraica, qua relatio inter x et y exprimitur, nisi forte sufficiat in terminis posuisse $y = b$.

Altera autem operatio §. 322. exposita valorem ipsius y, qui ipsi x in fine cujusque intervalli respondet, explicite determinabit, cum in initio ejusdem intervalli fuerit $x = a$ et $y = b$. Cum enim hinc posito $x = a + n\partial a$, si quidem a et b ut variabiles spectemus, fiat

$$y = b + n\partial b + \frac{n(n-1)}{1.2}\partial\partial b + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\partial^3 b + \text{etc.}$$

quia est $n = \frac{x-a}{\partial a}$, ideoque numerus infinitus, erit

$$y = b + \frac{(x-a)\partial b}{\partial a} + \frac{(x-a)^2 \partial\partial b}{1.2\,\partial a^2} + \frac{(x-a)^3 \partial^3 b}{1.2.3\,\partial a^3} + \text{etc.}$$

Est vero $\frac{\partial b}{\partial a} = V$, siquidem in functione V scribatur $x = a$ et $y = b$; tum vero iisdem pro x et y valoribus substitutis, erit

$$\frac{\partial \partial b}{\partial a^2} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + V\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) \text{ et}$$

$$\frac{\partial^3 b}{\partial a^3} = \left(\frac{\partial \partial V}{\partial x^2}\right) + 2V\left(\frac{\partial \partial V}{\partial x \partial y}\right) + VV\left(\frac{\partial \partial V}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + V\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right],$$

unde sequentes simili modo formari oportet. Sit igitur postquam, scripserimus $x = a$ et $y = b$,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A, \; \frac{\partial \partial y}{\partial x^2} = B, \; \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = C, \; \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = D, \text{ etc.}$$

ac valori $x = a + \omega$ conveniet iste valor

$$y = b + A\omega + \tfrac{1}{2}B\omega^2 + \tfrac{1}{6}C\omega^3 + \tfrac{1}{24}D\omega^4 + \text{etc.}$$

qui duo valores jam pro sequente intervallo erunt initiales, ex quibus simili modo finales erui oportet.

Corollarium 1.

657. Quoniam hic variabilitatis functionis V rationem habuimus, intervalla jam majora statuere licet, ac si illas formulas A, B, C, D, etc. in infinitum continuare vellemus, intervalla quantumvis magna assumi possent, tum autem pro y oriretur series infinita.

Corollarium 2.

658. Si seriei inventae tantum binos terminos primos sumamus, ut sit $y = b + A\omega$, habebitur determinatio praecedens, unde simul patet errorem ibi commissum sequentibus terminis junctim sumtis aequari.

Corollarium 3.

659. Etiamsi autem seriei inventae plures terminos capiamus, consultum tamen non erit intervalla nimis magna constitui, ut ω valorem modicum obtineat, praecipue si quantitates B, C, D, etc. evadant valde magnae.

Scholion.

660. Maximo incommodo hae operationes turbantur, si quando horum coëfficientium A, B, C, D, etc. quidam in infinitum excrescant. Evenit autem hoc tantum in certis intervallis, ubi ipsa quantitas V vel in nihilum abit vel in infinitum, cui incommodo, quemadmodum sit occurrendum, jam innuimus et mox accuratius ostendemus. Caeterum calculus pro singulis intervallis pari modo instituitur, ita ut cum ejus ratio pro intervallo primo fuerit inventa, quod incipit a valoribus pro lubitu assumtis $x = a$ et $y = b$, ea-

dem pro sequentibus intervallis sit valitura. Cum enim pro fine intervalli primi fiat

$$x = a + \omega = a' \text{ et}$$

$$y = b + A\,\omega + \tfrac{1}{2} B\,\omega^2 + \tfrac{1}{6} C\,\omega^3 + \tfrac{1}{24} D\,\omega^4 + \text{etc.} = b',$$

hi erunt valores initiales pro intervallo secundo, ex quibus simili modo finales elici oportet; hic scilicet calculus innitetur perinde litteris a' et b', ac prior litteris a et b, id quod clarius ex exemplis subjunctis patebit.

Exemplum 1.

661. *Aequationis differentialis* $\partial y = \partial x\,(x^n + c\,y)$ *integrale completum proxime investigare.*

Cum hic sit $V = \frac{\partial y}{\partial x} = x^n + c\,y$, erit differentiando

$$\frac{\partial \partial y}{\partial x^2} = n\,x^{n-1} + c\,x^n + c\,c\,y,$$

sicque porro

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = n\,(n-1)\,x^{n-2} + n\,c\,x^{n-1} + c\,c\,x^n + c^3\,y$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = n\,(n-1)(n-2)\,x^{n-3} + n(n-1)\,c x^{n-2} + ncc x^{n-1} + c^3 x^n + c^4 y$$

etc.

Quodsi ergo ponamus valori $x = a$, convenire $y = b$, alii cuicunque valori $x = a + \omega$ conveniet

$$\begin{aligned} y = b &+ \omega(c\,b + a^n) + \tfrac{1}{2}\omega^2(c\,c\,b + c\,a^n + n\,a^{n-1}) \\ &+ \tfrac{1}{6}\omega^3[c^3 b + c\,c\,a^n + n\,c\,a^{n-1} + n\,(n-1)\,a^{n-2}] \\ &+ \tfrac{1}{24}\omega^4[c^4 b + c^3 a^n + ncc a^{n-1} + n(n-1) c a^{n-2} + n\,(n-1)\,(n-2) a^{n-3}] \end{aligned}$$

etc.

quae series sumta quantitate ω satis parva, quantumvis promte convergit, sicque posito $a + \omega = a'$ et respondente valore ipsius $y = b'$, hinc simili modo ad sequentes perveniemus, quam operationem, quousque lubuerit, continuare licet.

Exemplum 2.

662. *Aequationis differentialis* $\partial y = \partial x\,(xx + yy)$ *integrale completum proxime investigare.*

Cum hic sit $\frac{\partial y}{\partial x} = V = xx + yy$, erit continuo differentiando

$$\frac{\partial \partial y}{\partial x^2} = 2x + 2xxy + 2y^3 \text{ et}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 2 + 4xy + 2x^4 + 8xxyy + 6y^4$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 4y + 12x^3 + 20xyy + 16x^4y + 40xxy^3 + 24y^5$$

$$\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = 40x^2 + 24y^2 + 104x^3y + 120xy^3 + 16x^6 + 136x^4y^2 + 240x^2y^4 + 120y^6.$$

Quare si initio sit $x = a$ et $y = b$, erit

$$A = aa + bb$$

$$B = 2a + 2aab + 2b^3$$

$$C = 2 + 4ab + 2a^4 + 8aabb + 6b^4$$

$$D = 4b + 12a^3 + 20abb + 16a^4b + 40aab^3 + 24b^5$$

$$E = 40a^2 + 24b^2 + 104a^3b + 120ab^3 + 16a^6 + 136a^4b^2 + 240a^2b^4 + 120b^6,$$

unde valori cuicunque alii $x = a + \omega$ conveniet

$$y = b + A\,\omega + \tfrac{1}{2}B\,\omega^2 + \tfrac{1}{6}C\,\omega^3 + \tfrac{1}{24}D\,\omega^4 + \tfrac{1}{120}E\,\omega^5 + \text{etc.}$$

atque ex talibus binis valoribus, qui sint $x = a'$ et $y = b'$, denuo sequentes elici possunt.

Scholion.

663. Quoniam totum negotium ad inventionem horum coëfficientium A, B, C, D, etc. redit, observo eosdem sine differentiatione inveniri posse, id quod in hoc postremo exemplo $\frac{\partial y}{\partial x} =$

$xx + yy$ ita praestabitur. Cum statuamus posito $x = a$ fieri $y = b$, ponamus in genere $x = a + \omega$ et $y = b + \psi$, et nostra aequatio induet hanc formam

$$\frac{\partial\psi}{\partial\omega} = aa + bb + 2a\omega + \omega\omega + 2b\psi + \psi\psi$$

et quia evanescente ω simul evanescit ψ, sumamus

$$\psi = \alpha\omega + \beta\omega^2 + \gamma\omega^3 + \delta\omega^4 + \varepsilon\omega^5 + \text{etc.}$$

hocque valore substituto prodibit

$$\alpha + 2\beta\omega + 3\gamma\omega^2 + 4\delta\omega^3 + 5\varepsilon\omega^4 + \text{etc.} =$$

$$\begin{aligned} aa + bb &+ 2a\omega + \omega\omega \\ &+ 2\alpha b\omega + 2\beta b\omega^2 + 2\gamma b\omega^3 + 2\delta b\omega^4 + \text{etc.} \\ &\qquad + \alpha^2\omega^2 + 2\alpha\beta\omega^3 + 2\alpha\gamma\omega^4 + \text{etc.} \\ &\qquad\qquad + \beta\beta\omega^4 \end{aligned}$$

singulis ergo terminis ad nihilum reductis fiet

$$\alpha = aa + bb,\ 2\beta = 2\alpha b + 2a,\ 3\gamma = 2\beta b + \alpha\alpha + 1,$$
$$4\delta = 2\gamma b + 2\alpha\beta,\ 5\varepsilon = 2\delta b + 2\alpha\gamma + \beta\beta$$
$$6\zeta = 2\varepsilon b + 2\alpha\delta + 2\beta\gamma,\ \text{etc.}$$

unde iidem valores qui supra per differentiationem eliciuntur. Vti haec methodus simplicior est praecedente, ita etiam hoc illi praestat, quod semper in usum vocari possit, cum illa interdum frustra applicetur, veluti in exemplis allatis evenit, si valores initiales a et b evanescant, ubi plerique coëfficientes in nihilum abirent. Quod idem incommodum jam supra animadvertimus, cum adeo evenire possit, ut omnes coëfficientes vel evanescant, vel in infinitum abeant. Verum hoc nonnisi in certis intervallis usu venit, pro quibus ergo calculum peculiari modo institui conveniet; reliquis autem intervallis methodus hic exposita per differentiationem procedens commodius adhiberi videtur, quippe quae saepe facilius instituitur quam substitutio, certisque regulis continetur, semper locum habentibus etiam in aequationibus transcendentibus. Quare pro singularibus illis intervallis praecepta tradere oportebit.

Problema 87.

664. Si in integratione aequationis $\frac{\partial y}{\partial x} = V$ pro quopiam intervallo eveniat, ut quantitas V vel evanescat, vel fiat infinita, integrationem pro isto intervallo instituere.

Solutio.

Sit pro initio intervalli, quod contemplamur $x = a$ et $y = b$, quo casu cum V vel evanescat vel in infinitum abeat, ponamus $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{P}{Q}$, ita ut posito $x = a$ et $y = b$, vel P vel Q vel utrumque evanescat. Statuamus ergo ut ab his terminis ulterius progrediamur, $x = a + \omega$ et $y = b + \psi$, fietque $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \omega}$: atque tam P quam Q erit functio ipsarum ω et ψ, quarum altera saltem evanescat, facto $\omega = 0$ et $\psi = 0$. Jam ad rationem inter ω et ψ proxime saltem investigandam, ponatur $\psi = m \omega^n$, erit $\frac{\partial \psi}{\partial \omega} = m n \omega^{n-1}$, hincque $m n Q \omega^{n-1} = P$; ubi P et Q ob $\psi = m \omega^n$ meras potestates ipsius ω continebunt, quarum tantum minimas in calculo retinuisse sufficit, cum altiores prae his ut evanescentes spectari queant. Infimae ergo potestates ipsius ω inter se aequales reddantur, simulque ad nihilum redigantur; unde tam exponens n quam coëfficiens m determinabitur. Si deinde relationem inter ω et ψ exactius cognoscere velimus, inventis m et n, ad altiores potestates ascendamus ponendo

$$\psi = m \omega^n + M \omega^{n+\mu} + N \omega^{n+\nu} \text{ etc.}$$

hincque simili modo sequentes partes definientur, quousque ob magnitudinem intervalli seu particulae ω necessarium visum fuerit.

Corollarium 2.

665. Si posito $x = a$ et $y = b$, neque P neque Q evane-

scat, substitutione adhibita reperietur $\frac{\partial \psi}{\partial \omega} = \frac{A + etc.}{\alpha + etc.}$, hincque proxime $\alpha \partial \psi = A \partial \omega$ et $\psi = \frac{A}{\alpha} \omega$, qui est primus terminus praecedentis approximationis, quo invento reliqui ut ante se habebunt.

Corollarium 2.

666. Si α tantum evanescat, habebitur

$$\frac{\partial \psi}{\partial \omega} (M \omega^{\mu} + N \psi^{\nu} \text{ etc.}) = A$$

proxime: unde posito $\psi = m \omega^{n}$ fit

$$A = m n \omega^{n-1} (M \omega^{\mu} + N m^{\nu} \omega^{n\nu});$$

quod autem non valet, nisi sit $\nu (1 - \mu) > \mu$ seu $\nu > \frac{\mu}{1 - \mu}$. Sin autem sit $\nu < \frac{\mu}{1-\mu}$, statui debet $n - 1 + n\nu = 0$ seu $n = \frac{1}{1+\nu}$, altero termino ut infima potestate spectata. At si fuerit $\nu = \frac{\mu}{1-\mu}$, ambo termini pro paribus potestatibus erunt habendi, fietque $n = 1 - \mu$ ut $A = m n (M + N m^{\nu})$, unde m definiri debet.

Scholion.

667. In genere hic vix quicquam praecipere licet, sed quovis casu oblato haud difficile est omnia, quae ad solutionem perducunt, perspicere. Si quidem omnes exponentes essent integri, regula illa *Newtoniana*, qua ope parallelogrammi resolutio aequationum instruitur, hic in usum vocari posset; tum vero exponentium fractorum ad integros reductio satis est nota. Verum hujusmodi casus tam raro occurrunt, ut inutile foret in praeceptis prolixum esse, quae quovis casu ab exercitatio facile conduntur. Veluti si perveniatur ad hanc aequationem $\frac{\partial \psi}{\partial \omega} (\alpha \sqrt{\omega} + \beta \psi) = \gamma$, ex superioribus patet primam operationem dare $\psi = m \sqrt{\omega}$, unde fit $\frac{1}{2} m (\alpha + \beta m) = \gamma$, unde m innotescit idque duplici modo. Quin etiam haec aequatio, posito $\sqrt{\omega} = p$, ad homogeneitatem reducitur,

ideoque revera integrari potest: verum haec vix unquam usum habitura fusius non prosequor, sed, quod adhuc in hac parte pertractandum restat exponam, quomodo ejusmodi aequationes differentiales resolvi oporteat, in quibus differentialium ratio puta $\frac{\partial y}{\partial x} = p$ vel plures obtinet dimensiones, vel adeo transcendenter ingreditur, quo absoluto partem secundam, in qua differentialia altiorium graduum occurrunt, aggrediar.