CAPUT IV.

DE INTEGRATIONE PARTICULARI AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM.

Definitio.

540.

Integrale particulare aequationis differentialis est relatio variabilium aequationi satisfaciens, quae nullam novam quantitatem constantem in se complectitur. Opponitur ergo integrali completo, quod constantem in differentiali non contentam involvit, in quo tamen contineatur necesse est.

Corollarium 1.

541. Cognito ergo integrali completo, ex eo innumerabilia integralia particularia exhiberi possunt, prout constanti illi arbitrariae alii atque alii valores determinati tribuuntur.

Corollarium 2.

542. Proposita ergo aequatione differentiali inter variabiles x et y, omnes functiones ipsius x, quae loco y substitutae aequationi satisfaciunt, dabunt integralia particularia, nisi forte sint completa.

Corollarium 3.

543. Cum omnis aequatio differentialis ad hanc formam $\frac{\partial y}{\partial x} = V$ revocetur, existente V functione quacunque ipsarum x et y,

$$\partial y = \frac{x \partial x + y \partial y}{\sqrt{(xx + yy - aa)}}$$

satisfacit haec aequatio finita $xx + yy = aa$, quae tamen inte integralia particularia admitti nequit, propterea quod in integra completo $y = C + \sqrt{(xx + yy - aa)}$ neutiquam continetur Quare ad integrale particulare non sufficit, ut eo aequationi diffe rentiali satisfiat, sed insuper hanc conditionem adjungi oportet, u in integrali completo contineatur; ex quo investigatio integralium particularium maxime est lubrica, nisi simul integrale completum innotescat; hoc autem cognito supervacuum esset methodo peculiar in integralia particularia inquirere. Tum enim potissimum juvat a investigationem integralium particularium confugere, quando integral completum elicere non licet. Quo igitur hinc fructum perciper queamus, criteria tradi conveniet, ex quibus valores, qui aequation cuipiam differentiali satisfaciunt, dijudicare liceat, utrum sint inte gralia particularia, nec ne? Etiamsi scilicet omnia integralia sin ejusmodi valores, qui aequationi differentiali satisfaciant, tamen non vicissim omnes valores, qui satisfaciunt, sunt integralia. Quod cum parum adhuc sit animadversum, operam dabo, ut hoc argumentum dilucide evolvam.

Problema 70.

547. Si in aequatione differentiali $\partial y = \frac{\partial x}{Q}$, functio Q eva nescat posito $x = a$, determinare quibus casibus haec aequatio $x = a$ sit integrale particulare aequationis differentialis propositae?

Solutio.

Cum sit $Q = \frac{\partial x}{\partial y}$, posito $x = a$ fit tam $Q = 0$ quam $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$, unde hic valor $x = a$ aequationi differentiali propositae $\partial y = \frac{\partial x}{Q}$ utique satisfacit, neque tamen hinc sequitur eum esse integrale. Hoc solum scilicet non sufficit, sed insuper requiritur, ut aequatio

$x = a$ in integrali completo contineatur, si quidem constanti per integrationem invectae certus quidam valor tribuatur. Ponamus ergo P esse integrale formulae $\frac{\partial x}{Q}$, ut integrale completum sit $y = C + P$; cui aequationi ponendo $x = a$ satisfieri nequit, nisi posito $x = a$ fiat $P = \infty$, tum enim sumta constante C pariter infinita, positione $x = a$ quantitas y manet indeterminata, ideoque si posito $x = a$ fiat $P = \infty$, tum demum aequatio $x = a$ pro integrali particulari erit habenda. En ergo criterium, ex quo dignoscere licet, utrum valor $x = a$ aequationi differentiali $\partial y = \frac{\partial x}{Q}$ satisfaciens simul sit ejus integrale particulare nec ne? scilicet tum demum erit integrale, si posito $x = a$ non solum fiat $Q = 0$, sed etiam integrale $P = \int \frac{\partial x}{Q}$ abeat in infinitum. Quod quo clarius exponamus, quoniam posito $x = a$ fit $Q = 0$, ponamus $Q = (a - x)^n R$, denotante n numerum quemcunque positivum, et cum aequatio

$$\partial y = \frac{\partial x}{Q} = \frac{\partial x}{(a - x)^n R}$$

induere queat hanc formam

$$\partial y = \frac{\alpha \partial x}{(a-x)^n} + \frac{\beta \partial x}{(a-x)^{n-1}} + \frac{\gamma \partial x}{(a-x)^{n-2}} + \ldots + \frac{S \partial x}{R},$$

ratio illius infiniti P pendebit a termino $\int \frac{\alpha \partial x}{(a-x)^n}$ qui si posito $x = a$ evadat infinitus, etiam integrale $P = \int \frac{\partial x}{Q}$ erit infinitum, utcunque se habeant reliqua membra. At est

$$\int \frac{\alpha \partial x}{(a-x)^n} = \frac{\alpha}{(n - 1)(a - x)^{n-1}},$$

quae expressio fit infinita posito $x = a$, dummodo $n - 1$ sit numerus positivus, vel etiam $n = 1$. Quare dummodo exponens n non sit unitate minor, posito $Q = (a - x)^n R$ aequatio $x = a$ pro integrali particulari erit habenda.

Corollarium 1.

548. Quoties ergo posito $Q = (a - x)^n R$ exponens n est unitate minor, aequationi $\partial y = \frac{\partial x}{Q}$ non convenit integrale particulare $x = a$, etiamsi hoc modo aequationi differentiali satisfiat.

Corollarium 2.

549. Si exponens n est unitate minor, formula $\frac{\partial Q}{\partial x}$ fit infinita posito $x = a$; unde novum criterium adipiscimur: Scilicet proposita aequatione $\partial y = \frac{\partial x}{Q}$, si posito $x = a$ fiat quidem $Q = 0$, at $\frac{\partial Q}{\partial x} = \infty$, tum valor $x = a$ non est integrale particulare illius aequationis.

Corollarium 3.

550. His igitur casibus exclusis, aequationis $\partial y = \frac{\partial x}{Q}$, ubi posito $x = a$ fit $Q = 0$, integrale particulare semper erit $x = a$, nisi eodem casu $x = a$ fiat $\frac{\partial Q}{\partial x} = \infty$; hoc est quoties valor formulae $\frac{\partial Q}{\partial x}$ fuerit vel finitus vel evanescat.

Scholion 1.

551. Haec conclusio inversioni propositionum hypotheticarum innixa licet videri queat suspecta ac regulis Logicae adversa, verum totum ratiocinium regulis apprime est consentaneum, cum a sublatione consequentis ad sublationem antecedentis concludat. Quoties enim posito $Q = (a - x)^n R$ exponens n est unitate minor, toties $\frac{\partial Q}{\partial x}$ fit $= \infty$ posito $x = a$. Quare si posito $x = a$ non fiat $\frac{\partial Q}{\partial x} = \infty$, ideoque ejus valor vel finitus vel evanescat, tum certe exponens n non est unitate minor, erit ergo vel major unitate vel ipsi aequalis, utroque autem casu integrale $P = \int \frac{\partial x}{Q}$ posito $x = a$ fit infinitum, ideoque aequatio $x = a$ est integrale particulare.

Quare si in aequatione differentiali $\partial y = \frac{\partial x}{Q}$, posito $x = a$, fiat $Q = 0$, examinatur valor $\frac{\partial Q}{\partial x}$ pro casu $x = a$, qui si fuerit vel finitus vel evanescat, aequatio $x = a$ est integrale particulare; sin autem is sit infinitus, ea inter integralia locum non habet, etiamsi aequationi differentiali satisfiat. Eadem regula quoque locum habet, si aequatio differentialis fuerit hujusmodi $\partial y = \frac{P \partial x}{Q}$ seu $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{P}{Q}$, ac posito $x = a$ fiat $Q = 0$, quaecunque fuerit P functio ipsarum x et y; quin etiam necesse non est, ut Q sit functio solius variabilis x, sed simul alteram y utcunque implicare potest.

Scholion 2.

552. Demonstratio quidem inde est petita, quod quantitas Q, quae posito $x = a$ evanescit, factorem implicet potestatem quampiam ipsius $a - x$, quod in functionibus algebraicis est manifestum. Verum in functionibus transcendentibus eadem regula locum habet, cum potestate talibus dignitatibus aequivaleant. Veluti si sit $\partial y = \frac{\partial x}{lx - la}$, ubi $Q = lx - la = l\frac{x}{a}$, fitque $Q = 0$ posito $x = a$, quaeratur $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x}$, quae formula cum non fiat infinita posito $x = a$, integrale particulare erit $x = a$. Quod etiam valet pro aequatione $\partial y = \frac{P \partial x}{lx - la}$, dummodo P non fiat $= 0$ posito $x = a$. Sit enim $P = \frac{1}{x}$, erit integrando $y = C + l(lx - la)$ et $l\frac{x}{a} = e^{y - C}$. Sumta jam constante $C = \infty$, fit $l\frac{x}{a} = 0$, ideoque $x = a$, quod ergo est integrale particulare. Simili modo si sit $\partial y = P \partial x : (e^{\frac{x}{a}} - e)$, ubi $Q = e^{\frac{x}{a}} - e$, ideoque posito $x = a$ fit $Q = 0$; quia $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{a} e^{\frac{x}{a}}$, hincque posito $x = a$ fit $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{e}{a}$, erit $x = a$ etiam integrale particulare. Sumatur $P = e^{\frac{x}{a}}$ ut integratio succedat, et quia $y = C + al(e^{\frac{x}{a}} - e)$, hincque $e^{\frac{x}{a}} =$

$e + e^{\frac{y-C}{a}}$, statuatur $C = \infty$, erit $e^{\frac{x}{a}} = e$, ideoque $x = a$, quod ergo manifesto est integrale particulare.

Exemplum 1.

553. *Proposita aequatione differentiali $\partial y = \frac{P \partial x}{\sqrt{S}}$ in qua S evanescat posito $x = a$, definire casus, quibus aequatio $x = a$ est ejus integrale particulare.*

Cum hic sit $\sqrt{S} = Q$, erit $\partial Q = \frac{\partial S}{2\sqrt{S}}$: ergo ut integrale particulare sit $x = a$, necesse est, ut posito $x = a$ fiat $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial S}{2 \partial x \sqrt{S}}$ quantitas finita. Hinc eodem casu quantitas $\frac{\partial S^2}{S \partial x^2}$ fieri debet finita, unde cum S evanescat, etiam $\frac{\partial S^2}{\partial x^2}$ ac proinde $\frac{\partial S}{\partial x}$ evanescere debet: Tum autem posito $x = a$ illius fractionis valor est $\frac{2 \partial S \partial \partial S}{\partial S \partial x^2} = \frac{2 \partial \partial S}{\partial x^2}$, quem ergo finitum esse oportet, vel $= 0$. Quare ut aequatio $x = a$ sit integrale particulare aequationis propositae, hae conditiones requiruntur, primo ut posito $x = a$ fiat $S = 0$. Secundo ut fiat $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$, ac tertio ut hujus formulae $\frac{\partial \partial S}{\partial x^2}$ valor prodeat vel finitus, vel $= 0$, dummodo ne fiat infinite magnus. Si S sit functio rationalis, haec eo redeunt, ut S factorem habeat $(a - x)^2$ vel potestatem altiorem.

Scholion.

554. Haec resolutio usum habet in motu corporis ad centrum virium attracti dignoscendo, num in circulo fiat. Si enim distantia corporis a centro ponatur $= x$, et vis centripeta huic distantiae conveniens $= X$, pro tempore t talis reperitur aequatio $\partial t = \frac{x \partial x}{\sqrt{(Exx - c^4 - 2 \alpha x x \int X \partial x)}}$, ubi E est constans per praecedentem integrationem ingressa, cujus valor quaeritur, ut hinc aequationi satisfaciat valor $x = a$, quo casu corpus in circulo revolvetur.

Hic ergo est $S = E\,x\,x - c^4 - 2\,\alpha\,x\,x \int X\,\partial x$, vel sumi potest $S = E - \frac{c^4}{xx} - 2\,\alpha \int X\,\partial x$. Non solum ergo haec quantitas, sed etiam ejus differentiale $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{2\,c^4}{x^3} - 2\,\alpha\,X$ evanescere debet posito $x = a$, neque tamen differentio-differentiale $\frac{\partial\partial S}{\partial x^2} = -\frac{6\,c^4}{x^4} - \frac{2\,\alpha\,\partial X}{\partial x}$ in infinitum abire debet. Inde ergo constans a erit valor ipsius x, ex hac aequatione $\alpha\,x^3\,X = c^4$ resultans, qui est radius circuli, in quo corpus revolvi poterit, dummodo constans E, a qua celeritas pendet, ita fuerit comparata, ut posito $x = a$ fiat $E = \frac{c^4}{aa} + 2\,\alpha \int X\,\partial x$; nisi forte eodem casu expressio $\frac{6\,c^4}{x^4} + \frac{2\,\alpha\,\partial X}{\partial x}$ seu saltem haec $\frac{\partial X}{\partial x}$ fiat infinita. Hoc enim si eveniret motus in circulo tolleretur; ad quod ostendendum ponamus $X = b + \sqrt{(a - x)}$, ut $\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{(a - x)}}$ fiat infinitum posito $x = a$, et aequatio $\alpha\,x^3\,X = c^4$ dabit $\alpha\,a^3\,b = c^4$. Tum vero ob

$$\int X\,\partial x = b\,x - \tfrac{2}{3}(a - x)^{\frac{3}{2}} \text{ erit}$$

$$E = \alpha\,a\,b + 2\,\alpha\,a\,b = 3\,\alpha\,a\,b,$$

nostraque aequatio fit

$$\partial t = \frac{x\,\partial x}{\sqrt{[3\,\alpha\,a\,b\,x\,x - \alpha\,a^3\,b - 2\,\alpha\,b\,x^3 + \frac{4}{3}\,\alpha\,x\,x\,(a - x)^{\frac{3}{2}}]}}$$

cui valor $x = a$ certe non convenit tanquam integrale. Fit enim

$$S = \alpha(a - x)[-aab - abx + 2bxx + \tfrac{4}{3}xx\sqrt{(a - x)}]$$

cujus factor cum non sit $(a - x)^2$ sed tantum $(a - x)^{\frac{3}{2}}$, integrale particulare $x = a$ locum habere nequit.

Exemplum 2.

555. *Proposita aequatione differentiali* $\partial y = \frac{P\,\partial x}{\sqrt[n]{S^m}}$ *in qua*

S evanescat posito $x = a$, invenire casus quibus integrale particulare est $x = a$.

Cum fiat $S = 0$ posito $x = a$, concipere licet $S = (a-x)^\lambda R$, eritque denominator $\sqrt[n]{S^m} = (a-x)^{\frac{\lambda m}{n}} R^{\frac{m}{n}}$, unde patet aequationem $x = a$ fore integrale particulare aequationis propositae, si fuerit $\frac{\lambda m}{n}$ numerus positivus unitate major, seu saltem unitati aequalis, hoc est, si sit vel $\lambda = \frac{n}{m}$ vel $\lambda > \frac{n}{m}$, quae dijudicatio si S sit functio algebraica, facillime instituitur. Sin autem sit transcendens, ut exponens λ in numeris exhiberi nequeat, uti licebit altera regula: scilicet, cum sit $\sqrt[n]{S^m} = Q$, erit $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{m S^{\frac{m-n}{n}} \partial S}{n \partial x}$, cujus valor debet esse finitus vel nullus posito $x = a$, siquidem integrale sit $x = a$. Sit igitur quoque necesse est hoc casu quantitas $\frac{S^{m-n} \partial S^n}{\partial x^n}$ finita. Quaeratur ergo hujus formulae valor casu $x = a$, qui si prodeat infinite magnus, aequatio $x = a$ non erit integrale, sin autem sit vel finitus vel nullus, erit ea certe integrale particulare aequationis propositae. Hic duo constituendi sunt casus, prout fuerit vel $m > n$ vel $m < n$.

I. Si $m > n$, quia posito $x = a$ fit $S^{m-n} = 0$, nisi eodem casu fiat $\frac{\partial S}{\partial x} = \infty$, certe erit $x = a$ integrale. Sin autem fiat $\frac{\partial S}{\partial x} = \infty$, utrumque evenire potest, ut sit integrale et ut non sit. Ad quod dignoscendum ponatur $\frac{\partial x}{\partial S} = T$, ut nostra formula evadat $\frac{S^{m-n}}{T^n}$, cujus tam numerator, quam denominator evanescit posito $x = a$, ex quo ejus valor reducitur ad

$$\frac{(m-n) S^{m-n-1} \partial S}{n T^{n-1} \partial T} = \frac{-(m-n) S^{m-n-1} \partial S^{n+2}}{n \partial x^n \partial \partial S},$$

qui si sit vel finitus vel nullus, integrale erit $x = a$. Simili modo ulterius progredi licet distinguendo casus $m > n + 1$ et $m < n + 1$.

II. Si $m < n$, formula nostra erit $\frac{\partial S^n}{S^{n-m} \partial x^n}$, cujus valor ut fiat finitus, necesse est ut sit $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$, ac praeterea, quia numerator ac denominator posito $x = a$ evanescit, formulae nostrae valor erit

$$\frac{n \partial S^{n-1} \partial \partial S}{(n-m) S^{n-m-1} \partial S \partial x^n} = \frac{n \partial S^{n-2} \partial \partial S}{(n-m) S^{n-m-1} \partial x^n},$$

quem finitum esse oportet.

Facillime autem judicium absolvetur, ponendo statim $x = a + \omega$, cum enim posito $x = a$ fiat $S = 0$, hac substitutione quantitas S semper resolvi poterit in hujusmodi formam

$$P \omega^\alpha + Q \omega^\beta + R \omega^\gamma + \text{etc.}$$

cujus tantum unus terminus $P \omega^\alpha$ infimam potestatem ipsius ω complectens spectetur; ac si fuerit vel $\alpha = \frac{n}{m}$ vel $\alpha > \frac{n}{m}$, aequatio $x = a$ certe erit integrale particulare.

Scholion.

556. Haec ultima methodus est tutissima, ac semper etiam in formulis transcendentibus optimo successu adhiberi potest. Scilicet proposita aequatione $\partial y = \frac{P \partial x}{Q}$, in qua posito $x = a$ fiat $Q = 0$, neque vero etiam numerator P evanescat: statuatur $x = a + \omega$, et quantitas ω spectetur ut infinite parva; ut omnes ejus potestates prae infima evanescant, atque quantitas Q hujusmodi formam $R \omega^\lambda$ accipiet, ex qua patebit nisi exponens λ unitate fuerit minor, aequationem $x = a$ certe fore integrale particulare aequationis propositae. Veluti si habeamus $\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(1 + \cos. \frac{\pi x}{a})}}$, cu-

jus denominator evanescit sumto $x = a$, ob cos. $\pi = -1$, po namus $x = a - \omega$, erit

$$\cos. \tfrac{\pi x}{a} = \cos. (\pi - \tfrac{\pi\omega}{a}) = -1 + \tfrac{\pi\pi\omega\omega}{2aa}$$

ob ω infinite parvum, hinc nostrae aequationis denominator fie $= \frac{\pi\omega}{a\sqrt{2}}$, unde concludimus integrale particulare utique esse $x = a$ Non autem foret integrale hujus aequationis

$$\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1 + \cos. \frac{\pi x}{a})}}.$$

Problema 71.

557. Proposita aequatione differentiali, in qua variabiles sun a se invicem separatae, investigare ejus integralia particularia.

Solutio.

Sit proposita haec aequatio $\frac{\partial x}{X} = \frac{\partial y}{Y}$, in qua X sit functic ipsius x, et Y ipsius y tantum. Ac primo ponatur $X = 0$, indeque quaerantur valores ipsius x, quorum quisque sit $x = a$, ita u posito $x = a$, fiat $X = 0$; tum examinetur valor formulae $\frac{\partial X}{\partial x}$ posito $x = a$, qui nisi fiat infinitus, aequationis propositae integrale particulare certe erit $x = a$. Vel ponatur $x = a \pm \omega$, spectando ω ut quantitatem infinite parvam, ac si prodeat $X = P\omega^\lambda$, exponens λ, nisi sit unitate minor, indicabit integrale $x = a$; sin autem sit unitate minor, aequatio $x = a$ pro integrali non erit habenda.

Simili modo examinetur alterius partis denominator Y, qui si evanescat posito $y = b$, hocque casu formula $\frac{\partial Y}{\partial y}$ non fiat infinita, aequatio $y = b$ erit integrale particulare: quod ergo etiam evenit, si posito $y = b \pm \omega$, prodeat $Y = Q\omega^\lambda$, ubi exponens λ unitate non sit minor.

Corollarium 1.

558. Nisi ergo membra aequationis separatae fuerint fractiones, quarum denominatores certis casibus evanescant, hujusmodi integralia particularia non dantur; nisi forte in tali aequatione $P\partial x = Q\partial y$, factores P et Q certis casibus fiant infiniti, qui autem casus ad praecedentem facile reducitur.

Corollarium 2.

559. Veluti si habeatur $\partial x \operatorname{tang.} \frac{\pi x}{2a} = \frac{\partial y}{b-y}$, primo quidem integrale particulare est $y = b$, tum vero quia posito $x = a$ fit $\operatorname{tang.} \frac{\pi x}{2a} = \infty$, prius membrum ita exhibeatur $\frac{\partial x}{\cot. \frac{\pi x}{2a}}$, cujus denominator posito $x = a - \omega$ fit

$$\cot. \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\omega}{2a}\right) = \operatorname{tang.} \frac{\pi\omega}{2a} = \frac{\pi\omega}{2a},$$

ubi cum exponens ipsius ω unitate non sit minor, aequatio $x = a$ erit quoque integrale particulare.

Corollarium 3.

560. Hinc ergo interdum pro eadem aequatione duo plurave integralia particularia assignari possunt. Veluti pro hac aequatione $\frac{m\partial x}{a-x} = \frac{n\partial y}{b-y}$ integralia particularia sunt $a-x=0$ et $b-y=0$, quae etiam ex integrali completo $(a-x)^m = C(b-y)^n$ consequuntur, illud sumendo $C=0$, hoc vero sumendo $C=\infty$.

Corollarium 4.

561. Simili modo hujus aequationis $\frac{ma\partial x}{aa-xx} = \frac{nb\partial y}{bb-yy}$ qua-

tuor dantur integralia particularia $a+x=0$, $a-x=0$, $b+y=0$ $b-y=0$. Integrale completum vero est

$$\frac{m}{2}\, l\frac{a+x}{a-x}=\tfrac{1}{2}\, l\, C+\frac{n}{2}\, l\frac{b+y}{b-y},\ \text{seu}$$

$$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^m=C\left(\frac{b+y}{b-y}\right)^n,\ \text{vel}$$

$$(a+x)^m(b-y)^n=C(a-x)^m(b+y)^n,$$

unde illa sponte fluunt.

Corollarium 5.

562. Hinc patet si fuerit $\partial y=\frac{P\,\partial x}{(a+x)^\alpha(b+x)^\beta(c+x)^\gamma}$ integralia particularia fore $a+x=0$, $b+x=0$, $c+x=0$, s modo exponentes α, β, γ etc. non fuerint unitate minores. Quar si Q sit functio rationalis ipsius x, proposita aequatione $\partial y=\frac{P\partial x}{Q}$ omnes factores ipsius Q nihilo aequales positi, praebent integrali particularia.

Scholion 1.

563. Hoc etiam pro factoribus imaginariis valet, etiamsi in de parum lucri nanciscamur. Si enim proposita sit aequati $\partial y=\frac{a\partial x}{aa+xx}$, ex denominatore $aa+xx$ oriuntur integralia par ticularia $x=a\sqrt{-1}$ et $x=-a\sqrt{-1}$, quae ex integral completo, quod est $y=C+\text{Ang. tang. }\frac{x}{a}$ minus sequi videntur Verum posito $x=a\sqrt{-1}$ notandum est, esse Ang. tang. $\sqrt{-1}$ $=\infty\sqrt{-1}$, unde si constanti C similis forma signo contrari affecta tribuatur, altera quantitas y manet indeterminata, etiamsi po natur $x=a\sqrt{-1}$, quae positio propterea pro integrali particu lari est habenda. Est enim in genere

$$\text{Ang. tang. } u\sqrt{-1}=\int\frac{\partial u\sqrt{-1}}{1-uu}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\frac{1+u}{1-u},$$

unde posito $x = +1$ vel $x = -1$, prodit $\infty \sqrt{-1}$, quod infinitum in causa est, ut integralia assignata locum habeant. Quare circa in genere affirmare licet, si fuerit $\partial y = \frac{P \partial x}{Q}$, denominatorque Q factorem habeat $(a + x)^\lambda$, cujus exponens λ unitate non sit minor, semper aequationem $a + x = 0$ fore integrale particulare. Sin autem λ sit unitate minor etsi positivus, non erit $a + x = 0$ integrale particulare, etiamsi posito $x = -a$ aequationi differentiali satisfaciat.

Scholion 2.

564. Insigne hoc est paradoxon a nemine adhuc, quantum mihi quidem constat, observatum, quod aequationi differentiali ejusmodi valor satisfacere queat, qui tamen ejus non sit integrale; atque adeo vix patet, quomodo haec cum solita integralium idea conciliari possint. Quoties enim proposita aequatione differentiali ejusmodi relationem variabilium exhibere licet, quae ibi substituta satisfaciat, seu aequationem identicam producat, vix cuiquam in mentem venit dubitare, an illa relatio pro integrali saltem particulari sit habenda, cum tamen hinc proclive sit in errorem delabi. Veluti etiamsi huic aequationi $\partial y \sqrt{(aa - xx - yy)} = x \partial x + y \partial y$ satisfaciat haec aequatio finita $xx + yy = aa$, tamen enormem errorem committeremus, si eam pro integrali particulari habere vellemus, propterea quod ea in integrali completo $y = C - \sqrt{(aa - xx - yy)}$ neutiquam continetur. Quamobrem etsi omne integrale aequationi differentiali satisfacere debet, tamen non vicissim concludere licet, omnem aequationem finitam, quae satisfaciat, ejus esse integrale; verum praeterea requiritur, ut ea certa quadam proprietate sit praedita, cujusmodi hic exposuimus, et qua demum efficitur, ut in integrali completo contineatur. Hoc autem minime adversatur verae integralium notioni, quam hic stabilivimus, neque hujusmodi dubium unquam in integralia per certas regulas inventa cadere potest; sed tantum in ejusmodi integralibus, quae divinando quasi sumus asse-

tum, locum habet. Saepenumero autem, quando integratio n succedit, divinationi plurimum tribui solet, tum igitur maxime c vendum est, ne relationem quampiam satisfacientem temere pro i tegrali particulari proferamus. Quod cum jam in aequationibus s paratis simus assecuti, quomodo in omnibus aequationibus differenti libus hujusmodi errores vitari oporteat, sedulo investigemus.

Problema 72.

565. Si quaepiam relatio inter binas variabiles satisfaciat a quationi differentiali, definire utrum ea sit integrale particulare, nec n

Solutio.

Sit $P\partial x = Q\partial y$ aequatio differentialis proposita; ubi P Q sint functiones quaecunque ipsarum x et y, cui satisfaciat r latio quaepiam inter x et y, ex qua fiat $y = X$, functioni scilic cuidam ipsius x, ita ut si loco y ubique scribatur X, revera pr deat $P\partial x = Q\partial y$ seu $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{P}{Q}$. Quaeritur ergo utrum hic v lor $y = X$ pro integrali aequationis propositae haberi possit n ne? Ad hoc dijudicandum ponatur $y = X + \omega$, fietque $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} =$ ubi notetur si esset $\omega = 0$, fore $\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{P}{Q}$. Quare ob ω expre sio $\frac{P}{Q}$ hac substitutione reducetur ad $\frac{\partial X}{\partial x}$ una cum quantitate ita p ω affecta, ut evanescat posito $\omega = 0$. In hoc negotio sufficit ut particulam infinite parvam spectasse, cujus ergo potestates alt res prae infima negligere liceat. Ponamus igitur hinc fieri $\frac{P}{Q} =$ $+ S\omega^\lambda$, habebiturque $\frac{\partial \omega}{\partial x} = S\omega^\lambda$ seu $\frac{\partial \omega}{\omega^\lambda} = S\partial x$. Ex superio bus jam perspicuum est, tum demum fore $y = X$ integrale par culare, seu $\omega = 0$, cum exponens λ fuerit unitate aequalis vel m jor: similis enim hic est ratio ac supra, qua requiritur, ut integ le $\int S\,\partial x = \int \frac{\partial\omega}{\omega^\lambda}$ fiat infinitum, casu proposito, quo $\omega = 0$, hoc autem non evenit, nisi λ sit unitati aequalis, vel > 1. Quodsi ergo aequationi $P\,\partial x = Q\,\partial y$ seu $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{P}{Q}$ satisfaciat valor $y = X$, statuatur $y = X + \omega$, spectata particula ω infinite parva, et investigetur hinc forma $\frac{Q}{P} = \frac{\partial X}{\partial x} + S\,\omega^\lambda$, ex qua nisi sit $\lambda < 1$ concludetur, illum valorem $y = X$ esse integrale particulare aequationis propositae.

Scholion.

566. Cum ω tractetur ut quantitas infinite parva, valor ipsius $\frac{P}{Q}$ posito $y = X + \omega$ per differentiationem commodissime inveniri posse videtur. Cum enim $\frac{P}{Q}$ sit functio ipsarum x et y, statuamus

$$\partial.\frac{P}{Q} = M\,\partial x + N\,\partial y,$$

et quia posito $y = X$, fractio $\frac{P}{Q}$ abit in $\frac{\partial X}{\partial x}$ per hypothesin, si loco y scribatur $X + \omega$, ea in $\frac{\partial X}{\partial x} + N\omega$ transibit, unde ob exponentem ipsius ω unitatem sequeretur, aequationem $y = X$ semper esse integrale particulare, quod tamen secus evenire potest. Ex quo patet differentiationem loco substitutionis adhiberi non posse; quod quo clarius ostendatur, ponamus esse $\frac{P}{Q} = \sqrt{(y - X)} + \frac{\partial X}{\partial x}$, unde posito $y = X + \omega$ manifesto oritur $\frac{P}{Q} = \frac{\partial X}{\partial x} + \sqrt{\omega}$. At differentiatione utentes ponendo

$$\partial.\frac{P}{Q} = M\,\partial x + N\,\partial y,$$

fiet $N = \frac{1}{2\sqrt{(y - X)}}$, hincque $\frac{P}{Q} = \frac{\partial X}{\partial x} + N\omega$, quae expressio ab illa discrepat. Illa scilicet aequationem $y = X$ ex integralium numero removet, haec vero admittere videtur. Verum et hic notan-

dum est quantitatem N ipsam potestatem ipsius ω negative involv
re, unde potestas ω deprimatur. Quare ne hanc rationem spect
re opus sit, semper praestat vera substitutione uti, differentiatio
seposita. Hoc observato haud difficile erit omnes valores, qui a
quationi cuipiam differentiali satisfaciunt, dijudicare, utrum sint ve
integralia nec ne?

Exemplum 1.

567. *Cum huic aequationi*

$$\partial x (1 - y^m)^n = \partial y (1 - x^m)^n,$$

manifesto satisfaciat $y = x$, *utrum sit ejus integrale particula nec ne? definire.*

Ponatur $y = x + \omega$, et spectato ω ut quantitate minima,
$y^m = x^m + m x^{m-1} \omega$, et

$$(1 - y^m)^n = (1 - x^m - m x^{m-1} \omega)^n$$
$$= (1 - x^m)^n - m n x^{m-1} \omega (1 - x^m)^{n-1},$$

unde aequatio $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{(1 - y^m)^n}{(1 - x^m)^n}$ abit in

$$1 + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 1 - \frac{m n x^{m-1} \omega}{1 - x^m},$$

seu $\frac{\partial \omega}{\omega} = - \frac{m n x^{m-1} \partial x}{1 - x^m}$; ubi cum ω habeat dimensionem i
tegram, aequatio $y = x$ certe est integrale particulare aequation
differentialis propositae.

Exemplum 2.

568. *Cum huic aequationi*

$$a \partial y - a \partial x = \partial x \sqrt{(y y - x x)},$$

satisfaciat valor $y = x$, investigare, utrum is sit ejus integrale particulare nec ne?

Ponatur $y = x + \omega$ et sumta ω quantitate infinite parva cum sit $\sqrt{(yy - xx)} = \sqrt{2x\omega}$, erit $a\,\partial\omega = \partial x \sqrt{2x\omega}$ seu $\frac{a\,\partial\omega}{\sqrt{\omega}} = \partial x \sqrt{2x}$. Quoniam igitur hic $\partial\omega$ dividitur per potestatem ipsius ω, cujus exponens est unitate minor, sequitur valorem $y = x$ non esse integrale particulare aequationis propositae, etiamsi ei satisfaciat. Scilicet si ejus integrale completum exhibere liceret, pateret, quomodocunque constans arbitraria per integrationem ingressa definiretur, in ea aequationem $y = x$ non contentum iri.

Scholion.

569. Hinc nova ratio intelligitur, cur dijudicatio integralis ab exponente ipsius ω pendeat. Cum enim in exemplo proposito facto $y = x + \omega$ prodeat $\frac{a\,\partial\omega}{\sqrt{\omega}} = \partial x \sqrt{2x}$, erit integrando $2a\sqrt{\omega} = C + \frac{2}{3} x \sqrt{2x}$. Verum per hypothesin ω est quantitas infinite parva, hinc autem utcunque definiatur constans C, quantitas ω obtinet valorem finitum, qui adeo quantumvis magnus evadere potest, quod cum hypothesi adversetur, necessario sequitur aequationem $y = x$ integrale esse non posse; hocque semper evenire debere, quoties $\partial\omega$ prodit divisum per potestatem ipsius ω, cujus exponens unitate est minor. Contra vero patet, si facta substitutione exposita prodeat $\frac{\partial\omega}{\omega} = R\,\partial x$, ut posito $\int R\,\partial x = lS$ fiat $l\omega = lC + lS$, seu $\omega = CS$, sumta constante C evanescente utique ipsam quantitatem ω evanescere, quod idem evenit si prodeat $\frac{\partial\omega}{\omega^\lambda} = R\,\partial x$, existente $\lambda > 1$. Erit enim $\frac{1}{(\lambda - 1)\,\omega^{\lambda - 1}} = C - S$ seu $(\lambda - 1)\,\omega^{\lambda - 1} = \frac{1}{C - S}$, unde sumto $C = \infty$, quantitas ω revera fit evanescens, ut hypothesis exigit.

Caeterum aequatio hujus exempli, posito $x = pp - qq$ et $y = pp + qq$, ab irrationalitate liberatur, fitque $4aq\partial q = 4pq(p\partial p - q\partial q)$, sive $a\partial q = pp\partial p - pq\partial q$, quae nullo modo tractari posse videtur; neque ergo ejus integrale completum exhiberi potest. Cui aequationi cum non amplius satisfacit $x = y$ seu $q = 0$ hinc quoque concludendum est, valorem $y = x$ non esse integrale particulare.

Exemplum 3.

570. *Cum huic aequationi*

$$aa\partial y - aa\partial x = \partial x(yy - xx),$$

satisfaciat valor $y = x$, investigare, utrum is sit ejus integrale particulare nec ne?

Ponatur $y = x + \omega$ spectata ω ut quantitate infinite parva, et ob $yy - xx = 2x\omega$ aequatio nostra hanc induet formam $aa\partial\omega = 2x\omega\partial x$, seu $\frac{aa\partial\omega}{\omega} = 2x\partial x$. Quia igitur hic $\partial\omega$ dividitur per potestatem primam ipsius ω, aequatio $y = x$ utique erit integrale particulare aequationis propositae, atque adeo etiam in integrali completo continetur. Hoc enim invenitur ponendo $y = x - \frac{aa}{u}$, quo fit

$$\frac{a^4\partial u}{uu} = \partial x\left(\frac{a^4}{uu} - \frac{2aax}{u}\right), \text{ seu } \partial u + \frac{2ux\partial x}{aa} = \partial x.$$

Multiplicetur per $e^{\frac{xx}{aa}}$, et integrale prodit

$$e^{\frac{xx}{aa}}u = C + \int e^{\frac{xx}{aa}}\partial x, \text{ hincque}$$

$$y = x - aa\, e^{\frac{xx}{aa}} : \left(C + \int e^{\frac{xx}{aa}}\partial x\right).$$

Quodsi ergo constans C capiatur infinita, fit $y = x$.

Scholion.

571. Si in hac aequatione ut supra ponatur $x = pp - qq$ et $y = pp + qq$, oritur $aa\partial q = ppq(p\partial p - q\partial q)$, cui satisfacit $q = 0$, unde casus $y = x$ nascitur. At facta hac transformatione difficulter patet, quomodo ejus integrale inveniri oporteat. Si quidem superiorem reductionem perpendamus, intelligemus hanc aequationem integrabilem reddi si multiplicetur per $e^{(pp-qq):aa} : q^3$, quod cum per se haud facile pateat, consultum erit hac substitutione uti $pp - qq = rr$, qua fit $pp = qq + rr$ et $p\partial p - q\partial q = r\partial r$, unde aequatio abit in $aa\partial q = qr\partial r(qq + rr)$, seu $\frac{aa\partial q}{q^3} = r\partial r + \frac{r^3\partial r}{qq}$, quae posito $\frac{1}{qq} = s$ facile integratur. Quoties ergo licet ejusmodi relationem inter variabiles colligere, quae aequationi differentiali satisfaciat, hoc modo judicari poterit, utrum ea relatio pro integrali particulari sit habenda nec ne? Pro inventione autem hujusmodi integralium particularium regulae vix tradi possunt; quae enim habentur regulae, aeque ad integralia completa invenienda patent. Ita quae supra circa aequationes separatas observavimus, ob id ipsum quod sunt separatae, via simul ad integrale completum est patefacta. Simili modo si altera methodus per factores succedat, plerumque ex ipsis factoribus, quibus aequatio integrabilis redditur, integralia particularia concludi possunt; quaemadmodum in sequentibus propositionibus declarabimus.

Theorema.

572. Si aequatio differentialis $P\partial x + Q\partial y = 0$ per functionem M multiplicata reddatur integrabilis, integrale particulare erit $M = 0$, nisi eodem casu P vel Q abeat in infinitum.

Demonstratio.

Ponamus u esse factorem ipsius M, et ostendendum est aequationem $u = 0$ esse integrale particulare aequationis propositae, Cum u aequetur certae functioni ipsarum x et y, definiatur inde altera variabilis y, ut aequatio prodeat inter binas variabiles x et u, quae sit $R\partial x + S\partial u = 0$, unde posito multiplicatore $M = Nu$, integrabilis erit haec forma

$$NRu\partial x + NSu\partial u = 0.$$

Quodsi jam neque R neque S per u dividatur, quo casu posito $u = 0$ neque P neque Q abit in infinitum, integrale utique per u erit divisibile. Nam sive id colligatur ex termino $NRu\partial x$ spectata u ut constante, sive ex termino $NSu\partial u$ spectata x constante, integrale prodit factorem u implicans, si quidem in integratione constans omittatur. Unde concludimus integrale completum hujusmodi formam esse habiturum $V = uC$. Quare si haec constans C nihilo aequalis capiatur, integrale particulare erit $u = 0$, iis scilicet casibus exceptis, quibus functiones R et S jam ipsae per u essent divisae, ideoque ratiocinium nostrum vim suam amitteret. His ergo casibus exclusis, quoties aequatio $P\partial x + Q\partial y = 0$ per functionem M multiplicata fit per se integrabilis, eaque functio M factorem habeat u, integrale particulare erit $u = 0$, quod similiter de singulis factoribus functionis M valet.

Scholion.

573. Limitatio adjecta absolute est necessaria, cum ea neglecta universum ratiocinium claudicet. Quod quo facilius intelligatur, consideremus hanc aequationem

$$\frac{a\partial x}{y-x} + \partial y - \partial x = 0,$$

quae per $y - x$ multiplicata manifesto fit integrabilis: ponamus ergo hunc multiplicatorem $y - x = u$, seu $y = x + u$, unde nostra aequatio erit $\frac{a\partial x}{u} + \partial u = 0$, quae per u multiplicata, abit in $a\partial x + u\partial u = 0$: ubi cum pars $a\partial x$ non per u sit multiplicata, neutiquam concludere licet integrale per u fore divisibile, quippe quod est $ax + \frac{1}{2}uu$. Hinc patet, si modo pars ∂x per

u esset multiplicata, etiamsi altera pars ∂u factore u careret, tamen integrale per u divisibile fore, veluti evenit in $u\partial x + x\partial u$, cujus integrale xu utique factorem habet u. Ex quo intelligitur, si formula $Pu\partial x + Q\partial u$ fuerit per se integrabilis, dummodo Q non dividatur per u vel per potestatem ejus prima altiorem, etiam integrale, omissa scilicet constante, fore per u divisibile.

Theorema.

574. Si aequatio differentialis $P\partial x + Q\partial y = 0$ per functionem M divisa evadat per se integrabilis, integrale particulare erit $M = 0$, nisi posito $M = 0$ vel P vel Q evanescat.

Demonstratio.

Habeat divisor M factorem u, ut sit $M = Nu$, et ostendi oportet, integrale particulare futurum $u = 0$, id quod de singulis factoribus divisoris M, si quidem plures habeat, est tenendum. Cum igitur u sit functio ipsarum x et y, definiatur inde altera y per x et u, ut prodeat hujusmodi aequatio $R\partial x + S\partial u = 0$, quae ergo per Nu divisa per se erit integrabilis. Quaeri igitur oportet integrale formulae $\frac{R\partial x}{Nu} + \frac{S\partial u}{Nu}$, ubi assumimus neque R neque S per u multiplicari, neque hoc modo factorem u ex denominatore tolli. Quod si jam hoc integrale ex solo membro $\frac{R\partial x}{Nu}$ colligatur, spectando u ut constantem, prodit id $\frac{1}{u}\int\frac{R\partial x}{N} + \Phi : u$; sin autem ex altero membro $\frac{S\partial u}{Nu}$ sumta x constante colligatur, quia S non factorem habet u, id semper ita erit comparatum, ut posito $u = 0$, fiat infinitum. Ex quo integrale, quod sit V, ita erit comparatum, ut fiat $= \infty$ posito $u = 0$, quare cum integrale completum futurum sit $V = C$, huic aequationi, sumta constante C infinita, satisfit ponendo $u = 0$. Concludimus itaque, si divisor $M = Nu$ reddat aequationem differentialem $P\partial x + Q\partial y = 0$ per se integrabilem, ex quolibet divisoris M factore u obtineri integrale particulare $u = 0$, nisi forte posito $u = 0$, quantitates P et Q, vel R et S evanescant.

Corollarium 1.

575. Si aequatio $P\partial x + Q\partial y = 0$ fuerit homogenea, ea ut supra (§. 477.) vidimus integrabilis redditur, si dividatur per $Px + Qy$, quare integrale ejus particulare erit $Px + Qy = 0$. Quae aequatio cum etiam sit homogenea, factores habebit formae $\alpha x + \beta y$, quorum quisque nihilo aequatus dabit integrale particulare.

Corollarium 2.

576. Pro hac aequatione

$$y \partial x (c + n x) - \partial y (y + a + b x + n x x) = 0$$

divisorem, quo integrabilis redditur, supra §. 488. exhibuimus, unde integrale particulare concluditur $y = 0$, tum vero

$$\begin{aligned} n y y + (2 n a - b c) y + n (b - 2 c) x y \\ + (n a + c c - b c)(a + b x + n x x) = 0, \end{aligned}$$

cujus radices sunt

$$n y = \tfrac{1}{2} b c - n a + n (c - \tfrac{1}{2} b) x \pm (c + n x) \sqrt{(\tfrac{1}{4} b b - n a)}.$$

Corollarium 3.

577. Pro hac aequatione differentiali

$$\frac{n \partial x (1 + y y) \sqrt{(1 + y y)}}{\sqrt{(1 + x x)}} + (x - y) \partial y = 0$$

divisorem, quo integrabilis redditur, supra §. 489. dedimus, unde integrale particulare concludimus

$$x - y + n \sqrt{(1 + x x)(1 + y y)} = 0, \text{ seu}$$

$$y y - 2 x y + x x = n n + n n x x + n n y y + n n x x y y,$$

ex quo porro fit $y = \frac{x \pm n (1 + x x) \sqrt{(1 - n n)}}{1 - n n (1 + x x)}$.

Corollarium 4.

578. Pro hac aequatione differentiali

$$\partial y + yy\partial x - \frac{a\partial x}{x^4} = 0$$

multiplicatorem supra §. 491. invenimus $\frac{xx}{xx(1-xy)^2-a}$, unde integrale particulare concludimus $xx(1-xy)^2 - a = 0$, hincque $x(1-xy) = \pm\sqrt{a}$, seu $y = \frac{1}{x} \pm \frac{\sqrt{a}}{xx}$, ita ut bina habeamus integralia particularia, quae autem imaginaria evadunt, si a fuerit quantitas negativa.

Scholion.

579. Haec fere sunt omnia, quae circa tractationem aequationum differentialium adhuc sunt explorata, nonnulla tamen subsidia evolutio aequationum differentialium secundi gradus infra suppeditabit. Huc autem commode referri possunt, quae circa comparationem certarum formularum transcendentium haud ita pridem sunt investigata. Quemadmodum enim logarithmi et arcus circulares, etsi sunt quantitates transcendentes, inter se comparari atque adeo aeque ac quantitates algebraicae in calculo tractari possunt, ita similem comparationem inter certas quantitates transcendentes altioris generis instituere licet, quae scilicet continentur in formula hac

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)}},$$

ubi etiam numerator rationalis veluti $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 +$ etc. addi potest. Quod argumentum cum sit maxime arduum, atque adeo vires Analyseos superare videatur, nisi certa ratione expediatur, in Analysin inde haud spernenda incrementa redundant; imprimis autem resolutio aequationum differentialium non mediocriter perfici videtur. Cum enim proposita fuerit hujusmodi aequatio

$$\frac{\partial x}{\sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)}} = \frac{\partial y}{\sqrt{(A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4)}},$$

statim quidem patet ejus integrale particulare $x = y$, verum integrale completum maxime transcendens fore videtur, cum utraque formula per se neque ad logarithmos, neque ad arcus circulares reduci queat. Quare eo magis erit mirandum, quod integrale completum per aequationem adeo algebraicam inter x et y exhiberi possit. Quo autem methodus ad haec sublimia ducens clarius perspiciatur, eam primo ad quantitates transcendentes notas, hac formula $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(A + Bx + Cxx)}}$ contentas applicemus, deinceps ejus usum in formulis illis magis complexis ostensuri.