CAPUT II.

DE INTEGRATIONE AEQUATIONUM OPE MULTIPLICATORUM.

Problema 58.

443.

Propositam aequationem differentialem examinare, utrum per se sit integrabilis nec ne?

Solutio.

Dispositis omnibus aequationis terminis ad eandem partem signi aequalitatis, ut hujusmodi habeatur forma $P\partial x + Q\partial y = 0$, aequatio per se erit integrabilis, si formula $P\partial x + Q\partial y$ fuerit verum differentiale functionis cujuspiam binarum variabilium x et y. Hoc autem evenit, uti in calculo differentiali ostendimus, si differentiale ipsius P, sumta sola y variabili, ad ∂y eandem habeat rationem, ac differentiale ipsius Q, sumta sola x variabili, ad ∂x: seu adhibito signandi modo, quo in Calculo differentiali sumus usi, si fuerit $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$. Nam si Z sit ea functio, cujus differentiale est $P\partial x + Q\partial y$, erit hoc signandi modo $P = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$ et $Q = \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$: hinc ergo sequitur $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\partial y}\right)$ et $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial\partial Z}{\partial y\partial x}\right)$. At est $\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial Z}{\partial y\partial x}\right)$, unde colligitur $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$. Quare proposita aequatione differentiali $P\partial x + Q\partial y = 0$, utrum ea per se sit integrabilis nec ne? hoc modo dignoscetur: Quaerantur per differentiationem valores $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ et $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$, qui si fuerint inter se aequales, aequatio per se erit integrabilis; sin autem hi valores sint inaequales, aequatio non erit per se integrabilis.

Corollarium 1.

444. Omnes ergo aequationes differentiales, in quibus variabiles sunt a se invicem separatae, per se sunt integrabiles: habebunt enim hujusmodi formam $X\partial x + Y\partial y = 0$, ut X sit functio solius x et Y solius y, eritque propterea

$$\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0 \text{ et } \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0.$$

Corollarium 2.

445. Vicissim igitur, si proposita aequatione differentiali $P\partial x + Q\partial y = 0$, fuerit $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0$ et $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$, variabiles in ea erunt separatae; littera enim P erit functio tantum ipsius x et Q tantum ipsius y. Unde aequationes separatae quasi primum genus aequationum per se integrabilium constituunt.

Corollarium 3.

446. Evidens autem est, fieri posse, ut sit $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$, etiamsi neuter horum valorum sit nihilo aequalis. Dantur ergo aequationes per se integrabiles, licet variabiles in iis non sint separatae.

Scholion.

447. Criterium hoc, quo aequationes per se integrabiles agnoscimus, maximi est momenti in hac, quam tradere suscipimus, methodo integrandi. Quodsi enim aequatio deprehendatur per se integrabilis, ejus integrale per praecepta jam exposita inveniri potest; sin autem aequatio non fuerit per se integrabilis, semper dabi-

tur quantitas, per quam si ea multiplicetur, fiat per se integrabilis; unde totum negotium eo revocabitur, ut proposita aequatione quacunque per se non integrabili, inveniatur multiplicator idoneus, qui eam reddat per se integrabilem; qui si semper inveniri posset, nihil amplius in hac methodo integrandi esset desiderandum. Verum haec investigatio rarissime succedit, ac vix adhuc latius patet, quam ad eas aequationes, quas ope separationis variabilium jam tractare docuimus; interim tamen non dubito hanc methodum praecedenti longe praeferre, cum ad naturam aequationum magis videatur accommodata, atque etiam ad aequationes differentiales altiorum graduum pateat, in quibus separatio variabilium nullius est usus.

Problema 59.

448. Aequationis differentialis, quam per se integrabilem esse constat, integrale invenire.

Solutio.

Sit aequatio differentialis $P\partial x + Q\partial y = 0$, in qua cum sit $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$, erit $P\partial x + Q\partial y$ differentiale cujuspiam functionis binarum variabilium x et y, quae sit Z, ut sit $\partial Z = P\partial x + Q\partial y$. Cum ergo habeamus hanc aequationem $\partial Z = 0$, erit integrale quaesitum $Z = C$. Totum negotium ergo huc redit, ut ista functio Z eruatur, quod cum sciamus esse $\partial Z = P\partial x + Q\partial y$ haud difficulter praestabitur. Nam quia sumta tantum x variabili, et altera y ut constante spectata, est $\partial Z = P\partial x$, habemus hic formulam differentialem simplicem unicam variabilem x involventem, quae per praecepta superioris sectionis integrata dabit $Z = \int P\partial x + \text{Const}$, ubi autem notandum est, in hac constante quantitatem hic pro constanti habitam y utcunque inesse posse; unde ejus loco scribatur Y, ut sit $Z = \int P\partial x + Y$. Deinde simili modo x pro constanti habeatur, spectata sola y ut variabili, et cum sit $\partial Z = Q\partial y$, erit quoque $Z = \int Q\partial y + \text{Const.}$ quae constans autem quantitatem x

involvet, ita ut sit functio ipsius x, qua posita X, erit $Z = \int Q \partial y + X$. Quanquam autem neque hic functio X neque ibi functio Y determinatur, tamen quia esse debet $\int P \partial x + Y = \int Q \partial y + X$, hinc utraque determinabitur. Cum enim sit $\int P \partial x - \int Q \partial y = X - Y$, haec quantitas $\int P \partial x - \int Q \partial y$ semper in ejusmodi binas partes distinguetur, quarum altera est functio ipsius x tantum, et altera ipsius y tantum, unde valores X et Y sponte cognoscuntur.

Corollarium 1.

449. Cum sit $Q = \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$, duplici integratione ne opus quidem est. Invento enim integrali $\int P \partial x$, id iterum differentietur, sumta sola y variabili, prodeatque $V \partial y$, unde necesse est fiat $V \partial y + \partial Y = Q \partial y$, ideoque

$$\partial Y = Q \partial y - V \partial y = (Q - V) \partial y.$$

Corollarium 2.

450. Aequationum ergo per se integrabilium $P \partial x + Q \partial y = 0$ integratio ita perficietur. Quaeratur integrale $\int P \partial x$ spectata y constante, idque rursus differentietur spectata sola y variabili, unde prodeat $V \partial y$: tum $Q - V$ erit functio ipsius y tantum; unde quaeratur $Y = \int (Q - V) \partial y$, eritque aequatio integralis $\int P \partial x + Y =$ Cons.

Corollarium 3.

451. Vel quaeratur $\int Q \partial y$ spectata x constante, quod integrale rursus differentietur sumta x variabili, y autem constante, unde prodeat $U \partial x$: tum certe erit $P - U$ functio ipsius x tantum; unde quaeratur $X = \int (P - U) \partial x$, eritque aequatio integralis quaesita $\int Q \partial y + X =$ Const.

Corollarium 4.

452. Ex rei natura patet, perinde esse utra via procedatur, necesse enim est ad eandem aequationem integralem perveniri, si quidem aequatio differentialis proposita per se fuerit integrabilis. Tum autem certe eveniet, ut priori casu $Q - V$ sit functio solius y, posteriori autem $P - U$ functio solius x.

Scholion.

453. Haec methodus integrandi etiam tentari posset, antequam exploratum esset, num aequatio integrabilis existat; si enim vel in modo Corollarii 2. eveniret, ut $Q - V$ esset functio ipsius y tantum, vel in modo Corollarii 3. ut $P - U$ esset functio ipsius x tantum, hoc ipsum indicio foret, aequationem esse per se integrabilem. Verum tamen praestat ante omnia scrutari, an aequatio integrabilis sit per se nec ne; seu an sit $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$? quoniam hoc examen sola differentiatione absolvitur. Exempla igitur aliquot aequationum per se integrabilium afferamus, quo non solum methodus integrandi, sed etiam insignes illae proprietates, quas commemoravimus, clarius intelligantur.

Exemplum 1.

454. *Aequationem per se integrabilem*

$$\partial x\,(\alpha x + \beta y + \gamma) + \partial y\,(\beta x + \delta y + \varepsilon) = 0,$$

integrare.

Cum hic sit

$$P = \alpha x + \beta y + \gamma \text{ et } Q = \beta x + \delta y + \varepsilon, \text{ erit}$$
$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \beta \text{ et } \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \beta,$$

qua aequalitate integrabilitas per se confirmatur. Quaeratur ergo per Corollarium 2, spectata y ut constante,

$\int P\,\partial x = \frac{1}{2}\alpha xx + \beta yx + \gamma x$, erit

$V\,\partial y = \beta x\,\partial y$, et $(Q - V)\,\partial y = \partial y\,(\delta y + \varepsilon) = \partial Y$,

ideoque $Y = \frac{1}{2}\delta yy + \varepsilon y$, unde integrale erit

$$\tfrac{1}{2}\alpha xx + \beta yx + \gamma x + \tfrac{1}{2}\delta yy + \varepsilon y = C.$$

Modo autem Corrollarii 3. spectata x constante, erit

$$\int Q\,\partial y = \beta xy + \tfrac{1}{2}\delta yy + \varepsilon y,$$

quae, spectata y constante, praebet $U\,\partial x = \beta y\,\partial x$, hincque

$$(P - U)\,\partial x = (\alpha x + \gamma)\,\partial x, \text{ et } X = \tfrac{1}{2}\alpha xx + \gamma x,$$

unde $\int Q\,\partial y + X = C$ integrale dat ut ante. Hinc simul etiam intelligitur esse

$$\int P\,\partial x - \int Q\,\partial y = \tfrac{1}{2}\alpha xx + \gamma x - \tfrac{1}{2}\delta yy - \varepsilon y,$$

quae in duas functiones $X - Y$ sponte dispescitur.

Exemplum 2.

455. *Aequationem per se integrabilem*

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{x\,\partial y - y\,\partial x}{y\sqrt{(xx+yy)}}, \quad \textit{seu} \quad \frac{\partial x}{\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{\partial y}{y}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}\right) = 0$$

integrare.

Cum hic sit

$$P = \frac{1}{\sqrt{(xx+yy)}} \text{ et } Q = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{(xx+yy)}},$$

pro charactere integrabilitatis per se cognoscendo est

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{-y}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}} \text{ et } \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{-y}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}},$$

qui bini valores utique sunt aequales. Jam pro integrali inveniendo, utamur regula Corrollarii 2. et habebimus

$$\int P\,\partial x = l[x + \sqrt{(xx+yy)}] \text{ et } V\,\partial y = \frac{y\,\partial y}{[x+\sqrt{(xx+yy)}]\sqrt{(xx+yy)}},$$

seu supra et infra per $\sqrt{(xx+yy)} - x$ multiplicando,

$$V = \frac{\sqrt{(xx+yy)}-x}{y\sqrt{(xx+yy)}} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{(xx+yy)}},$$

unde $Q - V = 0$, et $Y = \int (Q - V)\,\partial y = 0$, sicque integrale quaesitum $l\,[x + \sqrt{(xx+yy)}] = \text{Const.}$

Per regulam Corollarii 3. habemus

$$\int Q\,\partial y = ly - x\int \frac{\partial y}{y\sqrt{(xx+yy)}},$$

at posito $y = \frac{1}{z}$, est

$$\int \frac{\partial y}{y\sqrt{(xx+yy)}} = -\int \frac{\partial z}{\sqrt{(xxzz+1)}} = -\frac{1}{x}\,l[xz - \sqrt{(xxzz+1)}],$$

ergo

$$\int Q\,\partial y = ly + l\,\frac{x+\sqrt{(xx+yy)}}{y} = l[x+\sqrt{(xx+yy)}],$$

vnde $U\partial x = \frac{\partial x}{\sqrt{(xx+yy)}}$; hinc $(P - U)\,\partial x = 0$.

Exemplum 3.

456. *Aequationem per se integrabilem*

$$(xx + yy - aa)\,\partial y + (aa + 2xy + xx)\,\partial x = 0,$$

integrare.

Hic ergo est

$$P = aa + 2xy + xx, \text{ et } Q = xx + yy - aa,$$

unde $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = 2x$ et $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 2x$, quae aequalitas integrabilitatem per se innuit. Tum vero est

$$\int P\,\partial x = aax + xxy + \tfrac{1}{3}x^3 \text{ et } V\partial y = xx\partial y,$$

unde $(Q - V)\,\partial y = (yy - aa)\,\partial y$ et $Y = \frac{1}{3}y^3 - aay$. Ergo integrale

$$aax + xxy + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{3}y^3 - aay = \text{Const.}$$

Altero modo est

$\int Q\,\partial y = xxy + \frac{1}{3}y^3 - aay$, hincque

$U\partial x = 2xy\partial x$, ergo

$(P - U)\,\partial x = (aa + xx)\,\partial x$ et $X = aax + \frac{1}{3}x^3$,

unde integrale oritur ut ante.

Scholion.

457. In his exemplis licuit, integrale $\int P \partial x$ actu exhibere, indeque ejus differentiale $V \partial y$, sumta sola y variabili, assignare. Quodsi autem hoc integrale $\int P \partial x$ evolvi nequeat, haud liquet quomodo inde differentiale $V \partial y$ elici possit, quandoquidem formula $\int P \partial x$ in se spectata constantem quamcunque, quae etiam y in se implicet, complectitur. Tum igitur quomodo procedendum sit, videamus. Ponamus $Z = \int P \partial x + Y$, et cum quaeratur $\left(\frac{\partial . \int P \partial x}{\partial y}\right) = V$, ob $\int P \partial x = Z - Y$, erit $V = \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) - \frac{\partial Y}{\partial y}$. At est $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = P$, ergo $\left(\frac{\partial \partial Z}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$, ob $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = V + \frac{\partial Y}{\partial y}$. Hinc erit $V = \int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$, quare quantitas V invenitur per integrationem hujus formulae $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$, in qua y ut constans spectatur, postquam in valore $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ inveniendo sola y variabilis esset assumta. Verum cum hic denuo constans cum y implicetur, hinc illa functio Y quam quaerimus non determinatur. Ratio hujus incommodi manifesto in ambiguitate integralium $\int P \partial x$ et $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ est sita, dum utraque functiones arbitrarias ipsius y recipit. Remedium ergo afferetur, si utrumque integrale certa quadam conditione determinetur. Ita quando integrale $\int P \partial x$ ita accipi ponimus, ut evanescat posito $x = f$, ubi quidem constantem f pro lubitu accipere licet, tum eadem lege alterum integrale $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ capiatur. Quo facto erit $Q - \int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ functio ipsius y tantum, et aequationis $P \partial x + Q \partial y = 0$ integrale erit

$$\int P \partial x + \int \partial y \left[Q - \int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] = \text{Const.}$$

dummodo ambo integralia $\int P \partial x$ et $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$, in quibus y ut constans tractatur, ita determinentur, ut evanescant, dum in utraque ipsi x idem valor f tribuitur. Quare hinc istam colligimus regulam:

Regula pro integratione aequationis per se integrabilis

$$P\partial x + Q\partial y = 0, \text{ in qua } \left(\tfrac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

458. Quaerantur integralia $\int P\partial x$ et $\int\partial x\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$, spectando y ut constantem, ita ut ambo evanescant, dum ipsi x certus quidam valor, puta $x = f$, tribuitur. Tum erit $Q - \int\partial x\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)$ functio ipsius y tantum, quae sit $= Y$, et integrale quaesitum erit $\int P\partial x + \int Y\partial y = \text{Const.}$

Vel quod eodem redit, quaerantur integralia $\int Q\partial y$ et $\int\partial y\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$, spectando x ut constantem, ita ut ambo evanescant, dum ipsi y certus quidem valor, puta $y = g$, tribuitur; tum $P - \int\partial y\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ erit functio ipsius x tantum, qua posita $= X$, erit integrale quaesitum $\int Q\partial y + \int X\partial x = \text{Const.}$

Demonstratio.

Veritatem hujus regulae ex praecedentibus perspicere licet, si cui forte precario assumsisse videamur, ambas formulas $\int P\partial x$ et $\int\partial x\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ eadem lege determinari debere, ut dum ipsi x certus quidam valor puta $x = f$ tribuitur, ambae evanescant. Sed ne forte quis putet, alteram integrationem pari jure secundum aliam legem determinari posse, hanc demonstrationem addo. Prima quidem integratio ab arbitrio nostro pendet, quam ergo ita determinari assumamus, ut integrale $\int P\partial x$ evanescat posito $x = f$, quo facto dico, alterum integrale $\int\partial x\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ necessario per eandem conditionem determinari oportere. Sit enim $\int P\partial x = Z$, eritque Z ejusmodi functio ipsarum x et y, quae evanescit posito $x = f$; habebit ergo factorem $f - x$, vel ejus quampiam potestatem positivam $(f - x)^\lambda$, ita ut sit $Z = (f - x)^\lambda T$. Nunc quia $\int\partial x\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ exprimit valorem ipsius $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$, erit $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = (f - x)^\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)$, ex quo manifestum est hoc integrale etiam evanescere posito $x = f$, ita ut hujus integralis determinatio non amplius arbitrio nostro relinquatur. Hoc posito erit utique aequationis per se integrabilis $P\partial x + Q\partial y = 0$ integrale $\int P \partial x + \int Y \partial y =$ Const., existente $Y = Q - \int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$; nam posito $\int P \partial x = Z$, quatenus scilicet in hac integratione y pro constante habetur, ut habeatur haec aequatio $Z + \int Y \partial y =$ Const. quam esse integrale quaesitum vel ex ipsa differentiatione patebit. Cum enim sit

$$\partial Z = P\partial x + \partial y \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = P\partial x + \partial y \int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

erit aequationis inventae differentiale

$$P\partial x + \partial y \int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) + Y\partial y = 0,$$

sed $Y = Q - \int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$, unde prodit $P\partial x + Q\partial y = 0$, quae est ipsa aequatio differentialis proposita. Quod autem sit $Q - \int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ functio ipsius y tantum, inde sequitur, quoniam aequatio differentialis per se est integrabilis.

Theorema.

459. Pro omni aequatione, quae per se non est integrabilis semper datur quantitas, per quam ea multiplicata redditur integrabilis.

Demonstratio.

Sit $P\partial x + Q\partial y = 0$ aequatio differentialis, et concipiamus ejus integrale completum, quod erit aequatio quaedam inter x et y, in quam constans quantitas arbitraria ingrediatur. Ex hac aequatione eruatur haec ipsa constans arbitraria, ut prodeat hujusmodi aequatio: Const. $=$ *functioni cuidam ipsarum* x *et* y, quae differentiata praebeat $0 = M\partial x + N\partial y$, quae aequatio jam a constante illa arbitraria per integrationem ingressa est libera, ideoque necesse est ut haec aequatio differentialis conveniat cum proposita, alioquin integrale suppositum non esset verum. Oportet ergo, ut relatio inter ∂x et ∂y utrinque prodeat eadem, unde erit $\frac{P}{Q} = \frac{M}{N}$, ideoque $M = LP$ et $N = LQ$. Sed quia $M\partial x + N\partial y$ est verum differentiale ex differentiatione cujuspiam functionis ipsarum x et y ortum, est $(\frac{\partial M}{\partial y}) = (\frac{\partial N}{\partial x})$. Quare pro aequatione $P\partial x + Q\partial y = 0$ dabitur certo quidam multiplicator L, ut sit $(\frac{\partial. LP}{\partial y}) = (\frac{\partial. LQ}{\partial x})$, seu ut aequatio per L multiplicata fiat per se integrabilis.

Corollarium 1.

460. Pro omni ergo aequatione $P\partial x + Q\partial y = 0$ datur ejusmodi functio L ut sit $(\frac{\partial. LP}{\partial y}) = (\frac{\partial. LQ}{\partial x})$, ideoque evolvendo:

$$L(\frac{\partial P}{\partial y}) + P(\frac{\partial L}{\partial y}) = L(\frac{\partial Q}{\partial x}) + Q(\frac{\partial L}{\partial x}) \text{ seu}$$
$$L[(\frac{\partial P}{\partial y}) - (\frac{\partial Q}{\partial x})] = Q(\frac{\partial L}{\partial x}) - P(\frac{\partial L}{\partial y})$$

quae functio L si fuerit inventa, aequatio differentialis $LP\partial x + LQ\partial y = 0$ per se erit integrabilis.

Corollarium 2.

461. In aequatione proposita loco Q tuto unitatem scribere licet, quia omnis aequatio hac forma $P\partial x + \partial y = 0$ repraesentari potest. Hinc inventio multiplicatoris L, qui eam reddat per se integrabilem, pendet a resolutione hujus aequationis:

$$L(\frac{\partial P}{\partial y}) = (\frac{\partial L}{\partial x}) - P(\frac{\partial L}{\partial y}),$$

ubi notandum est esse

$$\partial L = \partial x(\frac{\partial L}{\partial x}) + \partial y(\frac{\partial L}{\partial y}).$$

Scholion.

462. Quoniam hic quaeritur functio binarum variabilium x et y, quarum relatio mutua minime spectatur, quam involvit aequa-

tio $P\partial x + Q\partial y = 0$, haec investigatio in nostrum librum secundum incurrit ubi hujusmodi functio ex data quadam differentialium relatione indagare debet. In hac enim investigatione non attendimus ad aequationem propositam, qua formula $P\partial x + Q\partial y$ nihilo aequalis reddi debet, sed absolute quaeritur multiplicator L, per quem formula $P\partial x + Q\partial y$ multiplicata abeat in verum differentiale cujuspiam functionis finitae, quae sit Z, ita ut habeatur $\partial Z = LP\partial x + LQ\partial y$. Quo multiplicatore L invento tum demum aequalitas $P\partial x + Q\partial y = 0$ spectatur, indeque concluditur functionem Z quantitati constanti aequari oportere. Cum igitur minime expectari queat, ut methodum tradamus hujusmodi multiplicatores pro quavis aequatione differentiali proposita inveniendi, eos casus percurramus, quibus talis multiplicator constat, undecunque sit repertus. Interim tamen ad pleniorem usum hujus methodi notasse juvabit, statim atque unum multiplicatorem pro quapiam aequatione differentiali cognoverimus, ex eo facile innumerabiles alios deduci posse, qui pariter aequationem propositam per se integrabilem reddant.

Problema 60.

463. Dato uno multiplicatore L qui aequationem $P\partial x + Q\partial y = 0$ per se integrabilem reddat, invenire innumerabiles alios multiplicatores, qui idem officium praestent.

Solutio.

Cum ergo $L(P\partial x + Q\partial y)$ sit differentiale verum cujuspiam functionis Z, quaeratur per superiora praecepta haec functio Z, ita ut sit $L(P\partial x + Q\partial y) = \partial Z$: et nunc manifestum est, hanc formulam ∂Z integrationem etiam esse admissuram, si per functionem quamcunque ipsius Z quam ita $\Phi : Z$ indicemus, multiplicetur. Cum igitur etiam integrabilis sit haec formula $(P\partial x + Q\partial y) L\Phi : Z$, erit quoque $L\Phi : Z$ multiplicator aequationis propositae $P\partial x + Q\partial y = 0$, qui eam reddat integrabilem.

Quare invento uno multiplicatore L, quaeratur per integrationem $Z = \int L (P\partial x + Q\partial y)$, ac tum expressio $L \Phi : Z$, ubi pro $\Phi : Z$ functio quaecunque ipsius Z assumi potest, dabit infinitos alios multiplicatores idem officium praestantes.

Scholion.

464. Tametsi sufficiat pro quavis aequatione differentiali unicum miltiplicatorem cognovisse, tamen occurrunt casus, quibus perquam utile est, plures imo infinitos multiplicatores in promtu habere. Veluti si aequatio proposita in duas partes commode discerpatur, hujusmodi $(P\partial x + Q\partial y) + (R\partial x + S\partial y) = 0$ atque omnes multiplicatores constent, quibus utraque pars seorsim $P\partial x + Q\partial y$ et $R\partial x + S\partial y$ reddatur integrabilis, inde interdum communis multiplicator utramque integrabilem reddens concludi potest. Sit enim $L \Phi : Z$ expressio generalis pro omnibus multiplicatoribus formulae $P\partial x + Q\partial y$ et $M \Phi : V$ expressio generalis pro omnibus multiplicatoribus formulae $R\partial x + S\partial y$, et quoniam $\Phi : Z$ et $\Phi : V$ functiones quascunque quantitatum Z et V denotant, si eas ita capere liceat, ut fiat $L \Phi : Z = M \Phi : V$ habebitur multiplicator idoneus pro aequatione $P\partial x + Q\partial y + R\partial x + S\partial y = 0$. Intelligitur autem hoc iis tantum casibus praestari posse, quibus multiplicator pro tota aequatione, etiam singulas ejus partes seorsim sumtas integrabiles reddat. Quare cavendum est, ne huic methodo nimium tribuatur, et quando ea non succedit, aequatio pro irresolubili habeatur, evenire enim utique potest, ut tota aequatio habeat multiplicatorem, qui singulis ejus partibus non conveniat. Ita proposita aequatione $P\partial x + Q\partial y = 0$, multiplicator partem $P\partial x$ seorsim integrabilem reddens manifesto est $\frac{X}{P}$, denotante X functionem quamcunque ipsius x, et multiplicator partem alteram $Q\partial y$ integrabilem reddens est $\frac{Y}{Q}$: etiamsi autem neutiquam fieri possit, ut sit $\frac{X}{P} = \frac{Y}{Q}$ seu $\frac{P}{Q} = \frac{X}{Y}$, nisi casibus per se obviis, tamen tota formula $P\partial x + Q\partial y$ certo semper habet multiplicatorem, quo ea integrabilis reddatur.

Exemplum 1.

465. *Invenire omnes multiplicatores, quibus formula $\alpha y \partial x + \beta x \partial y$ integrabilis redditur.*

Primus multiplicator sponte se offert $\frac{1}{xy}$, qui praebet $\frac{\alpha \partial x}{x} + \frac{\beta \partial y}{y}$, cujus integrale est $\alpha l x + \beta l y = l x^\alpha y^\beta$. Hujus ergo functio quaecunque $\Phi : x^\alpha y^\beta$ in $\frac{1}{xy}$ ducta, dabit multiplicatorem idoneum, cujus itaque forma generalis est $\frac{1}{xy} \Phi : x^\alpha y^\beta$. Functio enim quantitatis $x^\alpha y^\beta$ etiam est functio logarithmi ejusdem quantitatis. Nam si P fuerit functio ipsius p, et Π functio ipsius P, etiam Π est functio ipsius p et vicissim.

Corollarium.

466. Si pro functione sumatur potestas quaecunque $x^{n\alpha} y^{n\beta}$, formula $\alpha y \partial x + \beta x \partial y$ integrabilis redditur, si multiplicetur per $x^{n\alpha - 1} y^{n\beta - 1}$, quo quidem casu integrale sponte patet, est enim $\frac{1}{n} x^{n\alpha} y^{n\beta}$.

Exemplum 2.

467. *Invenire omnes multiplicatores, qui hanc formulam $X y \partial x + \partial y$ integrabilem reddant.*

Primus multiplicator $\frac{1}{y}$ sponte se offert, unde cum sit $\int (X \partial x + \frac{\partial y}{y}) = \int X \partial x + l y$ seu $l e^{\int X \partial x} y$, omnes functiones hujus quantitatis, seu hujus $e^{\int X \partial x} y$ per y divisae, dabunt multiplicatores idoneos. Unde expressio generalis pro omnibus multiplicatoribus erit $= \frac{1}{y} \Phi : e^{\int X \partial x} y$.

Corollarium.

468. Pro formula $X y \partial x + \partial y$ multiplicator quoque est $e^{\int X \partial x}$, qui est functio ipsius x tantum; quo ergo cum etiam for-

mula $\mathfrak{X}\partial x$, denotante $\mathfrak{X}$ functionem quamcunque ipsius x, integrabilis reddatur, ille multiplicator etiam huic formulae $\partial y + Xy\partial x + \mathfrak{X}\partial x$ conveniet.

Problema 61.

469. Proposita aequatione $\partial y + Xy\partial x = \mathfrak{X}\partial x$, in qua X et $\mathfrak{X}$ sint functiones quaecunque ipsius x, invenire multiplicatorem idoneum, eamque integrare.

Solutio.

Cum alterum membrum $\mathfrak{X}\partial x$ per functionem quamcunque ipsius x multiplicatum fiat integrabile, dispiciatur num etiam prius membrum $\partial y + Xy\partial x$ per hujusmodi multiplicatorem integrabile reddi possit. Quod cum praestet multiplicator $e^{\int X\partial x}$, hoc adhibito habebitur aequatio integralis quaesita

$$e^{\int X\partial x} y = \int e^{\int X\partial x}\mathfrak{X}\partial x, \text{ sive}$$
$$y = e^{-\int X\partial x}\int e^{\int X\partial x}\mathfrak{X}\partial x,$$

uti jam supra invenimus.

Corollarium 1.

470. Patet etiam si loco y adsit functio quaecunque ipsius y, ut habeatur haec aequatio $\partial Y + YX\partial x = \mathfrak{X}\partial x$, eam per multiplicatorem $e^{\int X\partial x}$ reddi integrabilem, et integrale fore:

$$e^{\int X\partial x} Y = \int e^{\int X\partial x}\mathfrak{X}\partial x.$$

Corollarium 2.

471. Quare etiam haec aequatio $\partial y + yX\partial x = y^n\mathfrak{X}\partial x$, quia per y^n divisa abit in $\frac{\partial x}{y^n} + \frac{X\partial x}{y^{n-1}} = \mathfrak{X}\partial x$, ubi posito

$\frac{1}{y^{n-1}} = Y$, ob $-\frac{(n-1)\partial y}{y^n} = \partial Y$, seu $\frac{\partial y}{y^n} = -\frac{\partial Y}{n-1}$, prodit $-\frac{\partial Y}{n-1} + YX\partial x = \mathfrak{X}\partial x$, seu

$$\partial Y - (n-1)YX\partial x = -(n-1)\mathfrak{X}\partial x,$$

qui per multiplicatorem $e^{-(n-1)\int X\partial x}$ fit integrabilis: ejusque integrale erit

$$e^{-(n-1)\int X\partial x}Y = -(n-1)\int e^{-(n-1)\int X\partial x}\mathfrak{X}\partial x, \text{ sive}$$

$$\frac{1}{y^{n-1}} = -(n-1)e^{(n-1)\int X\partial x}\int e^{-(n-1)\int X\partial x}\mathfrak{X}\partial x.$$

Scholion.

477. Cum pro membro $\partial y + yX\partial x$ multiplicator generalis sit $\frac{1}{y}\Phi : e^{\int X\partial x}y$, sumta loco functionis potestate, multiplicator idoneus erit $e^{m\int X\partial x}y^{m-1}$, integrale praebens $\frac{1}{m}e^{m\int X\partial x}y^m$. Efficiendum ergo est, ut etiam idem multiplicator alterum membrum $y^n\mathfrak{X}\partial x$ reddat integrabile; quod evenit sumendo $m - 1 = -n$, seu $m = 1 - n$, ex quo hujus membri integrale fit $\int e^{m\int X\partial x}\mathfrak{X}\partial x$, ita ut aequatio integralis quaesita obtineatur:

$$\frac{1}{1-n}e^{(1-n)\int X\partial x}y^{1-n} = \int e^{(1-n)\int X\partial x}\mathfrak{X}\partial x,$$

quae cum modo inventa prorsus congruit.

Problema 62.

478. Proposita aequatione differentiali

$$\alpha y\partial x + \beta x\partial y = x^m y^n(\gamma y\partial x + \delta x\partial y),$$

invenire multiplicatorem idoneum, qui eam integrabilem reddat, ipsumque integrale assignare.

**

Solutio.

Consideretur utrumque membrum seorsim; ac pro priori vidimus $\alpha y \partial x + \beta x \partial y$ omnes multiplicatores idoneos contineri in hac forma $\frac{1}{xy} \Phi : x^\alpha y^\beta$. Pro altera parte

$$x^m y^n (\gamma y \partial x + \delta x \partial y),$$

primus multiplicator est $\frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}}$, quo prodit $\frac{\gamma \partial x}{x} + \frac{\delta \partial y}{y}$, cujus integrale est $l x^\gamma y^\delta$: ergo forma generalis pro ejus multiplicatoribus est $\frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}} \Phi : x^\gamma y^\delta$. Quo nunc hi duo multiplicatores pares reddantur, loco functionum sumantur potestates, fiatque

$$x^{\mu\alpha - 1} y^{\mu\beta - 1} = x^{\nu\gamma - m - 1} y^{\nu\delta - n - 1},$$

unde statui oportet $\mu\alpha = \nu\gamma - m$ et $\mu\beta = \nu\delta - n$; hincque colligitur:

$$\mu = \frac{\gamma n - \delta m}{\alpha\delta - \beta\gamma} \text{ et } \nu = \frac{\alpha n - \beta m}{\alpha\delta - \beta\gamma}.$$

Quocirca multiplicator erit

$$x^{\mu\alpha - 1} y^{\mu\beta - 1} = x^{\nu\gamma - m - 1} y^{\nu\delta - n - 1},$$

unde aequatio nostra induit hanc formam

$$x^{\mu\alpha - 1} y^{\mu\beta - 1} (\alpha y \partial x + \beta x \partial y) = x^{\nu\gamma - 1} y^{\nu\delta - 1} (\gamma y \partial x + \delta x \partial y);$$

ubi utrumque membrum per se est integrabile, ideoque integrale quaesitum.

$$\frac{1}{\mu} x^{\mu\alpha} y^{\mu\beta} = \frac{1}{\nu} x^{\nu\gamma} y^{\nu\delta} + \text{Const.}$$

quod convenit cum eo, quod capite praecedente est inventum.

Corollarium 1.

474. Posito ergo brevitatis gratia

$$\mu = \frac{\gamma n - \delta m}{\alpha\delta - \beta\gamma} \text{ et } \nu = \frac{\alpha n - \beta m}{\alpha\delta - \beta\gamma},$$

aequationis differentialis

$$\alpha y \partial x + \beta x \partial y = x^m y^n (\gamma y \partial x + \delta x \partial y)$$

integrale completum est

$$\frac{1}{\mu} x^{\mu\alpha} y^{\mu\beta} = \frac{1}{\nu} x^{\nu\gamma} y^{\nu\delta} + \text{Const.}$$

Corollarium 2.

475. Si eveniat, ut sit $\mu = 0$, seu $\gamma n = \delta m$, integrale ad logarithmos reducetur, eritque

$$l x^\alpha y^\beta = \frac{1}{\nu} x^{\nu\gamma} y^{\nu\delta} + \text{Const.}$$

Sin autem sit $\nu = 0$, seu $\alpha n = \beta m$, erit integrale

$$\frac{1}{\mu} x^{\mu\alpha} y^{\mu\beta} = l x^\gamma y^\delta + \text{Const.}$$

Scholion.

476. Hinc autem casus excipi videntur, quo $\alpha\delta = \beta\gamma$, quia tum ambo numeri μ et ν fiunt infiniti. Verum si $\delta = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$ aequatio nostra hanc induit formam

$$\alpha y \partial x + \beta x \partial y = \frac{\gamma}{\alpha} x^m y^n (\alpha y \partial x + \beta x \partial y), \text{ seu}$$
$$(\alpha y \partial x + \beta x \partial y)\left(1 - \frac{\gamma}{\alpha} x^m y^n\right) = 0,$$

quae cum habeat duos factores, duplex solutio ex utroque seorsim ad nihilum reducto, derivatur. Prior scilicet nascitur ex $\alpha y \partial x + \beta x \partial y = 0$, cujus integrale est $x^\alpha y^\beta =$ Const. alter vero factor per se dat aequationem finitam $1 - \frac{\gamma}{\alpha} x^m y^n = 0$, quarum solutionum utraque satisfacit. Atque hoc in genere tenendum est de omnibus aequationibus differentialibus, quas in factores resolvere licet, ubi perinde atque in aequationibus finitis singuli factores praebent solutiones. Plerumque autem factores finiti statim, antequam integratio suscipitur, per divisionem tolli solent, quandoquidem non ex natura rei, sed per operationes institutas demum accessisse censentur, ita ut perinde ac in Algebra saepe fieri solet, ad solutiones inutiles essent perducturi.

Problema 63.

477. Proposita aequatione differentiali homogenea, multiplicatorem idoneum invenire, qui eam integrabilem reddat, indeque ejus integrale eruere.

Solutio.

Sit $P\partial x + Q\partial y =$ aequatio proposita, in qua P et Q sint functiones homogeneae n dimensionum ipsarum x et y, ac quaeramus multiplicatorem L, qui sit etiam functio homogenea, cujus dimensionum numerus sit λ. Cum jam formula $L\,(P\partial x + Q\partial y)$ sit integrabilis, erit integrale functio $\lambda + n + 1$ dimensionum ipsarum x et y, quae functio si ponatur Z, erit ex natura functionum homogenearum

$$LPx + LQy = (\lambda + n + 1)Z.$$

Quare si λ sumatur $= -n - 1$, quantitas $LPx + LQy$ erit vel $= 0$, vel constans, unde obtinemus $L = \frac{1}{Px + Qy}$, qui ergo est multiplicator idoneus pro nostra aequatione. Idem quoque ex separatione variabilium colligitur: posito enim $y = ux$; fiet $P = x^n U$ et $Q = x^n V$, existentibus U et V functionibus u ipsius tantum, et ob $\partial y = u\partial x + x\partial u$

$$\text{erit } P\partial x + Q\partial y = x^n U\partial x + x^n Vu\partial x + x^n Vx\partial u,$$
$$\text{seu } P\partial x + Q\partial y = x^n(U + Vu)\partial x + x^{n+1}V\partial u.$$

At haec formula per $x^{n+1}(U + Vu)$ divisa fit integrabilis ideoque et formula nostra $P\partial x + Q\partial y$ divisa per

$$x^{n+1}(U + Vu) = Px + Qy,$$

restitutis valoribus $U = \frac{P}{x^n}$, $V = \frac{Q}{x^n}$ et $u = \frac{y}{x}$, fiet integrabilis; seu multiplicator idoneus est $\frac{1}{Px + Qy}$, unde haec aequatio $\frac{P\partial x + Q\partial y}{Px + Qy} = 0$, semper per se est integrabilis.

Jam ad integrale ipsius inveniendum, integretur formula $\int \frac{P\partial x}{Px + Qy}$ spectando y ut constantem, ac determinetur certa ratione ut evanescat posito $x = f$. Tum posito brevitatis causa $\frac{P}{Px + Qy} = R$, sumatur valor $\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)$, et eadem lege quaeratur integrale $\int \partial x \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)$, spectando iterum y ut constantem. Tum erit $\frac{Q}{Px + Qy} - \int \partial x \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)$ functio ipsius y tantum seu

$$\frac{Q}{Px + Qy} - \int \partial x \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = Y:$$

atque hinc erit integrale quaesitum

$$\int \frac{P\partial x}{Px + Qy} + \int Y \partial y = \text{Const.}$$

Corollarium 1.

478. Cum ergo formula $\frac{P\partial x + Q\partial y}{Px + Qy}$ sit per se integrabilis, si brevitatis gratia ponamus

$$\frac{P}{Px + Qy} = R \text{ et } \frac{Q}{Px + Qy} = S,$$

necesse est sit $\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)$. At est

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = [Qy\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - Py\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - PQ] : (Px + Qy)^2 \text{ et}$$
$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) = [Px\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - Qx\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) - PQ] : (Px + Qy)^2$$

Quamobrem habebitur

$$Qy\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - Py\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = Px\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - Qx\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right),$$

Corollarium 2.

479. Haec aequalitas etiam ex natura functionum homogenearum concluditur. Cum enim P et Q sint functiones n dimensionum ipsarum x et y, ob

$$\partial P = \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \partial y \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) \text{ et } \partial Q = \partial x \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \partial y \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) \text{ erit}$$

$$n P = x \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + y \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) \text{ et } n Q = x \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + y \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right).$$

Aequalitas autem inventa est

$$Q \left[x \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + y \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] = P \left[x \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + y \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right],$$

quae hinc abit in identicam $nPQ = nPQ$.

Corollarium 3.

480. Si aequatio homogenea $P \partial x + Q \partial y = 0$ fuerit per se integrabilis, et P et Q sint functiones -1 dimensionis, erit $P x + Q y$ numerus constans. Veluti cum

$$\frac{x \partial x + y \partial y}{xx + yy} = 0,$$

hujusmodi sit aequatio, si loco ∂x et ∂y scribantur x et y, prodit $\frac{xx + yy}{xx + yy} = 1$.

Scholion.

481. In calculo differentiali ostendimus, si V fuerit functio homogenea n dimensionum ipsarum x et y, ponaturque $\partial V = P \partial x + Q \partial y$, fore $P x + Q y = n V$. Quare si $P \partial x + Q \partial y$ fuerit formula integrabilis, et P et Q functiones homogeneae $n - 1$ dimensionum, integrale statim habetur, erit enim $V = \frac{1}{n} (P x + Q y)$, neque ad hoc ulla integratione est opus. Interim tamen videmus hinc excipi oportere casum quo $n = 0$, uti fit in nostra aequatione per multiplicatorem integrabili reddita $\frac{P \partial x + Q \partial y}{P x + Q y} = 0$, ubi ∂x et ∂y multiplicantur per functiones -1 dimensionis, neque enim hic integrale sine integratione obtineri potest. Ratio autem hujus excep-

tionis in hoc est sita, quod formulae integrabilis $P\partial x+Q\partial y$, in qua P et Q sunt functiones homogeneae $n-1$ dimensionum, integrale tum tantum sit functio homogenea n dimensionum, quando n non est $=0$, hoc enim solo casu fieri potest, ut integrale non sit functio nullius dimensionis, quemadmodum fit in hac formula differentiali $\frac{x\partial x+y\partial y}{xx+yy}$, quippe cujus integrale est $\frac{1}{2}l(xx+yy)$. Quocirca, quod formula $\frac{P\partial x+Q\partial y}{Px+Qy}$ sit integrabilis, hoc peculiari modo demonstravimus, ex ratione separabilitatis deducto. Interim tamen sine ullo respectu, unde hoc cognoverimus, id in praesenti negotio maxime est notatu dignum, omnes aequationes homogeneas $P\partial x+Q\partial y=0$, per multiplicatorem $\frac{1}{Px+Qy}$ per se reddi integrabiles. Methodus igitur desideratur, cujus beneficio hunc multiplicatorem a priori invenire liceret; qua methodo sane maxima incrementa in Analysin importarentur. Quamdiu autem eousque pertingere non licet, plurimum intererit hujusmodi multiplicatores pro pluribus casibus probe notasse; quod cum jam in duobus aequationum generibus praestiterimus, pro reliquis aequationibus, quas supra integrare docuimus, multiplicatores investigemus; ipsa autem reductio ad separationem nobis hos multiplicatores patefaciet, uti in sequente problemate docebimus.

Problema 64.

482. Proposita aequatione differentiali, quam ad separationem variabilium reducere liceat, invenire multiplicatorem, per quem ea per se integrabilis reddatur.

Solutio.

Sit $P\partial x+Q\partial y=0$, quae certa quadam substitutione, dum loco x et y aliae binae variabiles t et u introducuntur, ad separationem accommodetur: ponamus ergo facta hac substitutione fieri $P\partial x+Q\partial y=R\partial t+S\partial u$, nunc autem hanc formulam

$R\partial t + S\partial u$, si per V dividatur, separari, ita ut in hac formula $\frac{R\partial t + S\partial u}{V}$ quantitas $\frac{R}{V}$ sit functio solius t, et $\frac{S}{V}$ functio solius u. Cum igitur formula $\frac{R\partial t + S\partial u}{V}$ per se sit integrabilis, etiam integrabilis erit haec $\frac{P\partial x + Q\partial y}{V}$ quippe illi aequalis, siquidem in V variabiles x et y restituantur. Hinc ergo ex reductione ad separabilitatem aequationis $P\partial x + Q\partial y = 0$ discimus, multiplicatorem quo ea integrabilis reddatur, esse $\frac{1}{V}$, sicque quas aequationes ad separationem variabilium perducere licet, pro iisdem multiplicatorem, qui illas integrabiles reddat, assignare possumus.

Corollarium 1.

483. Methodus ergo per multiplicatores integrandi aequationes differentiales aeque late patet ac prior methodus, ope separationis variabilium; propterea quod ipsa separatio pro quavis aequatione, ubi succedit, multiplicatorem suppeditat.

Corollarium 2.

484. Contra autem methodus per multiplicatores integrandi latius patet altera, si pro ejusmodi aequationibus multiplicatores assignare liceat, quae quomodo ad separationem perduci debeant, non constet.

Scholion.

485. Etsi autem ex reductione ad separationem idoneum multiplicatorem elicere licet, tamen nondum intelligitur, quomodo cognito multiplicatore, separatio variabilium institui debeat, quare etiam ob hanc rationem methodus per multiplicatores integrandi alteri longe praeferenda videtur. Quamvis enim hactenus ipsa separatio nos ad inventionem multiplicatorum perduxerit, nullum tamen est dubium quin detur via multiplicatores inveniendi, nullo respectu ad separationem habito, licet haec via etiamnum nobis sit incognita. Ea au-

tem paullatim planior reddetur, si pro quamplurimis aequationibus multiplicatores idoneos cognoverimus, ex quo quos adhuc ex separatione eruere licet, indagemus in subjunctis exemplis.

Exemplum 1.

486. *Proposita aequatione differentiali primi ordinis*

$$\partial x(\alpha x+\beta y+\gamma)+\partial y(\delta x+\varepsilon y+\zeta)=0,$$

pro ea multiplicatorem idoneum assignare.

Haec aequatio ad separationem praeparatur ponendo primo

$$\alpha x+\beta y+\gamma=r \text{ et } \delta x+\varepsilon y+\zeta=s,$$

ideoque

$$\alpha\partial x+\beta\partial y=\partial r \text{ et } \delta\partial x+\varepsilon\partial y=\partial s,$$

unde oritur

$$\partial x=\frac{\varepsilon\partial r-\beta\partial s}{\alpha\varepsilon-\beta\delta} \text{ et } \partial y=\frac{\alpha\partial s-\delta\partial r}{\alpha\varepsilon-\beta\delta},$$

hincque aequatio nostra omisso denominatore utpote constante, erit

$$\varepsilon r\partial r-\beta r\partial s+\alpha s\partial s-\delta s\partial r=0,$$

quae cum sit homogenea, per $\varepsilon rr-(\beta+\delta)sr+\alpha ss$ divisa, fit integrabilis. Quod idem ex separatione colligitur, posito enim $r=su$, prodit

$$\varepsilon ssu\partial u+\varepsilon suu\partial s-\beta su\partial s+\alpha s\partial s-\delta ss\partial u-\delta su\partial s=0 \text{ seu}$$

$$ss\partial u(\varepsilon u-\delta)+s\partial s(\varepsilon uu-\beta u-\delta u+\alpha)=0,$$

quae divisa per $ss(\varepsilon uu-\beta u-\delta u+\alpha)$ separatur. Quare multiplicator nostrae aequationis propositae est

$$\frac{1}{ss(\varepsilon uu-\beta u-\delta u+\alpha)}=\frac{1}{\varepsilon rr-\beta rs-\delta rs+\alpha ss}=\frac{1}{r(\varepsilon r-\beta s)+s(\alpha s-\delta r)},$$

qui restitutis valoribus fit

$$\frac{1}{(\alpha x+\beta y+\gamma)[(\alpha\varepsilon-\beta\delta)x+\gamma\varepsilon-\beta\zeta]+(\delta x+\varepsilon y+\zeta)[(\alpha\varepsilon-\beta\delta)y+\alpha\zeta-\gamma\delta]}:$$

atque evolutione facta

$$\frac{1}{(\alpha\varepsilon-\beta\delta)[\alpha xx+(\beta+\delta)xy+\varepsilon yy+\gamma x+\zeta y]+\alpha\zeta\zeta-(\beta+\delta)\gamma\zeta+\gamma\gamma\varepsilon+[\alpha\gamma\varepsilon-(\beta-\delta)\alpha\zeta-\gamma\delta\delta]x+[\alpha\varepsilon\zeta+(\beta-\delta)\gamma\varepsilon-\beta\beta\zeta]y}.$$

Quare per se integrabilis erit haec aequatio

$$\frac{\partial x(\alpha x+\beta y+\gamma)+\partial y(\delta x+\varepsilon y+\zeta)}{(\alpha\varepsilon-\beta\delta)[\alpha xx+(\beta+\delta)xy+\varepsilon yy+\gamma x+\zeta y]+Ax+By+C}=0$$

existente

$$A=\alpha\gamma\varepsilon-(\beta-\delta)\alpha\zeta-\gamma\delta\delta$$
$$B=\alpha\varepsilon\zeta+(\beta-\delta)\gamma\varepsilon-\beta\beta\zeta$$
$$C=\alpha\zeta\zeta-(\beta+\delta)\gamma\zeta+\gamma\gamma\varepsilon.$$

Corollarium.

487. Etiamsi forte fiat $\alpha\varepsilon-\beta\delta=0$, hic multiplicator non turbatur, cum tamen separatio non succedat hac quidem operatione. Sit enim $\alpha=ma$, $\beta=mb$, $\delta=na$, $\varepsilon=nb$, ut habeatur haec aequatio

$$\partial x[m(ax+by)+\gamma]+\partial y[n(ax+by)+\zeta]=0$$

ob
$$A=a(na-mb)(m\zeta-n\gamma)$$
$$B=b(na-mb)(m\zeta-n\gamma) \text{ et}$$
$$C=(m\zeta-n\gamma)(a\zeta-b\gamma),$$

omisso factore communi, multiplicator est

$$\frac{1}{(na-mb)(ax+by)+a\zeta-b\gamma},$$

ita ut haec aequatio per se sit integrabilis

$$\frac{(ax+by)(m\partial x+n\partial y)+\gamma\partial x+\zeta\partial y}{(na-mb)(ax+by)+a\zeta-b\gamma}=0.$$

Exemplum 2.

488. *Proposita aequatione differentiali*

$$y\partial x(c+nx)-\partial y(y+a+bx+nxx)=0,$$

multiplicatorem idoneum invenire.

Fiat substitutio $\frac{y(c+nx)}{y+a+bx+nxx}=u$, seu $y=\frac{u(a+bx+nxx)}{c+nx-u}$, ut contrahatur aequatio nostra in hanc formam

$$y\partial x(c+nx)-\frac{y\partial y(c+nx)}{u}=0,$$

seu $\frac{y(c+nx)}{u}(u\partial x-\partial y)=0$, vel $\frac{yy(c+nx)}{u}\left(\frac{\partial y}{y}-\frac{u\partial x}{y}\right)=0$; probe enim cavendum est, ne hic ullus factor omittatur. At facta substitutione reperitur

$$\frac{\partial y}{y}-\frac{u\partial x}{y}=\frac{\partial u}{u}+\frac{\partial x(b+2nx)}{a+bx+nxx}+\frac{\partial u-n\partial x}{c+nx-u}-\frac{\partial x(c+nx-u)}{a+bx+nxx}$$
$$=\frac{\partial u(c+nx)}{u(c+nx-u)}-\frac{\partial x(na+cc-bc+(b-2c)u+uu)}{(c+nx-u)(a+bx+nxx)}.$$

Unde aequatio nostra induet hanc formam

$$\frac{yy(c+nx)^2}{u(c+nx-u)}\left(\frac{\partial u}{u}-\frac{\partial x(na+cc-bc+(b-2c)u+uu)}{(a+bx+nxx)(c+nx)}\right)=0,$$

quae ergo separabitur ducta in hunc multiplicatorem

$$\frac{u(c+nx-u)}{yy(c+nx)^2(na+cc-bc+(b-2c)u+uu)}$$

tum enim prodit

$$\frac{\partial u}{u(na+cc-bc+(b-2c)u+uu)}-\frac{\partial x}{(a+bx+nxx)(c+nx)}=0.$$

Quo igitur multiplicatorem quaesitum consequamur, ibi loco u tantum opus est suum valorem restituere tum autem reperitur multiplicator

$$\frac{a+bx+nxx}{n(a+bx+nxx)y^3+(a+bx+nxx)[2na-bc+n(b-2c)x]yy+(na+cc-bc)(a+bx+nxx)^2y},$$

qui reducitur ad hanc formam

$$\frac{1}{ny^3+(2na-bc)yy+n(b-2c)xyy+(na+cc-bc)(a+bx+nxx)y}.$$

Exemplum 3.

189. *Proposita aequatione differentiali*

$$\frac{n\partial x(1+yy)\sqrt{(1+yy)}}{\sqrt{(1+xx)}}+(x-y)\partial y=0,$$

invenire multiplicatorem qui eam integrabilem reddat.

Posuimus supra (435.) $y = \frac{x-u}{1+xu}$, seu $u = \frac{x-y}{1+xy}$, unde fit $x - y = \frac{u(1+xx)}{1+xu}$, et $1+yy = \frac{(1+xx)(1+uu)}{(1+xu)^2}$, hincque nostra aequatio hanc induit formam

$$\frac{n\partial x(1+xx)(1+uu)^{\frac{3}{2}}}{(1+xu)^3} + \frac{u\partial x(1+xx)(1+uu) - u\partial u(1+xx)^2}{(1+xu)^3} = 0,$$

quae primo multiplicata per $(1+xu)^3$, tum divisa per

$$(1+xx)^2(1+uu)[u+n\sqrt{(1+uu)}]$$

separatur. Quare aequationis nostrae multiplicator erit

$$\frac{(1+xu)^3}{(1+xx)^2(1+uu)[u+n\sqrt{(1+uu)}]},$$

qui primo ob $1+uu = \frac{(1+yy)(1+xu)^2}{1+xx}$, abit in

$$\frac{1+xu}{(1+xx)(1+yy)[u+n\sqrt{(1+uu)}]}.$$

Nunc ob $u = \frac{x-y}{1+xy}$, est $\sqrt{(1+uu)} = \frac{\sqrt{(1+xx)(1+yy)}}{1+xy}$ et $1+xu = \frac{1+xx}{1+xy}$, ideoque noster multiplicator colligitur:

$$\frac{1}{(1+yy)[x-y+n\sqrt{(1+xx)(1+yy)}]},$$

ita ut per se sit integrabilis haec aequatio

$$\frac{[n\partial x(1+yy)\sqrt{(1+yy)} + (x-y)\partial y\sqrt{(1+xx)}}{(1+yy)[x-y+n\sqrt{(1+xx)(1+yy)}]\sqrt{(1+xx)}} = 0,$$

cujus integrationi non immoror, cum jam supra integrale exhibuerim.

Exemplum 4.

490. *Aliud exemplum memoratu dignum suppeditat haec aequatio*

$$y\partial x - x\partial y + ax^n y\partial y(x^n+b)^{\frac{1}{n}} = 0,$$

quae si hac forma repraesentetur

$$x\partial y - y\partial x + \tfrac{1}{b}x^{n+1}\partial y = \tfrac{1}{b}x^{n+1}\partial y + ax^n y\partial y(x^n+b)^{\frac{1}{n}}$$

evenit, ut utrumque integrabile existat, si ducatur in hunc multiplicatorem

$$\frac{y^{n-1}}{x^{n+1} + a\,b\,x^n\,y\,(x^n + b)^{\frac{1}{n}}}:$$

ad quem inveniendum ex separatione variabilium, adhibeatur haec substitutio non adeo obvia $\frac{x}{(x^n + b)^{\frac{1}{n}}} = v\,y$, unde fit

$x^n = \frac{b\,v^n\,y^n}{1 - v^n\,y^n}$, et hinc aequatio

$$\frac{y\,\partial x - x\,\partial y}{(x^n + b)^{\frac{1}{n}}} + a\,x^n\,y\,\partial y = 0 \text{ abit in hanc}$$

$$\frac{y\,y\,\partial v + v^{n+1}\,y^{n+1}\,\partial y + a\,b\,v^n\,y^{n+1}\,\partial y}{1 - v^n\,y^n} = 0,$$

quae multiplicata per $\frac{1 - v^n\,y^n}{y\,y\,v^n\,(a\,b + v)}$ separatur

$$\frac{\partial v}{v^n\,(a\,b + v)} + y^{n-1}\,\partial y = 0,$$

unde idem ille multiplicator colligitur.

Exemplum 5.

491. *Proposita aequatione differentiali*

$$\partial y + y\,y\,\partial x - \frac{a\,\partial x}{x^4} = 0$$

invenire multiplicatorem, quo ea integrabilis reddatur.

Secundum §. 436. ponatur $x = \frac{1}{t}$ et ob $\partial x = -\frac{\partial t}{t\,t}$, nostra formula erit $\partial y - \frac{y\,y\,\partial t}{t\,t} + a\,t\,t\,\partial t$, in qua porro statuatur $y = t - t\,t\,z$, et prodibit $-t\,t\,(\partial z + z\,z\,\partial t - a\,\partial t)$, quae per $t\,t\,(z\,z - a)$ divisa separatur, ergo et nostra aequatio divisa per $t\,t\,(z\,z - a) = \frac{(t-y)^2 - a\,t^4}{t\,t}$

$= (1 - xy)^2 - \frac{a}{xx}$ fiet integrabilis, ex quo multiplicator erit $= \frac{xx}{xx(1-xy)^2 - a}$, et aequatio per se integrabilis $\frac{x^4 \partial y + x^4 yy \partial x - a \partial x}{x^4(1-xy)^2 - axx} = 0$. Spectetur jam x ut constans, eritque ex ∂y natum integrale

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\, l \frac{\sqrt{a} + x(1-xy)}{\sqrt{a} - x(1-xy)} + X,$$

pro quo ut valor ipsius X obtineatur, differentietur denuo, ac prodibit

$$\frac{2xy\partial x - \partial x}{xx(1-xy)^2 - a} + \partial X = \frac{x^4 yy \partial x - a \partial x}{x^4(1-xy)^2 - axx};$$

unde

$$\partial X = \frac{x^4 yy \partial x - a \partial x - 2x^3 y \partial x + xx\partial x}{x^4(1-xy)^2 - axx} = \frac{\partial x}{xx},$$

et $X = -\frac{1}{x} + C$; quare aequatio integralis completa erit

$$l \frac{\sqrt{a} + x(1-xy)}{\sqrt{a} - x(1-xy)} = \frac{2\sqrt{a}}{x} + C.$$

Scholion.

492. En ergo plures casus aequationum differentialium pro quibus multiplicatores novimus, ex quorum contemplatione haec insignis investigatio non parum adjuvari videtur. Quanquam autem adhuc longe absumus a certa methodo, pro quovis casu multiplicatores idoneos inveniendi; hinc tamen formas aequationum colligere poterimus, ut per datos multiplicatores integrabiles reddantur; quod negotium cum in hac ardua doctrina maximam utilitatem allaturum videatur, in sequente capite aequationes investigabimus, quibus dati multiplicatores conveniant? exempla scilicet hic evoluta idoneas multiplicatorum formas nobis suppeditant, quibus nostram investigationem superstruere licebit.