CALCULI INTEGRALIS
LIBER PRIOR.

PARS PRIMA,

SEU

METHODUS INVESTIGANDI FUNCTIONES UNIUS VARIABILIS EX DATA RELATIONE QUACUNQUE DIFFERENTIALIUM PRIMI GRADUS.

SECTIO SECUNDA,

DE

INTEGRATIONE AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM.

CAPUT I.

DE SEPARATIONE VARIABILIUM.

Definitio.

§. 397.

In aequatione differentiali *separatio variabilium* locum habere dicitur, cum aequationem ita in duo membra dispescere licet, ut in utroque unica tantum variabilis cum suo differentiali insit.

Corollarium 1.

398. Quando igitur aequatio differentialis ita est comparata, ut ad hanc formam $X\partial x = Y\partial y$ reduci possit, in qua X functio sit solius x et Y solius y, tum ea aequatio separationem variabilium admittere dicitur.

Corollarium 2.

399. Quodsi P et X functiones ipsius x tantum, at Q et Y functiones ipsius y tantum denotent, haec aequatio $PY\partial x = QX\partial y$ separationem variabilium admittit, nam per XY divisa abit in $\frac{P\partial x}{X} = \frac{Q\partial y}{Y}$, in qua variabiles sunt separatae.

Corollarium 3.

400. In forma ergo generali $\frac{\partial y}{\partial x} = V$, separatio variabilium locum habet, si V ejusmodi fuerit functio ipsarum x et y, ut in duos factores resolvi possit, quorum alter solam variabilem x, alter

solam y contineat. Si enim sit $V = XY$, inde prodit aequatio separata $\frac{\partial y}{Y} = X\partial x$.

Scholion.

401. Posita differentialium ratione $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, in hac sectione ejusmodi relationem inter x, y et p cosiderare instituimus, qua p aequetur functioni cuicunque ipsarum x et y. Hic igitur primum eum casum contemplamur, quo ista functio in duos factores resolvitur, quorum alter est functio tantum ipsius x et alter ipsius y, ita ut aequatio ad hanc formam reduci possit $X\partial x = Y\partial y$, in qua binae variabiles a se invicem separatae esse dicuntur. Atque in hoc casu formulae simplices ante tractatae continentur, quando $Y = 1$, ut sit $\partial y = X\partial x$, et $y = \int X\partial x$, ubi totum negotium ad integrationem $X\partial x$ revocatur. Haud majorem autem habet difficultatem aequatio separata $X\partial x = Y\partial y$, quam perinde ac formulas simplices tractare licet, id quod in sequente problemate ostendemus.

Problema 49.

402. Aequationem differentialem, in qua variabiles sunt separatae, integrare, seu aequationem inter ipsas variabiles invenire.

Solutio.

Aequatio separationem variabilium admittens semper ad hanc formam $Y\partial y = X\partial x$ reducitur; ubi $X\partial x$ tanquam differentiale functionis cujusdam ipsius x et $Y\partial y$ tanquam differentiale functionis cujusdam ipsius y spectari potest, cum igitur differentialia sint aequalia eorum integralia quoque aequalia esse, vel quantitate constante differre necesse est. Integrentur ergo per praecepta superioris sectionis seorsim ambae formulae, seu quaerantur integralia $\int Y\partial y$ et $\int X\partial x$, quibus inventis erit utique $\int Y\partial y = \int X\partial x + \text{Const.}$ qua aequatione relatio finita inter quantitates x et y exprimetur.

Corollarium 1.

403. Quoties ergo aequatio differentialis separationem variabilium admittit, toties integratio per eadem praecepta, quae supra de formulis simplicibus sunt tradita, absolvi potest.

Corollarium 2.

404. In aequatione integrali $\int Y \partial y = \int X \partial x +$ Const. vel ambae functiones $\int Y \partial y$ et $\int X \partial x$ sunt algebraicae, vel altera algebraica, altera vero transcendens, vel ambae transcendentes, sicque relatio inter x et y vel erit algebraica, vel transcendens.

Scholion.

405. In separatione variabilium a nonnullis totum fundamentum resolutionis aequationum differentialium constitui solet, ita ut cum aequatio proposita separationem variabilium non admittit, idonea substitutio sit investiganda, cujus beneficio novae variabiles introductae separationem patiantur. Totum ergo negotium huc reducitur, ut proposita aequatione differentiali quacunque, ejusmodi substitutio seu novarum variabilium introductio doceatur, ut deinceps separatio variabilium locum sit habitura. Optandum utique esset, ut hujusmodi methodus, pro quovis casu idoneam substitutionem inveniendi, aperiretur; sed nihil omnino certi in hoc negotio est compertum, dum pleraeque substitutiones, quae adhuc in usu fuerunt, nullis certis principiis innituntur. Deinde autem variabilium separatio non tanquam verum fundamentum omnis integrationis spectari potest, propterea quod in aequationibus differentialibus secundi altiorisve gradus nullum usum praestat; infra autem aliud principium latissime patens sum expositurus. In hoc capite interim praecipuas integrationes ope separationis variabilium administratas exponere operae pretium videtur; quandoquidem in hoc arduo negotio, quam plurimas methodos cognoscere, plurimum interest.

Problema 50.

406. Aequationem differentialem $P\partial x = Q\partial y$, in qua P et Q sint functiones homogeneae ejusdem dimensionum numeri ipsarum x et y, ad separationem variabilium reducere; ejusque integrale invenire.

Solutio.

Cum P et Q sint functiones homogeneae ipsarum x et y ejusdem dimensionum numeri, erit $\frac{P}{Q}$ functio homogenea nullius dimensionis, quae ergo posito $y = ux$ abit in functionem ipsius u. Ponatur igitur $y = ux$, abeatque $\frac{P}{Q}$ in U functionem ipsius u, ita ut sit $\partial y = U\partial x$. Sed ob $y = ux$, fit $\partial y = u\partial x + x\partial u$, qua substitutione nostra aequatio induet hanc formam $u\partial x + x\partial u = U\partial x$, inter binas variabiles x et u, quae manifesto sunt separabiles. Nam dispositis terminis ∂x continentibus ad unam partem, habetur

$$x\partial u = (U - u)\partial x, \text{ ideoque } \frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{U - u},$$

quae integrata dat $lx = \int \frac{\partial u}{U - u}$, ita ut jam ex variabili u determinetur x, unde porro cognoscitur $y = ux$.

Corollarium 1.

407. Quodsi ergo integrale $\int \frac{\partial u}{U - u}$ etiam per logarithmos exprimi possit, ita ut lx aequetur logarithmo functionis cujuspiam ipsius u; habebitur aequatio algebraica inter x et u, ideoque pro u posito valore $\frac{x}{y}$, aequatio algebraica inter x et y.

Corollarium 2.

408. Cum sit $y = ux$, erit $ly = lu + lx$, ideoque cum sit $lx = \int \frac{\partial u}{U - u}$, erit

$$ly = lu + \int \frac{\partial u}{U - u} = \int \frac{\partial u}{u} + \int \frac{\partial u}{U - u};$$

quibus integralibus in unum reductis, fit $ly = \int \frac{U \partial u}{u(U - u)}$. Verum hic notandum est, non in utraque integratione pro lx et ly constantem arbitrariam adjicere licere; statim enim atque alteri integrali est adjecta, simul constans alteri adjicienda definitur, cum esse debeat $ly = lx + lu$.

Corollarium 3.

409. Cum sit

$$\int \frac{\partial u}{U - u} = \int \frac{\partial u - \partial U + \partial U}{U - u} = \int \frac{\partial U}{U - u} - \int \frac{\partial U - \partial u}{U - u},$$

ob hoc posterius membrum per logarithmos integrabile, erit $lx = \int \frac{\partial U}{U - u} - l(U - u)$, seu $lx(U - u) = \int \frac{\partial U}{U - u}$. Perinde ergo est, sive haec formula $\int \frac{\partial u}{U - u}$ sive $\int \frac{\partial U}{U - u}$ integretur.

Scholion.

410. Quoniam haec methodus ad omnes aequationes homogeneas patet, neque etiam ob irrationalitatem, quae forte in functionibus P et Q inest, impeditur, imprimis est aestimanda, plurimumque aliis methodis anteferenda, quae tantum ad aequationes nimis speciales sunt accomodatae. Atque hinc etiam discimus omnes aequationes, quae ope cujusdam substitutionis ad homogeneitatem revocari possunt, per eandem methodum tractari posse. Veluti si proponatur haec aequatio $\partial z + zz\partial x = \frac{a\partial x}{xx}$, statim patet posito $z = \frac{1}{y}$, eam ad hanc homogeneam $-\frac{\partial y}{yy} + \frac{\partial x}{yy} = \frac{a\partial x}{xx}$, seu $xx\partial y = \partial x(xx - ayy)$ reduci. Caeterum non difficulter perspicitur, utrum aequatio proposita hujusmodi substitutione ad homogeneitatem perduci queat? Plerumque, quoties quidem fieri potest, sufficit has positiones $x = u^m$ et $y = v^n$ tentasse, ubi facile judicabitur, num exponentes m et n ita assumere liceat, ut ubique idem dimensionum numerus prodeat, magis enim complicatis sub-

stitutionibus in hoc genere vix locus conceditur, nisi forte quasi sponte se prodant. Methodum autem integrandi hic expositam aliquot exemplis illustrasse juvabit.

Exemplum 1.

411. *Proposita aequatione differentiali homogenea $x\partial x + y\partial y = my\partial x$, ejus integrale invenire.*

Cum ergo hinc sit $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{my - x}{y}$, posito $y = ux$ fit $\frac{my - x}{y} = \frac{mu - 1}{u}$, ideoque ob $\partial y = u\partial x + x\partial u$, erit

$$u\partial x + x\partial u = \frac{(mu - 1)}{u}\partial x, \text{ hineque}$$

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{u\partial u}{mu - 1 - uu} = \frac{-u\partial u}{1 - mu + uu}, \text{ seu}$$

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{-u\partial u + \frac{1}{2}m\partial u}{1 - mu + uu} - \frac{\frac{1}{2}m\partial u}{1 - mu + uu};$$

unde integrando

$$lx = -\tfrac{1}{2}l(1 - mu + uu) - \tfrac{1}{2}m\int\frac{\partial u}{1 - mu + uu} + \text{Const.}$$

ubi tres casus sunt considerandi, prout $m > 2$, vel $m < 2$, vel $m = 2$.

1.) Sit $m > 2$, et $1 - mu + uu$ hujusmodi formam habebit $(u - a)(u - \frac{1}{a})$, ut fit $m = a + \frac{1}{a} = \frac{aa + 1}{a}$, et ob

$$\frac{\partial u}{(u-a)(u-\frac{1}{a})} = \frac{a}{aa-1}\cdot\frac{\partial u}{u-a} - \frac{a}{aa-1}\cdot\frac{\partial u}{u-\frac{1}{a}}, \text{ fiet}$$

$$lx = -\tfrac{1}{2}l(1 - mu + uu) - \frac{(aa+1)}{2(aa-1)}l\cdot\frac{u-a}{u-\frac{1}{a}} + C, \text{ seu}$$

$$lx\sqrt{(1 - mu + uu)} + \frac{aa+1}{2(aa-1)}l\cdot\frac{au - aa}{au - 1} = lc,$$

et restituto valore $u = \frac{y}{x}$, aequatio integralis erit

$$l\sqrt{(xx - mxy + yy)} + \frac{aa+1}{2(aa-1)}l\cdot\frac{ay - aax}{ay - x} = lc, \text{ seu}$$

$$\left(\frac{ay - aax}{ay - x}\right)^{\frac{aa+1}{2(aa-1)}} \sqrt{(xx - mxy + yy)} = C.$$

2.) Sit $m < 2$ seu $m = 2\cos.\alpha$, erit

$$\int \frac{\partial u}{1 - 2u\cos.\alpha + uu} = \frac{1}{\sin.\alpha}\,\text{Ang. tang.}\,\frac{u\sin.\alpha}{1 - u\cos.\alpha}:$$

unde

$$lx\sqrt{(1 - mu + uu)} = C - \frac{\cos.\alpha}{\sin.\alpha}\,\text{Ang. tang.}\,\frac{u\sin.\alpha}{1 - u\cos.\alpha},\ \text{seu}$$

$$l\sqrt{(xx - mxy + yy)} = C - \frac{\cos.\alpha}{\sin.\alpha}\,\text{Ang. tang.}\,\frac{y\sin.\alpha}{x - y\cos.\alpha}.$$

3.) Sit $m = 2$, erit $\int \frac{\partial u}{(1-u)^2} = \frac{1}{1-u}$, hincque

$$lx(1 - u) = C - \frac{1}{1-u},\ \text{seu}\ l(x - y) = C - \frac{x}{x-y}.$$

Exemplum 2.

412. *Proposita aequatione differentiali homogenea*

$$\partial x(\alpha x + \beta y) = \partial y(\gamma x + \delta y)$$

ejus integrale invenire.

Posito $y = ux$, erit $u\partial x + x\partial u = \partial x \cdot \frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u}$, ideoque

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u(\gamma + \delta u)}{\alpha + \beta u - \gamma u - \delta uu} = \frac{\partial u(\delta u + \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\beta) + \partial u(\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\beta)}{\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta uu},$$

unde integrando

$$lx = C - l\sqrt{[\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta uu]} + \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)\int \frac{\partial u}{\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta uu}:$$

ubi iidem casus, qui ante, sunt considerandi, prout scilicet denominator $\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta uu$ vel duos factores habet reales et inaequales, vel aequales, vel imaginarios.

Exemplum 3.

413. *Proposita aequatione differentiali homogenea*

$$x\partial x + y\partial y = x\partial y - y\partial x$$

ejus integrale invenire.

Cum hinc sit $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x+y}{x-y}$, posito $y = ux$, fit $u\partial x + x\partial u = \frac{1+u}{1-u}\partial x$, seu $x\partial u = \frac{1+uu}{1-u}\partial x$, unde colligitur $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u - u\partial u}{1+uu}$ et integrando

$$lx = \text{Ang. tang. } u - l\sqrt{(1+uu)} + C, \text{ seu}$$
$$l\sqrt{(xx+yy)} = C + \text{Ang. tang. } \frac{y}{x}.$$

Exemplum 4.

414. *Proposita aequatione differentiali homogenea*

$$xx\partial y = (xx - ayy)\partial x$$

ejus integrale invenire.

Hic ergo est $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{xx - ayy}{xx}$, et posito $y = ux$, prodi $u\partial x + x\partial u = (1 - auu)\partial x$, ideoque $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{1 - u - auu}$ et $lx = \int \frac{\partial u}{1 - u - auu}$ cujus evolutioni non opus est immorari.

Exemplum 5.

415. *Proposita aequatione differentiali homogenea*

$$x\partial y - y\partial x = \partial x\sqrt{(xx+yy)}$$

ejus integrale invenire.

Erit ergo $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y + \sqrt{(xx+yy)}}{x}$, unde posito $y = ux$, fi $u\partial x + x\partial u = [u + \sqrt{(1+uu)}]\partial x$, seu $x\partial u = \partial x\sqrt{(1+uu)}$ ita ut sit $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{\sqrt{(1+uu)}}$, cujus integrale est

$$lx = la + l[u + \sqrt{(1+uu)}] = la + l\left(\frac{y + \sqrt{(xx+yy)}}{x}\right),$$

seu $lx = la + l\frac{x}{\sqrt{(xx+yy)} - y}$, unde colligitur $x = \frac{ax}{\sqrt{(xx+yy)} - y}$ seu $\sqrt{(xx+yy)} = a + y$, hincque $xx = aa + 2ay$.

Scholion.

416. Huc etiam functiones transcendentes numerari possum modo afficiant functiones nullius dimensionis ipsarum x et y, qu

posito $y = ux$ simul in functiones ipsius u abeunt. Ita si in aequatione $P\partial x = Q\partial y$, praeterquam quod P et Q sunt functiones homogeneae ejusdem dimensionum numeri, insint hujusmodi formulae

$$l\frac{\sqrt{(xx+yy)}}{x};\ e^{y:x};\ \text{Ang. sin.}\frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}};\ \cos.\frac{nx}{y};\ \text{etc.}$$

methodus exposita pari successu adhiberi potest, quia posito $y = ux$, ratio $\frac{\partial y}{\partial x}$, aequatur functioni solius novae variabilis u.

Problema 51.

417. Aequationem differentialem primi ordinis

$$\partial x(\alpha + \beta x + \gamma y) = \partial y(\delta + \varepsilon x + \zeta y)$$

ad separationem variabilium revocare et integrare.

Solutio.

Ponatur $\alpha + \beta x + \gamma y = t$ et $\delta + \varepsilon x + \zeta y = u$, ut fiat $t\partial x = u\partial y$. At inde colligimus

$$x = \frac{\zeta t - \gamma u + \alpha\zeta + \gamma\delta}{\beta\zeta - \gamma\varepsilon} \text{ et } y = \frac{\beta u - \varepsilon t + \alpha\varepsilon - \beta\delta}{\beta\zeta - \gamma\varepsilon},$$

hincque $\partial x : \partial y = \zeta\partial t - \gamma\partial u : \beta\partial u - \varepsilon\partial t$, unde nanciscimur hanc aequationem

$$\zeta t\partial t - \gamma t\partial u = \beta u\partial u - \varepsilon u\partial t, \text{ seu}$$
$$\partial t(\zeta t + \varepsilon u) = \partial u(\beta u + \gamma t),$$

quae cum sit homogenea et cum exemplo §. 412. conveniat, integratio jam est expedita.

Verum tamen casus existit, quo haec reductio ad homogeneitatem locum non habet, cum fuerit $\beta\zeta - \gamma\varepsilon = 0$, quoniam tum introductio novarum variabilium t et u tollitur. Hic ergo casus peculiarem requirit solutionem, quae ita instituatur; quoniam tum aequatio proposita ejusmodi formam est habitura

$$\alpha\partial x + (\beta x + \gamma y)\partial x = \delta\partial y + n(\beta x + \gamma y)\partial y$$

ponamus $\beta x + \gamma y = z$, erit $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\alpha + z}{\delta + nz}$. At $\partial y = \frac{\partial z - \beta \partial x}{\gamma}$, ergo $\frac{\partial z - \beta \partial x}{\gamma} = \frac{\alpha + z}{\delta + nz} \partial x$, ubi variabiles manifesto sunt separabiles, fit enim $\partial x = \frac{\partial z (\delta + nz)}{\alpha \gamma + \beta \delta + (\gamma + n\beta) z}$, cujus integratio logarithmos involvit, nisi sit $\gamma + n\beta = 0$, quo casu algebraice dat $x = \frac{2\delta z + nzz}{2(\alpha\gamma + \beta\delta)} + C$.

Corollarium 1.

418. Aequatio ergo differentialis primi ordinis, uti vocatur, in genere ad homogeneitatem reduci nequit, sed casus, quibus $\beta\zeta = \gamma\varepsilon$, inde excipi debent, qui etiam ad aequationem separatam omnino diversam deducunt.

Corollarium 2.

419. Si in his casibus exceptis sit $n = 0$, seu haec proposita sit aequatio $\partial y = \partial x (\alpha + \beta x + \gamma y)$, posito $\beta x + \gamma y = z$, ob $\delta = 1$, haec oritur aequatio $\partial x = \frac{\partial z}{\alpha\gamma + \beta + \gamma z}$, cujus integrale est

$$\gamma x = l \frac{\beta + \alpha\gamma + \gamma z}{C} = l \frac{\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma x + \gamma\gamma y}{C}, \text{ seu}$$
$$\beta + \gamma(\alpha + \beta x + \gamma y) = C e^{\gamma x}.$$

Problema 52.

420. Proposita aequatione differentiali hujusmodi:

$$\partial y + P y \partial x = Q dx$$

in qua P et Q sint functiones quaecunque ipsius x, altera autem variabilis y cum suo differentiali nusquam plus una habeat dimensionem, eam ad separationem variabilium perducere et integrare.

Solutio.

Quaeratur ejusmodi functio ipsius x, quae sit X, ut facta substitutione $y = Xu$ aequatio prodeat separabilis: Tum autem oritur

$$X\partial u + u\partial X + PXu\partial x = Q\partial x$$

quam aequationem separationem admittere evidens est, si fuerit $\partial X + PX\partial x = 0$, seu $\frac{\partial X}{X} = -P\partial x$, unde integratio dat $lX = -\int P\partial x$ et $X = e^{-\int P\partial x}$; hac ergo pro X sumta functione, aequatio nostra transformata erit $X\partial u = Q\partial x$, seu $\partial u = \frac{Q\partial x}{X} = e^{\int P\partial x}Q\partial x$, unde cum P et Q sunt functiones datae ipsius x, erit $u = \int e^{\int P\partial x}Q\partial x = \frac{y}{X}$. Quocirca aequationis propositae integrale est $y = e^{-\int P\partial x}\int e^{\int P\partial x}Q\partial x$.

Corollarium 1.

421. Resolutio ergo hujus aequationis $\partial y + Py\partial x = Q\partial x$ duplicem requirit integrationem, alteram formulae $\int P\partial x$, alteram formulae $\int e^{\int P\partial x}Q\partial x$. Sufficit autem in posteriori constantem arbitrariam adjecisse, cum valor ipsius y plus una non recipiat. Etiamsi enim in priori loco $\int P\partial x$ scribatur $\int P\partial x + C$, formula pro y manet eadem.

Corollarium 2.

422. Dum ergo formula $P\partial x$ integratur, sufficit ejus integrale particulare sumi, ideoque constanti ingredienti ejusmodi valorem tribui convenit, ut integralis forma fiat simplicissima.

Scholion.

423. En ergo aliud aequationum genus non minus late patens quam praecedens homogenearum, quod ad separationem variabilium perduci, hocque modo integrari potest. Inde autem in Analysin maxima utilitas redundat, cum hic litterae P et Q functiones quascunque ipsius x denotent. Hoc ergo modo manifestum est, tractari posse hanc aequationem $R\partial y + Py\partial x = Q\partial x$, si etiam R func-

tionem quamcunque ipsius x denotet, facta enim divisione per R forma proposita prodit, modo loco P et Q scribatur $\frac{P}{R}$ et $\frac{Q}{R}$, ita ut integrale futurum sit

$$y = e^{-\int \frac{P \partial x}{R}} \int \frac{e^{\int \frac{P \partial x}{R}} Q \partial x}{R}$$

Ad hujus problematis illustrationem quaedam exempla adjiciamus.

Exemplum 1.

424. *Proposita aequatione differentiali*

$$\partial y + y \partial x = a x^n \partial x$$

ejus integrale invenire.

Cum hic sit $P = 1$ et $Q = a x^n$, erit $\int P \partial x = x$, et aequatio integralis fiet

$$y = e^{-x} \int e^x x^n \partial x,$$

quae si n sit numerus integer positivus, evadet

$$y = e^{-x} [e^x (x^n - n x^{n-1} + n(n-1) x^{n-2} - \text{etc.}) + C] \quad (\S\ 223.)$$

qua evoluta prodit

$$y = C e^{-x} + x^n - n x^{n-1} + n(n-1) x^{n-2} - n(n-2)(n-3) x^{n-3} + \text{etc.}$$

unde pro simplicioribus valoribus ipsius n,

si $n = 0$, erit $y = C e^{-x} + 1$;
si $n = 1$, erit $y = C e^{-x} + x - 1$;
si $n = 2$, erit $y = C e^{-x} + x^2 - 2x + 2 . 1$;
si $n = 3$, erit $y = C e^{-x} + x^3 - 3x^2 + 3 . 2 x - 3 . 2 . 1$;
etc.

Corollarium 1.

425. Si ergo constans C sumatur $= 0$, habebitur integrale particulare

$$y = x^n - n x^{n-1} + n(n-1) x^{n-2} - n(n-1)(n-2) x^{n-3} + \text{etc.}$$

quod ergo est algebraicum, dummodo n sit numerus integer positivus.

Corollarium 2.

426. Si integrale ita determinari debeat, ut posito $x = 0$, valor ipsius y evanescat, constans C aequalis sumi debet ultimo termino constanti signo mutato, unde id semper erit transcendens.

Exemplum 2.

427. *Proposita aequatione differentiali* $(1 - xx)\partial y + xy\partial x = a\partial x$ *ejus integrale invenire.*

Aequatio ista per $1 - xx$ divisa ad hanc formam reducitur $\partial y + \frac{xy\partial x}{1-xx} = \frac{a\partial x}{1-xx}$, ita ut sit $P = \frac{x}{1-xx}$; $Q = \frac{a}{1-xx}$; hinc $\int P\partial x = -l\surd(1-xx)$, et $e^{\int P\partial x} = \frac{1}{\surd(1-xx)}$, ex quo integrale reperitur:

$$y = \surd(1-xx)\int \frac{a\partial x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{ax}{\surd(1-xx)} + C\right)\surd(1-xx);$$

quocirca integrale quaesitum erit

$$y = ax + C\surd(1-xx)$$

quod si ita determinari debeat, ut posito $x = 0$ evanescat, sumi oportet, $C = 0$, eritque $y = ax$.

Exemplum 3.

428. *Proposita aequatione differentiali* $\partial y + \frac{ny\partial x}{\surd(1+xx)} = a\partial x$, *ejus integrale invenire.*

Cum hic sit $P = \frac{n}{\surd(1+xx)}$ et $Q = a$, erit

$$\int P\partial x = n\,l\,[x + \surd(1+xx)] \text{ et}$$

$$e^{\int P\partial x} = [x + \sqrt{(1 + xx)}]^n, \text{ et}$$
$$e^{-\int P\partial x} = [\sqrt{(1 + xx)} - x]^n:$$

unde integrale quaesitum erit

$$y = [\sqrt{(1 + xx)} - x]^n \int a\partial x\, [x + \sqrt{(1 + xx)}]^n,$$

ad quod evolvendum ponatur $x + \sqrt{(1 + xx)} = u$, et fiet $x = \frac{uu - 1}{2u}$, hinc $\partial x = \frac{\partial u (1 + uu)}{2uu}$, ergo

$$\int u^n \partial x = \frac{u^{n-1}}{2(n-1)} + \frac{u^{n+1}}{2(n+1)} + C.$$

Nunc quia $[\sqrt{(1 + xx)} - x]^n = u^{-n}$, erit

$$y = Cu^{-n} + \frac{au^{-1}}{2(n-1)} + \frac{au}{2(n+1)} \text{ sive}$$

$$y = C[\sqrt{(1 + xx)} - x]^n + \frac{a}{2(n-1)}[\sqrt{(1 + xx)} - x] + \frac{a}{2(n+1)}[\sqrt{(1 + xx)} + x]$$

quae expressio ad hanc formam reducitur

$$y = C[\sqrt{(1 + xx)} - x]^n + \frac{na}{nn-1}\sqrt{(1 + xx)} - \frac{ax}{nn-1},$$

si integrale ita determinari debeat, ut posito $x = 0$ fiat $y = 0$, sumi oportet $C = -\frac{na}{nn-1}$.

Problema 53.

430. Proposita aequatione differentiali

$$\partial y + Py\partial x = Qy^{n+1}\partial x,$$

ubi P et Q denotent functiones quascunque ipsius x, eam ad separationem variabilium reducere et integrare.

Solutio.

Haec aequatio posito $\frac{1}{y^n} = z$ statim ad formam modo tractatam reducitur, nam ob $\frac{\partial y}{y} = -\frac{\partial z}{nz}$, aequatio nostra per y divisa, scilicet $\frac{\partial y}{y} + P\partial x = Q y^n \partial x$. statim abit in $-\frac{\partial z}{nz} + P\partial x = \frac{Q\partial x}{z}$, seu $\partial z - nPz\partial x = -nQ\partial x$, cujus integrale est

$$z = -e^{n\int P\partial x}\int e^{-n\int P\partial x}\, nQ\partial x, \text{ ideoque}$$

$$\frac{1}{y^n} = -n e^{n\int P\partial x}\int e^{-n\int P\partial x} Q\partial x.$$

Tractari autem potest ut praecedens, quaerendo hujusmodi functionem X, ut facta substitutione $y = Xu$ prodeat aequatio separabilis: prodit autem

$$X\partial u + u\partial X + PXu\partial x = X^{n+1}u^{n+1}Q\partial x.$$

Fiat ergo $\partial X + PX\partial x = 0$, seu $X = e^{-\int P\partial x}$, eritque

$$\frac{\partial u}{u^{n+1}} = X^n Q\partial x = e^{-n\int P\partial x}Q\partial x,$$

et integrando

$$-\frac{1}{nu^n} = \int e^{-n\int P\partial x}Q\partial x.$$

Jam quia $u = \frac{y}{X} = e^{\int P\partial x}y$, habebitur ut ante

$$\frac{1}{y^n} = -n e^{n\int P\partial x}\int e^{-n\int P\partial x}Q\partial x.$$

Scholion.

430. Hic ergo casus a praecedente non differre est censendus, ita ut hic nihil novi sit praestitum. Atque haec duo genera sunt fere sola, quae quidem aliquanto latius pateant, in quibus separatio variabilium obtineri queat. Caeteri casus, qui ope cujusdam substitutionis ad variabilium separationem praeparari possunt, plerumque sunt nimis speciales, quam ut insignis usus inde expectari possit. Interim tamen aliquot casus prae caeteris hic exponamus.

Problema 54.

431. Proposita hac aequatione differentiali

$$\alpha y \partial x + \beta x \partial y + x^m y^n (\gamma y \partial x + \delta x \partial y) = 0,$$

eam ad separationem variabilium reducere, et integrare.

Solutio.

Tota aequatione per xy divisa, nanciscimur hanc formam

$$\frac{\alpha \partial x}{x} + \frac{\beta \partial y}{y} + x^m y^n \left(\frac{\gamma \partial x}{x} + \frac{\delta \partial y}{y}\right) = 0,$$

unde statim has substitutiones $x^\alpha y^\beta = t$ et $x^\gamma y^\delta = u$ insigni usu non esse carituras colligimus: inde enim fit

$$\frac{\alpha \partial x}{x} + \frac{\beta \partial y}{y} = \frac{\partial t}{t} \text{ et } \frac{\gamma \partial x}{x} + \frac{\delta \partial y}{y} = \frac{\partial u}{u},$$

hincque aequatio nostra $\frac{\partial t}{t} + x^m y^n . \frac{\partial u}{u} = 0$. At ex substitutione sequitur

$$x^{\alpha\delta - \beta\gamma} = t^\delta u^{-\beta}, \text{ et } y^{\alpha\delta - \beta\gamma} = u^\alpha t^{-\gamma}, \text{ ideoque}$$

$$x = t^{\frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma}} u^{\frac{-\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}}, \text{ et } y = t^{\frac{-\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}} u^{\frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma}};$$

quibus substitutis fit

$$\frac{\partial t}{t} + t^{\frac{\delta m - \gamma n}{\alpha\delta - \beta\gamma}} u^{\frac{\alpha n - \beta m}{\alpha\delta - \beta\gamma}} \frac{\partial u}{u} = 0, \text{ ideoque}$$

$$t^{\frac{\gamma n - \delta m}{\alpha\delta - \beta\gamma} - 1} \partial t + u^{\frac{\alpha n - \beta m}{\alpha\delta - \beta\gamma} - 1} \partial u = 0,$$

cujus aequationis integrale est

$$\frac{t^{\frac{\gamma n - \delta m}{\alpha\delta - \beta\gamma}}}{\gamma n - \delta m} + \frac{u^{\frac{\alpha n - \beta m}{\alpha\delta - \beta\gamma}}}{\alpha n - \beta m} = C.$$

Ubi tantum superest ut restituantur valores $t = x^\alpha y^\beta$ et $u = x^\gamma y^\delta$. Caeterum notetur, si fuerit vel $\gamma n - \delta m = 0$ vel $\alpha n - \beta m = 0$ loco illorum membrorum vel lt vel lu scribi debere.

Scholion.

432. Ad aequationem propositam ducit quaestio, qua ejusmodi relatio inter variabiles x et y quaeritur, ut fiat

$$\int y\partial x = axy + bx^{m+1}y^{n+1};$$

ad hanc enim resolvendam differentialia sumi debent, quo prodit

$$y\partial x = ax\partial y + ay\partial x + bx^m y^n[(m+1)y\partial x + (n+1)x\partial y],$$

qua aequatione cum nostra forma comparata, est

$$\alpha = a - 1,\ \beta = a,\ \gamma = (m+1)b, \text{ et } \delta = (n+1)b; \text{ ergò}$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma = (n-m)ab - (n+1)b$$
$$\alpha n - \beta m = (n-m)a - n, \text{ et } \gamma n - \delta m = (n-m)b,$$

unde aequatio integralis fit manifesta.

Problema 55.

433. Proposita hac aequatione differentiali

$$y\partial y + \partial y(a + bx + nxx) = y\partial x(c + nx),$$

eam ad separationem variabilium reducere, et integrare.

Solutio.

Cum hinc sit $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y(c+nx)}{y+a+bx+nxx}$, tentetur haec substitutio $\frac{y(c+nx)}{y+a+bx+nxx} = u$, seu $y = \frac{u(a+bx+nxx)}{c+nx-u}$, fierique debet $\partial y = u\partial x$, seu

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{u\partial x}{y} = \frac{\partial x(c+nx-u)}{a+bx+nxx}:$$

at ex logarithmis colligitur

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{\partial u}{u} + \frac{\partial x(b+2nx)}{a+bx+nxx} - \frac{n\partial x + \partial u}{c+nx-u} = \frac{\partial x(c+nx-u)}{a+bx+nxx},$$

quae contrahitur in

$$\frac{\partial u(c+nx) - nu\partial x}{u(c+nx-u)} = \frac{\partial x(c-b-nx-u)}{a+bx+nxx}, \text{ seu}$$
$$\frac{\partial u(c+nx)}{u(c+nx-u)} = \frac{\partial x(na+cc-bc+(b-2c)u+uu)}{(c+nx-u)(a+bx+nxx)},$$

quae per $c + nx - u$ multiplicata manifesto est separabilis, proditque

$$\frac{\partial x}{(a + bx + nxx)(c + nx)} = \frac{\partial u}{u(an + cc - bc + (b - 2c)u + uu)},$$

cujus ergo integratio per logarithmos et angulos absolvi potest. Casu autem hic vix praevidendo evenit, ut haec substitutio ad votum successerit, neque hoc problema magnopere juvabit.

Problema 56.

434. Propositam hanc aequationem differentialem

$$(y - x)\partial y = \frac{n\partial x(1 + yy)\sqrt{(1 + yy)}}{\sqrt{(1 + xx)}},$$

ad separationem variabilium reducere, et integrare.

Solutio.

Ob irrationalitatem duplicem vix ullo modo patet, cujusmodi substitutione uti conveniat. Ejusmodi certe quaeri convenit, qua eidem signo radicali non ambae variabiles simul implicentur. Ad hunc scopum commoda videtur haec substitutio $y = \frac{x - u}{1 + xu}$, qua fit $y - x = \frac{-u(1 + xx)}{1 + xu}$, $1 + yy = \frac{(1 + xx)(1 + uu)}{(1 + xu)^2}$, et $\partial y = \frac{\partial x(1 + uu) - \partial u(1 + xx)}{(1 + xu)^2}$: atque his valoribus in nostra aequatione substitutis, prodit

$$- u\partial x(1 + uu) + u\partial u(1 + xx) = n\partial x(1 + uu)\sqrt{(1 + uu)},$$

quae manifesto separationem variabilium admittit: colligitur scilicet

$$\frac{\partial x}{1 + xx} = \frac{u\partial u}{(1 + uu)[n\sqrt{(1 + uu)} + u]},$$

quae aequatio posito $1 + uu = tt$, concinnior redditur

$$\frac{\partial x}{1 + xx} = \frac{\partial t}{t[nt + \sqrt{(tt - 1)}]},$$

et ope positionis $t = \frac{1 + ss}{2s}$ sublata irrationalitate,

$$\frac{\partial x}{1 + xx} = - \frac{2\partial s(1 - ss)}{(1 + ss)[n + 1 + (n - 1)ss]} = \frac{2\partial s}{1 + ss} - \frac{2n\partial s}{n + 1 + (n - 1)ss},$$

cujus integratio nulla amplius laborat difficultate.

Scholion.

435. In hoc casu praecipue substitutio $y = \frac{x-u}{1+xu}$ notari meretur, qua duplex irrationalitas tollitur: unde operae pretium erit videre, quid hac substitutione generaliori praestari possit $y = \frac{\alpha x+u}{1+\beta xu}$; inde autem fit

$$\alpha - \beta yy = \frac{(\alpha-\beta uu)(1-\alpha\beta xx)}{(1+\beta xu)^2}, \quad y - \alpha x = \frac{u(1-\alpha\beta xx)}{1+\beta xu}, \text{ et}$$
$$\partial y = \frac{\partial x(\alpha-\beta uu)+\partial u(1-\alpha\beta xx)}{(1+\beta xu)^2};$$

ac jam facile perspicitur, in cujusmodi aequationibus haec substitutio usum afferre possit; ejus scilicet beneficio haec duplex irrationalitas $\frac{\sqrt{(\alpha-\beta yy)}}{\sqrt{(1-\alpha\beta xx)}}$ reducitur ad hanc simplicem $\frac{\sqrt{(\alpha-\beta uu)}}{1+\beta xu}$, quam porro facile rationalem reddere licet. Atque hic fere sunt casus, in quibus reductio ad separabilitatem locum invenit, quibus probe perpensis, aditus facile patebit ad reliquos casus, qui quidem etiamnum sunt tractati; unicam vero adhuc investigationem apponam circa casus, quibus haec aequatio $\partial x + yy\partial x = ax^m\partial x$ separationem variabilium admittit, quandoquidem ad hujusmodi aequationes frequenter pervenitur, atque haec ipsa aequatio olim inter Geometras omni studio est agitata.

Problema 57.

436. Pro aequatione $\partial y + yy\partial x = ax^m\partial x$ valores exponentis m definire, quibus eam ad separationem variabilium reducere licet.

Solutio.

Primo haec aequatio sponte est separabilis casu $m = 0$, tum enim ob $\partial y = \partial x(a - yy)$, fit $\partial x = \frac{\partial y}{a-yy}$. Omnis ergo investigatio in hoc versatur, ut ope substitutionum alii casus ad hunc reducantur.

Ponamus $y = \frac{b}{z}$, et fit $- b\partial z + bb\partial x = ax^m zz\partial x$, quae forma ut propositae similis evadat, statuatur $x^{m+1} = t$, ut sit

$x^m \partial x = \frac{\partial t}{m+1}$, et $\partial x = \frac{t^{\frac{-m}{m+1}}\partial t}{m+1}$, eritque

$$b\partial z + \frac{azz\partial t}{m+1} = \frac{bb}{m+1} t^{\frac{-m}{m+1}} \partial t,$$

quae sumto $b = \frac{a}{m+1}$, ad similitudinem propositae propius accedit, ut sit $\partial z + zz\partial t = \frac{a}{(m+1)^2} t^{\frac{-m}{m+1}} \partial t$. Si ergo haec esset separabilis, ipsa proposita ista substitutione separabilis fieret et vicissim; unde concludimis, si aequatio proposita separationem admittat casu $m = n$, eam quoque esse admissuiram casu $m = -\frac{n}{n+1}$. Hinc autem ex casu $m = 0$ alius non repertur.

Ponamus $y = \frac{1}{x} - \frac{z}{xx}$, ut sit

$$\partial y = -\frac{\partial x}{xx} - \frac{\partial z}{xx} + \frac{2z\partial x}{x^3}, \text{ et}$$
$$yy\partial x = \frac{\partial x}{xx} - \frac{2z\partial x}{x^3} + \frac{zz\partial x}{x^4},$$

unde prodit

$$-\frac{\partial z}{xx} + \frac{zz\partial x}{x^4} = ax^m\partial x, \text{ seu}$$
$$\partial z - \frac{zz\partial x}{xx} = -ax^{m+2}\partial x:$$

sit nunc $x = \frac{1}{t}$ et fit $\partial z + zz\partial t = at^{-m-4}\partial t$, quae cum propositae sit similis, discimus, si separatio succedat casu $m = n$, etiam succedere casu $m = -n-4$.

Ex uno ergo casu $m = n$ consequimur duos, scilicet $m = -\frac{n}{n+1}$ et $m = -n-4$. Cum igitur constet casus $m = 0$, hinc formulae alternatim adhibitae praebent sequentes

$$m = -4;\ m = -\tfrac{4}{3};\ m = -\tfrac{8}{3};\ m = -\tfrac{8}{5};$$
$$m = -\tfrac{12}{5};\ m = -\tfrac{12}{7};\ m = -\tfrac{16}{7};\ \text{etc.}$$

qui casus omnes in hac formula $m = \frac{-4i}{2i \pm 2}$ continentur.

Corollarium 1.

437. Quodsi ergo fuerit vel $m = \frac{-4i}{2i+1}$, vel $m = \frac{-4i}{2i-1}$, aequatio $\partial y + yy\partial x = ax^m \partial x$ per aliquot substitutiones repetitas tandem ad formam $\partial u + uu\partial v = c\partial v$, cujus separatio et integratio constat, reduci potest.

Corollarium 2.

438. Scilicet si fuerit $m = \frac{-4i}{2i+1}$, aequatio

$$\partial y + yy\partial x = ax^m \partial x$$

per substitutiones $x = t^{\frac{1}{m+1}}$ et $y = \frac{a}{(m+1)z}$ reducitur ad hanc $\partial z + zz\partial t = \frac{a}{(m+1)^2} t^n \partial t$, ubi $n = \frac{-4i}{2i-1}$, qui casus uno gradu inferior est censendus.

Corollarium 3.

439. Sin autem fuerit $m = \frac{-4i}{2i-1}$, aequatio

$$\partial y + yy\partial x = ax^m \partial x$$

per has substitutiones $x = \frac{1}{t}$ et $y = \frac{1}{x} - \frac{z}{xx}$ seu $y = t - ttz$, reducitur ad hanc $\partial z + zz\partial t = at^n \partial t$, in qua est

$$n = \frac{-4(i-1)}{2i-1} = \frac{-4(i-1)}{2(i-1)+1},$$

qui casus denuo uno gradu inferior est.

Corollarium 4.

440. Omnes ergo casus separabiles hoc modo inventi, pro exponente m dant numeros negativos intra limites 0 et -4

contentos, ac si i sit numerus infinitus, prodit casus $m = -2$, qui autem per se constat, cum aequatio $\partial y + yy\partial x = \frac{a\partial x}{xx}$, posito $y = \frac{1}{z}$, fiat homogenea.

Scholion 1.

441. Aequatio haec $\partial y + yy\partial x = ax^m \partial x$ vocari solet Riccatiana ab Auctore Comite *Riccati*, qui primus casus separabiles proposuit. Hic quidem eam in forma simplicissima exhibui, cum eo haec $\partial y + Ayyt^\mu \partial t = Bt^\lambda \partial t$, ponendo $At^\mu \partial t = \partial x$ et $At^{\mu+1} = (\mu + 1)x$, statim reducatur. Caeterum etsi binae substitutiones, quibus hic sum usus, sunt simplicissimae, tamen magis compositis adhibendis nulli alii casus separabiles deteguntur: ex quo hoc omnino memorabile est visum, hanc aequationem rarissime separationem admittere, tametsi numerus casuum, quibus hoc praestari queat, revera sit infinitus. Caeterum haec investigatio ab exponente ad simplicem coëfficientem traduci potest; posito enim $y = x^{\frac{m}{2}} z$, prodit $\partial z + \frac{mz\partial x}{2x} + x^{\frac{m}{2}} zz\partial x = ax^{\frac{m}{2}} \partial x$, ubi si fiat $x^{\frac{m}{2}} \partial x = \partial t$, et $x^{\frac{m+2}{2}} = \frac{m+2}{2} t$, erit $\frac{\partial x}{x} = \frac{2\partial t}{(m+2)t}$, hincque

$$\partial z + \frac{mz\partial t}{(m+2)t} + zz\partial t = a\partial t,$$

quae ergo aequatio, quoties fuerit $\frac{m}{m+2} = \pm 2i$, seu numerus par, tam positivus, quam negativus, separabilis reddi potest, ita ut haec aequatio

$$\partial z \pm \frac{2iz\partial t}{t} + zz\partial t = a\partial t$$

semper sit integrabilis. Si praeterea ponatur $z = u - \frac{m}{2(m+2)t}$, oritur

$$\partial u + uu\partial t = a\partial t - \frac{m(m+4)\partial t}{4(m+2)^2 tt},$$

et pro casibus separabilitatis $m = \frac{-4i}{2i \pm 1}$, habebitur

$$\partial u + uu\partial t = a\partial t + \frac{i(i\pm 1)\partial t}{tt}.$$

Uberiorem autem hujus aequationis evolutionem, quandoquidem est maximi momenti, in sequentibus docebo; ubi integratione aequationum differentialium per series infinitas sum acturus, hinc enim facilius casus separabiles eruemus, simulque integralia assignare poterimus.

Scholion 2.

442. Ampliora praecepta circa separationem variabilium, quae quidem usum sint habitura, vix tradi posse videntur, unde intelligitur in paucissimis aequationibus differentialibus hanc methodum adhiberi posse. Progrediar igitur ad aliud principium explicandum, unde integrationes haurire liceat, quod multo latius patet, dum etiam ad aequationes differentiales altiorum graduum accommodari potest, ita ut in eo verus ac naturalis fons omnium integrationum contineri videatur. Istud autem principium in hoc consistit, quod proposita quacunque aequatione differentiali inter duas variabiles, semper detur functio quaedam, per quam aequatio multiplicata fiat integrabilis. Aequationis scilicet omnia membra ad eandem partem disponi oportet, ut talem formam obtineat $P\partial x + Q\partial y = 0$; ac tum dico semper dari functionem quandam variabilium x et y, puta V, ut facta multiplicatione, formula $VP\partial x + VQ\partial y$ integrabilis existat, seu ut verum sit differentiale ex differentiatione cujuspiam functionis binarum variabilium x et y natum. Quodsi enim haec functio ponatur $= S$, ut sit $\partial S = VP\partial x + VQ\partial y$, quia est $P\partial x + Q\partial y = 0$, erit etiam $\partial S = 0$, ideoque $S = \text{Const.}$ quae ergo aequatio erit integrale idque completum aequationis differentialis $P\partial x + Q\partial y = 0$. Totum ergo negotium ad inventionem illius multiplicatoris V redit.
