LEONHARDI EULERI

INSTITUTIONUM
CALCULI INTEGRALIS
VOLUMEN PRIMUM

IN QUO METHODUS INTEGRANDI A PRIMIS PRINCIPIIS USQUE AD INTEGRATIONEM AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM PRIMI GRADUS PERTRACTATUR.

Editio tertia.

PETROPOLI,
Impensis Academiae Imperialis Scientiarum
1824.

INDEX CAPITUM,
in Volumine primo contentorum.

PRAENOTANDA.

DE
CALCULO INTEGRALI
IN GENERE.

Definitio 1.

1.

Calculus integralis est methodus, ex data differentialium relatione inveniendi relationem ipsarum quantitatum: et operatio, qua hoc praestatur, integratio vocari solet.

Corollarium 1.

2. Cum igitur calculus differentialis ex data relatione quantitatum variabilium, relationem differentialium investigare doceat: calculus integralis methodum inversam suppeditat.

Corollarium 2.

3. Quemadmodum scilicet in Analysi perpetuo binae operationes sibi opponuntur, veluti subtractio additioni, divisio multiplicationi, extractio radicum evectioni ad potestates, ita etiam simili ratione calculus integralis calculo differentiali opponitur.

Corollarium 3.

4. Proposita relatione quacunque inter binas quantitates variabiles x et y, in calculo differentiali methodus traditur rationem differentialium $\partial y : \partial x$ investigandi: sin autem vicissim ex hac differentialium ratione ipsa quantitatum x et y relatio sit definienda, hoc opus calculo integrali tribuitur.

Scholion 1.

5. In calculo differentiali iam notavi, quaestionem de differentialibus non absolute sed relative esse intelligendam, ita ut, si y fuerit functio quaecunque ipsius x, non tam ipsum eius differentiale ∂y, quam eius ratio ad differentiale ∂x sit definienda. Cum enim omnia differentialia per se sint nihilo aequalia, quaecunque functio y fuerit ipsius x, semper est $\partial y = 0$, neque sic quicquam amplius absolute quaeri posset. Verum quaestio ita rite proponi debet, ut dum x incrementum capit infinite parvum adeoque evanescens ∂x, definiatur ratio incrementi functionis y, quod inde capiet, ad istud ∂x: etsi enim utrumque est $= 0$, tamen ratio certa inter ea intercedit, quae in calculo differentiali proprie investigatur. Ita si fuerit $y = xx$; in calculo differentiali ostenditur esse $\frac{\partial y}{\partial x} = 2x$, neque hanc incrementorum rationem esse veram, nisi incrementum ∂x, ex quo ∂y nascitur, nihilo aequale statuatur. Verum tamen, hac vera differentialium notione observata, locutiones communes, quibus differentialia quasi absolute enunciantur, tolerari possunt, dummodo semper in mente saltem ad veritatem referantur. Recte ergo dicimus, si $y = xx$, fore $\partial y = 2x\partial x$, tam etsi falsum non esset, si quis diceret $\partial y = 3x\partial x$, vel $\partial y = 4x\partial x$, quoniam ob $\partial x = 0$ et $\partial y = 0$, hae aequalitates aeque subsisterent; sed prima sola rationi verae $\frac{\partial y}{\partial x} = 2x$ est consentanea.

Scholion 2.

6. Quemadmodum calculus differentialis apud Anglos methodus fluxionum appellatur, ita calculus integralis ab iis methodus fluxionum inuersa vocari solet, quandoquidem a fluxionibus ad quantitates fluentes revertitur. Quas enim nos quantitates variabiles vocamus, eas Angli nomine magis idoneo quantitates fluentes vocant, et earum incrementa infinite parva seu evanescentia fluxiones nominant, ita vt fluxiones ipsis idem sint, quod nobis differentialia. Haec diversitas loquendi ita iam usu invaluit, ut conciliatio vix unquam sit expectanda; equidem Anglos in formulis loquendi luben-

ter imitarer, sed signa quibus nos utimur, illorum signis longe anteferenda videntur. Verum cum tot iam libri utraque ratione conscripti prodierint, huiusmodi conciliatio nullum usum esset habitura.

Definitio 2.

7. Cum functionis cuiuscunque ipsius x differentiale huiusmodi habeat formam $X\,\partial x$, proposita tali forma differentiali $X\,\partial x$, in qua X sit functio quaecunque ipsius x, illa functio, cuius differentiale est $= X\,\partial x$, huius vocatur integrale, et praefixo signo $\int$ indicari solet: ita vt $\int X\,\partial x$ eam denotet quantitatem variabilem, cuius differentiale est $= X\,\partial x$.

Corollarium 1.

8. Quemadmodum ergo propositae formulae differentialis $X\partial x$ integrale, seu ea functio ipsius x, cuius differentiale est $= X\,\partial x$, quae hac scriptura $\int X\,\partial x$ indicatur, investigari debeat, in calculo integrali est explicandum.

Corollarium 2.

9. Uti ergo littera ∂ signum est differentiationis, ita littera $\int$ pro signo integrationis utimur, sicque haec duo signa sibi mutuo opponuntur, et quasi se destruunt: scilicet $\int \partial X$ erit $= X$, quia ea quantitas denotatur cuius differentiale est ∂X, quae utique est X.

Corollarium 3.

10. Cum igitur harum ipsius x functionum

$$x^2,\ x^n,\ \sqrt{(a\,a - x\,x)}$$

differentialia sint

$$2\,x\,\partial\,x,\ n\,x^{n-1}\,\partial\,x,\ \frac{-x\,\partial\,x}{\sqrt{(a\,a - x\,x)}}$$

signo integrationis $\int$ adhibendo, patet fore:

$$\int 2x\partial x = xx;\ \int nx^{n-1}\partial x = x^n;\ \int \frac{-x\,\partial\,x}{\sqrt{(aa-xx)}} = \sqrt{(aa-xx)}$$

unde usus huius signi clarius perspicitur.

Scholion 1.

11. Hic unica tantum quantitas variabilis in computum ingredi videtur, cum tamen statuamus tam in calculo differentiali quam integrali, semper rationem duorum pluriumve differentialium spectari. Verum etsi hic una tantum quantitas variabilis x apparet, tamen revera duae considerantur; altera enim est ipsa illa functio, cuius differentiale sumimus esse $X \partial x$, quae si designetur littera y, erit $\partial y = X \partial x$, seu $\frac{\partial y}{\partial x} = X$, ita ut hic omnino ratio differentialium $\partial y : \partial x$ proponatur, quae est $= X$, indeque erit $y = \int X \partial x$: hoc autem integrale non tam ex ipso differentiali $X \partial x$, quod vtique est $= 0$, quam ex eius ratione ad ∂x inveniri est censendum. Caeterum hoc signum $\int$ vocabulo *summae* efferri solet, quod ex conceptu parum idoneo, quo integrale tanquam summa omnium differentialium spectatur, est natum; neque maiore iure admitti potest, quam vulgo lineae ex punctis constare concipi solent.

Scholion 2.

12. At calculus integralis multo latius quam ad huiusmodi formulas integrandas patet, quae unicam variabilem complectuntur. Quemadmodum enim hic functio unius variabilis x ex data differentialis forma investigatur; ita calculus integralis quoque extendi debet ad functiones duarum pluriumve variabilium investigandas, cum relatio quaedam differentialium fuerit proposita. Deinde calculus integralis non solum ad differentialia primi ordinis adstringitur, sed etiam praecepta tradere debet, quorum ope functiones tam unius quam duarum pluriumve variabilium investigari queant, cum relatio quaedam differentialium secundi altiorisve cuiusdam ordinis fuerit data. Atque hanc ob rem definitionem calculi integralis ita instruximus, vt omnes huiusmodi investigationes in se complecteretur; differentialia enim cuiusque ordinis intelligi debent, et voce relationis, quae inter ea proponatur, sum usus, ut latius pateret voce rationis, quae tantum duorum differentialium comparationem indicare videatur. Ex his ergo divisionem calculi integralis constituere poterimus.

Definitio 3.

13. Calculus integralis dividitur in duas partes, quarum prior tradit methodum, functionem unius variabilis inveniendi ex data quadam relatione inter eius differentialia tam primi quam altiorum ordinum.

Pars autem altera methodum continet, functionem duarum pluriumve variabilium inveniendi, cum relatio inter eius differentialia sive primi sive altioris cuiusdam gradus fuerit proposita.

Corollarium 1.

14. Prout ergo functio ex data differentialium relatione invenienda, vel vnicam variabilem complectitur, vel duas pluresve, inde calculus integralis commode in duas partes principales dispescitur, quibus exponendis duos libros destinamus.

Corollarium 2.

15. Semper igitur calculus integralis in inventione functionum vel unius vel plurium variabilium versatur, cum scilicet relatio quaepiam inter eius differentialia sive altioris cuiuspiam ordinis fuerit proposita.

Scholion.

16. Cum hic primam partem calculi integralis in investigatione functionum unicae variabilis ex data differentialium relatione constituamus, plures partes pro numero variabilium functionem ingredientium constitui debere videatur, ita ut pars secunda functiones duarum variabilium, tertia trium, quarta quatuor etc. complectatur. Verum pro his posterioribus partibus methodus fere eadem requiritur, ita ut si inventio functionum duas variabiles involventium fuerit in potestate, via ad eas, quae plures variabiles implicant, satis sit patefacta; unde inventionem eiusmodi functionum, quae duas pluresve variabiles continent, commode coniungimus, indeque

unicam partem calculi integralis constituimus, posteriori libro tractandam.

Caeterum haec altera pars in elementis adhuc nusquam est tractata, etiamsi eius usus in Mechanica ac praecipue in doctrina fluidorum maximi sit usus. Quocirca cum in hoc genere praeter prima rudimenta vix quicquam sit exploratum, noster secundus liber de calculo integrali admodum erit sterilis, ac praeter commemorationem eorum, quae adhuc desiderantur, parum erit expectandum; verum hoc ipsum ad scientiae incrementum multum conferre videtur.

Definitio 4.

17. Uterque de calculo integrali liber commode subdividitur in partes pro gradu differentialium, ex quorum relatione functionem quaesitam investigari oportet. Ita prima pars versatur in relatione differentialium primi gradus, secunda in relatione differentialium secundi gradus, quorsum etiam differentialia altiorum graduum ob tenuitatem eorum, quae adhuc sunt investigata, referri possunt.

Corollarium 1.

18. Uterque ergo liber constabit duabus partibus, in quarum priore relatio inter differentialia primi gradus proposita considerabitur, in posteriore vero eiusmodi integrationes occurrent, vbi relatio inter differentialia secundi altiorumve graduum proponitur.

Corollarium 2.

19. In primi ergo libri parte prima eiusmodi functio variabilis x invenienda proponitur, ut posita ea functione $= y$, et $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, relatio quaecunque data inter has tres quantitates x, y et p adimpleatur: seu proposita quacunque aequatione inter has ternas quantitates, ut indoles functionis y seu aequatio inter x et y tantum, exclusa p, eruatur.

Corollarium 3.

20. Posterioris autem partis primi libri quaestiones ita erunt comparatae, ut posito $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, $\frac{\partial p}{\partial x} = q$, $\frac{\partial q}{\partial x} = r$ etc. si proponatur aequatio quaecunque inter quantitates x, y, p, q, r etc. indoles functionis y per x, seu aequatio inter x et y eliciatur.

Scholion 11.

21. Quae adhuc in calculo integrali sunt elaborata maximam partem ad libri primi partem primam sunt referenda, in qua excolenda Geometrae imprimis operam suam collocarunt: pauca sunt quae in parte posteriore sunt praestita, et alter liber, quem secundum fecimus, etiamnunc fere vacuus est relictus. Prima autem pars libri primi, in qua potissimum nostra tractatio consumetur, denuo in plures sectiones distinguitur, pro modo relationis, quae inter quantitates x, y, et $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ proponitur. Relatio enim prae caeteris simplicissima est, quando $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ aequatur functioni cuipiam ipsius x, qua posita $= X$; vt sit $\frac{\partial y}{\partial x} = X$ seu $\partial y = X \partial x$; totum negotium in integratione formulae differentialis $X \partial x$ absolvitur: huius operationis iam supra mentionem fecimus, quae vulgo sub titulo integrationis formularum differentialium simplicium, seu unicam variabilem involventium tractari solet. Eodem res rediret, si $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ aequaretur functioni ipsius y tantum, quandoquidem quantitates x et y ita inter se reciprocantur, ut altera tanquam functio alterius spectari possit; haec ergo ad sectionem primam referentur. Sin autem $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ aequetur expressioni ambas quantitates x et y involventi, aequatio habetur differentialis huius formae $P \partial x + Q \partial y = 0$, ubi P et Q sunt expressiones quaecunque ex x, y et constantibus conflatae. Quanquam autem Geometrae multum in huiusmodi aequationum integratione desudarunt, tamen vix ultra quosdam casus satis

particulares sunt progressi. Sin autem p magis complicate per x et y determinatur, ut eius valor explicite exhiberi nequeat, veluti si fuerit:

$$p^5 = xxp^3 - xyp + x^5 - y^5$$

ne via quidem constat tentanda, quomodo inde relatio inter x et y investigari queat: pauca ergo, quae hic tradere licebit, cum praecedentibus secundam sectionem primae partis libri primi occupabunt. Ita ex universa nostra tractatione magis patebit, quod adhuc in calculo integrali desideretur, quam quid iam sit expeditum, cum hoc prae illo ut minima quaedam particula sit spectandum.

Scholion 2.

22. In singulis partibus, quas enarravimus, fieri etiam solet, ut non solum vna quaedam functio, sed etiam simul plures investigentur, ita vt neutra sine reliquis definiri possit, quemadmodum in Algebra communi usu venit, ut ad solutionem problematis plures incognitae in calculum sint introducendae, quae deinceps per totidem aequationes determinentur. Veluti si eiusmodi binae functiones y et z ipsius x sint inveniendae, ut sit:

$$x\partial y + azz\partial x = 0, \text{ et } xx\partial z + bxy\partial y = c\partial y:$$

hinc novae subdivisiones nostrae tractationis constitui possent. Verum quia hic ut in Algebra communi totum negotium ad eliminationem unius litterae revocatur, ut deinceps duae tantum variabiles in una aequatione supersint, hinc tractatio non multiplicanda videtur.

Scholion 3.

23. In secundo libro calculi integralis, quo functio duarum pluriumve variabilium ex data differentialium relatione investigatur, multo maior quaestionum varietas locum habet. Sit enim z functio binarum variabilium x et t investiganda, et cum $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ denotet ratio-

nem ejus differentialis ad ∂x, si sola x pro variabili habeatur, at $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$ rationem ejus differentialis ad ∂t, si sola t variabilis sumatur; prima pars ejusmodi continebit quaestiones, in quibus certa quaedam relatio inter quantitates x, t, z et $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$ proponitur, et quaestio huc redit, ut hinc aequatio inter solas quantitates x, t et z eruatur; inde enim qualis z sit functio ipsarum x et t, patebit. In secunda parte praeter has formulas $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$ etiam istae $\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial t}\right)$ et $\left(\frac{\partial \partial z}{\partial t \partial t}\right)$, in computum ingredientur: quarum significatio ita est intelligenda, ut positis prioribus $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p$ et $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = q$, ubi p et q iterum certae erunt functiones ipsorum x et t, futurum sit simili expressionis modo,

$$\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial x}\right) = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right); \left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial t}\right) = \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right); \left(\frac{\partial \partial z}{\partial t \partial t}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right).$$

Proposita ergo relatione inter has formulas et praecedentes, simulque ipsas quantitates x, t et z, aequatio inter ternas istas quantitates solas x, t et z erui debet. Hujusmodi quaestiones frequenter occurrunt in Mechanica et Hydraulica, quando motus corporum flexibilium et fluidorum indagatur; ex quo maxime est optandum, ut haec altera sectio secundi libri calculi integralis omni cura excolatur. Neque vero opus erit, ut hanc investigationem ad differentialia altiora extendamus, cum nullae adhuc quaestiones sint tractatae, quae tanta calculi incrementa desiderent.

Definitio 5.

24. Si functiones, quae in calculo integrali ex relatione differentialium quaeruntur, algebraice exhiberi nequeant, tum eae vocantur *transcendentes*, quandoquidem earum ratio vires Analyseos communis transcendit.

Corollarium 1.

25. Quoties ergo integratio non succedit, toties functio quae per integrationem quaeritur, pro transcendente est habenda. Ita

si formula differentialis $X\,\partial x$ integrationem non admittit, ejus integrale, quod ita indicari solet: $\int X\,\partial x$, est functio transcendens ipsius x.

Corollarium 2.

26. Hinc intelligitur, si y fuerit functio transcendens ipsius x, vicissim fore x functionem transcendentem ipsius y, atque ex hac conversione novae functiones transcendentes oriuntur.

Corollarium 3.

27. Pro variis partibus et sectionibus calculi integralis nascuntur etiam plura genera functionum transcendentium, quorum adeo numerus in infinitum exsurgit: unde patet, quanta copia omnium quantitatum possibilium nobis adhuc sit ignota.

Scholion 1.

28. Jam ante quam in Analysin infinitorum penetravimus species quasdam functionum transcendentium cognoscere licuit. Primam suppeditavit doctrina logarithmorum: si enim y denotet logarithmum ipsius x, ut sit $y = lx$, erit y utique functio transcendens ipsius x, sicque logarithmi quasi primam speciem functionum transcendentium constituunt. Deinde cum ex aequatione $y = lx$ vicissim sit $x = e^y$, erit x utique etiam functio transcendens ipsius y: ac tales functiones vocantur *exponentiales*. Porro autem consideratio angulorum aliud genus aperuit: veluti si angulus, cujus sinus est $= s$, ponatur $= \Phi$, ut sit $\Phi = \text{Arc. sin. } s$, nullum est dubium, quin Φ sit functio transcendens ipsius s, et quidem infinitiformis: hincque cum convertendo prodeat $s = \sin. \Phi$, erit etiam sinus s functio transcendens anguli Φ. Quanquam autem hae functiones transcendentes sine subsidio calculi integralis sunt agnitae, tamen in ipso quasi limine calculi integralis ad eas deducimur; earumque indoles ita nobis jam est perspecta, ut propemodum functionibus

algebraicis accenseri queant. Quare etiam perpetuo in calculo integrali, quoties functiones transcendentes ibi repertas ad logarithmos vel angulos revocare licet, eas tanquam algebraicas spectare solemus.

Scholion 2.

29. Cum calculus integralis ex inversione calculi differentialis oriatur, perinde ac reliquae methodi inversae ad notitiam novi generis quantitatum nos perducit. Ita si a tyrone primorum elementorum nihil praeter notitiam numerorum integrorum positivorum postulemus, apprehensa additione, statim atque ad operationem inversam, subtractionem scilicet, ducitur, notionem numerorum negativorum assequetur. Deinde multiplicatione tradita, cum ad divisionem progreditur, ibi notionem fractionum accipiet. Porro postquam evectionem ad potestates didicerit, si per operationem inversam extractionem radicum suscipiat, quoties negotium non succedit, ideam numerorum irrationalium adipiscetur, haecque cognitio per totam Analysin communem sufficiens censetur. Simili ergo modo calculus integralis, quatenus integratio non succedit, novum nobis genus quantitatum transcendentium aperit. Non enim, uti omnium differentialia exhiberi possunt, ita vicissim omnium differentialium integralia exhibere licet.

Scholion 3.

30. Neque vero statim ac primi conatus in integratione expedienda fuerint irriti, functiones quaesitae pro transcendentibus sunt habendae; fieri enim saepe solet, ut integrale etiam algebraicum nonnisi per operationes artificiosas obtineri queat. Deinde quando functio quaesita fuerit transcendens, sollicite videndum est, num forte ad species illas simplicissimas logarithmorum vel angulorum revocari possit, quo casu solutio algebraicae esset aequiparanda. Quod si minus successerit, formam tamen simplicissimam functionum transcendentium, ad quam quaesitam reducere liceat, indagari conve-

niet. Ad usum autem longe commodissimum est, ut valores functionum transcendentium vero proxime exhibentur, quem in finem insignis pars calculi integralis in investigationem serierum infinitarum impenditur, quae valores earum functionum contineant.

Theorema.

31. Omnes functiones per calculum integralem inventae sunt indeterminatae, ac requirunt determinationem ex natura quaestionis, cujus solutionem suppeditant, petendam.

Demonstratio.

31. Cum semper infinitae dentur functiones, quarum idem est differentiale, siquidem functionis $P + C$, quicunque valor constanti C tribuatur, differentiale idem est $= \partial P$: vicissim etiam proposito differentiali ∂P, integrale est $P + C$, ubi pro C quantitatem constantem quamcunque ponere licet: unde patet eam functionem, cujus differentiale datur $= \partial P$, esse indeterminatam, cum quantitatem constantem arbitrariam in se involvat. Idem etiam eveniat necesse est, si functio ex quacunque differentialium relatione sit determinanda, semperque complectetur quantitatem constantem arbitrariam, cujus nullum vestigium in relatione differentialium apparuit. Determinabitur ergo hujusmodi functio per calculum integralem inventa, dum constanti illi arbitrariae certus valor tribuitur, quem semper natura quaestionis, cujus solutio ad illam functionem perduxerat, suppeditabit.

Corollarium 1.

32. Si ergo functio y ipsius x ex relatione quapiam differentialium definitur, per constantem arbitrariam ingressam ita determinari potest, ut posito $x = a$ fiat $y = b$: quo facto functio erit determinata, et pro quovis valore ipsi x tributo functio y determinatum obtinebit valorem.

Corollarium 2.

33. Si ex relatione differentialium secundi gradus functio y definiatur, binas involvet constantes arbitrarias, ideoque duplicem determinationem admittit, qua effici potest, ut posito $x = a$, non solum y obtineat datum valorem b, sed etiam ratio $\frac{\partial y}{\partial x}$ dato valori c fiat aequalis.

Corollarium 3.

34. Si y sit functio binarum variabilium x et t ex relatione differentialium eruta, etiam constantem arbitrariam involvet, cujus determinatione effici poterit, ut posito $t = a$, aequatio inter y et x prodeat data, seu naturam datae cujuspiam curvae exprimat.

Scholion.

35. Ista functionum integralium, seu quae per calculum integralem sunt inventae, determinatio quovis casu ex natura quaestionis tractatae facile deducitur; neque ulla difficultate laborat, nisi forte praeter necessitatem solutio ad differentialia fuerit perducta, cum per Analysin communem erui potuisset: quo casu perinde atque in Algebra quasi radices inutiles ingeruntur. Cum autem haec determinatio tantum in applicatione ad certos casus instituatur, hic ubi integrandi methodum in genere tradimus, integralia in omni amplitudine conabimur; ita ut constantes per integrationem ingressae maneant arbitrariae, neque nisi conditio quaedam urgeat, eas determinabimus. Caeterum determinatio functionum ipsius x simplicissima est, qua eae casu $x = 0$, ipsae evanescentes redduntur.

Definitio 6.

36. Integrale *completum* exhiberi dicitur, quando functio quaesita omni extensione cum constante arbitraria repraesentatur. Quando autem ista constans jam certo modo est determinata, integrale vocari solet *particulare*.

Corollarium 1.

37. Quovis ergo casu datur unicum integrale completum; integralia autem particularia infinita exhiberi possunt. Sic differentialis $x\,dx$ integrale completum est $\frac{1}{2}xx + C$, integralia autem particularia $\frac{1}{2}xx$; $\frac{1}{2}xx + 1$; $\frac{1}{2}xx + 2$ etc. multitudine infinita.

Corollarium 2.

38. Integrale ergo completum omnia integralia particularia in se complectitur; ex eoque haec omnia facile formari possunt. Vicissim autem ex integralibus particularibus, integrale completum non innotescit. Saepenumero autem, uti deinceps patebit, habetur methodus, ex integrali particulari completum inveniendi.

Scholion.

39. Interdum facile est integrale particulare conjectura vel divinatione assequi. Veluti si ejusmodi functio ipsius x, quae sit y, quaeritur, ut sit $\partial y + yy\,\partial x = \partial x + xx\,\partial y$, huic aequationi manifesto satisfit sumendo $y = x$; quod ergo est integrale particulare, quoniam in eo nulla inest constans arbitraria: at integrale completum reperitur $y = \frac{1 + Cx}{C + x}$, quod illud particulare in se continet, sumendo $C = \infty$. Simili modo sumendo $C = 0$, hinc aliud integrale obtinetur $y = \frac{1}{x}$, quod superiori aequationi perinde satisfacit ac prius $y = x$. Omnia autem integralia particularia, quaecunque satisfaciunt, contineri necesse est in formula generali $y = \frac{1 + Cx}{C + x}$, prouti constanti arbitrariae C alii atque alii valores tribuantur: ita sumto $C = 1$ fit etiam $y = 1$. Plerumque autem evenire solet, ut etiamsi integrale quoddam particulare sit algebraicum, tamen integrale completum sit transcendens. Veluti si proposita sit haec aequatio $\partial y + y\,\partial x = \partial x + x\,\partial x$, statim patet satisfieri posito $y = x$, quod ergo est integrale particulare; verum integrale completum constantem arbitrariam C involvens, est $y = x + Ce^{-x}$,

denotante e numerum cujus logarithmus $= 1$: nisi ergo hic sumatur $C = 0$, functio y semper est transcendens. Haec in genere notasse sufficiat, antequam ad tractationem ipsam calculi integralis aggrediamur, quandoquidem ad omnes integrationes pertinent: nunc igitur forma tractationis exposita, ad opus tractandum pergamus.