



---

# ÉCLAIRCISSEMENS PLUS DÉTAILLÉS

S U R

LA GÉNÉRATION ET LA PROPAGATION DU SON,  
ET SUR LA FORMATION DE L'ECHO,

P A R M. E U L E R.

---

I.

**L**a plus sublime recherche que les Géometres ayent entreprise de nos jours avec succès, est sans contredit à tous égards celle de la propagation du son. Comme il y est question d'une certaine agitation de l'air, cette recherche a été d'autant plus difficile, que parmi toutes celles qu'on a faites sur le mouvement de différens corps, il ne s'en trouve pas une seule, où l'on ait réussi à soumettre au calcul le mouvement de l'air: de sorte que cette partie de la Mécanique a été jusqu'ici entièrement inconnue. Car on n'y sauroit rapporter le peu de chose qu'on a fait sur le mouvement des corps poussés par la force d'un air comprimé; puisqu'on n'y a considéré que la seule force de l'air, sans examiner le mouvement dont les différentes particules de l'air sont agitées entr'elles. Ainsi on ne savoit encore absolument rien des différens mouvemens dont une masse d'air est susceptible.

2. Outre cette difficulté, on en a rencontré encore une autre aussi grande de la part de l'Analyse: quelque perfectionnée que paroisse déjà cette science par les soins des plus grands Géometres, elle n'étoit pas encore suffisante pour entreprendre cette recherche; il falloit quasi ouvrir une carrière tout à fait nouvelle, où il s'agit d'étendre l'Analyse à des fonctions de deux ou plusieurs variables, pendant que presque toutes les découvertes des Géometres ont été bornées à des fonctions d'une seule variable. Il falloit donc s'appliquer à une branche tout à

fait



fait nouvelle de l'Analyse des infinis, dont même les premiers élémens n'étoient presque pas encore développés. De là on ne sera pas surpris si cette nouvelle Analyse rencontre de grandes contradictions, même de la part des plus grands Géometres; quand on se rappelle à combien de contradictions le calcul différentiel a été exposé dans sa première naissance.

3. Quoique j'aye déjà traité ce sujet en quelques Mémoires après le célèbre M. de la Grange, à qui on est redevable de cette importante découverte, tant la nouveauté que l'importance mérite bien toute l'attention, & des recherches ultérieures ne manqueront pas de nous fournir encore de plus grands éclaircissémens. Lorsque je traiterai cette matiere pour la premiere fois, je me suis attaché principalement à déterminer la vitesse dont un tremouffement est transmis par l'air; mais à présent je tâcherai de développer toutes les particularités qui peuvent avoir lieu dans les agitations de l'air, & la maniere dont elles sont altérées dans leur propagation. Cette recherche est d'autant plus intéressante, que c'est de là que résultent toutes les variétés que nous observons dans les sons. Mais, ayant déjà fait voir que la propagation se fait à peu près de la même maniere dans le plein air que dans un tuyau, je bornerai mes recherches présentes à des tuyaux, & même également larges par toute leur étendue: il n'importe presque rien si ces tuyaux sont droits ou courbés d'une maniere quelconque, puisque les phénomènes du son n'en souffrent aucun changement.

Pl. VIII.  
Fig. 1.

4. Soit donc AB un tuyau de la même largeur  $= ff$  par toute sa longueur, que la figure représente droit, quoiqu'il puisse avoir une figure courbée quelconque; je regarde aussi encore sa longueur indéterminée, puisque ce n'est qu'après toutes les intégrations, qu'on tiendra compte des bouts du tuyau, soit qu'ils soyent ouverts ou fermés. Je suppose donc que l'équilibre de l'air contenu dans ce tuyau ait été troublé d'une maniere quelconque, ou par toute sa longueur, ou seulement dans une partie. Que B exprime la densité naturelle

turelle de l'air, mais qu'au point  $S$  posant la distance  $AS = S$  prise du point fixe  $A$ , la densité de l'air ait été réduite à  $Q$ , & qu'on ait imprimé à cette particule d'air en  $S$  un mouvement vers  $B$  avec la vitesse  $= V$ , de sorte que les deux quantités  $Q$  &  $V$  expriment le dérangement, dont l'équilibre de l'air dans le tuyau a été troublé au commencement. Si quelque part on avoit laissé l'air dans son état naturel, on n'auroit qu'à y mettre  $Q = B$  &  $V = 0$ . C'est ainsi que je représente l'état initial de l'air contenu dans le tuyau.

5. Maintenant après un tems écoulé de  $t$  secondes la couche de l'air, qui au commencement a rempli l'élément  $S\Sigma = dS$ , soit parvenue en  $s\zeta$ , & nommons l'espace  $As = s$ , dont l'élément  $s\zeta = ds$ : que la densité de l'air y soit à présent  $= q$ , & la vitesse vers  $B. = v$ , en exprimant chaque vitesse par l'espace qui en seroit parcouru dans une seconde, de sorte que tout revient à déterminer ces trois quantités  $s$ ,  $q$ , &  $v$ , auxquelles ont été réduites après le tems  $t$  les trois quantités  $S$ ,  $Q$  &  $V$  de l'état initial. Or à l'égard de celles-ci il est bon de remarquer, que puisque l'état initial doit être regardé comme donné les lettres  $Q$  &  $V$  sont de certaines fonctions de l'espace  $AS = S$ , mais les quantités  $s$ ,  $q$  &  $v$  puisqu'elles dépendent non seulement de l'état initial, mais aussi du tems  $t$ , sont effectivement des fonctions de deux variables  $S$  &  $t$ : & partant leur détermination appartient à cette nouvelle partie de l'Analyse, qui traite des fonctions de deux variables, & qui est fondée sur des principes, qui lui sont particuliers.

6. Donc puisque  $s$  est une fonction de  $S$  &  $t$ , en augmentant tant  $S$  que  $t$  de leurs différentiels  $dS$  &  $dt$ , la valeur de  $s$  de-

viendra  $= s + dS \left( \frac{ds}{dS} \right) + dt \left( \frac{ds}{dt} \right)$ , où il faut remarquer

que la partie  $dS \left( \frac{ds}{dS} \right)$  exprime proprement l'élément  $s\zeta$ , dont le

point  $\Sigma$  sera plus avancé que le point  $S$  après le tems  $t$ . Mais

l'autre partie  $dt \left( \frac{ds}{dt} \right)$  exprime l'espace par lequel le point  $s$  avancera pendant l'élément du tems suivant  $dt$ : lequel étant divisé par  $dt$  donnera par conséquent la vitesse de l'air en  $s$  après le tems  $t$ , de sorte que nous en tirons  $v = \left( \frac{ds}{dt} \right)$ . Ensuite l'élément de la masse d'air, qui occupoit au commencement l'espace  $S\Sigma = dS$  avec la densité  $Q$ , la largeur du tuyau étant  $= ff$ , est exprimé par la formule  $ffQdS$ . Or cette même masse occupant après le tems  $t$  l'espace  $s\zeta = dS \left( \frac{ds}{dS} \right)$  avec la densité  $q$  la largeur demeurant la même  $= ff$ , sera exprimée par la formule  $ffq dS \left( \frac{ds}{dS} \right)$ , d'où nous tirons cette égalité  $Q = q \left( \frac{ds}{dS} \right)$ : de sorte qu'ayant trouvé la nature de la fonction  $s$ , nous en connoissons d'abord tant la vitesse  $v = \left( \frac{ds}{dt} \right)$  qui se trouve en  $s$  après le tems  $t$ , que la densité  $q = Q: \left( \frac{ds}{dS} \right)$ . Or cet air en  $s$  est le même, qui au commencement a été en  $S$ .

7. La vitesse de l'air en  $s$  après le tems  $t$  étant  $v = \left( \frac{ds}{dt} \right)$ , l'incrément de cette vitesse pendant l'élément du tems suivant  $dt$ , sera  $= dt \left( \frac{dv}{dt} \right) = dt \left( \frac{d ds}{dt^2} \right)$ , lequel étant divisé par  $dt$  donne l'accélération  $= \left( \frac{d ds}{dt^2} \right)$ , qui doit être la même, que celle qui est produite par les forces, qui agissent sur l'élément de l'air en  $s\zeta$ , or ces for-

forces ne résultent que de la pression de l'air, dont il agit en vertu de son élasticité tant en  $s$  qu'en  $\zeta$ . Soit donc la pression en  $s$  égale au poids d'une colonne de mercure, dont la hauteur  $= p$ , laquelle dépendant de la densité de l'air en  $s$  doit aussi être considérée comme une fonction des deux variables  $S$  &  $t$ ; d'où nous concluons pour le

même tems la pression en  $\zeta$  égale à la hauteur  $= p + dS \left( \frac{dp}{dS} \right)$ .

Donc l'élément d'air en  $s\zeta$ , dont la masse est  $= ffQ dS$  est repoussé vers A par le poids d'une colonne de mercure, dont la hauteur

$= dS \left( \frac{dp}{dS} \right)$ , & qui agit sur la base  $= ff$ . Que l'unité exprime

la densité du mercure, & le poids ou la masse de cette colonne étant

$= ff dS \left( \frac{dp}{dS} \right)$ , la force accélératrice sera  $= - \frac{1}{Q} \left( \frac{dp}{dS} \right)$ .

8. Or posant la hauteur  $= g$ , d'où les corps pesans tombent dans une seconde, qui est comme on fait de 15, 625 pieds de Rhin, les principes de Mécanique fournissent cette équation:

$$\left( \frac{dds}{dt^2} \right) = - \frac{2g}{Q} \left( \frac{dp}{dS} \right), \text{ ou } \left( \frac{dp}{dS} \right) + \frac{Q}{2g} \left( \frac{dds}{dt^2} \right) = 0,$$

où il faut observer que  $Q$  marque une fraction, qui est à l'unité, comme la densité de l'air en  $S$  à la densité du mercure, ou bien en raison de leur gravités spécifiques. Ou ayant déjà trouvé  $Q =$

$$q \left( \frac{ds}{dS} \right) \text{ nous aurons } \left( \frac{dp}{dS} \right) + \frac{q}{2g} \left( \frac{ds}{dS} \right) \left( \frac{dds}{dt^2} \right).$$

Maintenant puisque la pression  $p$  est proportionelle à la densité  $q$ , supposons qu'à une densité connue  $= b$  il répond la hauteur du barometre

$$= a, \text{ \& nous aurons } p = \frac{aq}{b}, \text{ donc } \left( \frac{dp}{dS} \right) = \frac{a}{b} \left( \frac{dq}{dS} \right):$$

de sorte que notre équation prend cette forme  $\frac{2ag}{bQ} \left(\frac{dq}{dS}\right) + \left(\frac{dds}{dt^2}\right) = 0$ , qui conjointement avec la précédente  $Q = q \left(\frac{ds}{dS}\right)$  renferme la détermination du mouvement de l'air dans le tuyau.

9. De là nous pourrons d'abord éliminer la lettre  $q$ ; car puisque  $Q$  est une fonction du seul  $S$ , nous aurons  $\frac{dQ}{dS} = \left(\frac{dq}{dS}\right) \left(\frac{ds}{dS}\right) + q \left(\frac{dds}{dS^2}\right)$ , d'où nous tirons:

$$\left(\frac{dq}{dS}\right) = \frac{dQ}{dS} : \left(\frac{ds}{dS}\right) - Q \left(\frac{dds}{dS^2}\right) : \left(\frac{ds}{dS}\right)^2,$$

& cette valeur substituée dans l'autre équation donne

$$\frac{2ag dQ}{bQ dS} : \left(\frac{ds}{dS}\right) - \frac{2ag}{b} \left(\frac{dds}{dS^2}\right) : \left(\frac{ds}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dds}{dt^2}\right) = 0.$$

Puisque  $Q$  est une fonction donnée de  $S$ , posons pour abrégé

$$\frac{dQ}{Q dS} = P, \quad \& \quad \frac{2ag}{b} = cc, \quad \text{pour avoir en multipliant par}$$

$\left(\frac{ds}{dS}\right)^2$  cette équation:

$$ccP \left(\frac{ds}{dS}\right) - cc \left(\frac{dds}{dS^2}\right) + \left(\frac{ds}{dS}\right)^2 \left(\frac{dds}{dt^2}\right) = 0,$$

de l'intégration de laquelle dépend la détermination du mouvement qu'on cherche: or quelques peines que je me suis données, je n'en ai pu trouver la nature de la fonction  $s$ , ni comment elle est composée de deux variables  $S$  &  $t$ .



10. Donc quelque simple que paroisse le cas, que je me suis proposé, où il ne s'agit que du mouvement de l'air contenu dans un tuyau de même largeur par toute son étendue; il est pourtant encore de beaucoup trop compliqué, pour que les bornes de l'Analyse soyent suffisantes à le résoudre. La difficulté ne réside pas dans le mouvement, que je suppose avoir été d'abord imprimé à l'air dans le tuyau, puisque la lettre  $V$ , qui en désigne la vitesse, n'entre pas même dans le calcul. Donc si l'on supposoit une certaine quantité d'air dans le tuyau réduite à une plus grande densité, & qu'il s'y trouve un boulet, qui en seroit poussé; il faut avouer que même dans ce cas la détermination du mouvement de l'air surpasseroit encore les forces du calcul: tout ce qu'on a fait sur ce sujet, se réduit au seul mouvement du boulet, qu'on a déterminé en faisant abstraction de celui de l'air, ou bien en négligeant l'inertie de l'air: laquelle étant si extrêmement petite à l'égard de celle du boulet, le calcul ne laisse pas d'être très bien d'accord avec les expériences.

11. Je ne voi qu'une seule condition, sous laquelle l'équation, que je viens de trouver, puisse être réduite à l'intégrabilité; cette condition est que la formule  $\left(\frac{ds}{dS}\right)$  retienne toujours presque la même valeur. Donc puisque au commencement il étoit  $s = S$ , & partant  $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1$ , cette condition aura lieu, quand les valeurs de  $\left(\frac{ds}{dS}\right)$  ne diffèrent jamais sensiblement de l'unité. On voit bien que cela arrivera, lorsque l'espace  $Ss$ , par lequel l'air en  $S$  est transporté pendant le tems  $t$ , est toujours extrêmement petit, ou bien lorsque chaque particule de l'air contenu dans le tuyau ne change presque point de place. Or c'est précisément le cas de la propagation du son que j'ai ici principalement en vue; mais il pourra aussi être appliqué avec le même succès à tous les autres cas, où il ne s'agit que de dé-

terminer un tremouffement de l'air dans le tuyau; tels cas sont premierement la génération, & ensuite la production du son dans les tuyaux d'orgue, que je me propose de développer à la premiere occasion, où je me servirai des mêmes principes, que je m'en vai établir dans les articles suivans.

12. Puisque je supposerai donc, que la quantité  $s$  ne differe jamais que quasi infiniment peu de  $S$ , je pose  $s = S + z$ , de sorte que  $z$  marque l'espace  $Ss$ , par lequel l'air qui étoit en  $S$ , se trouve transporté après le tems  $t$ . De là nous aurons  $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + \left(\frac{dz}{dS}\right)$  où le terme  $\left(\frac{dz}{dS}\right)$  étant infiniment petit par rapport à l'unité, peut être omis; mais cela nonobstant la valeur  $\left(\frac{dds}{dS^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dS^2}\right)$  demeurera dans le calcul, puisqu'il n'y a rien, par rapport auquel on la pourroit rejeter; enfin on aura  $\left(\frac{ds}{dt}\right) = v = \left(\frac{dz}{dt}\right)$ , &  $\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$ : d'où notre équation se réduit à cette forme à cause de  $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1$ .

$$ccP - cc \left(\frac{ddz}{dS^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = 0.$$

Où je remarque que cette même équation résulteroit si l'on posoit  $s = S + \alpha t + z$ , quelque grande que soit la quantité  $\alpha$ , pourvu que  $z$  soit une très petite; mais ce cas n'est que celui, où le tuyau entier seroit transporté uniformément selon la même direction, ou bien si l'air passoit par le tuyau d'un mouvement uniforme.



13. Lorsque je traitai la première fois ce sujet de la propagation du son, l'équation, à laquelle je suis parvenu, différoit de celle-ci en ce, que le premier terme  $ccP$  ne s'y trouvoit point; mais cela nonobstant la rapidité de la propagation, que j'en ai tirée, étoit très juste, puisque ce terme alors omis renferme la nature de l'agitation, à laquelle je n'ai fait alors aucune attention. Mais à présent ce terme me servira à découvrir toutes les variétés des sons, qui dépendent de la nature de la première agitation de l'air dans le tuyau; car on fait, que les sons, quoiqu'ils soyent également graves ou aigus, & aussi également forts, admettent encore plusieurs variations & différences, comme sont celles des différentes voyelles, dont personne n'a encore entrepris d'expliquer la nature. Ensuite ce même terme  $ccP$  me mettra aussi en état d'expliquer la formation du son dans les flûtes ou tuyaux d'orgues, ce que je remets à une autre occasion, me contentant pour le présent d'examiner plus en détail la production & propagation du son.

14. D'abord je remarque que le terme  $ccP$  ne trouble point l'intégration de l'équation trouvée: car posant  $z = u + R$  de sorte que  $R$  soit une fonction de la variable  $S$ , nous aurons:

$$ccP - \frac{cc \, d d R}{dS^2} - cc \left( \frac{d d u}{dS^2} \right) + \left( \frac{d d u}{dt^2} \right) = 0.$$

Faisons donc  $\frac{d d R}{dS^2} = P = \frac{dQ}{Q dS}$ , & nous aurons  $\frac{dR}{dS} = l \frac{Q}{C}$ ,

&  $R = \int dS l \frac{Q}{C}$ . Or pour la quantité  $u$  on aura cette équation

$$\left( \frac{d d u}{dt^2} \right) = cc \left( \frac{d d u}{dS^2} \right), \text{ dont on fait par le mouvement des cordes}$$

vibrantes, que l'intégrale complete est

$$u = \Gamma: (S + ct) + \Delta: (S - ct),$$

où  $\Gamma$  &  $\Delta$  désignent des fonctions quelconques des quantités  $y$  jointes. Par conséquent l'intégrale complète de notre équation est

$$z = \int dS l \frac{Q}{C} + \Gamma: (S + ct) + \Delta: (S - ct),$$

& de là ensuite  $s = S + z$ .

15. Maintenant il ne reste plus que d'ajuster cette équation infiniment générale au cas dont il est question. Pour cet effet il en

faut deduire les valeurs  $\left(\frac{ds}{dS}\right)$  &  $\left(\frac{ds}{dt}\right)$  qui résultent

$$\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + \left(\frac{dz}{dS}\right) = 1 + l \frac{Q}{C} + \Gamma': (S + ct) + \Delta': (S - ct), \text{ \&}$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right) = c\Gamma': (S + ct) - c\Delta': (S - ct)$$

Appliquons à présent ces formules à l'état initial en posant  $t = 0$ ,

& puisqu'alors il devient  $s = S$ ,  $\left(\frac{ds}{dt}\right) = v$ , &  $\left(\frac{ds}{dS}\right) = \frac{Q}{q} = 1$ ,

à cause de  $q = Q$ , nous aurons:

$$0 = \int dS l \frac{Q}{C} + \Gamma: S + \Delta: S,$$

$$v = c\Gamma': S - c\Delta': S,$$

$$\& \quad 0 = l \frac{Q}{C} + \Gamma': S + \Delta': S.$$

Or de ces trois équations la première est déjà comprise dans la troisième, & la constante  $C$  peut encore être prise à volonté. Posons donc  $C = B$ , ce qui est la densité naturelle de l'air dans le tuyau, & remarquons que de là il ne naît aucune restriction puisque la généralité de la lettre  $C$  est déjà comprise dans les deux fonctions générales.

16. En prenant  $C = B$ , puisque la densité  $Q$  ne sauroit différer considérablement de la densité naturelle, vu que nous supposons que les changemens de place de chaque particule d'air sont toujours très petits, la fraction  $\frac{Q}{B}$  ne différera presque pas de l'unité, & partant son logarithme sera  $l \frac{Q}{B} = \frac{Q - B}{B}$ . De là nous déterminerons les deux fonctions différentielles:

$$\Gamma': S = \frac{V}{2c} - \frac{1}{2} l \frac{Q}{B}, \quad \& \quad \Delta': S = -\frac{V}{2c} - \frac{1}{2} l \frac{Q}{B}$$

& partant les fonctions  $\Gamma$  &  $\Delta$  mêmes seront:

$$\Gamma: S = \frac{1}{2c} \int V dS - \frac{1}{2} \int dS l \frac{Q}{B},$$

$$\& \quad \Delta: S = -\frac{1}{2c} \int V dS - \frac{1}{2} \int dS l \frac{Q}{B}.$$

Donc, puisque l'état initial donne à connoître pour chaque abscisse  $S$  les valeurs  $V$  &  $Q$ , on en tirera aisément les fonctions  $\Gamma': S$ ,  $\Delta': S$ ;  $\Gamma: S$ , &  $\Delta: S$ , non seulement pour l'abscisse  $S$ , mais aussi pour toute autre abscisse  $S + ct$ , ou  $S - ct$ , qui entrent dans nos formules qui expriment l'état de l'air après le tems  $t$ . D'où cette question est parfaitement résolue, quelle qu'ait été l'agitation initiale, pourvu qu'elle soit extrêmement petite.

17. Nous voilà donc parvenus à la solution de ce problème assez général: *L'état d'équilibre de l'air dans le tuyau AB ayant été troublé d'une manière quelconque, pourvu que les dérangemens soient extrêmement petits, déterminer le mouvement de l'air qui en sera chassé dans le tuyau.* Pour en donner la solution, considérons d'abord tout ce qui est donné; ce qui se réduit aux points suivans. Fig. 1.

1°. La densité du mercure étant exprimée par  $\tau$ , soit  $b$  celle de l'air naturel, &  $a$  la hauteur du mercure dans le barometre, d'où l'on tire l'espace  $c = \sqrt{\frac{2ag}{b}}$ , où  $g$  marque la hauteur de la chute dans une seconde.

Fig 2.

2°. Que dans l'état initial le dérangement d'équilibre ait été tel, que l'air au point  $S$  du tuyau ait reçu la densité  $= Q$ , d'où je construis la courbe  $CQD$ , en posant ses appliquées  $SQ = c l \frac{Q}{b} = \frac{Q - b}{b} c$ , que je nommerai l'échelle des densités.

3°. Qu'outre ce dérangement on ait imprimé à l'air en  $S$  une vitesse selon la direction  $SB$ , & posant l'espace qui en seroit parcouru dans une seconde  $= V$ , je constitue l'appliquée  $SV = V$ , d'où je construis l'échelle des vitesses  $EVF$ .

L'axe de ces deux échelles est la droite  $AB$ , qui représente en même tems le tuyau étendu en ligne droite, en cas qu'il soit courbé.

*Solution analytique du probleme.*

18. Qu'après le tems de  $t$  secondes écoulé depuis le commencement, la particule d'air qui étoit alors en  $S$ , se trouve à présent en  $s$ , & posons l'espace  $Ss = z$ : soit ensuite la densité de cet air en  $s = q$ , & sa vitesse  $= v$  dirigée vers  $B$ : & il est clair que toute la solution se réduit à la détermination de ces trois élémens  $z, q$  &  $v$ . Pour cet effet on n'a qu'à établir les fonctions suivantes pour l'abscisse  $AS = S$ .

$$\Gamma': S = \frac{V}{2c} - \frac{1}{2} l \frac{Q}{b}; \quad \Delta': S = -\frac{V}{2c} - \frac{1}{2} l \frac{Q}{b}, \quad \&$$

$$\Gamma: S = \frac{1}{2c} \int V dS - \frac{1}{2} \int dS l \frac{Q}{b}; \quad \Delta: S = -\frac{1}{2c} \int V dS - \frac{1}{2} \int dS l \frac{Q}{b},$$

&

& de là on aura

$$z = \int dSl \frac{Q}{b} + \Gamma: (S + ct) + \Delta: (S - ct),$$

$$\frac{Q}{q} = 1 + l \frac{Q}{b} + \Gamma': (S + ct) + \Delta': (S - ct),$$

$$\& v = c \Gamma': (S + ct) - c \Delta': (S - ct).$$

Or, puisque  $q$  diffère très peu de  $Q$ , on aura assez exactement

$$\frac{q}{b} = 1 - \Gamma': (S + ct) - \Delta': (S - ct).$$

*Construction Géométrique du Probleme.*

19. Les échelles construites sur l'état initial de l'air dans le tuyau donnent d'abord pour l'abscisse  $AS = S$  les valeurs suivantes:

$$l \frac{Q}{b} = \frac{1}{c} \cdot SQ; \text{ donc } \int dSl \frac{Q}{b} = \frac{1}{c} \cdot ACSQ,$$

$$\& v = SV; \text{ donc } \int v ds = AESV,$$

d'où nous tirons

$$\Gamma': S = \frac{1}{2c} \cdot SV - \frac{1}{2c} \cdot SQ; \quad \Delta': S = -\frac{1}{2c} \cdot SV - \frac{1}{2c} \cdot SQ,$$

$$\Gamma: S = \frac{1}{2c} \cdot AESV - \frac{1}{2c} \cdot ACSQ; \quad \Delta: S = -\frac{1}{2c} \cdot AESV - \frac{1}{2c} \cdot ACSQ.$$

Donc, prenant pour un tems écoulé quelconque de  $t$  secondes les abscisses  $AT = S + ct$ , &  $At = S - ct$ , de sorte que  $ST = S t = ct$  nous aurons semblablement:

$$\Gamma': (S + ct) = \frac{1}{2c} \cdot TN - \frac{1}{2c} \cdot TM; \quad \Delta': (S - ct) = -\frac{1}{2c} \cdot tn - \frac{1}{2c} \cdot tm,$$

$$\Gamma: (S + ct) = \frac{1}{2c} \cdot AETN - \frac{1}{2c} \cdot ACTM; \quad \Delta: (S - ct) = -\frac{1}{2c} \cdot AEt n - \frac{1}{2c} \cdot ACtm,$$

X x 2

d'où

d'où il est à présent aisé de construire les formules trouvées pour les trois quantités  $s$ ,  $q$ , &  $v$ .

20. Or, d'abord pour la quantité  $s$  qui exprime l'espace  $Ss$ , dont la particule d'air, qui étoit au commencement en  $S$  se trouve à présent plus avancée vers  $B$ , nous aurons:

$$s = \frac{1}{2c} \cdot ACSQ + \frac{1}{2c} \cdot AETN - \frac{1}{2c} \cdot ACTM - \frac{1}{2c} \cdot AEtn - \frac{1}{2c} \cdot ACtm,$$

$$\text{ou bien } s = \frac{1}{2c} (tnTN - SQTm + SQtm),$$

où  $tnTN$ ,  $SQTm$ , &  $SQtm$ , marquent des espaces renfermés par les deux échelles données.

Ensuite, pour la densité  $q$  de l'air, qui se trouve à présent en  $s$ , nous aurons:

$$q = b \left( 1 - \frac{1}{2c} \cdot TN + \frac{1}{2c} \cdot TM + \frac{1}{2c} \cdot tn + \frac{1}{2c} \cdot tm \right),$$

$$\text{ou bien } q = b + \frac{b}{2c} (TM + tm - TN + tn).$$

Enfin, pour la vitesse de cet air en  $s$ , qui est  $= v$ , & dirigée vers  $B$ , nous aurons:

$$v = \frac{1}{2} TN - \frac{1}{2} TM + \frac{1}{2} tn + \frac{1}{2} tm,$$

$$\text{ou bien } v = \frac{1}{2} (TN + tn - TM + tm).$$

Cette vitesse est exprimée par l'espace qui en feroit parcouru dans une seconde.

*De la Génération & Propagation du Son.*

Fig. 3.

21. Je conçois ici que notre tuyau s'étend de part & d'autre à l'infini, ayant par tout la même largeur : & qu'au commencement une petite partie d'air contenu dans l'espace  $IK$  ait été ébranlée d'une manière quelconque, dont la nature soit exprimée par les deux



deux échelles IQK & IVK, la première IQK étant celle des densités dont chaque appliquée OQ est  $= \frac{Q-b}{b} c$ , où Q marque la densité de l'air en O, & b la densité naturelle, pendant que c est un espace égal à  $\sqrt{\frac{a g}{b}}$ , comme j'ai expliqué ci-dessus: de sorte

qu'on en aura la densité  $Q = b \left( 1 + \frac{OQ}{c} \right)$ . De l'autre échelle

des vitesses IVK, chaque appliquée OV exprime la vitesse qui a été imprimée à l'air en O selon la direction OB: où il est bon d'observer, que les appliquées positives, ou dirigées en haut, de l'échelle IQK marquent une plus grande densité de l'air que la naturelle: & que de semblables appliquées de l'échelle IVK se rapportent à la direction OB. Tout le reste de l'air dans le tuyau étant encore en équilibre, toutes les deux échelles se réunissent, hormis l'espace IK avec l'axe, & leurs appliquées évanouissent.

22. Maintenant, considérons un point quelconque S du tuyau, pour y déterminer l'état de l'air après cette agitation excitée en IK: & puisque, pour un tems quelconque de t secondes, il faut prendre, du point S de part & d'autre sur l'axe, des intervalles  $ST = St = ct$ , & y tirer des appliquées aux deux échelles, il est clair qu'à moins que l'un ou l'autre des points T & t ne tombe dans l'espace IK, toutes les appliquées étant alors = 0, l'air en S se trouvera en repos avec sa densité naturelle = b. Premièrement

donc, tant que le tems écoulé t est plus petit que  $\frac{IS}{c}$ , l'air en S demeurera en équilibre: & il ne commencera à être ébranlé qu'après le tems  $t = \frac{IS}{c}$ . Posons donc le tems écoulé  $t = \frac{ST}{c}$  & puis-

que, au point t pris de l'autre côté, ne répond aucune appliquée tm ou tn, dans cet instant le point S se trouvera en s de sorte que

l'espace  $Ss = \frac{1}{2c} (ITN - ITM) = \frac{1}{2c} \cdot MN$ ; & alors  
 la densité de l'air en  $s$  sera  $q = b + \frac{b}{2c} (TM - TN) =$   
 $b - \frac{b}{2c} \cdot MN$ ; & la vitesse dirigée vers B sera  
 $v = \frac{1}{2} (TN - TM) = \frac{1}{2} MN$ . Or, dès que le tems écoulé  $t$  devient plus grand que  $\frac{SK}{c}$ , l'air en  $s$  se trouvera rétabli dans l'état d'équilibre, où il demeurera.

23. Ayant pris le point S quasi derrière l'agitation produite dans l'espace IK, considérons aussi un point S' pris de l'autre côté, & l'air dans ce lieu demeurera en équilibre jusqu'à ce qu'il s'écoule un tems plus grand que  $\frac{KS'}{c}$  seconde. Soit donc le tems écoulé  $t = \frac{S't'}{c}$ , & puisqu'en prenant en avant un pareil espace S'T', les appliquées T'M' & T'N' y sont nulles; l'air qui a été en S' se trouvera à présent avancé en s', de sorte que l'espace

$$S's' = \frac{1}{2c} (Kt'n' + Kt'm').$$

Ensuite la densité de l'air dans ce lieu s' fera

$$q = b + \frac{b}{2c} (t'n' + t'm')$$

& la vitesse dirigée vers B

$$v = \frac{1}{2} (t'n' + t'm').$$

D'où l'on voit que l'agitation initiale ne se propage point de la même manière en avant & en arrière, & qu'une très grande différence y  
peut



peut avoir lieu. Et on voit même que, si les deux échelles I Q K & I V K se réunissoient dans une seule courbe, la propagation vers A évanouiroit entièrement, & l'air y resteroit toujours en équilibre.

24. Mais, nonobstant cette différence, la vitesse de la propagation est la même vers A & vers B, & par un espace  $= x$  l'agitation est toujours transmise dans le tems de  $\frac{x}{c}$  secondes, d'où

l'on voit que l'espace  $c = \sqrt{\frac{2ag}{b}}$  est précisément celui que le son

parcourt dans une seconde. C'est la même vitesse que le grand Newton avoit déjà trouvée; & l'on sait qu'elle est considérablement plus petite, que l'expérience ne la decouvre. Il y a grande apparence qu'il en faut chercher la raison dans les petites parcelles solides, qui voltigent dans l'air, à travers desquelles l'agitation est transmise dans un instant: si la dixieme partie de tout l'espace étoit rempli de telles parcelles, le son devoit se propager de la dixieme partie plus vite; ce qui mettroit d'accord la théorie avec l'expérience. Mais, quelle qu'en soit la cause, il est toujours certain que la théorie ne sauroit être révoquée en doute pour cela, surtout quand on fait attention que nous supposons les agitations extrêmement petites, pendant qu'on a fait les expériences sur le bruit des canons, qui cause sans doute dans l'air une agitation très violente, à laquelle on ne sauroit plus appliquer la théorie.

25. Il paroît des formules que je viens de trouver, qu'après que toute l'agitation a été transmise par les points S & S', les particules d'air qui ont été au commencement dans ces lieux, n'y sont pas rétablies nécessairement, mais qu'elles reposeront ensuite en d'autres points  $s$  &  $s'$ . Ainsi, dans le cas que la figure représente, l'air qui étoit en S sera transporté après l'agitation par l'espace

$Ss = \frac{1}{2c} (IVK - IQK)$ , & de l'autre côté vers B, l'air qui

étoit



étoit en  $S'$  par l'espace  $S' s' = \frac{1}{2c} (IVK + IQK)$ . Il sem-

ble que ces déplacements n'affectent en aucune façon la sensation du son; mais, si les deux échelles  $IVK$  &  $IQK$  se trouvent en partie au dessus & en partie au dessous de l'axe, puisque les aires qui tombent au dessous doivent être prises négativement, les aires entières  $IVK$  &  $IQK$  peuvent bien évanouir: or cela arrive ordinairement dans les agitations de quelques parties de l'air, où il y a toujours autant d'air rarefié qu'il y en a de condensé: & si quelques particules ont reçu quelque mouvement vers  $B$ , il y en a toujours d'autres qui sont d'autant poussées vers  $A$ . Par cette raison on peut se dispenser d'avoir égard à ces déplacements actuels, & se contenter de connoître la densité & le mouvement de chaque particule, pendant qu'elle est agitée.

26. Voyons à présent plus en détail, comment l'agitation de l'air, excitée au commencement dans l'espace  $IK$ , est transmise par le tuyau tant en avant qu'en arriere. Les deux échelles étant donc celle des densités  $IQK$ , & celle des vitesses  $IVK$ : Soit proposé le tems de  $t$  secondes, après lequel il faut déterminer l'agitation qui se trouvera dans le tuyau: pour cet effet on n'a qu'à prendre des deux côtés les espaces  $Ii = Kk = ct$  &  $Ii' = Kk' = ct$ , & l'agitation initiale se trouvera à présent partagée par les deux intervalles  $ik$  &  $i'k'$ ; en sorte que, prenant  $io = IO$  &  $i'o' = IO$ , la densité en  $o$  sera  $q = b + \frac{b}{2c} (OQ - OV)$ , & la vitesse  $= \frac{1}{2} (OV - OQ)$ ; & de l'autre côté en  $o'$  la densité  $q = b + \frac{b}{2c} (OQ + OV)$ , & la vitesse  $= \frac{1}{2} (OV + OQ)$ . Donc, si nous construisons sur  $ik$  l'échelle des densités  $igk$ , prenant son appliquée  $og = \frac{1}{2} (OQ - OV) = \frac{q - b}{2} c$ , elle sera



fera en même tems l'échelle des vitesses dirigées vers A. De la même maniere, construisant sur l'espace  $i' k'$  l'échelle des densités, en prenant  $o' q' = \frac{1}{2} (O Q + O V)$ , elle sera aussi l'échelle des vitesses dirigées vers B. Dans tous les autres endroits du tuyau l'air se trouvera en équilibre, sans excepter l'espace IK où la premiere agitation a été excitée.

27. C'est une propriété bien remarquable de toutes les agitations produites par la propagation, que les deux échelles des densités & des vitesses se réduisent partout à la même ligne courbe: d'où nous apprenons que, plus l'air y est condensé, plus il a aussi de vitesse en même sens que le son va; & où la densité est plus petite que la naturelle, là aussi le mouvement est dirigé en sens contraire. Il est donc évident, que les agitations produites peuvent très considérablement différer de l'agitation initiale; & en effet, si celle-ci étoit déjà telle que l'échelle des vitesses fût égale à celle des densités, la propagation se feroit dans un seul sens, & l'air de l'autre côté dans le tuyau n'en seroit jamais ébranlé. Puisque donc le son se répand presque également en tout sens, ce qui arrive lorsque l'échelle des vitesses dans l'agitation initiale évanouît, nous pourrons regarder cette échelle comme réunie avec l'axe IK; puisqu'on peut toujours imaginer une telle échelle de densités qui seule produise le même effet.

28. Dans ce cas, on auroit partout dans les agitations produites les appliquées  $o q$  &  $o' q'$  égales à  $\frac{1}{2} O Q$ ; & ce sera toujours de la figure de l'échelle  $i q k$  que dépend la nature du son, puisque l'oreille n'est frappée que par ces agitations produites: car je ne parle pas ici du grave ou aigu des sons, qui est causé par la fréquence de plusieurs tremoussemens qui se succedent les uns aux autres, & dont la différence fait le principal objet de la Musique. Toutes les autres qualités des sons qui ne se rapportent pas à la successions de plusieurs vibrations, ne sauroient dépendre que de la figure des échelles  $i q k$ , qui caractérisent les agitations propagées



dans l'air, & en constituent quasi l'essence. Or on comprend aisément qu'une variété infinie peut avoir lieu dans ces figures; & partant il n'y a aucun doute, que toutes les différentes qualités que nous appercevons dans les sons n'en tirent pas leur origine; quoiqu'il soit encore incertain, quelle qualité répond à chaque figure: & s'il a été jusqu'ici si difficile de découvrir la différence qui regne dans la pronciation des diverses voyelles, nous voyons à présent, que chaque voyelle doit être appropriée à une certaine figure des échelles *i q k*, d'où dépendent aussi toutes les autres variétés que l'oreille peut distinguer dans les sons.

29. Or d'abord, je remarque que plus ou moins de largeur dans la figure *i q k* ne fait que rendre le son plus ou moins fort, sans en altérer les autres qualités. Car, plus les appliquées *o q* sont grandes, plus aussi est grande leur force pour frapper l'oreille; & quoique dans le tuyau cette figure demeure la même à toutes les distances de l'agitation principale *I Q K*: dans l'air libre sa largeur va de plus en plus en diminuant, d'où ne résulte d'autre effet que l'affoiblissement du son, sans que les autres qualités en soient altérées. D'où l'on peut conclure, que si toutes les appliquées *o q* de la figure *i q k* sont diminuées dans la même raison, il n'en arrive d'autre changement dans le son que l'affoiblissement. Mais, si la figure *i q k* changeoit en sorte que quelques unes de ses appliquées fussent augmentées ou diminuées dans une plus grande raison que d'autres, le son en souffriroit sans doute un changement plus essentiel: & il semble que l'expression des lettres consones, dans la voix, dépend d'une telle modification, ou dans la première ou dans la dernière des agitations dont chaque syllabe est composée; vu que les consones n'affectent que le commencement ou la fin de chaque syllabe.

30. Mais la longueur *ik* de chaque agitation *i q k* est invariable, non seulement dans le tuyau, mais aussi dans l'air libre, d'où l'on peut conclure qu'une qualité plus essentielle des sons en dépend, qui demeure la même, pendant que la force va en diminuant. Peut-être



être que c'est dans cette longueur  $ik$ , qu'il faut chercher la cause des différentes voyelles : qui dans ce cas ne différeront entr'elles que du plus au moins. Si cela ne paroïssoit assez conforme à la vérité, il faudroit recourir aux différentes figures des échelles  $iqk$ , où l'on trouveroit principalement à distinguer celles qui n'ont qu'un ventre, de celles qui en ont deux ou trois, ou plusieurs : d'où sans doute doit résulter une différence très essentielle dans les sons. Mais je ne donne tout cela que pour des conjectures, & il s'en faut beaucoup qu'on puisse espérer si tôt une explication suffisante de toutes les variétés qu'on observe dans les sons : & il ne paroît pas encore, quel secours on pourroit attendre des expériences qu'on voudroit faire sur ce sujet.

*Sur la formation de l'Echo.*

31. Jusqu'ici j'ai considéré le tuyau comme étendu à l'infini de part & d'autre ; mais à présent je le considérerai comme terminé, ou d'un côté, ou de tous les deux ; & nous verrons avec d'autant plus de surprise, que cette seule circonstance est capable de produire l'écho, qu'on s'est formé jusqu'ici des idées tout à fait différentes sur la formation de ce phénomène. D'abord donc, je supposerai terminé le tuyau d'un seul côté en  $B$ , pendant que de l'autre côté il demeure étendu à l'infini, partout avec la même largeur. Or il y a ici deux cas à examiner, l'un où le tuyau en  $Bb$  est ouvert, & l'autre où il y est fermé comme dans la fig. 6. Dans l'un & l'autre cas il s'engendre un écho simple ; ce qui paroitra bien étrange pour le premier, où l'on ne sauroit concevoir aucune réflexion, comme on se l'est communément imaginé ; d'où l'on comprendra aussi pour l'autre cas, où le tuyau est bouché en  $Bb$ , que ce n'est pas proprement à la réflexion qu'il faut attribuer la formation de l'écho.

P R E M I E R C A S.

32. Si donc, *premierement*, le tuyau terminé & ouvert en  $Bb$  & qu'on y ait imprimé à l'air contenu dans l'espace  $IK$  une

Yy 2

agita-



agitation quelconque, dont l'échelle des densités soit  $I m K$ , & l'échelle des vitesses  $I n K$ . Or, puisque le tuyau est ouvert en  $B b$ , où il communique avec l'air extérieur, il est impossible que la densité en  $B$  soit différente de la naturelle, que je suppose  $= b$ . Donc, concevant le tuyau au delà de  $B$  vers  $Z$  prolongé à l'infini, il faut absolument que les deux échelles qu'on doit supposer sur cette continuation, soient telles que la densité en  $B$  demeure toujours la même  $= b$ , de quelque manière que puisse varier la vitesse. Donc, pour un tems écoulé quelconque de  $t$  secondes, prenant du point  $B$  de part & d'autre les intervalles  $B T = B t = c t$ : soient  $t m$  &  $t n$  les appliquées des deux échelles en  $t$ , &  $T M$  &  $T N$  celles en  $T$ ; & puisque nous avons vu §. 20. que la densité en  $B$  est  $q = b + \frac{b}{2c} (T M + t m - T N + t n)$ ; il faut donc qu'il soit partout  $T M = - t m$  &  $T N = t n$ , pour qu'il devienne  $q = b$ ; d'où l'on détermine pour toute la continuation  $B Z$  à l'infini les deux échelles des densités & des vitesses, quoique cette continuation n'existe que dans l'imagination.

33. De là il est clair que, sur la continuation  $B Z$ , les deux échelles se réunissent avec l'axe, à l'exception du seul espace  $i k = I K$ , & également éloigné de  $B$ , que celui où la première agitation a été excitée, où l'échelle des densités  $i M k$  est égale à la principale  $I m k$ , mais dans une situation renversée, pendant que celle des vitesses  $i N k$ , se trouve située en même sens que la principale  $I n K$ ; d'où l'on voit que la densité en  $B$  doit demeurer toujours la même en vertu de la construction donnée ci-dessus. Maintenant, ayant trouvé la juste continuation des deux échelles au delà de  $B$  à l'infini, la même construction nous découvrira tous les phénomènes dont l'agitation initiale excitée en  $I K$  sera suivie dans le tuyau. Car, pour les agitations qui en sont communiquées à l'air libre par l'ouverture  $B b$ , notre calcul ne s'y étend point. Ainsi, il faut bien se garder de s'imaginer que l'agitation  $i k$  existe réellement hors du tuyau; & il  
ne



ne la faut regarder que comme un moyen propre à nous découvrir les agitations de l'air dans le tuyau, causées par l'agitation initiale IK. Cependant il est certain que, dès que cette agitation parvient au bout B*b*, elle est ensuite propagée par l'air libre; mais cette propagation n'est plus soumise à notre calcul.

34. Puisque la densité de l'air dans l'ouverture B*b* ne fau-  
roit recevoir aucun changement, voyons quelle en fera la vitesse à  
chaque moment. Or, après le tems de  $t$  seconde, prenant les inter-  
valles  $BT = Bt = ct$ , à cause de l'appliquée TM negative,  
nous aurons par le §. 20. la vitesse de l'air en B*b* vers Z.

$$v = \frac{1}{2} (TN + tn + TM + tm) = tm + tn:$$

donc, avant le tems  $= \frac{BK}{c}$ , l'air en B*b* sera en repos; ensuite il  
recevra ce mouvement, dont la vitesse est égale à la somme des  
deux appliquées  $tm$  &  $tn$ , tant qu'elles sont toutes les deux posi-  
tives, mais ce mouvement ne durera que pendant un tems  $= \frac{IK}{c}$   
secondes, après lequel l'équilibre sera parfaitement rétabli en B*b*.  
Ici je remarque que, quoique l'agitation en B*b* soit tout à fait dif-  
férente de la principale IK, les agitations qui en sont produites  
dans l'air libre sont pourtant de la même nature que celles dans le  
tuyau; car on voit par ce qui est expliqué ci-dessus, que de très  
différentes agitations initiales peuvent résulter les mêmes agitations  
propagées, pourvu que les deux échelles aient un certain rapport  
entr'elles: or on s'assurera aisément que ce rapport se trouve pré-  
cisément dans l'agitation de l'ouverture B*b*.

35. Voyons à présent ce qui doit arriver dans un autre lieu  
quelconque A du tuyau; & il est d'abord clair qu'après le tems  
 $= \frac{AI}{c}$  seconde, l'agitation y commencera, & durera pendant le

tems  $\equiv \frac{IK}{c}$  seconde, de sorte qu'après le tems  $\frac{At}{c}$  seconde la densité y sera  $q \equiv b + \frac{b}{2c}(tm - tn)$ , & la vitesse  $v \equiv \frac{1}{2}(tn - tm)$  dirigée vers B; alors une oreille placée en A entendra le son, qui aura été produit en IK. Après cela, l'air en A demeurera tranquille, mais cette tranquillité ne dure que pendant le tems  $\frac{Kk}{c} \equiv \frac{2BK}{c}$ , au bout duquel une nouvelle agitation y sera excitée, provenant de l'agitation imaginaire  $ik$ ; de sorte qu'au tems  $\equiv \frac{AT}{c}$  seconde depuis le commencement, la densité y sera

$$q \equiv b + \frac{b}{2c}(-TM - TN) \equiv b - \frac{b}{2c}(tm + tn),$$

& la vitesse  $v \equiv \frac{1}{2}(TN + TM) \equiv \frac{1}{2}(tm + tn)$ . Cette nouvelle agitation différera de la première, puisque l'une est déterminée par la somme des deux appliquées  $tm$  &  $tn$ ; pendant que l'autre l'est par leur différence. Si dans l'agitation initiale IK il étoit par tout  $tn \equiv tm$ , la première agitation en A évanouiroit entièrement, mais l'autre deviendroit d'autant plus forte; & s'il arrivoit le contraire, qu'il fût  $tn \equiv -tm$ , la seconde évanouiroit.

36. De là il est clair que le même son excité en IK sera entendu deux fois en A, & partout ailleurs dans le tuyau AB, hormis près de l'embouchure Bb: & que, si le lieu A est pris derrière l'espace IK, la répétition du son suit après le tems  $\equiv \frac{2BK}{c}$ , où il faut remarquer que  $c$  désigne l'espace que le son parcourt dans une seconde, qui est de 1040 pieds de Paris environ. Voilà donc un cas bien remarquable d'un *écho* simple, dont l'origine suit très naturellement des principes de la Mécanique, quoiqu'aucune réflexion n'y puisse avoir lieu. Un tel écho se formera donc dans un  
tuyau



tuyau ouvert d'un côté, & continué de l'autre à l'infini; & quoique dans ce calcul la largeur du tuyau ait été supposée très petite, le même phénomène doit aussi arriver dans de tuyaux très larges, comme par exemple dans des galeries voûtées: où plus un homme s'y trouvera éloigné du bout  $Bb$ , & plus entendra-t-il tard la répétition de sa propre voix: comme, s'il en étoit éloigné de 520 pieds, l'écho viendrait précisément après une seconde.

S E C O N D C A S.

37. Le même phénomène aura également lieu, quand le tuyau est fermé en  $Bb$ , en le supposant encore infini vers l'autre côté. Pour appliquer nos formules à ce cas, il faut considérer que l'air en  $Bb$  ne sauroit avoir aucun mouvement. Donc la continuation des deux échelles vers  $Z$ . doit être telle, que notre construction donne toujours pour le lieu  $B$  la vitesse  $v = 0$ ; quelle qu'y puisse être la densité. Pour cet effet, prenons du point  $B$  de part & d'autre les intervalles égaux  $BT = Bt$ , & puisque les appliquées  $tm$  &  $tn$  sont connues au point  $t$ , soyent  $TM$  &  $TN$  celles au point  $T$ , d'où en vertu du §. 20. la vitesse en  $B$  résulte  $v = \frac{1}{2}(TN + tn - TM + tm)$ , qui devant toujours être  $= 0$ , il faut qu'il soit  $TN = -tn$ , &  $TM = tm$ . L'agitation initiale en  $IK$  étant donc représentée par l'échelle des densités  $ImK$ , & celle des vitesses  $InK$ , on n'a qu'à prendre les intervalles  $Bi = BI$ , &  $Bk = BK$ : & y décrire l'échelle des densités  $iMk$  égale à  $ImK$ , & celle des vitesses  $iNk$  égale, mais contraire à  $InK$ . Partout ailleurs les deux échelles sont réunies avec l'axe.

Fig. 6.

38. En  $Bb$  la vitesse demeurant toujours  $= 0$ , la densité après le tems  $= t$ , en prenant  $BT = Bt = ct$ , à cause de l'appliquée  $TN$  négative, y sera  $q = b + \frac{b}{2c}(TM + tm + TN + tn) =$

$$b + \frac{b}{c}(tm + tn).$$

Mais, pour tout autre endroit  $A$  dans le

tuyau,



tuyau, derrière l'agitation initiale  $IK$ , après que le son en sera entendu en  $A$ , l'écho y parviendra après le tems  $= \frac{Kk}{c} = \frac{2BK}{c}$ . Cet intervalle de tems sera d'autant plus grand, plus l'agitation initiale  $IK$  se trouvera reculée du bout  $Bb$ , d'où l'on voit que les phénomènes de l'écho seront les mêmes, soit que le bout  $Bb$  soit fermé ou ouvert; la seule différence consistera dans la nature de l'agitation, qui n'affecte point l'intervalle du tems écoulé entre le son principal & sa répétition. Ici on pourroit bien dire, que l'écho provient de la réflexion du fond  $Bb$ ; mais, puisque le même écho se forme, lorsque le tuyau est ouvert en  $Bb$ , on voit bien que l'idée de la réflexion ne fournit point la juste explication de ce phénomène, mais que cette explication demande des recherches beaucoup plus profondes.

### TROISIEME CAS.

Fig. 7.

39. Considérons maintenant un tuyau terminé des deux côtés en  $A$  &  $B$ , & puisque nous avons déjà vu, que les phénomènes sont à peu près les mêmes, soit que les bouts soient fermés ou ouverts, je supposerai le tuyau  $AB$  ouvert des deux côtés. Ensuite, pour ne pas trop embrouiller les idées, je conçois l'agitation initiale comme faite dans un seul point  $t$ , la densité y étant  $= b + \frac{b}{c} \cdot tm$ , & la vitesse  $= tn$ , & que partout ailleurs sur  $AB$  les deux appliquées évanouissent. Qu'on prolonge la droite  $AB$  de part & d'autre à l'infini, & qu'on prenne les intervalles  $AB'$ ,  $BA'$ ;  $A'B''$ ,  $B'A''$  &c. égaux à la longueur du tuyau  $AB$ : & puisque le tuyau est ouvert en  $B$  à la distance  $BT = Bt$ , il faut établir les appliquées  $TM$  &  $TN$ ; & à cause de l'ouverture  $Aa$  par la même raison, il faut établir en  $t'$ , prenant  $At' = At$ , les appliquées  $t'm'$  &  $t'n'$ ; ensuite aussi, à la distance  $At'' = AT$ , les appliquées  $t''m''$  &  $t''n''$ . Selon la même loi, en prenant  $BT' = Bt'$ , il y faut mettre les appliquées  $T'M'$  &  $T'N'$ , & ainsi de suite; d'où l'on voit, com-

comment on doit établir dans tous les intervalles  $AB'$ ,  $BA'$ ,  $A'B''$ , &c. les deux appliquées, celles des vitesses étant toutes dirigées en haut, & celles des densités alternativement en haut & en bas.

40. Soit à présent une oreille en  $A$ , & après le tems  $= \frac{At}{c}$  elle recevra la premiere impression, causée par les deux agitations  $t mn$  &  $t' m' n'$  conjointement; c'est le son principal, qu'elle entendra alors. Ensuite après le tems  $\frac{tT}{c} = \frac{t't''}{c} = \frac{2Bt}{c}$  elle entendra le premier écho, qui sera suivie du second après le tems  $= \frac{2At}{c}$ ; depuis du troisieme après le tems  $= \frac{2Bt}{c}$ , ensuite du quatrieme après le tems  $= \frac{2At}{c}$ , & ainsi de suite. Le son principal sera donc répété une infinité de fois, les intervalles de chaque écho au suivant étant alternativement de  $\frac{2Bt}{c}$  &  $\frac{2At}{c}$  secondes. Si le bruit étoit excité au lieu  $A$  même, la multitude des échos se réduiroit à la moitié, & les intervalles de tems entr'eux seroient tous égaux &  $= \frac{2AB}{c}$  secondes; de sorte que, si la longueur du tuyau  $AB$  étoit de 520 pieds, tous ces échos se suivroient toutes les secondes.

41. Que le premier son s'excite en  $t$ , & que l'oreille soit placée au même endroit; dans ce cas le premier écho suivra le son principal après le tems  $\frac{tt'}{c} = \frac{2At}{c}$ , le second après le tems  $\frac{tT}{c} = \frac{2Bt}{c}$ , le troisieme après le tems  $\frac{tT'}{c} = \frac{tt''}{c} = \frac{2AB}{c}$ , qui étant produit par les deux agitations  $T' M' N'$  &  $t'' m'' n''$  égales & semblables à la principale, sera plus fort & plus distinct. Or celui-



ci sera suivi en même ordre de nouveaux après le tems  $\frac{2At}{c}$ ,  $\frac{2Bt}{c}$  &  $\frac{2AB}{c}$ , & ainsi de suite. D'où l'on voit que, si le point  $t$  étoit pris au milieu du tuyau  $AB$ , tous les échos se succédroient à intervalles égaux, chacun étant  $= \frac{AB}{c}$  secondes. Si l'oreille se trouvoit dans un autre endroit  $S$ , le nombre des échos feroit encore plus multiplié, & cela par des intervalles de tems plus inégaux entr'eux: pour en juger mieux, on n'a qu'à s'imaginer qu'en tous les endroits  $t$ ,  $T$ ,  $t'$ ,  $T'$ ,  $t''$ ,  $T''$  &c. le même cri soit produit au même instant, & voir à quel instant chacun d'eux parvient au lieu proposé  $S$  dans le tuyau, selon la loi de la propagation.

42. Si la longueur du tuyau est au dessous de 100 pieds, de sorte que les intervalles de tems entre les échos constructifs ne sauroient être distingués, tous les échos se réduiront à une résonance confuse; d'où l'on comprend clairement ce que c'est qu'une résonance. Mais, si le tuyau est beaucoup plus long que 100 pieds, & que les intervalles de tems entre les échos successifs deviennent assez sensibles: alors on entendra plusieurs échos de suite, dont le nombre devroit même être infini, si par des causes physiques les répétitions ne devenoient de plus en plus foibles. Or ce que je viens d'exposer, pourra selon toute apparence être appliqué à des galeries fort longues & bien fermées de tous côtés, quoiqu'à la rigueur ces recherches ne s'étendent qu'à des tuyaux fort étroits: cependant il n'y a presque point de doute qu'on y observera une telle multiplicité d'échos. On trouve même quelques observations dans les Oeuvres de Kircher, qui semblent très bien confirmer cette production des échos.

43. Mais on comprend aisément, que tout ce que je viens de développer, ne regarde qu'un cas très particulier, & qu'on se tromperoit bien grossièrement, si l'on vouloit assigner à tous les échos

Fig. 1.

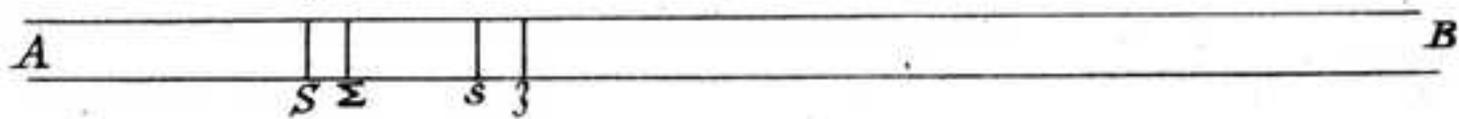


Fig. 2.

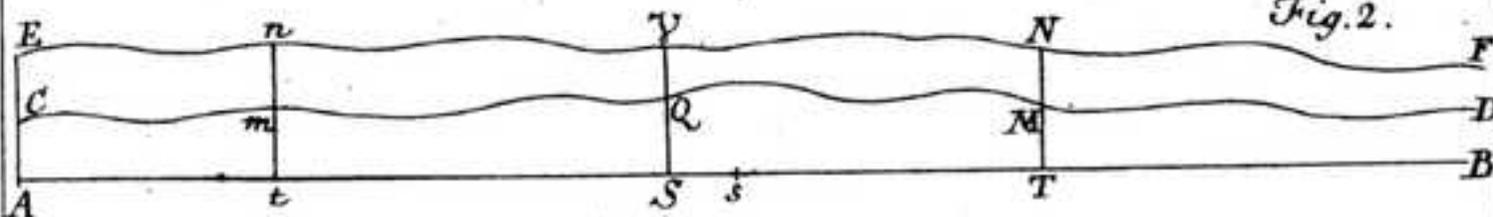


Fig. 3.



Fig. 4.

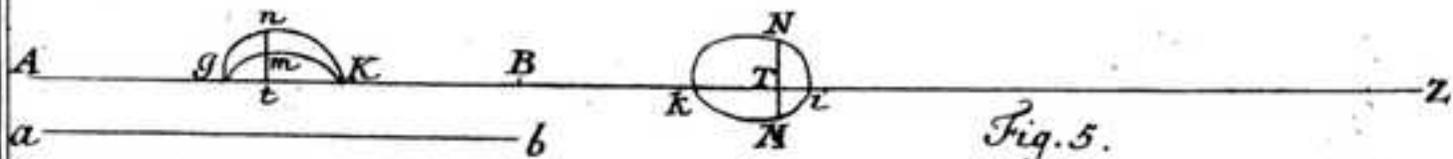
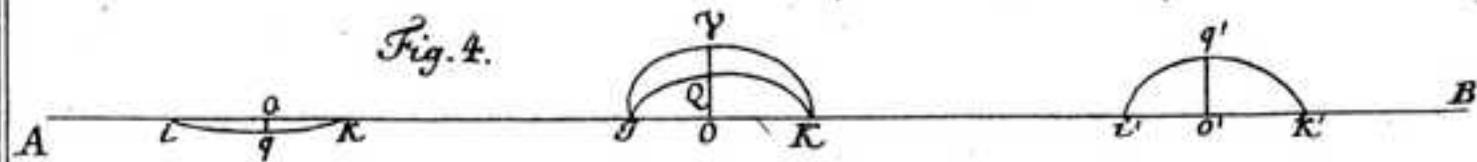


Fig. 5.

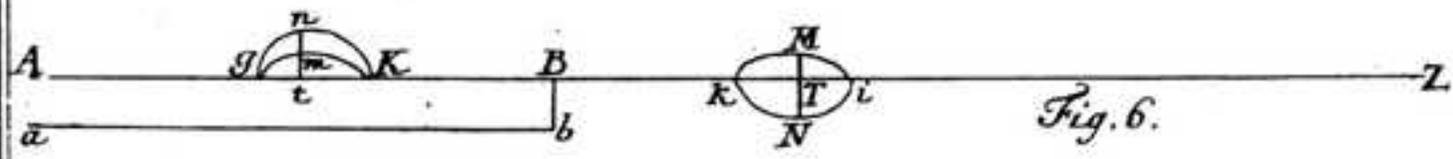


Fig. 6.

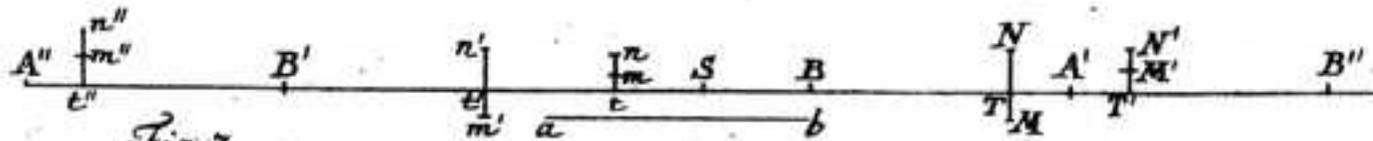


Fig. 7.



*échos* cette même origine. Je n'ai considéré que des tuyaux également larges par toute leur étendue; ce qui est sans doute un cas très particulier, auquel les bornes de l'Analyse m'ont attaché, vu qu'il est encore impossible de définir le mouvement de l'air dans les tuyaux, dont la largeur varie d'une manière quelconque. Cependant on avouera que ce cas, quelque particulier qu'il soit, nous a fourni des éclaircissimens très importans tant sur la génération & propagation du son, que sur la formation des *échos*: d'où nous pourrons puiser des idées beaucoup plus justes qu'on n'en a eu jusqu'ici. Mais, comme cette recherche est fondée sur une branche tout à fait nouvelle de l'Analyse, elle doit principalement exciter tous les Géomètres à la cultiver; puisque c'est de là qu'on peut attendre les plus importantes découvertes, qui sont entièrement inaccessibles à l'Analyse ordinaire, & parmi lesquelles il faut surtout compter celles où le mouvement de l'air entre en considération.

44. Donc, si nous possédons encore à peine les premiers principes pour connoître le mouvement de l'air, & si tout ce que nous en savons se réduit à certaines espèces de tuyaux; combien sommes-nous encore éloignés de déterminer toutes les modifications que le son reçoit dans des cavités quelconques? La cavité de la bouche humaine nous en fournit un exemple frappant, dont nous ne connoissons que fort en gros l'effet dans la formation de la voix: ne sachant presque rien de la manière dont les articulations & autres modifications sont opérées. Mais il n'y a aucun doute que, s'il nous étoit possible de pénétrer dans ces mystères, nous découvririons aussi dans la figure de la bouche un vrai chef-d'oeuvre de la souveraine sagesse, qui surpasse infiniment tout ce que le plus sublime Géomètre est capable d'imaginer. C'est ainsi que partout le Créateur a mis l'empreinte de son infinie sagesse, même dans les choses qui en paroissent le moins susceptibles.

