SUR

LE MOUVEMENT D'UNE CORDE QUI AU COMMENCEMENT N'A ÉTÉ ÉBRANLÉE QUE DANS UNE PARTIE,

PAR M. EULER.

1.

Je crois que l'évolution de ce cas, où la corde n'a été dabord ébranlée que dans une de ſes parties, ſera très propre à diſſiper tous les doutes, que Mrs. Bernoulli & d'Alembert ont ſuſcités contre ma Théorie des cordes vibrantes, & ceux que M. de la Grange a le premier propoſés dans les Actes de la nouvelle Académie de Turin. Car l'un & l'autre de ces illuſtres Adverſaires eſt obligé de reconnoitre que ce cas n'eſt pas renfermé dans leurs ſolutions du probleme des cordes vibrantes: & partant, ſi ma méthode en fournit une ſolution, & même une telle, qui eſt confirmée par l'expérience, il n'y aura plus aucun doute que cette méthode ne ſoit fondée dans la vérité, & beaucoup plus générale que celle d'où les Adverſaires ont tiré leur ſolution du probleme des cordes vibrantes.

2. Or, pour écarter tous les doutes ſur la généralité de ma méthode, il faut remarquer qu'on convient de part & d'autre, que ce probleme ne ſauroit être réſolu, que dans les cas où les éloignemens de la corde de ſa ſituation naturelle ſont quaſi infiniment petits, & outre cela encore l'inclinaiſon de chacun de ſes élémens infiniment petite. Cette condition eſt abſolument néceſſaire, puiſqu'on eſt obligé de ſuppoſer dans la ſolution, que chaque point M de la corde AMB ſe meut toujours ſur l'appliquée MP perpendiculaire à la ſituation naturelle APB; ce qui ne ſauroit arriver, à moins que toutes Planche V. Fig. 1.

ces appliquées PM ne ſoient infiniment petites, & que les tangentes aux points M ne ſoient infiniment peu inclinées à la droite APB, afin que l'élément de la courbe Mm puiſſe partout être regardé comme égal à l'élément correſpondant de l'abſciſſe Pp.

Fig 2. 3. Pour ſe former une juſte idée de telles courbes, propres à repréſenter la figure d'une corde pendant ſon mouvement de vibration, on n'a qu'à conſtruire ſur la ligne AB une courbe quelconque A𝔐B, qui n'ait nulle part une tangente perpendiculaire à l'axe AB; alors, une telle courbe étant décrite, qu'on diminue toutes ſes appliquées P𝔐 en raiſon d'un nombre infini i à l'unité, de ſorte que P𝔐 : PM $= i : 1$, & par ce moyen on obtiendra la courbe AMB, que la corde AB pourra recevoir dans ſon mouvement: puiſque non ſeulement chaque appliquée de la courbe AMB mais auſſi l'inclinaiſon de chaque élément Mm à l'axe AB, devient infiniment petite. Au reſte, on comprend aiſément que le mot d'infini ne doit pas ici être pris à la rigueur, & qu'il ſuffit que le nombre i ſoit très grand. De cette maniere, toute courbe decrite ſur l'axe AB, pourvu qu'elle n'ait nulle part une tangente perpendiculaire à l'axe, fournit une courbe propre à repréſenter la figure de la corde AB pendant ſon mouvement de vibration.

4. Ici ſe préſente d'abord cette queſtion: ſi toutes ces courbes ſont également propres à repréſenter la figure d'une corde pendant ſon mouvement? ou s'il y a encore quelque autre condition qu'il eſt néceſſaire d'y ajouter? M. d'Alembert ſoutient qu'aucune autre figure ne ſauroit convenir aux cordes vibrantes, que celles qui ſont contenues dans cette équation:

$$y = \mathrm{A}\,\text{ſin}\,\frac{\pi x}{a} + \mathrm{B}\,\text{ſin}\,\frac{2\pi x}{a} + \mathrm{C}\,\text{ſin}\,\frac{3\pi x}{a} + \mathrm{D}\,\text{ſin}\,\frac{4\pi x}{a} + \&c.$$

où a marque la longueur de la corde AB, x une abſciſſe quelconque AP, y l'appliquée PM, $\pi : 1$ le rapport de la périphérie au diametre, & les lettres A, B, C, D &c. des coëfficiens infiniment

petits.

petits. Donc, s'il arrivoit qu'on eût imprimé à la corde au commencement une figure qui ne feroit pas contenue dans cette équation, il feroit aussi impossible d'en déterminer le mouvement par le calcul.

5. M. d'Alembert convient donc, qu'on pourroit donner aux cordes une infinité de figures initiales, qui ne feroient pas comprises dans cette équation; mais, dans ces cas, il nie que la Théorie soit suffisante pour déterminer le mouvement dont les cordes feront agitées après avoir été relâchées. La raison qu'Il en donne est, que dans ces cas il se trouveroit quelque élément où l'équation différentielle du second degré, tirée de la Théorie, ne sauroit plus avoir lieu, vu qu'il y auroit quelque particule qui n'évanouiroit plus par rapport aux autres quantités, comme on le suppose dans la Théorie; de sorte que dans cet élément on commettroit une erreur. Mais je réponds qu'une telle erreur commise dans un ou quelques élémens est toujours infiniment petite, & ne sauroit troubler le résultat total du calcul. En effet, quand on calcule le mouvement de quelque corps, on suppose partout l'accélération infiniment petite par rapport à la vitesse actuelle du corps: & quoique cette supposition soit fausse dans les premiers élémens où le mouvement est engendré, le calcul ne laisse point d'être très juste.

6. Le même inconvénient se rencontre presque dans toutes les applications du calcul intégral: quand il s'agit de trouver l'aire APM par la formule $\int y\,dx$, on y suppose que le vrai élément de cette aire étant le trapeze $PMmp$, le triangle Mmn est infiniment petit par rapport au rectangle $PMnp = y\,dx$: ce qui cependant n'est pas vrai dans le premier élément en A, à moins que la tangente en A ne convienne avec l'axe. Voudroit-on pour cela soutenir, que la formule intégrale $\int y\,dx$ ne sauroit être appliquée à des courbes, dont la tangente au commencement A ne convient point avec l'axe même? Or il me semble qu'il en est de même des scrupules que M. d'Alembert éleve contre ma solution du probleme des cordes vibrantes: vu que toutes ses difficultés ne tombent que sur les deux derniers Fig. 1.

élémens de la corde: je ne nie pas, qu'en y appliquant le calcul, on ne commette quelque erreur; mais je soutiens que dans la totalité cette erreur devient infiniment petite & tout à fait nulle.

7. La solution de M. Bernoulli revient aussi entierement à l'équation rapportée ci dessus (§. 4.), & il soutient que quelque compliqué que soit le mouvement d'une corde, on le peut toujours envisager comme un assemblage de plusieurs oscillations régulieres, qui se trouvent tant dans la corde entiere que dans ses parties aliquotes, indépendamment les unes des autres. C'est de ce grand principe, qu'il a expliqué fort heureusement le phénomene bien singulier, que la même corde peut rendre à la fois plusieurs sons différens, qui sont entr'eux comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5 &c. De ce principe il s'ensuit, que quel que soit le mouvement d'une corde, à chaque instant sa figure doit être exprimée par ladite équation

$$y = A \sin \frac{\pi x}{a} + B \sin \frac{2\pi x}{a} + C \sin \frac{3\pi x}{a} + D \sin \frac{4\pi x}{a} \text{ \&c.}$$

& partant, puisqu'au commencement on peut avoir donné à la corde une figure quelconque, & que les figures qu'elle prend dans la suite à chaque instant, en dépendent nécessairement; il soutient que toutes les figures possibles sont comprises dans cette même équation, & qu'il est même superflu de vouloir recourir à d'autres principes pour déterminer le mouvement d'une corde, en regardant comme donnée la figure qui lui a été imprimée au commencement.

8. En effet, puisque cette équation contient une infinité de coëfficiens A, B, C, D &c. dont chacun peut être déterminé à volonté, on les peut toujours déterminer en sorte que la courbe passe par une infinité de points donnés: d'où il semble qu'on ne sauroit decrire une ligne courbe, à laquelle cette équation ne puisse être appliquée. Mais, quand même j'accorderois à M. Bernoulli cette possibilité, il est bien clair que l'exécution seroit encore assujettie à des difficultés insurmontables. Car, ayant donné dabord à la corde une certaine

taine figure, il faudroit commencer par déterminer tous lesdits coëfficiens en ſorte que l'équation réponde à une infinité de points de la figure donnée; ce qui ſeroit ſans contredit un ouvrage dont le plus habile calculateur ne viendroit jamais à bout. Cependant, avant que d'avoir achevé cet ouvrage, il ſera impoſſible de déterminer le mouvement de la corde: qui demeurera par conſéquent toujours inconnu même au plus grand Géometre.

9. Je ne crois donc faire aucun tort au mérite de la ſolution de M. Bernoulli, quand je dis, qu'elle n'eſt pas ſuffiſante pour déterminer le mouvement des cordes vibrantes en général, c'eſt à dire, après qu'on leur a imprimé une figure quelconque, & à cet égard il me ſemble qu'on doit accorder une grande préférence à ma methode & à celle de M. de la Grange. Puisque, quelle que ſoit la figure qu'on aura imprimée à la corde au commencement, quand même auſſi elle ne ſeroit expreſſible par aucune équation, je ſuis toujours en état de déterminer ſon mouvement par une conſtruction très ſimple & applicable à tous les cas poſſibles, ſans qu'aucune circonſtance en puiſſe arrêter le ſuccès. Or cette même conſtruction fournit auſſi, pour les cas qui ſont compris dans l'équation de M. Bernoulli, préciſément les mêmes ſolutions que ce grand Géometre a données, & partant je ne vois aucune raiſon, pourquoi cette conſtruction lui puiſſe paroitre ſuperfluë, ou même ſuſpecte.

10. Mais il me ſera encore permis de douter, que toutes les figures poſſibles dont les cordes ſont ſuſceptibles, ſoient contenues dans l'équation rapportée, quoique le nombre de ſes termes puiſſe être augmenté à l'infini. Entre pluſieurs raiſons que je pourrois alléguer pour juſtifier mes doutes, le cas que j'ai ici en vue, me ſemble fournir une preuve trés convaincante. Car, ſuppoſant qu'on n'ait détourné au commencement qu'une partie de la corde Fig. 3.
AC de ſon état naturel, & qu'on lui ait donné la figure AMC, pendant que le reſte CB eſt demeuré dans ſon état naturel & rectiligne, de ſorte que la figure initiale ait été compoſée de la ligne courbe

courbe AMC & de la droite CB, ce qui eſt facile d'exécuter: alors il ſera ſans doute très difficile, pour ne pas encore dire impoſſible, de déterminer les coëfficiens de l'équation de M. Bernoulli, en ſorte qu'elle exprime cette figure mixte d'une ligne courbe quelconque AMC & d'une droite CB. Il ſemble auſſi par la derniere lettre de M. Bernoulli lui-même, qu'il regarde ce cas, comme non compris dans ſa ſolution, ſans parler des difficultés que la détermination des coëfficiens renfermeroit.

11. Mais il y a plus: le mouvement de cette corde ne ſauroit en aucune maniere être enviſagé comme un aſſemblage ou mélange de pluſieurs oſcillations ſimples & régulieres; en quoi conſiſte l'eſſence de la ſolution de M. Bernoulli. Car, au premier inſtant après le relâchement de la corde, la ſeule partie AMC ſera miſe en mouvement, tandis que le reſte CB demeure encore abſolument immobile, & ſans aucune mouvement d'oſcillation, pour lequel on puiſſe aſſigner la longueur du pendule iſochrone. Il eſt vrai que, bientôt après, le mouvement ſera auſſi ſucceſſivement communiqué à la partie CB, mais alors d'autres parties ſeront réduites en repos, & il n'y ſauroit plus être queſtion des pendules ſimples iſochrones aux mouvemens de toutes les parties de la corde. Le mouvement de la corde ſera d'une nature tout à fait différente, qui ne ſauroit être repréſentée comme un mélange depluſieurs oſcillations ſimples & régulieres, conformément au principe de M. Bernoulli.

12. Voilà donc un cas bien inconteſtable, auquel la ſolution de M. Bernoulli eſt abſolument inapplicable; & puiſque ce cas a lieu toutes les fois que la corde n'a pas été ébranlée par toute ſa longueur, il y faut reconnoitre une infinité de cas non compris dans la ſolution de M. Bernoulli. Delà on ſera auſſi obligé de m'accorder que, quand même la corde aura été ébranlée par toute ſon étendue, il y aura encore une infinité de cas qu'il faut également exclure de cette ſolution, leur mouvement ſe réglant ſur des principes

cipes entierement différens. Par conséquent, quelque ingénieuse que soit la solution de M. Bernoulli, on ne la sauroit regarder que comme une solution très particuliere, qui ne s'étend qu'à de certaines especes de vibrations, qu'on peut nommer régulieres, pendant qu'une infinité d'autres especes irrégulieres en sont absolument exclues.

13. Cependant la construction générale que j'ai donnée autrefois pour le mouvement des cordes vibrantes, s'étend également à toutes ces especes tant irrégulieres que régulieres; & pour le tems présent où l'on continue de combattre ma construction en la regardant, ou comme fausse, ou superflue, je crois qu'il sera fort intéressant, que j'en tire ici en détail la détermination du mouvement d'une corde qui n'a été ébranlée au commencement que dans une de ses parties. J'ai tout lieu d'esperer, que M. Bernoulli en reconnoitra la justesse, sur tout quand il verra le bel accord avec l'expérience; mais M. d'Alembert dira, sans doute, qu'il réfutera ma solution dans quelcun de ses ouvrages qu'il publiera dans la suite, & il se contentera pour le présent d'en avertir le public. Or, quoi qu'il en soit, je soumets ma solution entierement au jugement du Public dans la confiance qu'elle sera approuvée au moins d'une partie, même avant que la réfutation paroisse.

14. Je commencerai donc par mettre devant les yeux ma construction du probleme des cordes vibrantes. Soit AB la corde dans sa situation naturelle, la longueur $AB = a$, son poids $= M$, & la force dont elle est tendue $= F$, en supposant la corde également épaisse par toute sa longueur. Qu'à cette corde on ait donné au commencement une figure quelconque AMB, dont, comme j'ai déjà remarqué, toutes les appliquées PM doivent être regardées comme infiniment petites. Cela posé, on demande, après qu'on aura subitement relâché la corde, quel sera son mouvement dans la suite? Il est évident que, pour résoudre cette question, il faut être en état d'assigner la figure de la corde pour chaque instant suivant. Or, posant que depuis le commencement il s'est ecoulé un tems de t Fig. 4.

ſecondes, & que g marque la hauteur d'où les corps graves tombent dans une ſeconde ; ſi y marque l'appliquée qui répondra alors à l'abſciſſe $AP = x$, la Théorie que perſonne ne révoque en doute, fournit pour la valeur de y cette équation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fag}{M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, dont l'intégrale complette eſt ſans contredit

$$y = \Gamma : \left(x + t\sqrt{\frac{2Fag}{M}}\right) + \Delta : \left(x - t\sqrt{\frac{2Fag}{M}}\right)$$

où les caractéres Γ & Δ indiquent des fonctions quelconques.

15. Pour conſtruire cette équation, je prolonge la droite AB de part & d'autre, j'y prends les parties Ab & $Ba = AB$, & je décris ſur elles $AV'V''V'''b$ & $Bv''v'''a$, égales à la figure initiale de la corde AMB, mais dans une ſituation renverſée, comme on peut le voir aiſément en regardant la figure : d'où il eſt clair que ces courbes continuées auront en A & B leurs tangentes communes avec la courbe donnée. Dans la premiere conſtruction, j'ai continué ces mêmes courbes de part & d'autre à l'infini, mais on verra bientôt, qu'il ſuffit de la décrire une fois de chaque côté. Or ces courbes nous ſerviront à déterminer la figure que la corde prendra à un tems quelconque écoulé depuis le commencement. Pour cet effet, j'ajoûte à la figure la ligne droite $EF = \sqrt{\frac{2Fag}{M}}$, qui ſervira de meſure du tems d'une ſeconde, & dont la longueur ſera aiſément déterminée par la formule $\sqrt{\frac{2Fag}{M}}$: ce qui nous met en état de repréſenter par une ligne droite chaque tems pour lequel on voudra connoitre la figure de la corde.

16. Maintenant, ſi l'on veut ſavoir de chaque point de la corde P, à quelle diſtance il ſe trouvera de ſon lieu naturel ſur l'appliquée PM, après un tems quelconque donné de t ſecondes, qu'on prenne

prenne ſur l'axe de part & d'autre, du point P, les intervalles P T & P t égaux à ce tems, ou bien à EF. t, & après y avoir tiré les appliquées TV & tu, l'appliquée cherchée pour le point P, que j'ai nommée $= y$, ſera toujours $= \frac{1}{2}$ TV $+ \frac{1}{2}\, tv$. Si le tems propoſé t eſt plus grand, l'une ou toutes les deux appliquées doivent être priſes dans les continuations où l'on doit tenir compte, ſi ces appliquées tombent en ſens contraire: ainſi, après le tems $PT' = Pt'$ on aura $y = -\frac{1}{2} T'V' + \frac{1}{2} t'v'$, & après le tems $PT'' = Pt''$, on aura $y = -\frac{1}{2} T''V'' - \frac{1}{2} t''v''$, & ainſi de ſuite. De là on connoitra auſſi aiſément le mouvement de chaque point de la corde P pour un tems propoſé quelconque, puiſqu'on trouve par cette conſtruction, de combien change ſon lieu d'un inſtant à l'autre. Ainſi rien n'eſt plus aiſé que de déterminer le mouvement tout entier de la corde, quelle qu'ait été ſa figure initiale AMB.

17. Pour prouver la verité de cette conſtruction, je n'ai qu'à en montrer le parfait accord avec l'équation fournie par la théorie, & avec les conditions que la nature de la queſtion renferme. Or d'abord, il eſt évident que cette conſtruction donne pour le premier inſtant la même figure A M B qu'on ſuppoſe avoir été imprimée à la corde; & on en voit auſſi que tous les points de cette courbe ne changent point de place au premier inſtant, ou bien que le mouvement commence du repos, comme on le ſuppoſe dans le probleme. Enſuite, l'une & l'autre extrémité de la corde A & B demeurera conſtamment en repos; car, en prenant de A ou de B ſur l'axe de part & d'autre des abſciſſes égales, les appliquées y ſont auſſi toujours égales & l'une négative de l'autre, de ſorte que leur ſomme eſt conſtamment $= 0$; c'eſt auſſi la raiſon, pourquoi la courbe AMB a été continuée de part & d'autre de la maniere qui a été expliquée ci-deſſus; & puiſque les deux points A & B demeurent toujours néceſſairement en repos, il eſt impoſſible de ſuppoſer à la courbe AMB d'autres continuations que celles que je viens d'établir.

18. Maintenant rien n'empêche qu'on n'envisage la courbe AMB avec toutes ses continuations que je viens de lui donner, comme une seule courbe où il n'importe si la ligne AMB est une courbe réguliere renfermée dans quelque équation, ou si c'est une courbe irréguliere décrite à la main, la régularité n'entrant ici pour rien en compte. Et partant, prenant une abscisse quelconque AT, l'appliquée TV qui lui répond pourra être regardée comme une fonction de AT, & indiquée en sorte $TV = \Delta : AT$. Cela remarqué, soit pour abréger la ligne $EF = \sqrt{\frac{2Fag}{M}} = c$, & nommant l'appliquée $= y$, qui répond à l'abscisse $AP = x$, après le tems $= t$ secondes, on prend dans la construction les intervalles $PT = Pt = ct$, d'où l'on a les abscisses $AT = x - ct$ & $At = x + ct$; & partant les appliquées $TV = \Delta : (x - ct)$ & $tv = \Delta : (x + ct)$: de sorte que notre construction donne $y = \frac{1}{2}\Delta : (x - ct) + \frac{1}{2}\Delta : (x + ct)$: ce qui convient parfaitement avec l'équation principale $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$; puisqu'on a

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{c}{2}\Delta' : (x-ct) + \frac{c}{2}\Delta' : (x+ct); \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2}\Delta' : (x-ct) + \frac{1}{2}\Delta' : (x+ct)$$

&

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{cc}{2}\Delta'' : (x-ct) + \frac{cc}{2}\Delta'' : (x+ct) \ \& \ \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{1}{2}\Delta'' : (x-ct) + \frac{1}{2}\Delta'' : (x+ct)$$

ce qui suffit pour prouver la justesse de ma construction.

19. Mais, pour puiser de cette construction une connoissance parfaite de tout le mouvement de la corde, il suffit de pousser les opérations exposées jusqu'au tems exprimé par la longueur de la
Fig. 5. corde AB, puisque alors la corde sera réduite à une figure $AnmB$ semblable à celle qu'elle avoit au commencement, mais dans une

 situa-

ſituation renverſée; de ſorte qu'après ce tems le mouvement redevient ſemblable à celui du commencement. Pour prouver cela, prenons du point P les intervalles $PT = Pt = AB$: & après le tems de $\frac{AB}{EF}$ ſecondes, le point P ſe trouvera en n, en ſorte que $Pn = \frac{1}{2}(TV + tv)$. Or, prenant $BQ = AP$, à cauſe de $AT = AQ$ & $Bt = BQ$, on aura en vertu de la conſtruction $TV = QN$ & $tv = QN$; & partant $Pn = QN$; d'où l'on voit que la courbe $AnmB$ eſt ſemblable à BNMA. Par conſéquent, quelle qu'ait été la figure initiale de la corde, il eſt certain qu'après le tems $\frac{AB}{EF} = \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$, les mêmes phénomenes du mouvement reviennent, & qu'il ſuffit toujours de connoitre le mouvement pour un tel intervalle de tems, à quoi les deux continuations Ab & Ba de la courbe initiale ſont ſuffiſantes.

Solution du probleme propoſé.

20. Soit comme auparavant la longueur de la corde $AB = a$, ſon poids $= M$, la force de ſa tenſion $= F$, & g la hauteur d'où les corps graves tombent dans une ſeconde : & que pour meſurer le tems on prenne une ligne droite $c = \sqrt{\frac{2Fag}{M}}$, qui marquera une ſeconde. Suppoſons maintenant, que cette corde n'ait été ébranlée au commencement que dans ſa partie AC, à laquelle on ait donné la figure AMC, tandis que le reſte CB a conſervé ſa figure naturelle & rectiligne, & qu'après avoir réduit la corde dans cet état forcé, on la relâche ſubitement. Cela poſé, on demande, quel ſera le mouvement dont la corde ſera agitée dans la ſuite? Pour cet effet, on prendra ſur la droite AB prolongée les intervalles $Ab = Ba = AB$, ſur leſquels on décrira les courbes Amc & $a\mu\gamma$, ſemblables à la courbure initiale AMC, mais dans une ſituation renverſée, pour avoir l'échelle des tems $bcmAMCB\gamma\mu a$, Planche VI. Fig. 6.

 dont

dont les parties, bc, CB & $B\gamma$, conviennent avec l'axe même, de-sorte que les appliquées dans ces espaces sont censées être nulles.

21. Maintenant, par la construction expliquée ci-dessus, il est aisé de déterminer le mouvement de chaque point de la corde. Ainsi le milieu D de l'espace ébranlé AC étant au commencement à la distance DM, s'approchera vers l'axe, & parviendra en D aprés le tems $= AD$: de là il passera de l'autre côté de l'axe, & après le tems $Dd = 2AD$, il se trouvera à la distance $\frac{1}{2} dm = \frac{1}{2} DM$, d'où il retournera de nouveau vers l'axe, & reviendra en D après le tems $Dc = 3AD$, où il demeurera en repos jusqu'au tems $D\gamma = BD + BC = 2AB - 3AD$, de sorte que la durée de ce repos est $= 2AB - 6AD = 2AB - 3AC = 2BC - AC$.

De la même maniere, le point C montera d'abord, & après le tems $CD = AD$, parviendra à sa plus grande distance $= \frac{1}{2} DM$, d'où il retournera en C après le tems $CA = 2AD$: & de là il passera de l'autre côté de l'axe jusqu'à la distance $\frac{1}{2} dm = \frac{1}{2} DM$, après le tems $Cd = 3AD$; ensuite il retournera en C après le tems $Cc = 4AD$, où il reposera jusqu'au tems $C\gamma = 2BC = 2AB - 2AC$. Or un point quelconque P de la partie CB demeurera en repos pendant le tems PC, après quoi il prendra le même mouvement que le point C; tant que la distance $P\gamma$ est plus grande que Pc, ou bien $PB + BC > AP + AC$, ou $BP > AC$. Mais si $BP < AC$ il recommence plutôt à se mouvoir.

22. De là nous pourrons assigner la figure de la corde après un tems écoulé quelconque depuis le commencement; dont je considérerai les principaux instans:

Fig. 7. I. Après le tems AD, la corde aura la figure 7, où la partie AD est droite, & la courbure ne se trouve que dans la partie DcE, le point c étant dans la plus grande élongation.

Fig. 8. II. Après le tems 2AD, la corde aura la figure $AdCeFB$, les intervalles AD, DC, CE, EF étant pris égaux; où les points

points d & e se trouvent dans leur plus grand éloignement de l'axe.

III. Après le tems 3 AD, la même courbure est avancée sur la partie DG, les parties AD & BG étant droites & en repos. Fig. 9.

IV. Après le tems 4 AD, la même courbure est avancée sur la partie CH, supposé que 4 AD soit encore plus petit que AB. Fig. 10.

V. Enfin, après le tems AB, la corde reçoit une figure ATNB semblable à la premiere, mais dans une situation renversée; après quoi les mêmes phénomenes reviennent, dont les periodes s'achevent dans le tems $=$ AB, ou bien de $\sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ secondes. Fig. 11.

23. On voit donc que ce mouvement est fort irrégulier, & qu'il n'y a aucune partie de la corde qui fasse des oscillations réglées qui puissent être comparées à celles d'un pendule simple, selon la maniere de M. Bernoulli. Car chaque partie n'est ébranlée que pendant quelque tems, où même son mouvement n'est rien moins que semblable à celui de quelque pendule: & pendant un autre tems la même partie se trouve dans un repos parfait. M. Bernoulli m'avoit objecté contre ce mouvement, que si une partie de la corde avoit été en repos pendant quelque tems, il n'y auroit point de raison pourquoi elle commenceroit à se mouvoir dans un sens plutôt que dans un autre. Mais on n'a qu'à suivre pas à pas la progression du mouvement, & ce doute évanouira de soi même: outre qu'on voit aussi dans la propagation du son par l'air, dont le calcul est fondé sur les mêmes principes, que les ébranlemens propagés ne se continuent que dans un sens, pendant que la premiere agitation se répand en tout sens.

Con-

Considération du cas, où la corde n'a été ébranlée que dans son milieu.

Fig. 12. 24. Soit AB encore la même corde que j'ai considérée jusqu'ici, dont au commencement la partie du milieu CD ait été détournée dans la courbe CMD, les deux autres parties AC & BD ayant été conservées dans leur état naturel; & que de cet état forcé la corde soit relâchée subitement. Donc, pour en déterminer le mouvement, je prolonge la corde de part & d'autre en a & b, en sorte que $Ab = Ba = AB$, & sur ces parties prolongées je décris dans une situation renversée les courbes cmd & $\gamma\mu\delta$, semblables à la courbe CMD. Pour rendre la chose plus claire, je supposerai chaque partie AC, CD, & BD, précisément le tiers de la corde entiere AB. Ensuite, soit O le milieu tant de la corde que de la partie ébranlée CD, & je conçois la courbe CMD composée de deux parties égales & semblables, CM & DM. On voit bien que je ne fais ces suppositions que pour faciliter les constructions suivantes, & les rendre plus évidentes.

25. Concevons la corde divisée en six parties égales aux points E, C, O, D, F, & prenant la corde entiere $AB = a$, pour exprimer le tems de $\sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ secondes, après chaque sixieme partie de ce tems, la corde sera réduite aux figures suivantes:

Fig. 13. I. Après le tems $= \frac{1}{6}AB$, les parties EO & FO seront courbées en haut, les éloignemens de l'axe n'étant que la moitié de ceux de la courbe CMD, & les parties AE & BF se trouveront encore en repos. L'angle en O ne doit pas choquer, puisque l'inflexion n'y est qu'infiniment petite.

Fig. 14. II. Après le tems $= \frac{1}{3}AB$, ces deux courbures seront avancées jusques aux extrémités, & seront encore tournées en haut sur les parties AC & BD, la partie du milieu CD étant droite & en repos.

III.

III. Après le tems $= \frac{1}{2}$ AB, toute la corde ſe trouvera dans ſa poſition naturelle & rectiligne, mais les parties AC & BD auront un mouvement pour ſe courber en bas, celle du milieu CD demeurant encore en repos. Fig. 15.

IV. Après le tems $= \frac{2}{3}$ AB, les parties AC & BD ſeront effectivement courbées en bas, celle du milieu CD étant encore droite. Fig. 16.

V. Après le tems $= \frac{5}{6}$ AB, ces deux courbures ſe rapprocheront vers le milieu O, les parties AE & BF étant droites & en repos. Fig. 17.

VI. Enfin, après le tems $=$ AB, toute la corde ſe trouvera dans un état ſemblable à celui du commencement, mais dans une ſituation renverſée. Fig. 18

26. Ces deux cas ne laiſſent plus aucune raiſon de douter, que les cordes ne ſoyent ſuſceptibles de mouvemens très irréguliers, qu'on ne ſauroit comparer avec les oſcillations d'un pendule, ni regarder comme un mêlange de pluſieurs vibrations ſimples & régulieres. Dans ces cas donc, le ſon doit être très impur, & quaſi varier à tout inſtant; cependant, puisque toujours après le tems $= \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$, la corde retourne dans le même état, & que ces périodes ſont régulieres, nonobſtant les agitations irrégulieres de chaque partie de la corde; le ſon principal de la corde ſera néanmoins le même que ſi les vibrations étoient régulieres, quoiqu'on y apperçoive quelque bruit fort désagréable. Cet accident ne doit pas être regardé comme uniquement attaché aux cas que je viens de développer, mais il eſt auſſi très poſſible, lors qu'on ébranle la corde dans toute ſon étendue, ce que je me propoſe de faire encore voir, pour mettre la Théorie à l'abri de toute nouvelle objection.

Planche VII. Fig. 19.

Développement du cas où la corde a reçu au commencement la figure A$pqrst$B (Fig. 19.)

27. Dans ce cas, je ſuppoſe l'intervalle AF deux fois plus grand que BF, & je diviſe toute la corde en ſix parties égales aux points C, D, E, F, G, pour rendre la conſtruction plus évidente. Cette figure a donc deux ventres inégaux AF & BF; ce qui eſt ſans contredit un cas qui ne ſauroit être compris dans la ſolution de M. Bernoulli. Cependant on verra que ce mouvement participe beaucoup de celui que cet illuſtre Géometre a aſſigné aux cordes à deux ventres: la différence n'étant, ſinon que le mouvement de chaque élément de la corde eſt irrégulier & tout à fait différent de celui d'un pendule. Mais, nonobſtant cette irrégularité, toute la corde retourne à un état ſemblable à celui du commencement après le tems $=$

$\sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ ſecondes, que j'exprime ici par la longueur de la corde AB:

or, pendant ce tems presque toutes les parties de la corde acheveront deux vibrations, mais qui ſont d'autant plus inégales entr'elles, que les deux ventres du commencement AF, & BF, auront été inégaux entr'eux.

28. Ayant donc continué la figure initiale d'une maniere renverſée ſur les parties prolongées Ab & Ba, ma conſtruction fournira pour les inſtans principaux ſuivans les figures que je m'en vai rapporter:

Fig. 20. I. Après le tems AC $= \frac{1}{6}$AB, la corde aura la figure repréſentée fig. 20. où le premier ventre s'étend juſqu'en G, & la partie BG eſt réduite dans ſa ſituation naturelle rectiligne.

Fig. 21. II. Après le tems AD $= \frac{2}{6}$AB, la partie AD eſt droite, & l'autre BD a un ventre courbé en haut.

Fig. 22. III. Après le tems AE $= \frac{3}{6}$AB, les deux ventres deviennent égaux, l'un AE étant tourné en bas, & l'autre BE en haut.

IV.

IV. Après le tems $AF = \frac{4}{6}AB$, il y a un ventre AF tourné en bas, & la partie BF est droite. Fig. 22.

V. Après le tems $AG = \frac{5}{6}AB$, la partie AC est droite, & l'autre BC à un ventre tourné en bas. Fig. 24.

VI. Après le tems AB, la corde reprend la figure du commencement, mais dans une situation renversée. Fig. 25.

29. Depuis le tems $= AB$ la corde reprendra dans un ordre renversé les mêmes figures qu'elle a eues aux tems $\frac{5}{6}AB$, $\frac{4}{6}AB$ &c. & enfin après le tems $= 2AB$ elle se trouvera parfaitement rétablie dans son état premier (fig. 19.): pendant lequel tems elle aura achevé deux vibrations entieres. Mais durant chaque vibration entiere, dont le tems est $= AB$, les différentes parties de la corde seront portées d'un mouvement tout particulier. Car le point C passe deux fois par l'axe, d'abord après le tems $\frac{3}{6}AB$ & ensuite après le tems $\frac{5}{6}AB$, la différence étant $= \frac{1}{3}AB$. Mais quoique ce point C demeure après le premier passage au dessous de l'axe pendant le tems $= \frac{3}{6}AB$, après le second passage il ne demeure au dessus de l'axe que pendant le tems $\frac{2}{6}AB$. Ensuite il se trouvera encore au dessous pendant le tems $\frac{3}{6}AB$, mais depuis il s'arretera au dessus pendant le tems $\frac{4}{6}AB$: de sorte que les intervalles de tems entre les passages successifs du point C par l'axe sont comme les nombres 3, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 4 &c. & partant ce point paroitra, pendant le tems $2AB$, achever 4 vibrations, mais inégales entr'elles.

30. Une semblable irrégularité regne aussi entre les passages successifs par l'axe AB, du point G, mais les points D & F demeurent pendant des intervalles de tems égaux $= \frac{4}{6}AB$ alternativement au dessus & au dessous de l'axe, de sorte que ces deux points semblent achever 3 vibrations pendant le tems $= 2AB$. Pour le point du milieu E, il demeure toujours pendant un tems $= AB$ au-dessus & d'autant au dessous de l'axe. Donc pendant que la corde entiere rend un certain son principal, quelques uns de ses élé-

mens

mens ſembleront rendre un ton plus haut d'une octave, d'autres donneront un ton plus haut d'une quinte: tandis que d'autres produiſent le même ſon principal. Cependant il faut bien remarquer que, dans ce cas, l'octave produite par les points C & G eſt très impure, puisque les intervalles de tems que ces points demeurent ſucceſſivement au deſſus & au deſſous de l'axe, ſont fort inégaux entr'eux, puisque ce ne ſont que les termes $= 3$ de la ſerie 3, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 4 &c. qui s'accordent avec l'octave, tandis que les termes 2 & 4 concourent à produire la quinte & la douzieme.

31. De là on jugera aiſément, quelles irrégularités doivent ſe trouver dans le mouvement des cordes, lorsque la figure initiale aura pluſieurs ventres inégaux entr'eux: lesquelles n'empêcheront pas pourtant, que le mouvement dans ſa totalité ne ſoit très régulier: on comprendra auſſi que pluſieurs tels mouvemens peuvent être réunis enſemble dans la même corde, & cela de la même maniere que M. Bernoulli a fait voir, que pluſieurs mouvemens réguliers s'y peuvent trouver à la fois. D'où il faut conclure, que la ſolution de M. Bernoulli ne renferme que les mouvemens réguliers, qui peuvent avoir lieu dans les cordes vibrantes: & on ne ſauroit plus douter que les cordes ne ſoient ſuſceptibles d'une infinité d'autres mouvemens irréguliers, que ma méthode découvre tous ſans aucune difficulté. Cette même concluſion regarde auſſi M. d'Alembert, entant qu'il prétend que l'Analyſe ne s'étend qu'à la détermination des mouvemens réguliers, quoiqu'il n'en nie pas l'exiſtence.

32. Mais cette même circonſtance, qu'on a trouvé moyen d'appliquer l'Analyſe à des cas, qui en ont paru entierement exclus, ſemble mériter l'attention de tous les Géometres. Jusqu'ici on n'a pas cru que l'Analyſe fut applicable à des lignes courbes mécaniques, qui ne ſauroient être renfermées dans aucune équation, ou qui ſont deſtituées de toute loi de continuité. Cela eſt bien vrai à l'égard de cette partie de l'Analyſe qui ne s'occupe qu'à des fonctions d'une ſeule quantité variable, à laquelle on s'eſt presque unique-

quement appliqué jusqu'ici : mais dès qu'on traite des fonctions de deux ou plusieurs variables, comme dans le cas des cordes vibrante, l'appliquée y doit être considérée comme une fonction non seulement de l'abscisse x, mais aussi du tems t; cette partie de l'Analyse est très essentiellement différente de la précédente, & s'étend même à des fonctions destituées de toute loi de continuité. Cette partie, dont nous ne connoissons presque encore que les premiers élémens, mérite sans doute que tous les Géometres réunissent leurs forces pour la cultiver.

DÉMONSTRATION RIGOUREUSE
DE MA CONSTRUCTION DU PROBLEME DES CORDES VIBRANTES.

33. D'abord, j'envisage le probleme des cordes vibrantes sous ce point de vue, *que la figure qu'on a imprimée au commencement à la corde, étant donnée, il faut déterminer le mouvement que recevra la corde après avoir été relâchée subitement:* où l'on suppose, que la figure initiale ne s'écarte qu'infiniment peu de son état naturel & rectiligne. Avec cette restriction, je regarde la figure initiale comme une courbe quelconque, sans me mettre en peine, si elle peut être exprimée par quelque équation, ou si elle est décrite d'une maniere irréguliere quelconque. Dans l'un & l'autre cas, il est également certain que, dès que la corde sera relâchée, elle sera aussi mise en mouvement; & la recherche de ce mouvement doit être regardée sans doute comme un probleme très réel, qui mérite à tous égards l'attention des Géometres. Si l'Analyse est suffisante à le résoudre ou non? c'est une question tout à fait étrangere; & si la solution est impossible en général, l'impossibilité ne se manifestera que trop tôt dans les recherches qu'on doit entreprendre pour arriver à la solution.

34. Soit donc la longueur de la corde $AB = a$, que je suppose par tout également épaisse, son poids $= M$, & la force Fig. 26.

dont

dont elle eſt tendue $= F$. Cela poſé ſoit AMB la figure, qu'on a dabord imprimée à la corde, & qu'après un tems quelconque de t ſeconde elle ait été réduite à la figure AYB, qui comme l'initiale doit néceſſairement paſſer par les deux termes A & B, où la corde eſt fixée. Donc, poſant pour cette courbe AYB une abſciſſe quelconque $AX = x$, & l'appliquée $XY = y$, il eſt evident que y ſera une certaine fonction tant de l'abſciſſe $AX = x$ que du tems t, de ſorte que l'appliquée y doit être conſidérée & traitée comme une fonction des deux variables x & t, d'où l'on comprend ce que ſignifient ces formules différentielles $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ & $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$. Il eſt bon de remarquer ici, que la formule $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ exprime la viteſſe dont le point Y s'éloigne de l'axe, & que cette viteſſe eſt déterminée par l'eſpace qui en ſeroit parcouru dans une ſeconde.

35. Pour déterminer la nature de cette fonction y, les principes de Mécanique fourniſſent cette équation différentielle du ſecond degré $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fag}{M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, où g marque la hauteur d'où un corps peſant tombe dans une ſeconde. Je ne m'arrête point à démontrer cette formule, puiſqu'elle eſt reconnue juſte de tous ceux qui ont traité cette matiere, ſans aucune conteſtation. Auſſi l'intégration ne ſauroit être révoquée en doute, d'autant plus que M. d'Alembert lui-même en eſt le premieur Inventeur. Or, poſant pour abréger $\frac{2Fag}{M} = cc$, l'intégrale complete de cette équation eſt $y = \Gamma:(x + ct) + \Delta:(x - ct)$ où les caracteres Γ & Δ marquent des fonctions quelconques des quantités $x + ct$ & $x - ct$. Cette double univerſalité eſt introduite par la double intégration qui y a conduit. Car, dans ces ſortes d'intégrations, telles fonctions indéterminées tiennent lieu des conſtan-

conſtantes arbitraires, que les intégrations ordinaires renferment. Ce qui diſtingue eſſentiellement l'intégration des fonctions à deux variables de celles qui n'en renferment qu'une ſeule.

36. On ne ſauroit ſe former une plus juſte idée d'une telle fonction générale qu'en concevant une courbe quelconque, décrite ſur l'axe AB, où prenant une abſciſſe égale à $x + ct$ ou à $x - ct$, l'appliquée repréſentera la dite fonction. Ainſi on n'aura qu'à concevoir deux telles lignes courbes, l'une pour repréſenter la fonction marquée par le caractère Γ, & l'autre pour celle du caractère Δ; j'employerai ces mêmes caractères pour déſigner ces deux courbes. Ayant donc décrit deux telles lignes courbes Γ & Δ ſur l'axe AB, qu'on prenne dans la premiere Γ l'appliquée qui répond à l'abſciſſe $x + ct$, & dans l'autre Δ l'appliquée qui repond à l'abſciſſe $x - ct$: alors la ſomme de ces deux appliquées fournira une telle valeur pour y, qui convient infailliblement à l'équation différentielle $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$: d'où l'on voit que cette ſolution eſt infiniment générale, puisqu'on peut tirer les deux courbes Γ & Δ à volonté. Je remarque ſeulement que, puisque la valeur de y doit être extrémement petite, on n'a qu'à multiplier la ſomme des deux dites appliquées par une fraction très petite, vu qu'il eſt clair que, ſi à l'équation différentielle ſatisfait une valeur $y = u$, il ſatisfera auſſi la valeur $y = \frac{u}{1000}$, & en général $y = mu$, de ſorte qu'on peut faire le coëfficient m auſſi petit qu'on voudra.

37. Maintenant il ne s'agit que déterminer les deux courbes Γ & Δ, qui jusqu'ici ont été arbitraires, en ſorte qu'elles conviennent aux conditions que notre probleme renferme. Il en eſt ici de même que de tous les problemes dont la ſolution ſe trouve par des intégrations, où les conſtantes arbitraires que chaque intégration introduit dans le calcul, doivent toujours être déterminées

par

par les conditions du probleme. Or, dans notre cas, la principale condition eſt, qu'au commencement, ou poſant $t = 0$, la figure de la corde provienne préciſément la même que celle qui eſt preſcrite AMB. Poſons donc le tems $t = 0$, & la valeur de y, qui ſera $y = \Gamma : x + \Delta : x$, doit devenir égale à l'appliquée XM de la courbe donnée: ou bien les deux courbes Γ & Δ doivent être telles, que la ſomme de leurs appliquées, qui répondent à la même abſciſſe $AX = x$ devienne $= XM$. Conſidérant donc l'une des deux courbes Γ & Δ comme donnée, l'autre ſera déterminée par cette condition: il faut donc chercher encore une autre condition renfermée dans le probleme, pour déterminer entierement toutes les deux courbes Γ & Δ.

38. Cette autre condition eſt contenue dans la maniere dont la corde eſt relâchée de ſon état initial forcé, puiſque nous ſuppoſons que dans cet inſtant la corde n'a encore aucun mouvement. De là, prenant le tems $t = 0$, il faut que la viteſſe de chaque point de la corde évanouiſſe. Or, en général après le tems t, la viteſſe du point Y eſt $= \left(\frac{dy}{dt}\right)$, ou bien $= c\Gamma' : (x+ct) - c\Delta' : (x-ct)$, où Γ' & Δ' marquent les fonctions différentielles, en ſorte que ſi nous poſions $\Gamma : u = v$, nous aurions $\Gamma' : u = \frac{dv}{du}$; ainſi Γ' & Δ' ſeront repréſentés par des courbes, dont les appliquées ſont les tangentes des angles dont les élémens des courbes Γ & Δ ſont inclinés à l'axe AB. Poſons maintenant le tems $t = 0$, & la formule $c\Gamma' : x - c\Delta' : x$ exprimera la viteſſe du point M de la corde au commencement, laquelle devant être $= 0$, nous aurons $\Gamma' : x = \Delta' : x$. Donc, puiſque ces deux fonctions différentielles ſont égales entr'elles, les intégrales $\Gamma : x$ & $\Delta : x$ le ſeront auſſi, vu qu'elles ne différeront que d'une quantité conſtante, ce qui revient au même que ſi nous poſions $\Gamma : x = \Delta : x$.

39. Donc, puisque la premiere condition exige qu'il ſoit $\Gamma: x + \Delta: x = XM$, & la ſeconde $\Gamma: x = \Delta: x$, toutes les deux courbes arbitraires ſe trouvent maintenant déterminées par l'état initial, & on aura $\Gamma: x = \Delta: x = \frac{1}{2} XM$. Ces deux courbes ſeront donc égales entr'elles, & leurs appliquées partout égales à la moitié des appliquées XM de la figure initiale, de ſorte que cette figure nous fournit l'une & l'autre des courbes Γ & Δ. Ou bien la figure initiale elle-même AMB pourra ſervir à repréſenter les deux courbes Γ & Δ, pourvu que nous établiſſions notre équation ſous cette forme:

$$XY = y = \tfrac{1}{2}\Gamma: (x + ct) + \tfrac{1}{2}\Gamma: (x - ct) \text{ à cauſe de } \Delta = \Gamma,$$

où les formules $\Gamma: (x + ct)$ & $\Gamma: (x - ct)$ marquent dans la courbe initiale AMB les appliquées qui répondent aux abſciſſes $x + ct$ & $x - ct$. De là on connoitra auſſi aiſément la viteſſe du point Y, tendante à l'éloigner de l'axe par cette équation

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{c}{2}\,\Gamma': (x + ct) - \frac{c}{2}\,\Gamma': (x - ct).$$

40. Pour trouver donc, après un tems quelconque de t ſecondes, l'état de la corde, ou bien la poſition de chacun de ſes points, qui dans l'état naturel ſe trouvoit en X, on prendra ſur l'axe de part & d'autre de ce point X les intervalles $XT = Xt = ct$, pour avoir les abſciſſes $AT = x + ct$, & $At = x - ct$. Aux points T & t, on tirera les appliquées TV & tv à la courbe initiale de la corde AMB, & la moitié de la ſomme de ces deux appliquées donnera l'appliquée cherchée XY, pour la figure que la corde aura à préſent. Mais ici on rencontre une grande difficulté, lorsque l'un ou l'autre des points T & t, ou tous les deux, tombent au delà des points A & B, ſur l'axe où la corde eſt fixée: on voit bien que, pour cet effet, il faut continuer de part & d'autre la courbe initiale AMB; & comme toutes les objections qu'on a faites à ma conſtruction, roulent ſur la maniere de cette continuation, je tâcherai

 de

de la mettre entierement hors de doute, en l'établissant de la maniere suivante.

41. Si la longueur de la corde AB étoit infinie, cette difficulté évanouiroit; concevons donc la corde continuée à l'infini des deux côtés, & tendue par la même force F; & nous aurons à examiner cette question, s'il ne seroit pas possible de donner à cette corde infinie une telle figure initiale, que la partie AB en reçoive le même mouvement dont elle est agitée actuellement? Car, si cela est possible, nous n'aurons qu'à prolonger dans la pensée la corde AB à l'infini, & lui supposer ladite figure initiale par toute sa longueur; d'où il sera aisé ensuite de déterminer le mouvement de la partie AB pendant toute sa durée. Je me flatte que cette fiction, dont on fait très souvent de semblables presque dans toutes les recherches, ne trouvera aucune contradiction; aussi ne décidé-je pas encore si cette nouvelle question est possible ou non? Mais, si elle est possible, personne ne sauroit plus nier que cette considération ne nous conduise à la connoissance du véritable mouvement dont notre corde AB sera agitée.

42. Or la corde AB n'est terminée aux points A & B, qu'entant que ces points demeurent immobiles pendant tout le mouvement; donc, quand même la corde seroit étendue au delà des termes A & B, mais que son mouvement seroit tel, que les points A & B demeurassent toujours en repos, la partie AB auroit sans doute le même mouvement que si la corde AB étoit fixée aux points A & B, & que les parties prolongées en fussent entierement retranchées, pourvu que la même tension y soit constamment conservée. Maintenant, après avoir établi ce principe incontestable, il est évident que, si la corde AB étoit seulement prolongée en a & b, de sorte que $Ab = Ba = AB$, & qu'on eût donné aux parties prolongées Ab & Ba, les figures renversées de celle de AMB, comme j'ai expliqué ci-dessus; les points A & B demeureroient en repos, du moins tant que les points T & t ne passent point au delà des termes a & b: & il est bien certain que le mouvement de AB sera pré-

Planche V. Fig. 4.

précisément le même que si les parties Ab & Ba étoient retranchées.

43. On ne sauroit donc plus avoir le moindre doute, que par la nature même de la question la courbe AMB ne doive être continuée au moins par les intervalles Ab & Ba, selon la loi que j'ai établie ci-dessus; & les raisons que j'ai alléguées pour ces deux intervalles, ont également lieu pour tous les autres qu'on y voudra ajouter au delà à l'infini. Ainsi, quand même la courbe AMB seroit réguliere & auroit sa continuation naturelle, comme si c'étoit, par exemple, un arc de cercle, cette continuation naturelle n'entreroit ici pour rien en compte, & il faudroit toujours sur les lignes Ab & Ba décrire de semblables arcs de cercle. Quelque choquant que cela puisse paroitre à quelques Géometres, j'espere qu'on ne trouvera plus rien à reprocher à ma construction, à laquelle on ne sauroit plus refuser la plus grande généralité, puisqu'elle s'étend également à toutes les figures possibles, dont la corde AB est susceptible au commencement. En effet, qui pourroit nier qu'il ne fût possible de donner d'abord à la corde la figure AMCB, composée par exemple d'un arc de cercle AMC, & d'une ligne droite CB, quoique l'une de ces deux parties ne soit certainement pas la continuation naturelle de l'autre. Planche VI. Fig. 6.

44. Mais, quoique cette construction soit tirée de l'équation intégrale $y = \Gamma : (x + ct) + \Delta : (x - ct)$ qui renferme la solution du probleme, M. d'Alembert semble nier qu'elle satisfasse à l'équation differentielle du second degré $\left(\frac{ddy}{dt}\right) = cc \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, que la Théorie fournit immédiatement. Il allegue quelques difficultés, auxquelles il faut encore répondre. Or d'abord, comment peut-on douter de la bonté d'une construction, lorsqu'elle est parfaitement d'accord avec l'équation intégrale, qui contient la solution du probleme, & cela, sous le prétexte qu'elle ne convient pas parfaitement à l'équation differentielle, d'où l'intégrale est tirée. On a déjà résolu tant

 de

de problemes par le moyen des intégrations, & perſonne ne s'eſt encore aviſé de révoquer la ſolution en doute; d'autant plus que c'eſt toujours des équations intégrales, qui fourniſſent les conſtructions, & tant qu'on n'y peut pas parvenir, on ne ſauroit ſe vanter d'une ſolution parfaite.

45. Mais voyons quels ſont les inconveniens qu'on rencontre en remontant de notre conſtruction aux formules différentielles du premier & ſecond degré. Soit donc AMB la figure initiale donnée à la corde AB, à laquelle on ait conſtruit ſur la prolongation $Ba = AB$ la figure ſemblable amB dans une ſituation renverſée: de ſorte qu'après le tems t en prenant des intervalles $PT = Pt = ct$, le point P pris à la diſtance $AP = x$ ſe trouve éloigné de l'axe au deſſus de l'intervalle $y = \frac{1}{2}\Gamma : (x + ct) + \frac{1}{2}\Gamma : (x - ct) = \frac{1}{2}(-tv + TV)$, à cauſe de $TV = \Gamma : AT$ & $-tv = \Gamma\, At$, puiſqu'on a en général $PM = \Gamma : AP = \Gamma : x$. Maintenant, qu'on conſtruiſe la courbe $A' M' B' m' a'$, en ſorte

Planche VII. Fig. 27.

que ſon appliquée ſoit $- PM' = \frac{d.PM}{d.AP} = \frac{d.\Gamma : x}{dx} = \Gamma' : x$, ce qu'on fera en prenant une certaine ligne pour unité. Donc, puiſque

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2}\Gamma' : (x + ct) + \frac{1}{2}\Gamma' : (x - ct)$$

$$\& \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{c}{2}\Gamma' : (x + ct) - \frac{c}{2}\Gamma' : (x - ct)$$

on aura par cette nouvelle courbe:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2}(-tv' + TV') \quad \& \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{c}{2}(-tv' - TV')$$

dont la derniere formule $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ exprime la viteſſe du point P de la corde dirigée en haut après le tems t. Au reſte, il eſt évident que les

les appliquées de ces courbes, qui tombent dans la figure au deſſous de l'axe, doivent être priſes négatives.

46. Cette ligne $A' M' B' m' a'$ eſt bien tirée dans la figure d'un trait continu; mais on objecte que ſi la courbe A M B n'étoit pas continue, & qu'elle eût des angles, il en réſulteroit des interruptions dans la ligne $A' M' B' m' a'$. Mais comme la premiere condition de notre probleme exige, que non ſeulement toutes les appliquées de la courbe A M B, mais auſſi les angles dont tous ſes élémens ſont inclinés à l'axe, ſoient infiniment petits, de tels angles qu'on veut ſuppoſer dans la figure A M B, ſont déjà exclus, n'étant au plus qu'infiniment petits. Mais, quand même il y auroit quelque interruption dans cette ſeconde ligne, elle n'affecteroit qu'un élément, & partant ne troubleroit pas la ſolution. En tout cas, on n'auroit qu'à emouſſer infiniment peu les anguloſités dans la figure A M B, pour faire évanouir cet inconvénient, & par cela même, qu'on n'auroit changé qu'infiniment peu la figure A M B, toutes les concluſions qu'on en tire, demeureront toujours les mêmes. De telles objections ſont entierement ſemblables à celles qu'on a d'abord faites contre le calcul des infiniment petits.

47. Or ces inconvéniens deviendront encore beaucoup plus conſidérables quand on remonte aux différentiels du ſecond degré, où il faut décrire une nouvelle ligne $A'' M'' B'' m'' a''$ de la précédente $A' M' B' m' a'$, de la même maniere que celle-ci a été formée de la figure A M B $m a$. Car, puiſque la ligne $A' M' B' m' a'$ peut avoir en B' un angle plus conſidérable, on obtiendra deux lieux pour le point B'', l'un au deſſous & l'autre au-deſſus de l'axe, ce qui ſemble rendre incertaines les formules différentielles du ſecond degré qui renferment les accélérations inſtantanées. En effet, pour le point de la corde P, après le tems t, on aura par cette troiſieme ligne:

$$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \tfrac{1}{2}\Gamma'': (x+ct) + \tfrac{1}{2}\Gamma'': (x-ct) = \tfrac{1}{2}(tv''-TV''),$$

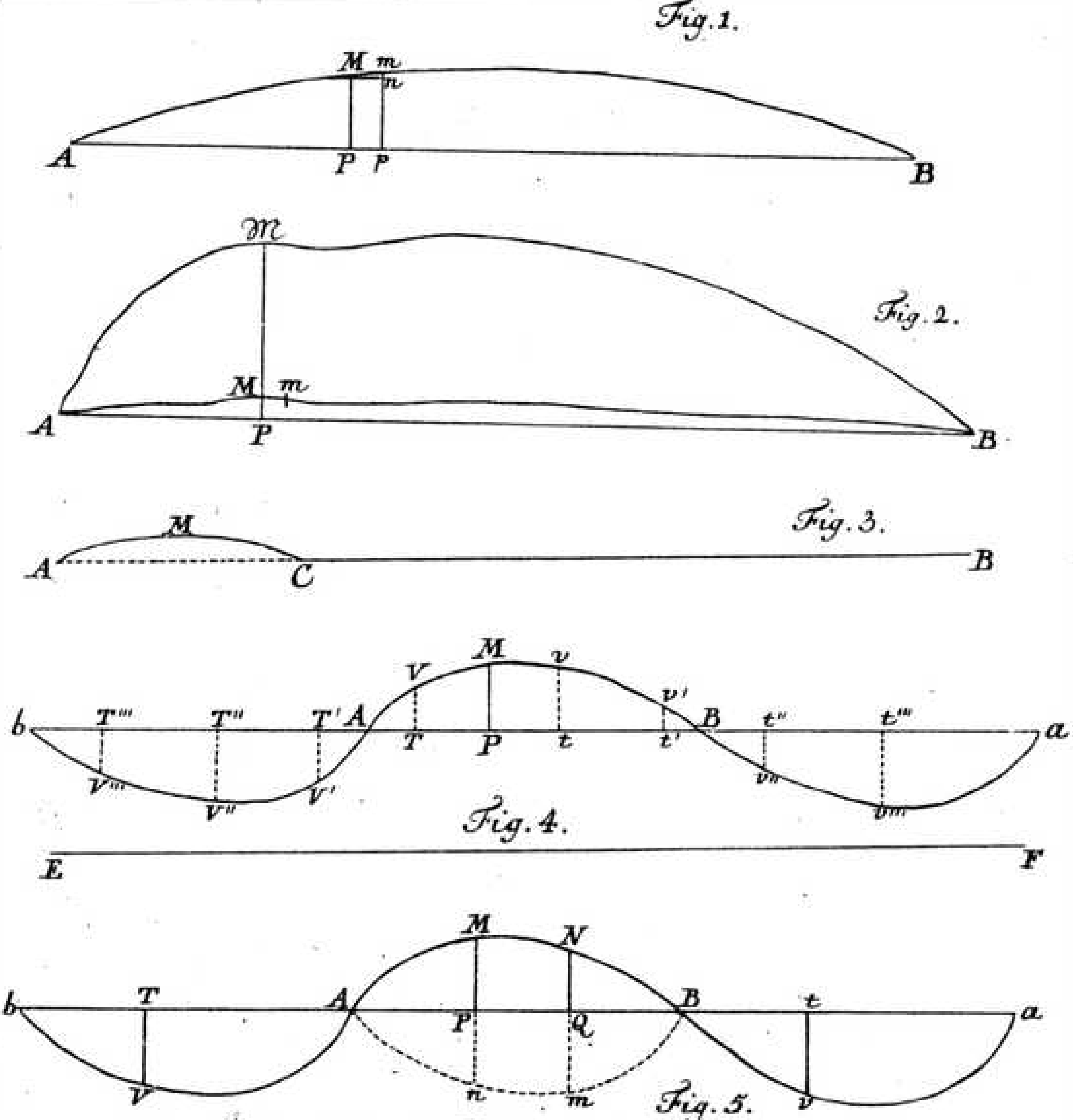
$$\& \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{cc}{2}\Gamma'': (x+ct) + \frac{cc}{2}\Gamma'': (x-ct) = \frac{cc}{2}(tv''-TV'').$$

 Donc

Donc, si le point t tomboit en B, on seroit incertain, si pour tv'', on devroit prendre l'appliquée positive ou négative BB''. Mais, quoiqu'on y commette quelque erreur, cette erreur n'affectera qu'un seul élément, & sera par conséquent sans aucune conséquence, étant toujours infiniment petite.

48. D'ailleurs, nonobstant cette incertitude, on aura toujours ouvertement $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, ce qui étant l'équation principale, à laquelle la Théorie conduit immédiatement, il est évident que notre construction lui satisfait aussi bien qu'à l'équation intégrale qui en a été conduite. Et après tout cela, on n'a qu'à émousser infiniment peu l'angle B' dans la seconde ligne, pour réunir les deux points B'' & B'' en B, & faire évanouir par ce moyen toutes les difficultés. Le changement qui en réjaillira sur la premiere courbe, AMBma, ne sera aussi qu'infiniment petit, & partant ne changera rien dans l'état initial de la corde, d'où la détermination du mouvement a été tirée. Toutes ces objections sont donc précisément de la même nature, que celles qu'on a faites autrefois contre le calcul différentiel, en lui reprochant que dans certains élémeus quelques particules n'évanouissent point, qu'on néglige néanmoins à l'égard des autres quantités. Comme aujourd'hui ces doutes sont entierement dissipés, ceux qu'on fait contre cette détermination du mouvement des cordes, tomberont aussi d'eux-mêmes.

ÉCLAIR-



Mem. de l'Acad. Tome XXI. 1765 Pl. V. pag. 334.

Fig. 6.

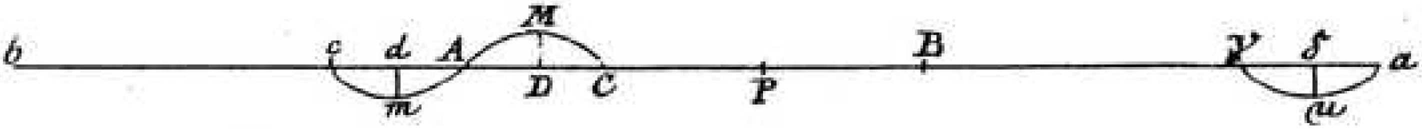
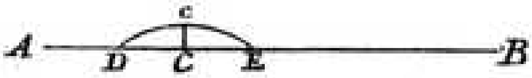
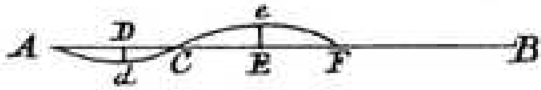


Fig. 7.



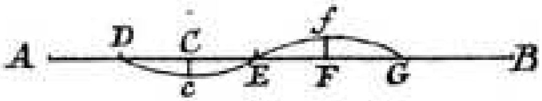
après le tems AD

Fig. 8.



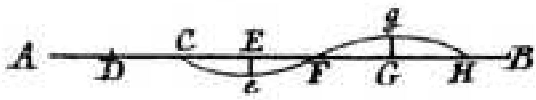
après le tems 2 AD = AC

Fig. 9.



après le tems 3 AD

Fig. 10.



après le tems 4AD = 2 AC

Fig. 11.

après le tems AB

Fig. 12.

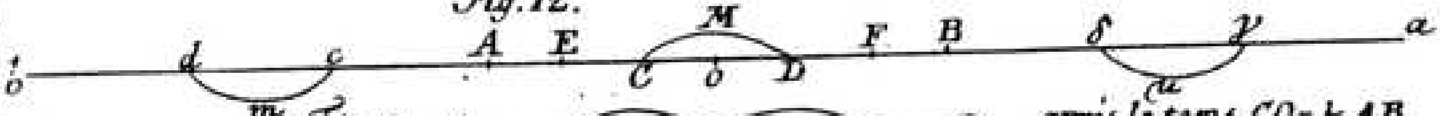


Fig. 13.

après le tems CO = 1/6 AB

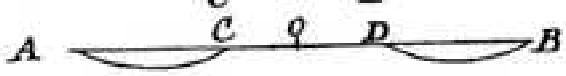
Fig. 14.

après le tems CD = 2/6 AB

Fig. 15.

après le tems AO = 3/6 AB

Fig. 16.



après le tems AD = 4/6 AB

Fig. 17.

après le tems = 5/6 AB

Fig. 18.

après le tems = AB

Mem. de l'Acad. Tome XXI. 1765 Pl. VI. pag. 334.

Fig. 19

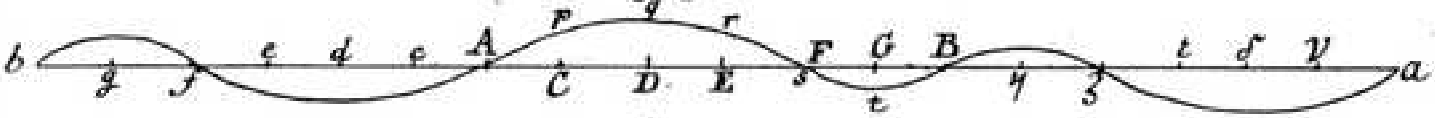


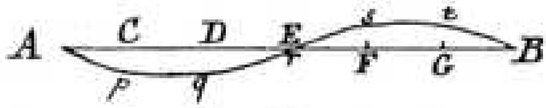
Fig. 20.

Après le tems AC

Fig. 21.

Après le tems AD

Fig. 22.



Après le tems AE

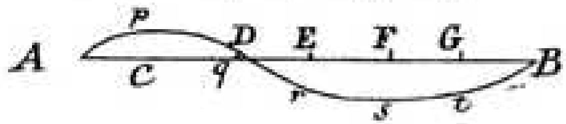
Fig. 23.

Après le tems AF

Fig. 24.

Après le tems AG

Fig. 25.



Après le tems AB

Fig. 26.

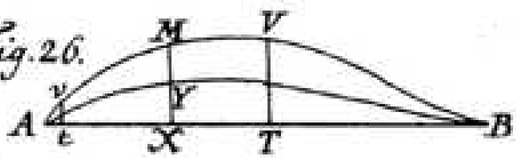


Fig. 27.