



## PROBLEME.

UN CORPS ÉTANT ATTIRÉ EN RAISON RÉCIPROQUE QUARRÉE DES DISTANCES VERS DEUX POINTS FIXES DONNÉS, TROUVER LES CAS OÙ LA COURBE DÉCRITE PAR CE CORPS SERA ALGÈBRIQUE,

RÉSOLU PAR M. EULER.

---

Voilà un probleme qui paroît aussi important que difficile. On convient aujourd'hui, que l'Astronomie seroit portée au plus haut degré de perfection, si l'on trouvoit moyen de déterminer le mouvement de trois corps, qui s'attirent mutuellement en raison réciproque quarrée des distances. Mais tous les soins que les Géometres ont apportés jusqu'ici pour cet effet ont été inutiles; ils y ont rencontré du côté de l'Analyse des obstacles invincibles, malgré les grands progrès qu'on a déjà faits dans cette étude. Donc tous les pas qu'on puisse faire pour approcher de ce grand but, seront très importants. C'est dans cette vue, que je me suis appliqué à la question, où deux corps étant supposés fixes, on demande le mouvement d'un troisieme, qui y seroit attiré suivant la loi mentionnée. Je crois que tous ceux, qui voudront entreprendre la solution de ce probleme, y trouveront des difficultés, qui leur paroîtront presque aussi insurmontables, que dans le grand probleme fondamental de l'Astronomie. Du moins, tant qu'on ne sauroit surmonter ces moindres difficultés, on espéreroit en vain de surmonter les plus grandes. Or c'est après bien des essais inutiles, que je suis enfin parvenu à la solution de ce dernier probleme par un hazard occasionné par une erreur singuliere qui m'y a conduit. Ayant trouvé cette solution j'ai remarqué, que  
parmi

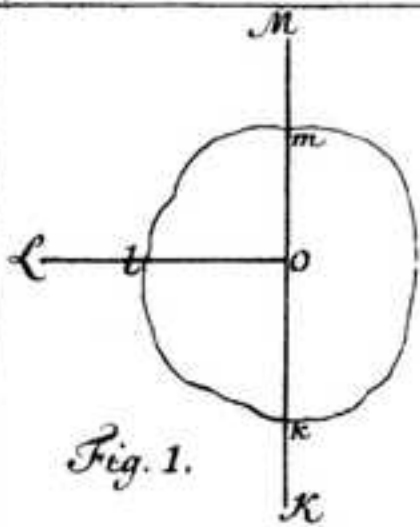


Fig. 1.

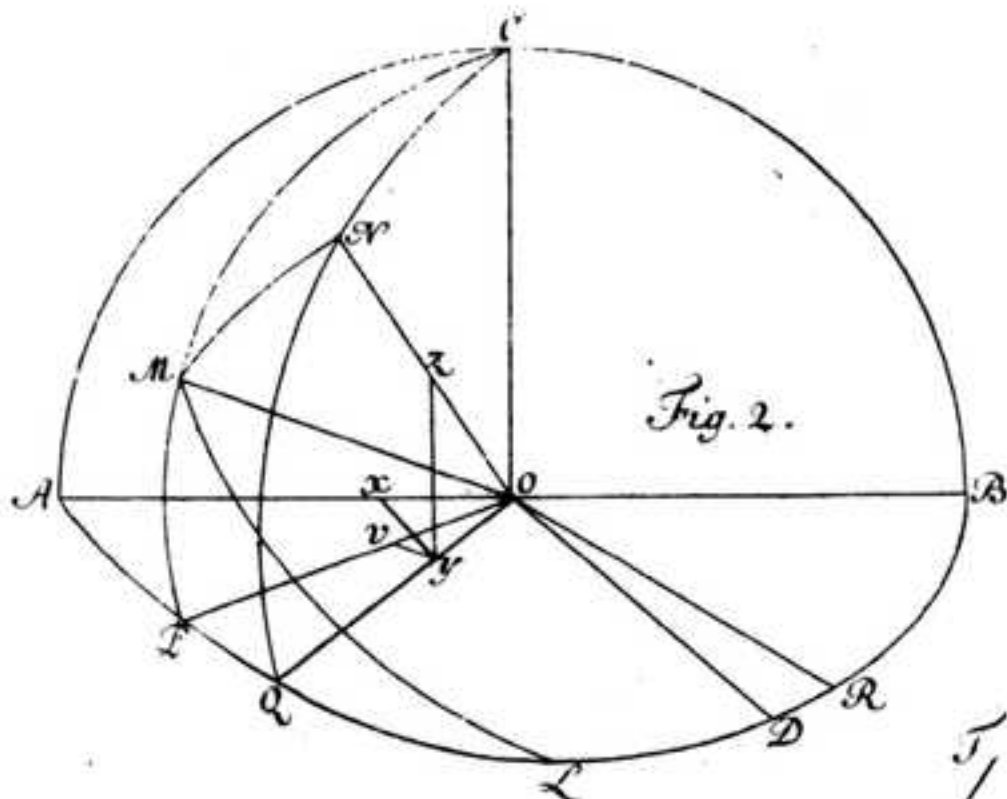


Fig. 2.

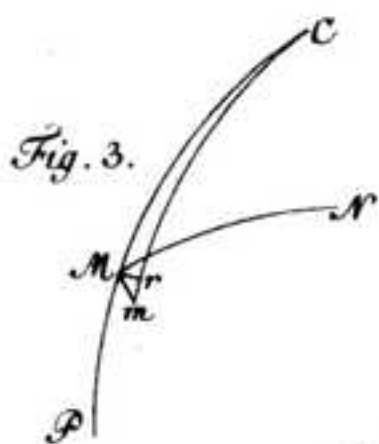


Fig. 3.

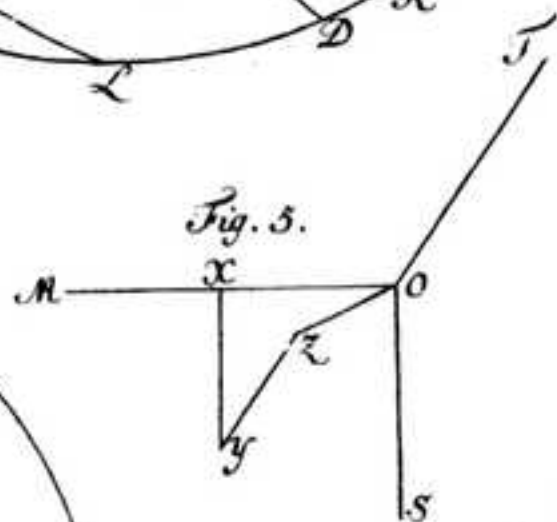


Fig. 5.

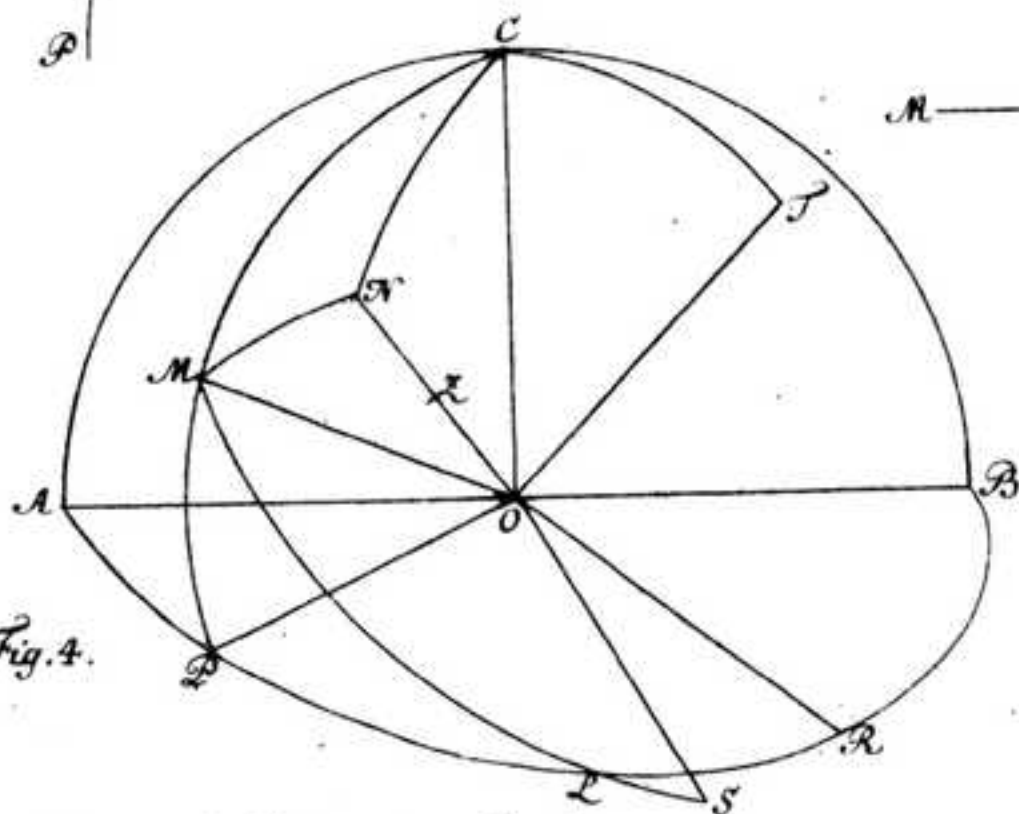


Fig. 4.



parmi l'infinie variété des courbes, que le corps attiré vers deux centres fixes peut décrire, selon la vitesse & direction qui lui aura été imprimée au commencement; il y a des courbes algébriques, dont la recherche demandant une adresse tout nouvelle de l'Analyse, me paroît à tous égards digne de l'attention des Géomètres, & c'est le sujet du problème que je me propose de traiter.

Pour y réussir il faut expédier les articles suivans :

*Premièrement*, il faut chercher les formules différentio-différentielles, qui renferment en général la détermination du mouvement du corps.

*En second lieu*, il faut intégrer ces formules pour avoir des équations différentielles du premier degré, qui contiennent les loix du mouvement.

*En troisième lieu*, il faut ramener ces équations à la séparation des variables, pour construire le problème par des quadratures.

*En quatrième lieu* enfin, il s'agit de déterminer les cas, où la courbe décrite devient algébrique.

Ces quatre articles, dont je développerai chacun séparément, meneront à la solution du problème proposé.

#### P R E M I E R   A R T I C L E.

I. Soient A & B les deux centres de force, & qu'un corps à la distance  $= z$  soit attiré vers A par la force  $= \frac{A}{z^2}$ , &

vers B par la force  $= \frac{B}{z^2}$ , de sorte que A & B marquent la vertu attractive absolue de ces deux centres. Soit outre cela leur distance  $AB = a$ , & que le corps attiré par ces deux centres, du mouvement duquel il est question, se trouve à présent en M. Nommons

les distances aux centres de forces  $AM = v$ , &  $BM = u$ , les angles  $BAM = \zeta$ , &  $ABM = \eta$ , de sorte que

$$v = \frac{a \sin \eta}{\sin(\zeta + \eta)}, \quad \& \quad u = \frac{a \sin \zeta}{\sin(\zeta + \eta)}.$$

Ayant tiré de  $M$  à  $AB$  la perpendiculaire  $MP$ , posons outre cela  $AP = x$ , &  $PM = y$ , & nous aurons :

$$x = v \cos \zeta; \quad y = v \sin \zeta = u \sin \eta, \quad \& \quad BP = a - x = u \cos \eta.$$

2. Cela posé, le corps  $M$  étant attiré vers  $A$  par la force  $= \frac{A}{v^2}$ , la décomposition de cette force donne pour la direction  $AP$

la force  $= - \frac{Ax}{v^3} = - \frac{A \cos \zeta}{vv}$ , & pour la direction  $PM$  la

force  $= - \frac{Ay}{v^3} = - \frac{A \sin \zeta}{vv}$ . Ensuite l'attraction du centre  $B$

dont la force est  $= \frac{B}{u^2}$  donne par une semblable décomposition

pour la direction  $AP$  la force  $= + \frac{B(a - x)}{u^3} = + \frac{B \cos \eta}{uu}$ ,

& pour la direction  $PM$  la force  $= - \frac{By}{u^3} = - \frac{B \sin \eta}{uu}$ , de

sorte que le corps  $M$  est sollicité selon les directions fixes de nos coordonnées  $AP$  &  $PN$  en tout :

$$\text{selon } AP \text{ par la force} = - \frac{Ax}{v^3} + \frac{B(a - x)}{v^3},$$

$$\text{selon } PM \text{ par la force} = - \frac{Ay}{v^3} - \frac{By}{u^3}.$$

Il est évident que je parle ici des forces accélératrices, & que je suppose le mouvement du corps  $M$  se faire dans le même plan avec les centres de forces  $A$  &  $B$ .

3. Soit



3. Soit maintenant l'élément du tems  $\equiv dt$ , qui étant pris pour constant, les principes de Mécanique nous fournissent ces deux équations différentio-différentielles :

$$ddx = 2g dt^2 \left( -\frac{Ax}{v^3} + \frac{B(a-x)}{u^3} \right)$$

$$ddy = 2g dt^2 \left( -\frac{Ay}{v^3} - \frac{By}{u^3} \right),$$

où  $g$  marque une certaine constante introduite pour ramener les conclusions à des mesures absolues. Mais, comme ici il ne s'en agit point, il n'est pas nécessaire d'expliquer ce qui regarde la valeur de cette lettre  $g$ , il suffit de la regarder en général comme une constante.

#### S E C O N D   A R T I C L E.

4. Pour trouver les intégrales de ces deux équations différentielles du second degré, je remarque d'abord que, puisque

$$vv = xx + yy, \quad \& \quad uu = (a-x)^2 + yy,$$

il y a, en différentiant :

$$v dv = x dx + y dy; \quad \& \quad u du = -(a-x) dx + y dy.$$

Donc, multipliant la première équation par  $2 dx$  & l'autre par  $2 dy$ , leur somme donnera :

$$2 dx ddx + 2 dy ddy = 4g dt^2 \left( -\frac{A(x dx + y dy)}{v^3} - \frac{B(-(a-x) dx + y dy)}{u^3} \right),$$

qui se réduit à cette équation intégrable :

$$2 dx ddx + 2 dy ddy = 4g dt^2 \left( -\frac{A dv}{vv} - \frac{B du}{uu} \right),$$

dont l'intégrale est évidemment :

$$dx^2 + dy^2 = 4g dt^2 \left( \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a} \right),$$

où  $C$  est une constante introduite pour rendre l'intégrale complète.

5. Si



5. Si l'on veut, outre les distances  $v$  &  $u$ , introduire les angles  $\zeta$  &  $\eta$ , à cause de

$$dx = dv \cos \zeta - v d\zeta \sin \zeta, \quad \& \quad dy = dv \sin \zeta + v d\zeta \cos \zeta,$$

on aura

$$dx^2 + dy^2 = dv^2 + v v d\zeta^2,$$

& encore par une semblable manière:

$$dx^2 + dy^2 = du^2 + u u d\eta^2,$$

où il faut remarquer que  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  marque l'élément de la courbe, décrit pendant le tems  $dt$ ; & partant le quarré de la vitesse,

que le corps aura en M, sera proportionnel à cette formule  $\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}$ .

Au reste l'équation trouvée dans le §. précédent sera

$$dv^2 + v v d\zeta^2 = 4g dt^2 \left( \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a} \right).$$

6. Mais, ayant deux équations différentio-différentielles, il en faut chercher encore une intégrale, ce qui ne paroît pas si aisé. Pour cet effet je change les équations principales dans les formes suivantes:

$$x ddy - y ddx = 2g dt^2 \left( -\frac{B a y}{u^3} \right) = -2g B a dt^2 \cdot \frac{\sin \eta}{u u},$$

$$(a-x) ddy + y ddx = 2g dt^2 \left( -\frac{A a y}{v^3} \right) = -2g A a dt^2 \cdot \frac{\sin \zeta}{v v},$$

où je remarque que  $x ddy - y ddx$  est le différentiel de  $x dy - y dx$ , &  $(a-x) ddy + y ddx$  le différentiel de  $(a-x) dy + y dx$ . Or, puisque  $x = v \cos \zeta$ , &  $y = v \sin \zeta$ , nous avons  $x dy - y dx = v v d\zeta$ , & puisque  $a - x = u \cos \eta$ , &  $y = u \sin \eta$ , nous avons  $(a-x) dy + y dx = u u d\eta$ , d'où nous tirons ces deux équations:

$$d(v v d\zeta) = -2g B a dt^2 \cdot \frac{\sin \eta}{u u}, \quad \& \quad d(u u d\eta) = -2g A a dt^2 \cdot \frac{\sin \zeta}{v v}.$$

7. Mul-



7. Multiplions - en la premiere par  $u u dy$ , & l'autre par  $v v d\zeta$ , pour avoir leur somme

$uu \cdot \eta \cdot d(vv d\zeta) + vv d\zeta \cdot d(uu \cdot \eta) = + 2gadt^2 (-Ad\zeta \sin\zeta - B \cdot \eta \sin\eta)$ ,  
dont l'intégration fournit:

$$vv u u d\zeta d\eta = 2gadt^2 (A \cos\zeta + B \cos\eta + D),$$

qui étant jointe à celle que nous venons de trouver

$$dv^2 + vv d\zeta^2 = 4gdt^2 \left( \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a} \right),$$

renferme la détermination du mouvement. Or maintenant il est aisé d'en éliminer l'élément du tems  $dt$ , d'où nous parviendrons à cette équation

$$a(dv^2 + vv d\zeta^2) (A \cos\zeta + B \cos\eta + D) = \\ 2vv u u d\zeta d\eta \left( \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a} \right),$$

qui exprime la nature de la courbe décrite par le corps M indépendamment du tems.

#### TROISIEME ARTICLE.

8. Pour intégrer cette équation, si cela se pouvoit, ou pour en trouver seulement la construction, il faut observer qu'elle ne contient en effet, que deux variables, puisque les angles  $\zeta$  &  $\eta$ , dépendent des distances  $v$  &  $u$ , & réciproquement. Si nous en voulions éliminer les angles  $\zeta$  &  $\eta$ , nous parviendrions à cette équation entre  $v$  &  $u$ .

$$((v dv - u du)(u dv - v du) + a a d v d u) \left( \frac{A(aa + vv - uu)}{v} + \frac{B(aa + uu - vv) + 2D \cdot a}{u} \right) = \\ ((aa - vv - uu)dv + 2uvdu)((aa - vv - uu)du + 2uvdv) \left( \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a} \right).$$

Mais je crains fort que toutes les peines ne feroient inutiles ; qu'on voudroit bien se donner pour résoudre cette équation si embarrassée, où même les différentiels  $dv$  &  $du$  montent à deux dimensions.

9. Il vaudra donc mieux éliminer les distances  $v$  &  $u$  par les formules  $v = \frac{a \sin \eta}{\sin(\zeta + \eta)}$ , &  $u = \frac{a \sin \zeta}{\sin(\zeta + \eta)}$ . Or, pour la formule  $dv^2 + vvd\zeta^2 = dx^2 + dy^2$ , servons-nous plutôt des expressions

$$x = v \cos \zeta = \frac{a \cos \zeta \sin \eta}{\sin(\zeta + \eta)}, \quad \& \quad y = v \sin \zeta = \frac{a \sin \zeta \sin \eta}{\sin(\zeta + \eta)},$$

d'où nous tirons par la différentiation

$$dx = \frac{-a d\zeta \sin \eta \cos \eta + a d\eta \sin \zeta \cos \zeta}{\sin(\zeta + \eta)^2}, \quad \&$$

$$dy = \frac{a d\zeta \sin \eta^2 + a d\eta \sin \zeta^2}{\sin(\zeta + \eta)^2},$$

& en ajoutant les quarrés, nous aurons :

$$dx^2 + dy^2 = \frac{aa(d\zeta^2 \sin \eta^2 + d\eta^2 \sin \zeta^2 - 2d\zeta d\eta \sin \zeta \sin \eta \cos(\zeta + \eta))}{\sin(\zeta + \eta)^4},$$

qu'il faut multiplier par  $a(A \cos \zeta + B \cos \eta + D)$  pour avoir le premier membre de notre équation.

10. Ensuite, ayant  $vvuu = \frac{a^4 \sin \zeta^2 \sin \eta^2}{\sin(\zeta + \eta)^4}$ , nous aurons

$2vvuu d\zeta d\eta = \frac{2a^4 d\zeta d\eta \sin \zeta^2 \sin \eta^2}{\sin(\zeta + \eta)^4}$ , qu'il faut multiplier par

$$\left( \frac{A \sin(\zeta + \eta)}{\sin \eta} + \frac{B \sin(\zeta + \eta)}{\sin \zeta} + C \right) \frac{1}{a},$$

pour





pour avoir le second membre de notre équation, lequel sera par conséquent :

$$\frac{2a^3 d\zeta d\eta \sin \zeta \sin \eta}{\sin(\zeta + \eta)^4} (A \sin \zeta \sin(\zeta + \eta) + B \sin \eta \sin(\zeta + \eta) + C \sin \zeta \sin \eta),$$

qui doit être égal à

$$\frac{a^3 (d\zeta^2 \sin \eta^2 + d\eta^2 \sin \zeta^2 - 2 d\zeta d\eta \sin \zeta \sin \eta \cos(\zeta + \eta))}{\sin(\zeta + \eta)^4} (A \cos \zeta + B \cos \eta + D).$$

Divisons de part & d'autre par  $\frac{a^3}{\sin(\zeta + \eta)^4}$ , & nous aurons

$$(d\zeta^2 \sin \eta^2 + d\eta^2 \sin \zeta^2 - 2 d\zeta d\eta \sin \zeta \sin \eta \cos(\zeta + \eta) (A \cos \zeta + B \cos \eta + D) = 2 d\zeta d\eta \sin \zeta \sin \eta (A \sin \zeta \sin(\zeta + \eta) + B \sin \eta \sin(\zeta + \eta) + C \sin \zeta \sin \eta),$$

qui se réduit à cette forme plus simple :

$$(d\zeta^2 \sin \eta^2 + d\eta^2 \sin \zeta^2) (A \cos \zeta + B \cos \eta + D) = 2 d\zeta d\eta \sin \zeta \sin \eta (A \cos \eta + B \cos \zeta + C \sin \zeta \sin \eta + D \cos(\zeta + \eta)).$$

11. Puisque  $\cos(\zeta + \eta) = \cos \zeta \cos \eta - \sin \zeta \sin \eta$ , posons  $C - D = E$ , de sorte que  $C = D + E$ , & notre équation sera représentée en sorte

$$d\zeta^2 \sin \eta^2 + d\eta^2 \sin \zeta^2 = 2 d\zeta d\eta \sin \zeta \sin \eta \frac{A \cos \eta + B \cos \zeta + D \cos \zeta \cos \eta + E \sin \zeta \sin \eta}{A \cos \zeta + B \cos \eta + D}.$$

Posons pour abréger

$$A \cos \eta + B \cos \zeta + D \cos \zeta \cos \eta + E \sin \zeta \sin \eta = P,$$

$$A \cos \zeta + B \cos \eta + D = Q,$$

& l'extraction de racine de notre équation donnera

$$d\zeta \sin \eta = \frac{d\eta \sin \zeta (P + \sqrt{PP - QQ})}{Q},$$

$$\text{ou bien } \frac{d\zeta \sin \eta}{d\eta \sin \zeta} = \frac{P + \sqrt{PP - QQ}}{Q}.$$

Or, puisque  $\frac{P + Q + \sqrt{(PP - QQ)}}{P - Q + \sqrt{(PP - QQ)}} = \frac{\sqrt{(P + Q)}}{\sqrt{(P - Q)}}$ ,

notre équation sera réduite à cette forme moins embarrassée :

$$\frac{d\zeta \sin \eta + d\eta \sin \zeta}{d\zeta \sin \eta - d\eta \sin \zeta} = \frac{\sqrt{(P + Q)}}{\sqrt{(P - Q)}}$$

12. Puisque les variables  $\zeta$  &  $\eta$  sont encore extrêmement mêlées ensemble, pour voir plus clair, faisons ces substitutions

$$\text{tang } \frac{1}{2} \zeta = p, \text{ \& tang } \frac{1}{2} \eta = q, \text{ pour avoir } \frac{d\zeta}{\sin \zeta} = \frac{dp}{p}, \text{ \& } \frac{d\eta}{\sin \eta} = \frac{dq}{q},$$

& notre équation prendra cette formule :

$$\frac{q dp + p dq}{q dp - p dq} = \sqrt{\frac{P + Q}{P - Q}}$$

Or il y a

$$P + Q = (A + B)(\cos \zeta + \cos \eta) + D(\cos \zeta \cos \eta + 1) + E \sin \zeta \sin \eta, \text{ \&}$$

$$P - Q = (A + B)(\cos \zeta - \cos \eta) + D(\cos \zeta \cos \eta - 1) + E \sin \zeta \sin \eta.$$

Mais, ayant en vertu de notre substitution :

$$\sin \frac{1}{2} \zeta = \frac{p}{\sqrt{(1 + pp)}}; \quad \cos \frac{1}{2} \zeta = \frac{1}{\sqrt{(1 + pp)}};$$

$$\sin \frac{1}{2} \eta = \frac{q}{\sqrt{(1 + qq)}}; \quad \sin \frac{1}{2} \eta = \frac{1}{\sqrt{(1 + qq)}},$$

nous en tirons :

$$\sin \zeta = \frac{2p}{1 + pp}; \quad \cos \zeta = \frac{1 - pp}{1 + pp}; \quad \sin \eta = \frac{2q}{1 + qq}; \quad \cos \eta = \frac{1 - qq}{1 + qq},$$

& il reste à substituer ces valeurs dans les formules de  $P + Q$   
&  $P - Q$ .

13. Or ces substitutions donnent :

$$\cos \zeta + \cos \eta = \frac{1 - pp}{1 + pp} + \frac{1 - qq}{1 + qq} = \frac{2 - 2ppqq}{(1 + pp)(1 + qq)},$$

$$\cos \zeta \cos \eta + 1 = \frac{(1 - pp)(1 - qq)}{(1 + pp)(1 + qq)} + 1 = \frac{2 + 2ppqq}{(1 + pp)(1 + qq)},$$

$$\sin \zeta \sin \eta = \frac{4pq}{(1 + pp)(1 + qq)}.$$

$$\cos \eta - \cos \zeta = \frac{1 - qq}{1 + qq} - \frac{1 + pp}{1 + pp} = \frac{2pp - 2qq}{(1 + pp)(1 + qq)},$$

$$\cos \zeta \cos \eta - 1 = \frac{(1 - pp)(1 - qq)}{(1 + pp)(1 + qq)} - 1 = \frac{-2pp - 2qq}{(1 + pp)(1 + qq)},$$

De là nous tirons

$$\frac{P + Q}{P - Q} = \frac{(A + B)(1 - ppqq) + D(1 + ppqq) + 2E pq}{(A - B)(pp - qq) - D(pp + qq) + 2E pq},$$

où il arrive fort à propos, que le numérateur est une fonction de  $p, q$ , & le dénominateur une fonction homogene de deux dimensions de  $p$  &  $q$ .

14. Cette belle propriété nous engage à cette substitution

$$pq = r, \quad \& \quad \frac{p}{q} = s, \quad \text{de sorte que } pp = rs, \quad \& \quad qq = \frac{r}{s};$$

& de là nous aurons

$$\frac{P + Q}{P - Q} = \frac{(A + B)(1 - rr) + D(1 + rr) + 2Er \cdot \frac{1}{q}}{(A - B)(ss - 1) - D(ss + 1) + 2Es \cdot \frac{1}{qq}},$$

ou bien

$$\frac{P + Q}{P - Q} = \frac{s}{r} \cdot \frac{A + B + D + 2Er - (A + B - D)rr}{B - A - D + 2Es - (B - A + D)ss}.$$

Or les mêmes substitutions fournissent

$$q dp + p dq = dr, \quad q dp - p dq = qq ds = \frac{r ds}{s},$$

$$\text{donc } \frac{q dp + p dq}{q dp - p dq} = \frac{s dr}{r ds}.$$

Par conséquent, nous obtiendrons par ce moyen cette équation séparée

$$\frac{\frac{dr}{\sqrt{((A + B + D)r + 2Err - (A + B - D)r^3)}}}{\frac{ds}{\sqrt{((B - A - D)s + 2Ess - (B - A + D)s^3)}}} =$$

laquelle pouvant être construite par des quadratures, ou même par des arcs de sections coniques, elle fournit la construction de la courbe cherchée.

15. Ayant ainsi réussi à trouver une équation différentielle séparée pour la courbe décrite par le corps M, je ne m'arrêterai pas à déterminer la loi du mouvement. On n'a qu'à prendre l'une ou l'autre des équations du §. 7. & en tirer la valeur du tems  $t$ . En faisant le calcul, qui pourroit paroître d'abord fort ennuyant, mais qui se réduit à la fin à une belle simplicité, on trouve

$$\frac{dt \sqrt{2g}}{a \sqrt{a}} = \frac{dr \sqrt{r}}{(1-r)^2 \sqrt{(A+B+D+2Er - (A+B-D)rr)}} + \frac{ds \sqrt{s}}{(1+s)^2 \sqrt{(B-A-D+2Es - (B-A+D)ss)}}.$$

Au reste les deux lettres D & E. marquent des quantités constantes, qui dépendent du mouvement qui aura été imprimé au corps dans le commencement. D'où il est clair que, selon les diverses valeurs de ces deux lettres D & E, les courbes décrites peuvent varier à l'infini, dont la plupart seront ouvertement des courbes transcendentes, cependant il y en a aussi d'algébriques, comme nous le verrons bientôt.



## QUATRIÈME ARTICLE.

16. Il s'agit donc de déterminer les cas, ou les valeurs des constantes  $D$  &  $E$ , où le rapport des quantités  $r$  &  $s$ , puisse être exprimé par une équation algébrique. Or le rapport de leurs différentiels étant

$$\frac{\frac{dr}{V((A + B + D)r + 2Err - (A + B - D)r^3)}}{\frac{ds}{((B - A - D)s + 2Ess - (B - A + D)s^3)}}$$

je le représenterai pour abrégier en sorte

$$\frac{dr}{V(ar + 2Err + \mathcal{E}r^3)} = \frac{ds}{V(\gamma s + 2Ess + \delta s^3)}$$

de sorte que

$$a = A + B + D; \quad \mathcal{E} = D - A - B; \quad \gamma = B - A - D; \quad \delta = A - B - D,$$

où j'observe que, s'il étoit  $a = \gamma$ , &  $\mathcal{E} = \delta$ , le rapport entre  $r$  &  $s$  pourroit être exprimé algébriquement. Mais ce cas ne sauroit avoir lieu, à moins qu'il ne fût  $A = 0$ , &  $D = 0$ , ce qui est le cas où le corps  $M$  seroit attiré au seul centre  $B$ , qui est déjà très connu d'ailleurs.

17. Mais cette ressemblance des dénominateurs peut avoir lieu plus généralement  $r = mx$ , &  $s = ny$ , pour avoir :

$$\frac{dx \sqrt{m}}{V(ax + 2Emxx + \mathcal{E}mmx^3)} = \frac{dy \sqrt{n}}{V(\gamma y + 2Enyy + \delta nny^3)}$$

ou bien

$$\frac{dx \sqrt{\gamma m}}{V(\alpha \gamma x + 2E\gamma mxx + \mathcal{E}\gamma mmx^3)} = \frac{dy \sqrt{\alpha n}}{V(\alpha \gamma y + 2E\alpha nyy + \alpha \delta nny^3)}$$

Maintenant les dénominateurs seront semblables, si  $\gamma m = \alpha n$ , &  $\mathcal{E}\gamma mm = \alpha \delta nn$ , ou  $\alpha \mathcal{E}\gamma = \alpha \gamma \delta$ , donc  $\alpha \mathcal{E} = \gamma \delta$ , & partant  $DD - (A + B)^2 = DD - (B - A)^2$ , d'où il s'ensuit



s'enfuit, ou  $A = 0$ , ou  $P = 0$ , ce qui encore est le cas où le corps est attiré vers un seul centre de force, & qui n'a aucune difficulté, puisque la courbe est toujours une section conique. D'où il semble, que d'autres cas ne sont pas possibles.

18. Cette conséquence est aussi juste, tant que la constante  $E$  n'est pas zéro. Mais, dès que nous prenons  $E = 0$ , pour la ressemblance des dénominateurs, il suffit qu'il soit  $\xi\gamma mm = a\delta nn$ . Soit donc  $E = 0$ ;  $mm = a\delta k$ , &  $nn = \xi\gamma k$ , ou bien  $r = x\sqrt{a\delta k}$ , &  $s = y\sqrt{\xi\gamma k}$ ; & l'équation à résoudre aura cette forme

$$\frac{dx\sqrt[4]{a\gamma\gamma\delta k}}{\sqrt{(a\gamma x + a\xi\gamma\delta kx^3)}} = \frac{dy\sqrt[4]{a\xi\gamma k}}{\sqrt{(a\gamma y + a\xi\gamma\delta ky^3)}}$$

ou 
$$\frac{dx\sqrt[4]{\gamma\delta}}{\sqrt{(x + \xi\delta kx^3)}} = \frac{dy\sqrt[4]{a\xi}}{\sqrt{(y + \xi\delta ky^3)}}$$

où les dénominateurs sont semblables; ce qui est une condition requise pour rendre le rapport algébrique. Mais il faut outre cela que les coefficients des numérateurs aient un rapport rationnel, lequel étant posé comme  $\mu$  à  $\nu$  nous aurons  $\gamma\delta : a\xi = \mu^4 : \nu^4$ , & partant  $DD = (A - B)^2$ ;  $DD = (A + B)^2 = \mu^4 : \nu^4$ .

19. Je dis donc que, toutes les fois que la constante  $E$  évanouit, & que  $DD = \frac{\mu^4(A + B)^2 - \nu^4(A - B)^2}{\mu^4 - \nu^4}$ , ou

$$\text{bien } E = 0, \quad \& \quad DD = AA + BB + \frac{2AB(\mu^4 + \nu^4)}{\mu^4 - \nu^4},$$

les lettres  $\mu$  &  $\nu$  signifiant des nombres entiers; dans tous ces cas je dis que la courbe décrite par le corps  $M$  sera algébrique. Car,

posant  $k = \frac{1}{\xi\delta}h$ , & partant

$$r = x\sqrt{\frac{D + A + B}{D - A - B}h}, \quad \& \quad s = y\sqrt{\frac{D + A - B}{D - A + B}h},$$

notre



notre équation à résoudre fera

$$\frac{\mu dx}{V(x + hx^3)} = \frac{\nu dy}{V(y + hy^3)},$$

de laquelle j'ai démontré ailleurs, que son intégrale & même la complète, est algébrique. Mais cette intégrale sera d'autant plus compliquée, plus le rapport des nombres  $\mu$  &  $\nu$  est composé. Or cela mérite d'être développé plus en détail.

20. Rien n'empêche qu'on ne mette  $h = 1$ ; car, quand même les quantités  $x$  &  $y$  deviendroient imaginaires, en remontant aux quantités primitives  $\zeta$ ,  $\eta$ , ou  $v$ ,  $u$ , il n'en résultera aucun inconvénient, & la réalité y fera toujours rétablie. Or, ayant trouvé l'intégrale de cette équation

de cette équation  $\frac{\mu dx}{V(x + x^3)} = \frac{\nu dy}{V(y + y^3)}$ , & pre-

nant  $D = V\left(AA + BB + \frac{2AB(\mu^4 + \nu^4)}{\mu^4 - \nu^4}\right)$ , on n'a

qu'à substituer dans l'intégrale

$$x\sqrt{\frac{D+A+B}{D-A-B}} = r = pq = \text{tang} \frac{1}{2}\zeta \text{ tang} \frac{1}{2}\eta = \frac{\sin \zeta \sin \eta}{(1 + \text{cof} \zeta)(1 + \text{cof} \eta)} =$$

$$V \frac{(1 - \text{cof} \zeta)(1 - \text{cof} \eta)}{(1 + \text{cof} \zeta)(1 + \text{cof} \eta)},$$

$$y\sqrt{\frac{D+A-B}{D-A+B}} = s = \frac{p}{q} = \text{tang} \frac{1}{2}\zeta \text{ cot} \frac{1}{2}\eta = \frac{\sin \zeta \sin \eta}{(1 + \text{cof} \zeta)(1 - \text{cof} \eta)} =$$

$$V \frac{(1 - \text{cof} \zeta)(1 + \text{cof} \eta)}{(1 + \text{cof} \zeta)(1 - \text{cof} \eta)},$$

pour arriver à l'équation algébrique de la courbe décrite. Il ne s'agit donc que de trouver l'intégrale de l'équation

$$\frac{\mu dx}{V(x + x^3)} = \frac{\nu dy}{V(y + y^3)},$$



& pour cet effet il faut commencer par le cas  $\mu = \nu = 1$ , & de là monter successivement à des plus grands nombres.

*Intégration de l'équation*

$$\frac{dx}{V(x + x^3)} = \frac{dy}{V(y + y^3)}$$

21. Au défaut d'une méthode directe de trouver le rapport entre les variables  $x$ , &  $y$ , je me servirai de la même méthode indirecte, que j'ai expliquée autrefois en supposant l'intégrale

$0 = A + 2B(x+y) + C(xx+yy) + 2Dxy + 2Exy(x+y) + Fxxyy$ ,  
dont l'extraction de racine donne:

$$x = \frac{-B - Dy - Eyy + V((B + Dy + Eyy)^2 - (A + 2By + Eyy)(C + 2Ey + Fyy))}{C + 2Ey + Fyy},$$

$$y = \frac{-B - Dx - Exx - V((B + Dx + Exx)^2 - (A + 2Bx + Exx)(C + 2Ex + Fxx))}{C + 2Ex + Fxx}.$$

Donc, posant pour abrégér les formules irrationnelles:

$$V((B + Dx + Exx)^2 - (A + 2Bx + Exx)(C + 2Ex + Fxx)) = X,$$

$$V((B + Dy + Eyy)^2 - (A + 2By + Eyy)(C + 2Ey + Fyy)) = Y,$$

nous aurons:

$$B + Dx + Exx + Cy + 2Exy + Fxxy = X, \quad \&$$

$$B + Dy + Eyy + Cx + 2Exy + Fxyy = Y.$$

22. Or l'équation supposée étant différenciée donne

$$\left. \begin{aligned} + dx(B + Cx + Dy + 2Ery + Eyy + Fxyy) \\ + dy(B + Cy + Dx + 2Exy + Exx + Fxyy) \end{aligned} \right\} = 0,$$

laquelle, en introduisant les valeurs irrationnelles  $X$  &  $Y$ , se change en cette forme

$$Ydx - Xdy = 0, \quad \text{ou bien } \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}.$$

Voilà



Voilà donc une équation différentielle entre  $x$  &  $y$ , où les variables sont séparées, & dont l'intégrale est précisément l'équation algébrique supposée. Cette équation est aussi infiniment plus générale que la proposée, & on voit bien que celle-ci y est comprise.

23. Donc, pour rendre les formules  $X$  &  $Y$  semblables aux proposées  $V(x + x^3)$ , &  $V(y + y^3)$ , les coefficients  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ , &c. doivent être déterminés en sorte qu'il devienne:

$$\mathcal{B}\mathcal{B} - \mathcal{A}\mathcal{C} = 0; \quad \mathcal{C}\mathcal{C} - \mathcal{C}\mathcal{F} = 0, \quad \& \quad \mathcal{D}\mathcal{D} - 2\mathcal{B}\mathcal{C} - \mathcal{A}\mathcal{F} - \mathcal{C}\mathcal{C} = 0.$$

Donc  $\mathcal{B} = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{C}}$ ;  $\mathcal{C} = \sqrt{\mathcal{C}\mathcal{F}}$ ,  $\mathcal{D}\mathcal{D} = \mathcal{C}\mathcal{C} + \mathcal{A}\mathcal{F} + 2\mathcal{C}\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{F}}$ , ou  $\mathcal{D} = \pm (\mathcal{C} + \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{F}})$ . De là nous aurons:

$$X = \sqrt{2x(\mathcal{B}\mathcal{D} - \mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}\mathcal{C}) + 2x^3(\mathcal{D}\mathcal{C} - \mathcal{C}\mathcal{C} - \mathcal{B}\mathcal{F})}, \quad \text{ou}$$

$$X = \sqrt{2x(\mathcal{D}\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{C}} - \mathcal{A}\sqrt{\mathcal{C}\mathcal{F}} - \mathcal{C}\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{F}}) + 2x^3(\mathcal{D}\sqrt{\mathcal{C}\mathcal{F}} - \mathcal{F}\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{C}} - \mathcal{C}\sqrt{\mathcal{C}\mathcal{F}})},$$

qui se réduit à cette forme:

$$X = \sqrt{2(\mathcal{D}\sqrt{\mathcal{C}} - \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{F}} - \mathcal{C}\sqrt{\mathcal{F}})(x\sqrt{\mathcal{A}} + x^3\sqrt{\mathcal{F}})}.$$

Il faut donc prendre  $\mathcal{D} = -\mathcal{C} - \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{F}}$ , pour avoir:

$$X = 2\sqrt{-(\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{F}} + \mathcal{C}\sqrt{\mathcal{F}})(x\sqrt{\mathcal{A}} + x^3\sqrt{\mathcal{F}})}, \quad \&$$

$$Y = 2\sqrt{-(\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{F}} + \mathcal{C}\sqrt{\mathcal{F}})(y\sqrt{\mathcal{A}} + y^3\sqrt{\mathcal{F}})},$$

24. Posons donc  $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ , & nous aurons

$$\mathcal{D} = -\mathcal{A} - \mathcal{C}; \quad \mathcal{B} = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{C}}, \quad \& \quad \mathcal{C} = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{C}},$$

& partant

$$X = 2\sqrt{-(\mathcal{A} + \mathcal{C})(x + x^3)\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{C}}},$$

$$Y = 2\sqrt{-(\mathcal{A} + \mathcal{C})(y + y^3)\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{C}}},$$

d'où notre équation intégrable sera

$$\frac{dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y + y^3)}},$$

dont l'intégrale est exprimée en sorte:

$$0 = \mathcal{A} + 2(x + y)\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{C}} + \mathcal{C}(xx + yy) - 2(\mathcal{A} + \mathcal{C})xy + 2xy(x + y)\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{C}} + \mathcal{A}xxyy.$$

Cu posons  $\mathcal{C} = 1$ , &  $\mathcal{A} = n$ , pour avoir :

$0 = mn + 2n(x+y) + xx + yy - 2(1+n)xy + 2nxy(x+y) + mnxxyy$ ,  
laquelle contenant la constante arbitraire,  $n$ , doit être censée l'intégrale  
complete de l'équation différentielle proposée.

25, Soit  $n = -m$ ; pour avoir :

$\mathcal{A} = mm$ ;  $\mathcal{B} = -m$ ;  $\mathcal{C} = 1$ ;  $\mathcal{D} = -1 - mm$ ;  $\mathcal{E} = -m$ ; &  $\mathcal{F} = mm$ ,  
de sorte que l'équation intégrale soit :

$0 = mm - 2m(x+y) + xx + yy - 2(1+mm)xy - 2mxy(x+y) + mmxxyy$ ,  
d'où nous concluons :

$$x = \frac{m + (1 + mm)y + myy + 2\sqrt{(m + m^3)}(y + y^3)}{1 - 2my + mmxy}, \quad \&$$

$$y = \frac{m + (1 + mm)x + mxx - 2\sqrt{(m + m^3)}(x + x^3)}{1 - 2mx + mmxx}.$$

On pourra donc exprimer algébriquement tant  $x$  par  $y$ , que  $y$  par  $x$ ,  
pour satisfaire à l'équation différentielle proposée

$$\frac{dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y + y^3)}}$$

où je remarque que, posant  $y = 0$ , on aura  $x = m$ ; & si  $x = 0$ ,  
on aura  $y = m$ .

26. Que  $\Pi.x$  marque l'intégrale  $\int \frac{dx}{\sqrt{(x + x^3)}}$  prise en  
forte, qu'elle évanouisse au cas  $x = 0$ , de sorte que  $\Pi.x$  indique  
une fonction déterminée de  $x$ , mais transcendante. De même ma-  
nière soit  $\Pi.y = \int \frac{dy}{\sqrt{(y + y^3)}}$ , prenant cette intégrale en forte  
que, posant  $y = 0$ , elle évanouisse; & l'intégrale de notre équation  
différentielle pourra être représentée de cette façon :

$$\Pi.x = \Pi.y - \Pi.m,$$

puis-

puisque, si l'on met  $x = 0$ , il devient  $y = m$ . Et cette équation finie, quoique transcendante, doit être censée équivalente à l'équation algébrique entre  $x$  &  $y$ . Donc, pour qu'il soit  $\Pi.y = \Pi.x + \Pi.m$ , il faut prendre

$$y = \frac{(m + x)(1 + mx) - 2\sqrt{(m + m^3)(x + x^3)}}{(1 - mx)^2}$$

*Intégration de l'équation*

$$\frac{2 dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y + y^3)}}$$

27. En employant les fonctions transcendantes expliquées, nous venons de voir, que l'égalité  $\Pi.q = \Pi.p + \Pi.m$ , répond à cette équation:

$$q = \frac{(m + p)(1 + mp) - 2\sqrt{(m + m^3)(p + p^3)}}{(1 - mp)^2}$$

Donc, posant  $m = p$ , pour qu'il soit  $\Pi.q = 2\Pi.p$ , nous aurons

$$q = \frac{2p(1 + pp) - 2\sqrt{(p + p^3)^2}}{(1 - pp)^2},$$

où il est évident, qu'il faut changer de signe le radical, comme étant ambigu en soi-même: & partant  $q = \frac{4p(1 + pp)}{(1 - pp)^2}$ . Posons maintenant  $\Pi.r = \Pi.q + \Pi.m$ , & nous aurons

$$r = \frac{(m + q)(1 + mq) + 2\sqrt{(m + m^3)(q + q^3)}}{(1 - mq)^2},$$

ce qui sera le rapport qui convient à cette égalité  $\Pi.r = 2\Pi.p + \Pi.m$ , prenant  $q = \frac{4p(1 + pp)}{(1 - pp)^2}$ .



28. Ou bien, sans nous embarrasser de l'extraction de racine, l'égalité  $\Pi.q = \Pi.p + \Pi.m$  demande cette équation

$0 = mm - 2m(p+q) + pp + qq - 2(1+mm)pq - 2mpq(p+q) + mppqq$ ,  
qui se réduit à cette forme

$$(m + mpq - p - q)^2 = 4(1 + mm)pq.$$

Faisons maintenant  $m = p$ , & l'égalité  $\Pi.q = 2\Pi.p$ , renferme cette équation  $q(1 - pp)^2 = 4p(1 + pp)$ , & prenant outre cela  $(m + mqr - q - r)^2 = 4(1 + mm)qr$ , l'équation entre  $p$  &  $r$  convient à cette égalité  $\Pi.r = 2\Pi.p + \Pi.m$ , Or, puisque  $m$  marque une constante quelconque, cette égalité est l'intégrale complète de cette équation:

$$\frac{dr}{V(r + r^3)} = \frac{2dp}{V(p + p^3)}$$

29. Ecrivons maintenant  $x$  pour  $p$ , &  $y$  pour  $r$ , pour avoir l'équation différentielle proposée  $\frac{2dx}{V(x + x^3)} = \frac{dy}{V(y + y^3)}$ ; & il est clair que le rapport entre  $x$  &  $y$  est algébrique, & exprimé par ces équations:

$$y = \frac{(m + q)(1 + mq) + 2V(m + m^2)(q + q^3)}{(1 - mq)^2},$$

$$\& q = \frac{4x(1 + xx)}{(1 - xx)^2},$$

ou, en remettant pour  $q$  cette valeur, on aura

$$y = \frac{(m(1-xx)^2 + 4x(1+xx)((1-xx)^2 + 4mx(1+xx)) + 4(1-xx)(1+6xx+x^4)V(m+m^2)(x+x^3))}{((1-xx)^2 - 4mx(1+xx))^2}$$

Ou conservant la lettre  $q = \frac{4x(1+xx)}{(1-xx)^2}$ , l'équation intégrale sera

$0 = (y - q)^2 - 2m(1 + qy)(q + y) + mm(1 - qy)^2$ ,  
qui est en même tems complète.

*Intégration de l'équation.*

$$\frac{3 dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y + y^3)}}$$

30. Posons  $\Pi.z = 2 \Pi.x + \Pi.m$ , & nous venons de voir que le rapport algébrique entre  $x$  &  $z$  est exprimé en sorte :

$$z = \frac{(m + p)(1 + mp) + 2\sqrt{(m + m^3)(p + p^3)}}{(1 - mp)^2},$$

$$\text{prenant } p = \frac{4x(1 + xx)}{(1 - xx)^2}.$$

Soit maintenant  $m = x$ , ou  $\Pi.z = 3 \Pi.x$ , & on aura

$$z = \frac{(x + p)(1 + px) + 2\sqrt{(p + p^3)(x + x^3)}}{(1 - px)^2},$$

$$\text{prenant } p = \frac{4x(1 + xx)}{(1 - xx)^2}.$$

Faisons de plus  $\Pi.y = \Pi.z + \Pi.m = 3 \Pi.x + \Pi.m$ , & nous aurons :

$$y = \frac{(m + z)(1 + mz) + 2\sqrt{(m + m^3)(z + z^3)}}{(1 - mz)^2},$$

31. Donc, puisque cette égalité est l'intégrale complète de l'équation différentielle proposée  $\frac{3 dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y + y^3)}}$ , le rapport entre  $x$  &  $y$  sera exprimé algébriquement en sorte

$$p = \frac{4x(1 + xx)}{(1 - xx)^2},$$

$$q = \frac{(p + x)(1 + px) + 2\sqrt{(p + p^3)(x + x^3)}}{(1 - px)^2},$$

$$y = \frac{(m + q)(1 + mq) + 2\sqrt{(m + m^3)(q + q^3)}}{(1 - mq)^2},$$

où

où il faut remarquer que, substituant la valeur de  $p$ , on aura

$$q = \frac{x(3 + 6xx - x^4)^2}{(1 - 6xx - 3x^4)^2}$$

*Intégration de l'équation*

$$\frac{4dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y + y^3)}}$$

32. En poursuivant la même méthode, le rapport entre les variables  $x$  &  $y$  sera exprimé par les équations algébriques suivantes :

$$p = \frac{4x(1 + xx)}{(1 - xx)},$$

$$q = \frac{(p + x)(1 + px) + 2\sqrt{(p + p^3)}(x + x^3)}{(1 - px)^2},$$

$$r = \frac{(q + x)(1 + qx) + 2\sqrt{(q + q^3)}(x + x^3)}{(1 - qx)^2},$$

$$y = \frac{(m + r)(1 + mr) + 2\sqrt{(m + m^3)}(r + r^3)}{(1 - mr)^2},$$

d'où il est évident, comme il faut continuer ces intégrations pour toutes les formules  $\frac{\mu dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y + y^3)}}$ , où  $\mu$  marque un nombre entier quelconque.

*Intégration de l'équation*

$$\frac{\mu dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{\nu dy}{\sqrt{(y + y^3)}}$$

33. Qu'on cherche premièrement par la méthode précédente les intégrales de ces deux égalités

$$\frac{\mu dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{dz}{\sqrt{(z + z^3)}}, \quad \& \quad \frac{\nu dy}{\sqrt{(y + y^3)}} = \frac{dz}{\sqrt{(z + z^3)}},$$

où

où il suffit de prendre l'une complete, & de supposer dans l'autre la constante = 0. Alors, ayant le rapport entre  $x$  &  $z$ , & entre  $y$  &  $z$ , on n'a qu'à éliminer  $z$ , pour avoir la relation requise entre  $x$  &  $y$ , ce qui se fera aisément, puisque l'une & l'autre intégration donne une valeur pour  $z$ , l'une par  $x$  & l'autre par  $y$ , & ces deux valeurs étant égalées entr'elles donnent d'abord l'équation cherchée.

C O N C L U S I O N.

34. Voilà donc une solution parfaite du probleme que je me suis proposé, d'où il est clair que, parmi toutes les courbes possibles, que le corps M puisse décrire étant sollicité vers deux centres de forces, il y en a une infinité qui sont algébriques. Cela arrive toutes les fois qu'il y a dans la solution générale,  $E = 0$ , & l'autre constante  $D = \sqrt{\frac{\mu^4 (A + B)^2 - \nu^4 (A - B)^2}{\mu^4 - \nu^4}}$ , les lettres  $\mu$  &  $\nu$  marquant des nombres entiers quelconques. Dans ces cas on n'a qu'à chercher l'intégrale de l'égalité  $\frac{\mu dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{\nu dy}{\sqrt{(y + y^3)}}$ , qui sera toujours algébrique, comme je viens de le faire voir, & ensuite posant

$$x = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \zeta \operatorname{tang} \frac{1}{2} \eta \cdot \sqrt{\frac{D - A - B}{D + A + B}}, \quad \&$$

$$y = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \zeta \operatorname{cot} \frac{1}{2} \eta \cdot \sqrt{\frac{D - A + B}{D + A - B}},$$

on aura une équation algébrique entre  $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \zeta$ , &  $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \eta$ , d'où l'on tirera ensuite aisément une entre les coordonnées AP & PM.

