



S U R
LES RENTES VIAGERES,
 P A R M. E U L E R.

I.

Ayant établi le véritable principe sur lequel il faut fonder le calcul des rentes viagères, je crois que le développement de ce calcul ne manquera pas d'être fort intéressant, tant pour ceux qui voudront entreprendre un tel établissement que pour ceux qui en voudront profiter. J'ai ébauché cette matière dans mes Recherches générales sur la mortalité & la multiplication du genre humain, où j'ai exposé la juste méthode de déterminer par le calcul, combien un homme d'un certain âge doit payer, pour jouir pendant toute sa vie d'une rente annuelle donnée. Mais, puisque le calcul me paroissoit alors fort embarrassant, je ne pouvois pas me résoudre à l'exécuter. Or une certaine occasion m'obligea dernièrement d'entreprendre ce travail, dont, moyennant quelques artifices pour abrégér le calcul, je suis heureusement venu à bout.

2. Il y a deux choses, sur lesquelles la détermination des rentes viagères doit être fondée: l'une est une bonne liste de mortalité, qui nous montre, pour chaque âge, combien il en mourra probablement pendant le cours d'une ou plusieurs années: l'autre est la manière dont l'entrepreneur peut faire valoir l'argent qu'il aura reçu des rentiers: ou à quels intérêts il est en état de le placer. Ces deux articles concourent très essentiellement à déterminer les rentes auxquelles l'entrepreneur pourra s'engager, tant par rapport à la somme qui lui a été payée d'abord, que par rapport à l'âge du rentier. Car il est évident, que plus l'entrepreneur peut retirer de profit du capital,



pital qu'il a entre les mains, plus il sera aussi en état de payer de fortes rentes.

3. Pour la liste de mortalité, l'entrepreneur risqueroit sans doute beaucoup, s'il vouloit se régler sur la mortalité des hommes en général, qu'on conclut des observations faites dans une grande ville, ou dans un pays tout entier, où l'on tient également compte de tous les hommes tant vigoureux qu'infirmes. Or, quand il s'agit de se procurer des rentes viagères, il est très naturel qu'il en faut exclure tous ceux dont la constitution ne semble pas promettre une longue vie, ainsi on a raison de regarder les rentiers comme une espèce plus robuste. C'est aussi dans cette vue que j'ai choisi dans mon Mémoire allégué la liste de M. Kerseboom, qu'il a tirée des observations faites uniquement sur des personnes qui ont joui de rentes viagères: & partant aussi cette même liste me servira de fondement dans les calculs suivans.

4. Si l'entrepreneur n'étoit pas en état de placer assez bien le capital qui lui est payé par les rentiers, il ne sauroit accorder que des rentes si médiocres, que personne ne voudroit les acquérir. Autrefois la ville d'Amsterdam a payé dix pour cent de rentes à toutes les personnes au dessous de vingt ans, ou bien pour 1000 florins il leur ont payé 100 par an; ce qui est une rente si riche que la ville en auroit souffert une perte très considérable si elle n'avoit gagné presque 10 pour cent par an du fonds que cette entreprise lui avoit procuré. Ainsi, si l'on ne peut compter que sur 5 pour cent d'intérêts, les rentes doivent devenir beaucoup moins considérables; cependant c'est là dessus qu'il semble qu'il faut à présent régler les rentes viagères, attendu que ceux qui auront occasion d'en faire un plus grand profit, ne se mêleront gueres d'une telle entreprise, qui ne sauroit s'achever qu'après un grand nombre d'années.

5. Pour déterminer le prix de ces rentes, on fixe pour chaque âge un terme moyen de vie, qu'il est aussi probable de survivre que de mourir avant que de l'avoir atteint; ou bien ce
terme



terme est pris tel, que d'un grand nombre d'hommes du même âge il en meurt autant avant ce terme qu'après. Alors on suppose que tous les hommes de cet âge atteignent précisément ce terme, & qu'ils meurent ensuite tous à la fois; là dessus on croit pouvoir fixer sûrement le prix des rentes, puisqu'il s'agit de trouver la valeur présente d'une rente annuelle, payable pendant un certain nombre d'années consécutives: & l'on estime que le profit que l'entrepreneur retire du côté de ceux qui meurent avant ledit terme, est précisément récompensé par la perte que lui causent ceux des rentiers qui survivent à ce terme. Mais on comprendra aisément que ce raisonnement cloche, puisqu'on ne tient pas compte de la diminution du prix présent d'une rente qui ne sera payée qu'après plusieurs années. A cause de cette circonstance, il sera nécessaire de fonder le calcul sur ses véritables principes, comme je l'ai enseigné dans mon Mémoire mentionné, sans se servir d'aucun raisonnement qui pourroit paroître suspect.

6. Pour cet effet, considérons le nombre de 1000 enfans nés à la fois, & que ces caractères (1), (2), (3), (4), &c. marquent les nombres de ceux qui vivront encore au bout de 1, 2, 3, 4, &c. ans, de sorte qu'en général (m) représente le nombre de ceux, qui atteindront l'âge de m ans. Soit maintenant r la rente annuelle qu'un homme âgé de m ans voudroit acquérir, & x le prix qu'il en doit payer à présent à l'entrepreneur; lequel doit être un juste équivalent de la dépense dont l'entrepreneur se charge par cette convention. Pour déterminer ce prix x , il faut considérer plusieurs hommes du même âge de m ans, & qui entrent dans la même condition. Soit (m) le nombre de ces hommes, & la somme qu'ils payeront à présent à l'entrepreneur sera $= (m) x$, qui doit être suffisante pour fournir toutes les rentes, qu'il aura à payer dans la suite.

7. Or de ces (m) hommes il y en aura en vie après un an ($m - 1$), après deux ans ($m - 2$), après trois ans ($m - 3$),
&



& ainsi de suite: donc l'entrepreneur aura à payer après un an $(m + 1)r$, après deux ans $(m + 2)r$, après trois ans $(m + 3)r$, &c. jusqu'à ce que tous ces rentiers seront éteints. On n'a donc qu'à réduire chacun de ces payemens au tems présent à raison de 5 pour cent, & en égaler la somme à $(m)x$ pour en conclure la juste valeur de x . Or, pour rendre le calcul plus général, au lieu de $\frac{1}{100}$ ou $\frac{2}{100}$ écrivons la lettre λ , & la somme de toutes les rentes que l'entrepreneur doit payer successivement vaudra à présent

$$\frac{(m + 1)r}{\lambda} + \frac{(m + 2)r}{\lambda^2} + \frac{(m + 3)r}{\lambda^3} + \frac{(m + 4)r}{\lambda^4} + \&c.$$

laquelle étant égale à $(m)x$ donnera

$$x = \frac{r}{(m)} \left(\frac{(m+1)}{\lambda} + \frac{(m+2)}{\lambda^2} + \frac{(m+3)}{\lambda^3} + \frac{(m+4)}{\lambda^4} + \&c. \right)$$

8. Voilà donc le juste prix qu'un homme âgé de m ans doit payer pour être mis dans la jouissance d'une rente annuelle r pendant toute sa vie, & laquelle étant d'abord placée à 5 pour cent met l'entrepreneur précisément en état de payer dans la suite les rentes, pourvu que le nombre des rentiers soit assez considérable. On comprend bien, qu'ayant ainsi placé d'abord tout le capital que l'entrepreneur aura reçu, l'année suivante les intérêts ne seront pas suffisans à payer les rentes, mais qu'il y faudra employer une partie du capital, d'où le capital souffrira tous les ans une diminution: cependant il ne sera entièrement éteint que lorsque tous les rentiers seront morts. Par cette raison, l'entrepreneur sera bien obligé de hausser le prix des rentes que je viens de trouver, selon les circonstances & les dépenses particulières qu'un tel établissement exige.

9. On voit bien que la détermination de ce prix nommé x demande un calcul aussi long qu'ennuyant, surtout pour les bas âges, où le nombre des termes à ajouter ensemble est fort considérable.

dérable. Mais il n'est pas difficile de s'appercevoir, qu'ayant déjà fait ce calcul pour un certain âge, on en pourra aisément tirer celui qui repond à une année de plus où moins. Pour expliquer plus clairement cet artifice, je me servirai de ce caractère \overline{m} pour marquer le prix qu'un homme âgé de m ans doit payer pour la rente viagere r : de sorte que

$$\overline{m} = \frac{1}{(m)} \left(\frac{(m+1)}{\lambda} + \frac{(m+2)}{\lambda^2} + \frac{(m+3)}{\lambda^3} + \frac{(m+4)}{\lambda^4} + \&c. \right)$$

de là, pour les hommes âgés de $m + 1$ ans, nous aurons

$$\overline{m+1} = \frac{1}{(m+1)} \left(\frac{(m+2)}{\lambda} + \frac{(m+3)}{\lambda^2} + \frac{(m+4)}{\lambda^3} + \frac{(m+5)}{\lambda^4} + \&c. \right)$$

d'où nous concluons:

$$\lambda (m) \overline{m} = (m + 1) + (m + 1) \overline{m + 1},$$

& partant

$$\overline{m} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{(m + 1)}{(m)} (1 + \overline{m + 1}),$$

de sorte qu'ayant trouvé la valeur de $\overline{m + 1}$, on en calculera assez aisément celle de \overline{m} .

10. A l'aide de cet artifice, après avoir commencé par l'âge de 90 ans, j'ai calculé le prix de la rente r successivement pour tous les âges inférieurs jusqu'aux enfans nouvellement nés; d'où j'ai obtenu la table suivante, en fixant la rente r à 100 écus, & les intérêts à 5 pour cent.



TABLE

qui marque les prix d'une rente viagere de 100 écus pour tous les âges.

âge années	nombre des vivans	prix de la rente	âge années	nombre des vivans	prix de la rente
0	1000	1155, 50	25	552	1403, 60
1	804	1409, 04	26	544	1395, 45
2	768	1448, 84	27	535	1389, 87
3	736	1487, 43	28	525	1387, 16
4	709	1521, 27	29	516	1382, 54
5	690	1541, 32	30	507	1376, 82
6	676	1551, 90	31	499	1368, 84
7	664	1558, 94	32	490	1363, 68
8	654	1561, 92	33	482	1355, 63
9	646	1560, 33	34	475	1344, 38
10	639	1556, 29	35	468	1332, 71
11	633	1549, 59	36	461	1320, 60
12	627	1542, 64	37	454	1308, 01
13	621	1535, 42	38	446	1298, 04
14	616	1525, 28	39	439	1284, 67
15	611	1514, 65	40	432	1270, 76
16	606	1503, 50	41	426	1253, 09
17	601	1491, 81	42	420	1234, 54
18	596	1479, 54	43	413	1218, 24
19	590	1469, 31	44	406	1201, 21
20	584	1458, 63	45	400	1180, 19
21	577	1450, 18	46	393	1161, 27
22	571	1438, 68	47	386	1141, 44
23	565	1426, 66	48	378	1123, 88
24	559	1414, 07	49	370	1105, 59
25	552	1403, 60	50	362	1086, 52
<i>m</i>	(<i>m</i>)	\overline{m}	<i>m</i>	(<i>m</i>)	\overline{m}

âge



âge années	nombre des vivans	prix de la rente	âge années	nombre des vivans	prix de la rente
50	362	1086, 52	70	175	638, 30
51	354	1066, 62	71	165	610, 83
52	345	1049, 17	72	155	582, 75
53	336	1031, 14	73	145	554, 09
54	327	1012, 49	74	135	524, 89
55	319	989, 78	75	125	495, 22
56	310	969, 44	76	114	470, 16
57	301	948, 35	77	104	445, 13
58	291	929, 98	78	93	417, 98
59	282	907, 64	79	82	395, 75
60	273	884, 41	80	72	375, 64
61	264	860, 32	81	63	350, 77
62	254	838, 90	82	54	329, 69
63	245	813, 21	83	46	306, 38
64	235	790, 20	84	39	279, 44
65	225	766, 59	85	32	257, 60
66	215	742, 50	86	26	232, 90
67	205	717, 43	87	20	217, 91
68	195	691, 93	88	15	205, 07
69	185	665, 14	89	11	193, 62
70	175	638, 30	90	8	179, 54
<i>m</i>	(<i>m</i>)	<i>m</i>	<i>m</i>	(<i>m</i>)	<i>m</i>

11. M. Kerseboom n'a continué sa Table sur la mortalité que jusqu'à 95 ans, & par cette raison je n'ai pas jugé convenable de continuer celle-ci au de là de 90 ans, puisque personne à cet âge n'aura probablement plus de vues pour les rentes viageres. Du moins, presque dans tous les plans, ces vieillards se trouvent rangés à la même classe que ceux de 60 ou de 70 ans: nonobstant qu'il seroit fort injuste, si l'on vouloit exiger d'un nonagénaire plus que le tiers



du prix que doit payer un septuagénaire, & plus que le quart d'un sexagénaire. Cependant, si l'on est curieux de voir la continuation de ma table, la voici :

<i>m</i>	90	91	92	93	94
(<i>m</i>)	8	6	4	3	2
\overline{m}	179, 54	151, 35	138, 38	93, 73	47, 62

Mais je ne voudrois pas conseiller à un entrepreneur de se mêler avec de tels vieillards, à moins que leur nombre ne fut assez considérable ; ce qui est une règle générale pour tous les établissemens fondés sur les probabilités.

12. De là on conclura aisément combien l'entrepreneur devoit payer d'intérêt à chaque âge, pour une somme quelconque, qu'on auroit mise d'abord entre ses mains. Il n'est pas nécessaire d'entrer ici dans le même détail, & il suffira de marquer de 5 en 5 ans les *procents*, que les rentiers pourroient exiger.

âge	Procents	âge	Procents	âge	Procents
0	8 $\frac{2}{3}$	30	7 $\frac{1}{4}$	60	11 $\frac{1}{3}$
5	6 $\frac{1}{2}$	35	7 $\frac{1}{2}$	65	13
10	6 $\frac{1}{3}$	40	8	70	15 $\frac{2}{3}$
15	6 $\frac{1}{2}$	45	8 $\frac{1}{2}$	75	20
20	6 $\frac{3}{4}$	50	9	80	25 $\frac{2}{3}$
25	7	55	10	85	38 $\frac{1}{2}$
30	7 $\frac{1}{4}$	60	11 $\frac{1}{3}$	90	55 $\frac{1}{2}$

Sur ce pied l'entrepreneur n'auroit aucun profit, à moins qu'il ne fut en état de faire valoir son argent à plus que de 5 pour cent.

13. Donc, si un état avoit besoin d'argent, & qu'il en pût trouver à 5 pour cent d'intérêts autant qu'il lui en faut, il seroit assurément fort mal, s'il vouloit établir de telles rentes viagères, que je viens de déterminer sur ce même pied de 5 pour cent, puisqu'en égard à l'embarras qu'un tel établissement exige nécessairement, il seroit toujours

jours



jours mieux d'emprunter la somme dont il a besoin à 5 pour cent, qu'il pourroit ensuite acquitter selon les circonstances, au lieu que les rentes viagères lui resteroient à charge pendant très longtems, Ou bien, il faudroit hauffer le prix des rentes au delà de ce que je les ai fixées, pour lui procurer quelque bénéfice; mais alors il seroit fort à craindre qu'il ne se trouvât plus de rentiers, à moins que ce ne fussent des vieillards au delà de 60 ans, que les intérêts de 10 & plus pour cent pourroient éblouir.

14. Mais vouloir établir des rentes viagères plus avantageuses pour les rentiers, ce seroit un projet peu propre à soulager un Etat; puisque cela reviendroit au même, que si l'on vouloit se charger de dettes à six & davantage pour cent: pendant qu'on pourroit faire des emprunts à 5 pour cent sans s'affujettir à l'embarras que des rentes viagères demandent. En effet, si un Etat vouloit établir les rentes exposées ici, & calculées sur le pied de 5 pour cent, il ne sauroit regarder cette charge que comme un emprunt pris à 6 pour 100, à cause de tant d'arrangemens qui y seroient requis. Ainsi je ne vois presque plus de cas, où l'établissement des rentes viagères pourroit être avantageux à un Etat, tant qu'on peut emprunter de l'argent à 5 pour cent, & peut-être moins. Mais on peut imaginer une autre espèce de rentes, qui seroit peut-être plus goûtée, quoi qu'elle soit également fondée sur le pied de 5 pour cent. Je veux parler de rentes, qui ne doivent commencer à courir qu'après 10 ou même 20 ans; & on comprend aisément, que le prix de telles rentes sera fort médiocre, & partant capable d'attirer le public.

15. Concevons donc cette question aussi en général, & cherchons combien un homme âgé de m ans doit payer à présent, pour s'acquérir une rente annuelle r , qui ne commencera à lui être payée qu'après n ans, de sorte que depuis ce tems il en puisse jouir régulièrement jusqu'à sa mort. Soit x le prix présent de cette rente, & nous trouverons comme ci-dessus :

$$x = \frac{r}{(m)} \left(\frac{(m+n)}{\lambda^n} + \frac{(m+n+1)}{\lambda^{n+1}} + \frac{(m+n+2)}{\lambda^{n+2}} + \&c. \right)$$

Or, par le calcul des rentes ordinaires expliqué auparavant, nous aurons :

$$\overline{m+n-1} = \frac{1}{(m+n-1)} \left(\frac{(m+n)}{\lambda} + \frac{(m+n+1)}{\lambda^2} + \frac{(m+n+2)}{\lambda^3} + \&c. \right)$$

d'où nous concluons :

$$x = \frac{r}{(m)} \cdot \frac{(m+n-1)}{\lambda^{n-1}} \cdot \overline{m+n-1} = \frac{r}{\lambda^{n-1}} \cdot \frac{(m+n-1)}{(m)} \cdot \overline{m+n-1},$$

où $\overline{m+n-1}$ r exprime le prix présent de la rente ordinaire pour un homme âgé de $m+n-1$ ans.

16. Donc, si l'on demande le prix présent d'une rente annuelle de 100 écus, qui ne commencera à être payée qu'au bout de 10 ans pour un homme âgé de m ans, on prendra de la table développée au §. 10. le prix de la rente ordinaire qui convient à l'âge de $m+9$ ans, & on le multipliera par $\left(\frac{20}{11}\right)^9 \frac{(m+9)}{(m)}$ pour avoir la valeur cherchée de x . De là j'ai calculé les tables suivantes de 5 en 5 ans :

T A B L E

des prix d'une rente viagere de 100 écus qui ne doit commencer à couvrir qu'au bout de 10 ans.

âge ans	prix de la rente	âge ans	prix de la rente	âge ans	prix de la rente
0	649,75	30	717,05	60	290,55
5	877,77	35	671,73	65	203,11
10	874,50	40	610,40	70	120,14
15	833,95	45	533,55	75	56,20
20	787,43	50	455,78	80	19,07
25	745,72	55	375,25		
30	717,05	60	290,55		

T A B L E



T A B L E

des prix d'une rente viagere de 100 écus qui ne doit commencer à courir qu'au bout de 20 ans.

âge ans	Prix de la rente	âge ans	Prix de la rente	âge ans	Prix de la rente
0	343,06	30	319,30	60	47,28
5	453,36	35	272,96	65	19,17
10	441,81	40	234,47	70	4,82
15	413,60	45	183,72		
20	382,17	50	134,52		
25	349,63	55	87,91		
30	319,30	60	47,28		

17. Peut-être qu'un tel projet de rentes viagères réussiroit mieux, nonobstant qu'elles sont fixées sur le pied de 5 pour cent. Il semble qu'il seroit toujours avantageux pour un enfant nouvellement né de lui pouvoir assurer, moyennant le prix de 343, ou bien de 350 écus, une rente fixe de 100 écus par an, quoiqu'elle ne commence à être payée que lorsque l'enfant aura atteint l'âge de 20 ans: & si l'on y vouloit employer la somme de 3500 écus, ce seroit toujours un bel établissement, que de jouir dès l'âge de 20 ans d'une pension fixe de 1000 écus. Cependant il est encore douteux, s'il se trouveroit plusieurs parens qui voudroient bien faire un tel sacrifice pour le bien de leurs enfans. Peut-être se trouveroit il plus d'hommes de 60 ans, qui ne balanceroient point de payer d'abord 3000 écus pour être assurés de jouir d'une pension fixe de 1000 écus par an dès qu'ils auroient passé leur 70me année.

