RECHERCHES
SUR
LE MOUVEMENT DES RIVIERES.
PAR M. EULER.

§. 1.

C'est peu de chose que ce que les Auteurs ont écrit jusqu'ici sur le mouvement des rivieres; & tout ce qu'ils en ont dit, n'est fondé que sur des hypotheses arbitraires, & souvent même tout à fait fausses. Car, quoiqu'on ait déjà assez bien réussi à appliquer les principes de mécanique au mouvement des eaux; on s'est pourtant borné à ne considerer que les cas, où l'eau coule par des tuyaux d'une figure qui n'est pas irréguliere; & dans cette considération on a même supposé, que toutes les particules de l'eau, qui se trouvent dans la même section faite perpendiculairement au tuyau, se meuvent d'un mouvement égal; de sorte que les vitesses de l'eau en chaque section du canal soient réciproquement proportionelles aux amplitudes. Et c'est cette regle, qui sert de base à toutes les recherches qui ont été faites jusqu'ici sur le mouvement des eaux. Les profondes spéculations de Mrs. Bernoulli & d'Alembert, auxquels on est redevable de tout ce qui a été découvert jusqu'ici dans cette science, sont toutes établies sur cette hypothese: & il faut avouer que, dans tous les cas, où ils ont appliqué leur théorie, cette hypothese se trouve fort bien d'accord avec la vérité.

§. 2. Mais, lorsque le mouvement de l'eau est tel, que ses vitesses ne se reglent pas uniquement sur l'amplitude du canal, par lequel l'eau coule, de ſorte que les viteſſes dans la même ſection du canal ſont différentes entr'elles; alors il eſt impoſſible d'y appliquer les principes hydrodynamiques, dont on s'eſt ſervi avec un ſi bon ſuccès dans les recherches mentionnées. Cela arrive pour la plûpart, lorsque les canaux, par lesquels l'eau paſſe ſont fort larges; car alors on s'écarteroit trop conſidérablement de la vérité, ſi l'on ſuppoſoit que l'eau paſſât d'un mouvement égal par chaque ſection du canal. Or on comprend aiſément, qu'il faut rapporter ici le mouvement des rivieres; car, dans la même ſection qu'on conçoit faite perpendiculairement au lit de la riviere, l'eau peut avoir des viteſſes fort différentes; & il eſt évident, que les particules d'eau qui ſe trouvent vers le fond du lit, ſont pouſſées par des forces tout à fait différentes, que les particules ſupérieures: d'où il doit néceſſairement réſulter un mouvement très différent dans les particules qui ſe trouvent dans la même ſection du lit.

§. 3. Donc, pour chercher le mouvement de l'eau dans une riviere, il faut abandonner les hypotheſes auxquelles on a attaché jusqu'ici toutes les recherches hydrauliques, pour remonter aux premiers principes de Mécanique, par lesquels tous les mouvemens des corps tant ſolides que fluides ſont déterminés. Il faut conſidérer ſéparément chaque particule d'eau, & chercher toutes les forces auxquelles elle eſt aſſujettie, pour en déterminer les changemens cauſés dans ſon mouvement. Cette recherche étant extrémement difficile & envelopée en des calculs très embarraſſés, je me bornerai à commencer l'explication de cette théorie par un cas, qui ſervira de fondement à tous les autres, & qui ne laiſſera pas de nous fournir des éclairciſſemens fort importans dans cette matiere. Après le dévelopement de ce cas, il ne ſera pas même fort difficile de rendre la recherche plus générale, & de l'appliquer à tous les cas qui ſe peuvent rencontrer.

§. 4. Je conſidérerai donc une ſection verticale faite le long d'une riviere qui nous repréſentera une riviere infiniment étroite; & quand j'aurai déterminé le mouvement de l'eau dans cette ſection, quoique je n'aye pas eu égard à l'action de l'eau, qui ſe trouve à côté

de

de part & d'autre, on conviendra, que ce mouvement ne différera pas beaucoup du vrai, quelque large que soit la riviere, pourvu que la figure de son lit ne soit pas extrémement irréguliere. Car je suppose pour le commencement que les pressions de l'eau à côté sont égales de part & d'autre, de sorte que toutes les particules d'eau qui se trouvent dans cette section, se meuvent toujours selon des directions situées dans cette même section. Néanmoins la méthode dont je me servirai, se pourra aussi aisément appliquer aux cas, où l'eau passe d'une telle section verticale dans une autre; & quand on aura trouvé moyen d'expédier le calcul pour le cas que je m'en vai traiter, on parviendra d'autant plus facilement à bout du calcul qui renferme la solution générale.

§. 5. Soit donc AC le lit d'une telle section de riviere, ou d'une riviere infiniment étroite, qui ait partout la même largeur infiniment petite. Que ce lit AC soit une ligne courbe quelconque, qui est supposée être connue; pour cet effet je conçois une ligne horizontale EF qui serve d'axe pour y rapporter la ligne AC par des coordonnées orthogonales EP & PQ. Que ABCD soit la riviere, qui se meut sur ce lit AC, & BD sa superficie supreme; de plus je suppose, que la riviere se trouve déjà dans un état permanent ou d'équilibre, de sorte que sa superficie BD demeure continuellement la même, & qu'aux mêmes points, comme M, les particules d'eau qui y passent ayent toujours les mêmes vitesses, & qu'elles soient assujetties aux mêmes pressions. Fig. 1.

§. 6. Toute l'eau qui forme la riviere doit avoir passée par la section AB, que je considere ici comme la principale, & par rapport à laquelle je déterminerai tant le lieu que le mouvement de chaque particule d'eau après un tems quelconque, depuis qu'elle est passée par la section AB. Soit la hauteur de cette section $AB = a$, dans laquelle je considere un point quelconque O, nommant $AO = z$, & que OMG soit le chemin que chaque particule d'eau, qui passe par le point O, décrit étant emportée par son mouvement. Ici il faut d'abord regarder le mouvement dont chaque particule d'eau paſſe par le point O. Ce mouvement étant décompoſé ſelon la direction horizontale & verticale, ſoit m la viteſſe ſelon la direction horizontale, & n la viteſſe ſelon la direction verticale, que je ſuppoſe dirigée de haut en bas. Donc, nommant $EA = b$, de ſorte que $EO = b + z$, après un tems infiniment petit $= d\tau$, le point d'eau O avancera ſelon la direction horizontale par l'eſpace $= m\,d\tau$, & ſelon la direction verticale par l'eſpace $= n\,d\tau$. Par conſéquent après le tems $d\tau$, le point O parviendra en o, en ſorte qu'ayant tiré la verticale oe, il ſoit $Ee = m\,d\tau$, & $eo = b + z - n\,d\tau$. Or on voit bien que m & n ſont de certaines fonctions de z.

§. 7. Qu'après un tems quelconque $= t$, le point d'eau qui eſt paſſé par O ſoit parvenu en M, ayant décrit pendant ce tems t la ligne OM. Qu'on tire de M ſur EF la perpendiculaire MP, & nommant $EP = x$; $PM = y$; on voit que x & y ſeront des fonctions de deux variables t & z. Soit donc pour exprimer la dépendance de ces deux variables,

$$dx = P\,dt + Q\,dz, \quad \& \quad dy = R\,dt + S\,dz,$$

où l'on voit que ces formules différentielles doivent être completes, ou que $\frac{dP}{dz} = \frac{dQ}{dt}$, & $\frac{dR}{dz} = \frac{dS}{dt}$, où $\frac{dP}{dz}$, marque le différentiel de P, en ne ſuppoſant que z variable, diviſé par dz, & $\frac{dQ}{dt}$, le différentiel de Q, en ne ſuppoſant que t variable, diviſé par dt, & ainſi des autres. On voit auſſi que ces valeurs de x & y, en poſant $z = 0$, doivent exprimer la figure du lit AC: puiſque l'eau qui paſſe par le point A, doit gliſſer ſur le lit même. Or, ſi nous poſons $z = a$, ces mêmes formules de x & y exprimeront la figure de la ſuperficie d'eau BD, ou la ſurface de la riviere.

§. 8. Il eſt encore à remarquer, que, lorſqu'on met $t = 0$, le point M doit retomber en O. Donc, les fonctions de t & z qui expriment les valeurs de x & y doivent être telles, que ſi l'on

met

met $t = 0$, il devienne $x = 0$, & $y = b + z = EO$. De plus, puisque $dx = Pdt + Qdz$, & $dy = Rdt + Sdz$: si nous mettons $t = 0$, & que nous prenions z pour constante, ou $dz = 0$, faisant $dt = d\tau$, ces différentiels donneront le lieu du point o, auquel parvient le point O dans le tems $d\tau$; il sera donc, posant $t = 0$, dans les quantités P & R, $Ee = Pd\tau$, & $eo = b + z + Rd\tau$. Comparant ces valeurs avec celles, que nous avons trouvées en haut, nous aurons $P = m$, & $R = -n$, de sorte que les fonctions P & R, posant $t = 0$, doivent donner les vitesses horizontale & verticale du point O.

§. 9. Pour trouver la ligne OMG, que toutes les particules d'eau, qui passent par le point O, représentent dans la riviere, puisqu'il faut regarder ce point O comme fixe dans la section AB, nous aurons $dz = 0$; donc la nature de la ligne OMG sera contenue dans ces formules:

$$dx = Pdt, \qquad \& \quad dy = Rdt,$$

qui donnent à connoitre que, dans l'élément de tems dt, le point M parvient en m, en sorte que $Pp = Pdt$, & $pm = y + Rdt$. De là on connoit le mouvement du point M dont il est transporté en m pendant le tems dt. Car, si nous nommons la vitesse horizontale du point $M = v$, & sa vitesse verticale $= u$ dirigée en bas, après le tems dt il doit être $Pp = vdt$, & $pm = y - udt$, & partant nous aurons $v = P$, & $u = -R$. Ainsi connoissant les fonctions P, Q, R, S, dans les formules générales:

$$dx = Pdt + Qdz, \quad \& \; dy = Rdt + Sdz,$$

les fonctions P & R expriment en même tems les vitesses du point M, la horizontale v, & la verticale u.

§. 10. Donnons maintenant au point O une étendue infiniment petite $OO' = dz$, pour considérer tout le filet d'eau $OO'MM'GG'$, qui passe par cette ouverture $OO' = dz$: car il faut que ce filet demeure toujours continu, sans qu'il s'y introduise aucun vuide.

 Donc

Donc la viteſſe horizontale du point O' ſera $= m + dm$, & la verticale $= n + dn$, ces quantités m & n étant des fonctions de z. Dans le tems $d\tau$ donc le point O' parviendra en o', en ſorte que $Ee' = (m + dm)\,d\tau$, & $e'o' = b + z + dz - (n + dn)\,d\tau$. Par conſéquent, dans ce même tems $d\tau$, il paſſe par l'ouverture $OO' = dz$, la maſſe d'eau $OO'oo'$, dont le volume ſe trouvera en cette maniere

L'aire du trapeze $EO'o'e$ étant $= \frac{1}{2} Ee' (EO' + e'o')$,

- - du trapeze $EOoe$ - - $= \frac{1}{2} Ee\,(EO + eo)$,

- - du trapeze $eoo'e'$ - - $= \frac{1}{2} ee'\,(eo + e'o')$,

d'où l'on tire l'aire

$$\begin{aligned} OO'o'o &= \tfrac{1}{2}Ee'(EO' + e'o') - \tfrac{1}{2}Ee(EO + eo) - \tfrac{1}{2}ee'(eo + e'o') \\ &= \tfrac{1}{2}Ee(OO' + e'o' - eo) + \tfrac{1}{2}ee'(EO' - eo), \end{aligned}$$

& partant elle ſera $= mdzd\tau + \frac{1}{2}dmdzd\tau - \frac{1}{2}mdnd\tau^2 + \frac{1}{2}ndmd\tau^2$.

§. 11. Après un tems t, le point O venant en M, de ſorte qne $EP = x$, $PM = y$, le point O' parviendra en M', de ſorte que $EP' = x + Qdz$, & $P'M' = y + Sdz$, & encore après un tems infiniment petit $d\tau$, ces points M & M' ſeront tranſportés en m & m', de ſorte qu'il ſera $Ep = x + Pd\tau$, $pm = y + Rd\tau$, & $Ep' = x + Pd\tau + Qdz$, $p'm' = y + Rd\tau + Sdz$. Donc la maſſe $OO'o'o = mdzd\tau$, ſera parvenue après le tems $= t$, en $MM'm'm$, ou elle remplira cet eſpace: c'eſt pourquoi il faut que l'aire $MM'm'm$ ſoit égale à $OO'o'o = mdzd\tau$. Or, pour trouver cette aire, on n'a qu'à chercher ces 4 trapezes.

$$PMmp = \tfrac{1}{2}Pp(PM + pm) = \tfrac{1}{2}Pd\tau(2y + Rd\tau),$$

$$P'M'm'p' = \tfrac{1}{2}P'p'(P'M' + p'm') = \tfrac{1}{2}Pd\tau(2y + Rd\tau + 2Sdz),$$

$$PMM'P' = \tfrac{1}{2}PP'(PM + P'M') = \tfrac{1}{2}Qdz(2y + Sdz),$$

$$pmm'p' = \tfrac{1}{2}pp'(pm + p'm') = \tfrac{1}{2}Qdz(2y + 2Rd\tau + Sdz),$$

&

& puisque $MM'm'm = P'M'm'p' + PMM'P' - pmm'p' - PMmp$, nous aurons $MM'm'm = PS\,dz\,d\tau - QR\,dz\,d\tau$. Donc il faut qu'il soit $PS - QR = m$; & c'est la premiere condition à laquelle il faut satisfaire.

§. 12. Cette condition que nous venons de trouver, renferme la continuité du fluide, en vertu de laquelle il faut donc que $PS - QR$, soit égale à m, c'est à dire à une fonction de z, où le tems t n'entre point. Or le premier état en AB, nous découvre encore d'autres propriétés, que les fonctions P, Q, R, S, doivent avoir. Car, faisant varier au point O tant z, que le tems t, pour parvenir au point o', nous aurons $Ee' = md\tau$, & $e'o' = b + z - nd\tau$, où $d\tau$ marque l'élément du tems t, qui lui-même est dans ce cas $= 0$. Donc, si $t = 0$, il faut qu'il soit $dx = md\tau + odz$, & $dy = -nd\tau + dz$. Or, ayant supposé en général $dx = Pd\tau + Qdz$, & $dy = Rd\tau + Sdz$, il est requis que posant $t = 0$, il devienne:

$$P = m; \quad Q = 0; \quad R = -n; \quad \& \; S = 1.$$

Ces conditions jointes à celle que $PS - QR = m$, & que les formules différentielles $Pd\tau + Qdz$, & $Rd\tau + Sdz$, doivent être complettes, ou intégrables, déterminent déjà en partie la nature de ces fonctions; & outre cela il faut que, posant $z = 0$, les coordonnées x & y expriment la nature de la ligne du lit AC.

§. 13. Maintenant, pour trouver l'acceleration de l'élément d'eau $MM'm'm$, dont la masse est $= m\,dz\,d\tau$, il faut avoir égard aux forces qui y agissent. Ces forces, sont premierement le poids de cet élément, que j'exprimerai par son volume $m\,dz\,d\tau$, & par cette force cet élément est poussé en bas. Ensuite, ce même élément est assujetti aux pressions des particules d'eau dont il est environné; & ces pressions s'expriment le plus commodément par la hauteur d'une colonne d'eau, qui exerceroit la même pression. Soit donc p la hauteur qui exprime la pression au point M, & p sera une certaine fonction des coordonnées x & y, ou bien des variables t & z; &

pour

pour repréſenter cette dépendance, ſoit $dp = M dt + N dz$. De là on connoitra les preſſions aux points M', m, & m'; car on aura la preſſion en $M' = p + N dz$; en $m = p + M dt$, & en $m' = p + N dz + M d\tau$, poſant $d\tau$ pour dt; comme nous avons fait auparavant en conſidérant ces points.

§. 14. Donc, ſur la face MM' agira une force $= MM'(p + \frac{1}{2} N dz)$ ſur la face Mm une force $= Mm(p + \frac{1}{2} M d\tau)$, ſur la face $M'm'$ une force $= M'm'(p + N dz + \frac{1}{2} M d\tau)$, & ſur la face mm' une force $= mm'(p + M d\tau + \frac{1}{2} N dz)$. Décompoſons ces forces ſelon les direction de coordonnées EP, EA, car puisque ces forces agiſſent perpendiculairement ſur les faces, la réſolution donnera:

	donne les forces	
La force ſur	ſelon EP	ſelon EA
$MM' = MM'(p + \frac{1}{2} N dz)$;	$+ S dz(p + \frac{1}{2} N dz)$;	$- Q dz(p + \frac{1}{2} N dz)$,
$Mm = Mm(p + \frac{1}{2} M d\tau)$;	$- R d\tau(p + \frac{1}{2} M d\tau)$;	$+ P d\tau(p + \frac{1}{2} M d\tau)$,
$mm' = mm'(p + M d\tau + \frac{1}{2} N dz)$;	$- S dz(p + M d\tau + \frac{1}{2} N dz)$;	$+ Q dz(p + M d\tau + \frac{1}{2} N dz)$,
$M'm' = M'm'(p + N dz + \frac{1}{2} M d\tau)$;	$+ R d\tau(p + N dz + \frac{1}{2} M d\tau)$;	$- P d\tau(p + N dz + \frac{1}{2} M d\tau)$.

Donc, prenant toutes ces forces enſemble, l'élément $MM'm'm$, en ſera pouſſé ſelon la direction horizontale EP par la force $= - MS dz d\tau + NR dz d\tau$; & ſelon la direction verticale EA, ou en haut par la force $= MQ dz d\tau - NP dz d\tau$; de celle-ci il faut donc retrancher la force de la gravité de cet élément, qui eſt $= PS dz d\tau - QR dz d\tau = m dz d\tau$.

§. 15. La maſſe $MM'm'm = m dz d\tau$, étant ſollicitée par deux forces, l'une ſelon l'horizontale EP, qui eſt $= (NR - MS) dz d\tau$, & l'autre ſelon la verticale EA en haut, qui eſt $= (MQ - NP) dz d\tau - m dz d\tau$,

la force accélératrice ſelon la direction EP ſera $= \frac{NR - MS}{m}$, &

la force accélératrice ſelon la direction EA ſera $= \frac{MQ - NP}{m} - 1$.

Par

Par conséquent, le point M sera accéleré par ces deux forces accélératrices. Donc, prenant z constant, & l'élément du tems dt également constant, selon les principes de l'accélération, nous aurons:

$$\frac{NR - MS}{m} = \frac{2ddx}{dt^2}, \quad \& \quad \frac{MQ - NP}{m} - 1 = \frac{2ddy}{dt^2}.$$

Or, ayant $dx = Pdt + Qdz$, & $dy = Rdt + Sdz$, si nous posons $dP = \mathfrak{P}dt + \mathfrak{Q}dz$, & $dR = \mathfrak{R}dt + \mathfrak{S}dz$; il sera $ddx = \mathfrak{P}dt^2$, & $ddy = \mathfrak{R}dt^2$, d'où nous tirons enfin ce deux équations

$$NR - MS = 2m\mathfrak{P}, \quad \& \quad MQ - NP - m = 2m\mathfrak{R}.$$

§. 16. Pour déterminer donc le mouvement de la riviere ABCD, qui est formée par l'eau qui decoule continuellement par la section $AB = a$, sur le lit AC, dont la figure est donnée, ayant pris la ligne horizontale EF pour axe, & nommant $AE = b$, soit parvenu une particule d'eau, qui passe par O, posant $AO = z$, après un tems écoulé $= t$ en M, & qu'on nomme les coordonnées $EP = x$, & $PM = y$, ces quantités x & y seront certaines fonctions des variables t & z. Soit donc

$$dx = Pdt + Qdz, \quad \& \quad dy = Rdt + Sdz,$$

où P, Q, & R, S, sont telles fonctions de t & z, que ces formules différentielles soient intégrables. Or, pour les fonctions P & R, soit de plus:

$$dP = \mathfrak{P}dt + \mathfrak{Q}dz, \quad \& \quad dR = \mathfrak{R}dt + \mathfrak{S}dz.$$

Enfin, soit la pression de l'eau au point M exprimée par la hauteur $= p$, qui étant pareillement une fonction des variables t & z, soit

$$dp = Mdt + Ndz.$$

§. 17. Il s'agit donc de trouver les fonctions P, Q, R, S, M, & N; & pour cela il faut satisfaire aux conditions suivantes.

1) Les coordonnées x & y doivent être telles fonctions de t & z, que lorsqu'on met $z = o$, elles expriment la figure du lit AC; ainsi, posant $z = o$, on aura pour la figure du lit AC ces formules $dx = P dt$, & $dy = R dt$. Or, lorsqu'on met $t = o$, il faut qu'il devienne $x = o$, & $y = b + z$.

2) Le mouvement de l'eau, qui coule par le point O étant supposé tel, que sa vitesse selon la direction horizontale soit $= m$, & sa vitesse selon la direction verticale dirigée en bas $= n$, il faut qu'il soit posant $t = o$;

$$P = m; \quad Q = o; \quad R = -n; \quad S = 1,$$

où m & n seront des fonctions de la seule variable z, sans renfermer l'autre t.

3) La troisieme condition exige, qu'il soit en général: $PS - QR = m$, où $PS - QR$ doit être une fonction de la seule variable z, sans qu'il y entre l'autre variable t.

4) La considération de l'accélération nous a fourni ces équations, auxquelles il faut satisfaire:

$$NR - MS = 2m\mathfrak{P}, \text{ \& } MQ - NP = 2m\mathfrak{R} + m.$$

5) Enfin il est évident que la pression p doit être une telle fonction de t & z, que lorsqu'on met $z = a$, auquel cas la pression se rapportera à la superficie BD, la valeur de p évanouisse. Donc il faut qu'il devienne $M = o$, si l'on met $z = a$.

§. 18. Les formules de la quatrieme condition, puisqu'il est en vertu de la troisieme $m = PS - QR$, donneront

$$M = -2P\mathfrak{P} - 2R\mathfrak{R} - R,$$
$$\text{\&} \quad N = -2Q\mathfrak{P} - 2S\mathfrak{R} - S,$$

& de là nous obtiendrons:

$$dp = \begin{array}{l} -2P\mathfrak{P}dt - 2R\mathfrak{R}dt - Rdt, \\ -2Q\mathfrak{P}dz - 2S\mathfrak{R}dz - Sdz. \end{array}$$

Mais

Mais, ayant $Pdt + Qdz = dx$, & $Rdt + Sdz = dy$, il ſera

$$dp = -2\mathfrak{P}dx - 2\mathfrak{R}dy - dy.$$

Donc, puisque cette formule doit être intégrable, il faut que $\mathfrak{P}dx + \mathfrak{R}dy$, ſoit une formule différentielle complette.

§. 19. De là on peut encore tirer la condition ſuivante: Puisque $\mathfrak{P}dt = dP - \mathfrak{Q}dz$, & $\mathfrak{R}dt = dR - \mathfrak{S}dz$, la ſubſtitution de ces formules donnera:

$$dp = \begin{matrix} -2PdP + 2P\mathfrak{Q}dz + 2R\mathfrak{S}dz \\ -2RdR - 2Q\mathfrak{P}dz - 2S\mathfrak{R}dz \end{matrix} - dy,$$

dont l'intégrale, entant qu'elle peut ſe prendre, ſera:

$$p = C - y - PP - RR + 2\int dz(P\mathfrak{Q} - Q\mathfrak{P} - R\mathfrak{S} - S\mathfrak{R}).$$

Donc il faut que la formule $P\mathfrak{Q} - Q\mathfrak{P} + R\mathfrak{S} - S\mathfrak{R}$, ſoit une fonction de la ſeule variable z, puisque ſans cela l'intégration ne pourroit avoir lieu.

§. 20. Soit donc $P\mathfrak{Q} - Q\mathfrak{P} + R\mathfrak{S} - S\mathfrak{R} = w$, de ſorte que w marque uue fonction de la ſeule variable z, & la preſſion en M ſera

$$p = C - y - PP - RR + 2\int w\,dz,$$

& $\int w\,dz$ ſera pareillement une fonction de z. Or, puisque l'expreſſion de p doit évanouïr, ſi l'on met $z = a$, il faut que cette poſition $z = a$, faſſe évanouïr tous les t dans la formule, $y + PP + RR$, de ſorte qu'elle devienne une quantité conſtante. Et alors on n'aura qu'à déterminer C, en ſorte que p évanouïſſe dans ce cas $z = o$.

§. 21. Puisque nous avons auſſi $PS - QR = m$, où m eſt pareillement une fonction de la ſeule z, ces deux équations:

$$PS - QR = m,$$

$$P\mathfrak{Q} + Q\mathfrak{P} + R\mathfrak{S} - S\mathfrak{R} = w,$$

pour-

pourront servir à éliminer Q & S: & on trouve

$$Q = \frac{PP\mathfrak{Q} + PR\mathfrak{S} - m\mathfrak{R} - wP}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

$$S = \frac{PR\mathfrak{Q} + RR\mathfrak{S} + m\mathfrak{P} - wR}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

& ces valeurs doivent rendre intégrables les formules

$$dx = P\,dt + Q\,dz, \quad \& \; dy = R\,dt + S\,dz.$$

Or substituant ces valeurs trouvées en y introduisant les formules $dP = \mathfrak{P}\,dt + \mathfrak{Q}\,dz$, & $dR = \mathfrak{R}\,dt + \mathfrak{S}\,dz$, nous aurons:

$$dx = \frac{PP\,dP + PR\,dR - m\mathfrak{R}\,dz - wP\,dz}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

$$dy = \frac{PR\,dP + RR\,dR + m\mathfrak{P}\,dz - wR\,dz}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

& l'une & l'autre de ces formules doit être intégrable.

§. 22. Toute la question se réduit donc à la recherche de la nature de ces deux fonctions P & R, desquelles dépendent les fonctions $\mathfrak{P}$ & $\mathfrak{R}$, afin que ces deux formules

$$dx = \frac{P(P\,dP + R\,dR) - m\mathfrak{R}\,dz - wP\,dz}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

$$dy = \frac{R(P\,dP + R\,dR) + m\mathfrak{P}\,dz - wR\,dz}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

deviennent intégrables. Et lorsqu'on aura trouvé moyen de résoudre ce probleme en général, il ne sera plus difficile de déterminer ces fonctions en sorte qu'elles satisfassent aux autres conditions. Or ce probleme est si difficile, que, quoiqu'il ne dépende que de l'analyse, nous ne pouvons presque espérer de parvenir jamais à la solution générale, qui pourroit servir à déterminer le mouvement de toute sorte de rivieres.

§. 23.

§. 23. Ces difficultés m'obligent à m'arrêter à des cas particuliers, dont l'évolution pourra en même tems servir à nous montrer comme il faut s'y prendre, pour chercher la solution générale. Puisque donc, posant $t = 0$, il faut qu'il devienne $x = 0$, & $y = b + z$, je supposerai

$$x = Vt + Att, \quad \& \; y = b + z + Zt + Btt,$$

où V & Z marquent des fonctions de la seule variable z. Nous aurons donc:

$$P = V + 2At; \qquad R = Z + 2Bt,$$

$$Q = \frac{tdV}{dz}; \qquad S = 1 + \frac{tdZ}{dz},$$

$$\mathfrak{P} = 2A; \qquad \mathfrak{R} = 2B,$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{dV}{dz}; \qquad \mathfrak{S} = \frac{dZ}{dz}.$$

& par la seconde condition il sera $m = V$; & $n = - Z$. Or la troisieme condition donne

$$PS - QR = V + 2At + \frac{VtdZ}{dz} + \frac{2AttdZ}{dz} - \frac{ZtdV}{dz} - \frac{2BttdV}{dz},$$

& cette expression doit être $= m = V$, d'où nous tirons ces deux équations:

$$2Adz + VdZ - ZdV = 0, \quad \& \; AdZ = BdV,$$

dont la derniere donne $Z = \frac{BV}{A} + C$, qui étant remise dans la premiere produit $2Adz - CdV = 0$, & partant $V = \frac{2Az}{C} + D$, donc $Z = \frac{2Bz}{C} + \frac{BD}{A} + C$.

§. 24. Changeons ces constantes, & soit $D = \frac{2Ac}{C}$; $A = \frac{1}{2}\alpha C$; $B = \frac{1}{2}\beta C$, pour avoir $V = \alpha(z + c)$; & $Z = C + \beta(z + c)$, & nos formules deviendront :

$$x = \alpha(z+c)t + \tfrac{1}{2}\alpha Ctt; \quad y = b + z + Ct + \beta(z+c)t + \tfrac{1}{2}\beta Ctt,$$

$$P = \alpha(z+c) + \alpha Ct; \quad R = C + \beta(z+c) + \beta Ct,$$

$$Q = \alpha t; \quad S = 1 + \beta t,$$

$$\mathfrak{P} = \alpha C; \quad \mathfrak{R} = \beta C,$$

$$\mathfrak{Q} = \alpha; \quad \mathfrak{S} = \beta,$$

De là nous obtiendrons la fonction de z, qui a été nommée $w = P\mathfrak{Q} - Q\mathfrak{P} + R\mathfrak{S} - S\mathfrak{R}$, ce qui produit

$$\begin{aligned} w = \alpha\alpha(z+c) &+ \alpha\alpha Ct + \beta C + \beta\beta(z+c) + \beta\beta Ct, \\ &- \alpha\alpha Ct - \beta C \qquad\qquad\qquad - \beta\beta Ct, \end{aligned}$$

$$\text{ou} \quad w = (\alpha\alpha + \beta\beta)(z + c).$$

Car, puisque les termes qui contenoient t se sont détruits eux-mêmes, on n'a pas besoin de réduction ultérieure.

§. 25. De là nous aurons donc $2\int w dz = (\alpha\alpha + \beta\beta)(zz + 2cz + cc)$, & la pression au point M deviendra

$$\begin{aligned} p = \text{Const.} - b - z &- Ct - \beta(z+c)t - \tfrac{1}{2}\beta Ctt + \alpha\alpha(z+c)^2 \\ &- \alpha\alpha(z+c)^2 - 2\alpha\alpha Ct(z+c) - \alpha\alpha CCtt + \beta\beta(z+c)^2 \\ &- \beta\beta(z+c)^2 - 2\beta CCt \qquad - \beta\beta CCtt \\ &- 2C\beta(z+c) - 2\beta\beta Ct(z+c) \\ &- CC \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} p = \text{Const.} &- b - z - 2C\beta(z + c) - CC - (1 + 2\beta C)Ct \\ &- (\beta + 2\alpha\alpha C + 2\beta\beta C)(z + c)t - C(\tfrac{1}{2}\beta + \alpha\alpha C + \beta\beta C)tt. \end{aligned}$$

Or cette expression devant évanouir, posant $z = a$, quelque valeur qu'obtienne la variable t, nous en tirerons trois équations

Const.

$$\text{Const.} = b + a + 2C\beta(a+c) + CC.$$
$$(1+2\beta C)C + (\beta + 2\alpha\alpha C + 2\beta\beta C)(a+c) = 0.$$
$$C(\tfrac{1}{2}\beta + \alpha\alpha C + \beta\beta C) = 0,$$

dont la derniere nous fournit deux ſolutions, que je développerai ſéparément.

§. 26. Soit donc pour la premiere ſolution $C = 0$; & la ſeconde donne $c = -a$; & la premiere Conſt. $= b + a$. Donc nos équations pour le mouvement de l'eau ſeront:

$$x = \alpha(z-a)t, \quad \& \; y = b + z + \beta(z-a)t,$$

& la preſſion $p = a - z - \beta(z-a)t$.

Puiſque z ne peut pas devenir plus grand que a, on voit bien qu'il faut prendre α négatif, de ſorte qu'il ſoit

$$x = \alpha(a-z)t, \quad \& \; y = b + z - \beta(a-z)t,$$

& la preſſion $p = a - z + \beta(a-z)t$.

Poſant $z = 0$, la figure du lit AC dans ce cas ſera exprimée par ces formules $x = \alpha a t$, & $y = b - \beta a t$, d'où l'on connoit, que le lit AC ſera une ligne droite inclinée à l'horizon ſous un angle dont la tangente $= \frac{\beta}{\alpha}$.

§. 27. Pour le ſecond cas, nous aurons $C = \frac{-\beta}{2(\alpha\alpha+\beta\beta)}$, d'où la ſeconde équation devient $(1+2\beta C)C = 0$, ou bien $\alpha\alpha\beta = 0$, il ſera donc ou α ou $\beta = 0$: s'il étoit $\beta = 0$, il ſeroit $C = 0$, comme dans le cas précédent, ſoit donc $\alpha = 0$; & il ſera $C = -\frac{1}{2\beta}$; & Conſt. $= b + a - a - c + \frac{1}{4\beta\beta} = b - c + \frac{1}{4\beta\beta}$:

D'où nos équations pour le mouvement de l'eau ſeront:

$$x = \alpha(z+c)t, \quad \& \; y = b + z - \frac{t}{2\beta} + \beta(z+c)t - \tfrac{1}{4}tt,$$

& $p = 0$. Or α étant $= 0$, puisque $x = 0$, l'eau en coulant par AB ne ſortira jamais de la perpendiculaire BAE.

§. 28. Dans ce cas donc l'eau couleroit perpendiculairement de haut en bas. Mais, ſi nous prenons $c = \infty$, afin que αc obtienne une valeur finie $= f$, & que nous poſions également $\mathfrak{G} = 0$, en ſorte que $\frac{1}{2\mathfrak{G}} - \mathfrak{G}c = g$, il en réſultera le cas ſuivant

$$x = ft, \quad \& \quad y = b + z - gt - \tfrac{1}{4}tt,$$

& la preſſion ſera partant $= 0$. Donc, le lit n'étant pas preſſé, ce cas renferme le mouvement où l'eau tombe librement & ſelon une direction oblique quelconque. Or il eſt clair auſſi que, par toute la hauteur AB, l'eau doit paſſer avec la même viteſſe & ſelon la même direction, de ſorte que chaque particule d'eau décrive une parabole, tout comme ſi elle étoit ſéparée du reſte; puiſqu'elle n'en ſouffre aucune preſſion. Auſſi voyons-nous de nos formules, que la figure du lit, ou le chemin des particules qui paſſent par A, eſt une parabole compriſe dans ces formules

$$x = ft, \quad \& \quad y = b - gt - \tfrac{1}{4}tt.$$

§. 29. Dans le premier cas, ayant poſé $C = 0$, pour ſatisfaire à la ſeconde équation, au lieu de mettre $c = -a$, on peut auſſi faire $\mathfrak{G} = 0$; & la premiere ſera Conſt. $= b + a$. Dans ce cas nous aurons:

$$x = \alpha(z + c)t, \quad \& \quad y = b + z,$$

& $p = a - z$, où au lieu de $x = \alpha(z + c)t$, nous pouvons mettre $x = (\alpha z + \mathfrak{G})t$. Ici nous voyons que le lit AC devient une ligne horizontale de même que la ſuperficie BD: car chaque particule d'eau ſe mouvra uniformément dans une direction horizontale; & $\alpha z + \mathfrak{G}$ marque la viteſſe dont l'eau paſſe par le point O. Auſſi les diverſes parties d'eau n'agiront l'une ſur l'au-

tre

tre qu'en vertu de leur pesanteur, de là vient que la pression $p = a - z$ est partout la même comme si l'eau étoit en repos. Dans ce cas donc, la surface de la riviere sera parfaitement horizontale, & le mouvement de toutes les parties se fera horizontalement & sera uniforme.

§. 30. Ayant trouvé $x = (\alpha z + \beta)t$, la vitesse de l'eau au point O seroit $= \alpha z + \beta$; mais on comprend aisément que ce même cas doit subsister, de quelque maniere que varient les vitesses aux divers points O. Aussi voyons-nous que ces valeurs

$$x = Zt, \quad \& \quad y = b + z,$$

où Z marque une fonction quelconque de z, satisfont également à toutes les conditions requises. Car ayant

$$P = Z; \quad Q = \frac{t\,dZ}{dz}; \quad R = 0; \quad S = 1, \quad \text{\& de là}$$

$$\mathfrak{P} = 0; \quad \mathfrak{Q} = \frac{dZ}{dz}; \quad \mathfrak{R} = 0; \quad \mathfrak{S} = 0, \quad \text{il sera}$$

$$m = PS - QR = Z = \text{à une fonction de } z,$$

$$w = P\mathfrak{Q} - Q\mathfrak{P} + R\mathfrak{S} - S\mathfrak{R} = \frac{Z\,dZ}{dz} = \text{à une fonction de } z,$$

d'où nous tirons la pression à un point quelconque M,

$$p = \text{Const.} - b - z - ZZ + 2\int Z\,dZ = a - z.$$

Ainsi une riviere peut subsister sur un lit horizontal, lorsque toutes les particules d'eau se meuvent uniformément selon des directions horizontales d'eau, & la surface supreme demeurera horizontale. De plus, la pression de l'eau sera partout la même que si toute l'eau étoit en repos.

§. 31. Voici donc trois diverſes valeurs des coordonnées x & y, qui ſatisfont aux conditions requiſes pour repréſenter le mouvement d'une riviere.

$$\text{I.}\quad x = ft; \qquad y = b + z - gt - \tfrac{1}{4}tt,$$

$$\text{II.}\quad x = \alpha(a - z)t; \qquad y = b + z + \beta(a - z)t,$$

$$\text{III.}\quad x = Zt; \qquad y = b + z,$$

où Z marque une fonction quelconque de z.

Or le ſecond cas peut encore être rendu plus général, en poſant:

$$x = (a - z)Zt, \quad \& \ y = b + z + \beta(a - z)Zt;$$

& ce ſera de la conſidération de ces cas particuliers qu'on pourra eſpérer la ſolution générale.