

D E  
M O T V F L V I D O R V M  
A D I V E R S O C A L O R I S G R A D V  
O R I V N D O .

A u c t o r e

L. E V L E R O .

I.

**A** calore in fluidis certum quendam motum intestinum generari, a naturae scrutatoribus satis probabili ratione ostendi solet; cum autem hic motus in minimis tantum elementis subsistat, neque in vniuersa fluidi massa cernatur, eius ratio in Theoria motus fluidorum nequaquam habetur, sed fluida omni motu in sensus incurrente destituta in aequilibrio versari censentur, etiamsi minimae particulae, quibus sunt composita, motu quocumque inter se agitentur. Neque ergo hic de motu illo intestino, qui fluidorum elementis a calore inducitur, hic sum acturus, sed Mechanicae principiis inhaerens in eos fluidorum motus sum inquisiturus, qui in eorum tota mole a diuerso caloris gradu, quo eius partes sunt affectae, produci debet. Quae motus causa cum vix adhuc sit cognita, tametsi plurima phaenomena inde originem suam trahunt, eius accuratior

curatior euolutio non solum mathematicam fluidorum cognitionem, sed etiam physicam maxime amplificabit.

2. Cum olim Theoriam aequilibrîi fluidorum accuratius perscrutarer, luculenter ostendi neque atmosphaeram neque vllum aliud fluidum in aequilibrio consistere posse, nisi in paribus altitudinibus vbique idem caloris gradus deprehendatur. Quodsi enim de fluido graui quaestio instituitur, ad statum aequilibrîi absolute requiritur, vt in aequalibus altitudinibus non solum pressio sed etiam densitas fluidi vbique sit eadem. Quoniam igitur fluidorum densitas a calore variatur, siquidem a frigore in minus spatium constringuntur, a calore vero in maius expanduntur: simul est euictum, nisi in paribus altitudinibus vbique idem caloris gradus vigeat, aequilibrium omnino locum habere non posse. Atque in hoc principio non dubitavi praecipuam ventorum causam constituere, cum statim atque atmosphaera in quapiam regione maiorem calorem concipit quam in finitimis, ob sublatum aequilibrium necessario ventus debeat oriri.

3. Cuiusmodi autem motus in fluido, cuius partes aequae eleuatae diuerso caloris gradu perfunduntur, ab hac ipsa causa produci debeat, tum temporis definire non sum ausus; quandoquidem haec inuestigatio vberiore motus cognitionem po-

stulare videbatur. Postquam autem hoc argumen-  
tum denuo examini subiecissim, insignem hanc pro-  
prietatem semper locum habere debere deprehendi,  
vt quoties massa fluida ad pares altitudines in vno  
loco fuerit calidior, quam in alio, tum perpetuo  
in regione inferiori fluidum a loco frigidore in ca-  
lidorem, contra vero in regione superiori a cali-  
diore in frigidorem ferri debere. Quae conclusio  
cum per experientiam mirifice confirmetur, quo-  
niam talem motum in caminis et hypocaustis cale-  
factis clarissime obseruamus, omnino digna videtur,  
vt eam accuratius euoluam, atque adeo ipsam hu-  
ius motus generationem, quatenus quidem licet,  
distincte exponam.

Tab. IX.

Fig. I.

4. Consideremus ergo vas satis amplum  
ABCD fluido quocunque repletum, in cuius parte  
ABEF ope ignis subiecti multo maior caloris gra-  
dus sustineatur, quam in parte reliqua EFCD, ita  
vt fluidum in illa parte ob maiorem calorem mi-  
nore praeditum sit densitate quam in hac, vbi fri-  
gidum assumitur. Concipiamus primo has duas  
partes pariete verticali EF a se inuicem separari,  
huncque parietem inferius in *f* exiguo foramine esse  
pertusum; atque vt iam fluidum in aequilibrio  
existat, ideoque pressio in foramine *f* vtrunque ae-  
qualis habeatur, euidenter est fluido in parte ABFE  
maiolem altitudinem BK=FL tribui debere, quam  
in

in altera parte EFCD vbi altitudo fluidi fit FM = CN; vt scilicet quantum fluidi densitas in illa parte minor est, defectus pressionis inde in foramine *f* natae excessu altitudinis LM compensetur.

5. Cum igitur hoc modo fluidum ad aequilibrium fuerit perductum, eiusque particula in foraminulo *f* vtriusque partem vim sustineat, ponamus parietem in loco altiori quoque foraminulo *e* perforari. Atque iam manifestum est particulam fluidi in *e* haerentem a fluido in parte calidiori contento ob maiorem altitudinem *Le* multo magis vrgeri, quam a fluido partis frigidioris; etsi enim illud minorem habet densitatem, altitudo tamen fluidi calidioris *Le* prae altitudine frigidioris *Me* multo maior est quam hic ad aequilibrium requireretur. Quo hoc clarius perspiciatur, fit densitas fluidi frigidi =  $d$ , calidi vero =  $d - \delta$ , atque pro aequilibrio in foraminulo *f* necesse est fit  $(d - \delta)Lf = d.Mf$  seu  $d.LM = \delta.Lf$ . Pro foraminulo autem *e* pressio fluidi calidi est =  $(d - \delta).Le$  frigidi vero =  $d.Me$ , illa igitur hanc superat parte  $d.LM - \delta.Le$ . Quia vero est  $d.LM = \delta.Lf$ , hic excessus fit =  $\delta.Lf - \delta.Le = \delta.Lf - \delta.Le$ , unde patet, quo magis foramen *e* supra *f* fuerit eleuatum, eo magis ibi pressionem a fluido calido ortam superaturam esse pressionem alteram a frigido ortam.

6. Ab excessu ergo hoc particula fluidi in foramine *e* versans ad motum concitabitur, fluidum-

G g 2

que

que ex vasis parte calidiori ABEF per foramen *e* in partem frigidam propelletur: sicque manifestum est hoc casu per foramen superius *e* fluido necessario motum esse loco calido in frigidum impressum iri. Statim autem ac propter hunc fluxum altitudo fluidi frigidi crescit, calidi vero decrescit, aequilibrium ad foramen inferius *f* tollitur, et ob auctam pressionem in vasis parte frigida fluidum ibi hinc in partem calidam transibit. Si prius fluido eiusmodi statum tribuissimus, ut aequilibrium circa foramen superius *e* fuisset, tum quoque fluxus per foramen inferius *f* e loco frigidiori in calidiorum evenisset; ex quo concludere licet, etiam sublato pariete EF fluxum perennem in fluido generari, quo inferne fluidum ex parte frigida in calidam, superne vero ex calida in frigidam promoveatur, quamdiu scilicet discrimen caloris durat.

7. Idem hoc etiam ita ostendi potest, ut neque diaphragmate opus sit, neque superna fluidi superficie; hocque ratiocinium idcirco quoque ad  
 Tab. IX. atmosphaeram traduci possit. Sumamus ergo in  
 Fig. 2. regione ABF insignem caloris, in regione vero DCG insignem frigoris gradum adesse: tum vero huic fluido alioquin continuo duos tubos horizontales immersos concipiamus, alterum *ad* in regione superiori, alterum vero *bc* in regione inferiori, quorum uterque e regione calida in frigidam porrigatur. Fingamus nunc fluidum in eiusmodi statu, ut pro tubo inferiori *bc* pressio fluidi vtrinque sit eadem,

eadem, ac perspicuum est in tubi superioris *ad* termino *a* pressionem maiorem esse futuram quam in termino *d*. Quam ob rem fluidum per superiorem *ad* ex regione calida in frigidam moueri incipiet; Sin autem initio pro tubo superiori *ad* pressio vtrinque par esset, tum fluidum per inferiorem *cb* ex regione frigida in calidam transibit. Ex quibus colligitur, quomodocunque fluidum fuerit dispositum, semper in regione superiori fluxum ex parte calida in frigidum, in regione inferiori autem fluxum contrarium ex calida parte in frigidam oriri debere.

8. Egregie haec cum experientia conueniunt; si enim vas huiusmodi satis amplum aqua repletum altero tantum latere *AB* igni admoueatur, vt aquae pars huic lateri vicina calorem adipiscatur, in opposita autem parte *CD* frigida maneat, tum mox obseruare licet in superficie suprema aquam continuo a parte calida in frigidam proferri; quod fieri non posset nisi simul circa fundum fluxus contrarius oriretur. Si hoc modo pisae vel lentes in aqua coquantur, dum vas ex vna tantum parte vim ignis experitur, iste motus multo facilius agnoscitur. Tum etiam idem phaenomenum in aere maxime cernitur; dum enim conclauis calefacti ianua in conclave frigidum aperitur, mox aëris motus per aperturae partem summam, ex conclauis calido in frigidum, per infimam autem ex frigido

in calidum sentitur. Quin etiam ascensus aeris per caminum, vi ignis vulgo tributus, eidem causae debetur, dum in regione inferiori aer continuo ad ignem affluit; ac prope fornacem calefactum in hypocausto aer continuo ascendere observatur, in locis frigidioribus iterum descensurus.

9. Nullum etiam est dubium, quin ex hoc principio venti constanter ab oriente spirantes sub zona torrida explicari queant, verum ne coniecturis atque adeo determinationibus quodammodo vagis nimis tribuere videar, ipsam horum motuum generationem et celeritatem ex primis mechanicae principis definire conabor. Quod cum in genere pro fluido quaque versus expanso praestare non liceat, inuestigationes meas ad motum fluidorum in tubis cuiuscunque figurae adstringam, quae quidem limitatio veritati conclusionum inde deducendarum nullam vim afferet; cum quomodocunque etiam motus fuerit comparatus, via qua quaelibet particula promouetur, mente saltem ut tubus considerari possit. Hos igitur tubos ita angustos assumo ut in qualibet sectione ad eorum directionem normaliter facta nulla motus inaequalitas locum habere possit, sed tota massa huiusmodi sectionem implens communi motu proferatur. Quantumvis autem haec hypothesis limitata videatur, tamen probe notandum est fere omnia quae adhuc circa motum fluidorum

dorum sunt inuestigata, ex hac hypothefi effe deriuata; quae cum egregie cum experientia confentiant, eo minus verendum est, ne ei innixi in errorem praecipitemur.

10. Sit igitur AB huiusmodi tubus, figurae cuiuscunque, et cuius amplitudo utcunque fit variabilis; in quo fluidum indolis cuiuscunque moueatur. Ad hunc motum definiendum ad duas quantitates variabiles principales spectari oportet, quarum altera loci in tubo, altera vero temporis determinationem contineat. Pro priori sumto in tubo loco fixo A, statuamus puncti cuiuscunque S ab eo distantiam seu arcum  $AS = s$ , curuamini scilicet tubi simul ratione habita; tum vero pro posteriori epocha quaedam fixa stabiliatur, a qua tempora deinceps computentur; et nunc quidem ponamus tempus inde elapsum esse  $= t$ , quod in minutis secundis exprimamus, ad quod propterea calculum sequentem accommodari contueniet. Quaecunque iam ad motum pertinent, ea per has duas variabiles exprimi oportebit, vt intelligatur, quomodo fluidi status tam in quouis tubi loco, quam ad quoduis tempus futurus sit comparatus.

Tab. IX.  
Fig. 3.

11. Nunc igitur, hoc est elapso ab illa epocha tempore  $= t$  sec. ponamus fluidi particulae in S haerentis densitatem esse  $= q$ , pressionem  $= p$  et celeritatem qua versus B progreditur  $= v$ ; tum vero



vero fit amplitudo tubi ad  $S = rr$ , eiusque altitudo super quodam plano horizontali  $=z$  quae duae posteriores quantitates cum a solo tubi loco  $S$  pendeant, vt functiones solius variabilis  $s$  sunt spectandae. Praecedentes vero tres quantitates  $q, p, v$ , quoniam in eodem loco successu temporis variationes recipere possunt, vt functiones ambarum variabilium  $s$  et  $t$  considerari, et in calculo conformiter tractari debent. Celeritatis autem  $v$  significatum ita definitio, vt hac littera spatium, quod ista celeritate vniformiter vno minuto secundo percurretur. Tum vero certa quadam densitate per vnitatem expressa, littera  $q$  numerum quendam denotabit; at littera  $p$  altitudinem quandam exhibet, columnae scilicet ex materia illa, cuius densitas vnitate designatur, constantis, et pondere suo pressionem in  $S$  referentis.

12. His positis euidentis est, cum quantitates  $rr$  et  $z$  vt functiones cognitae variabilis  $s$  spectari queant, totum negotium huc reuocari, vt cuiusmodi tres illae quantitates  $q, p$  et  $v$  sint functiones binarum nostrarum variabilium  $s$  et  $t$  definiatur, in quem scopum omnes vires calculi sunt intendendae; ex quo intelligitur tribus opus esse aequationibus ad illas quantitates determinandas; pro nostro autem instituto duae sufficiunt, quandoquidem in quouis tubi loco gradum caloris, a quo densitas pendet, vt cognitum assumimus. Si enim fluidum sit aqua, ex calore immediate densitas innotescit,

fin

fin autem fit aër, pressio insuper in computum duci debet, quae hoc casu elasticitatem repraesentat, ideoque recte densitati et calori coniunctim proportionalis aestimatur. Quemadmodum igitur praeterea duas aequationes obtinere liceat, accuratius inuestigabo.

13. Primum igitur obseruo per assumpta elementa moleculae fluidi cuiusque  $Ss$  promotionem tempusculo infinite paruo  $dt$  factum assignari posse; quam ergo si in  $S's'$  peruenisse sumamus, quia etiam hic densitas definitur, necesse est vt massa  $S's'$  praecise aequalis sit massae  $Ss$ , vnde vnâ aequationem eliciemus. Posito igitur elemento  $Ss = ds$ , erit moleculae  $Ss$  volumen  $= rrd s$ , quod in densitatem  $q$  ductum dabit eius massam  $= qrr ds$ . Cum iam puncti  $S$  celeritas sit  $= v$  ea hoc punctum tempusculo  $dt$  proferetur per spatium  $SS' = v dt$ ; puncti vero  $s$  nunc celeritas est  $= v + ds \left( \frac{dv}{ds} \right)$ , quae eodem tempusculo  $dt$  proferetur per spatium  $ss' = v dt + ds dt \left( \frac{dv}{ds} \right)$ : vnde fit  $S's' = Ss + ss' - SS' = ds + ds dt \left( \frac{dv}{ds} \right)$ . Quaeratur amplitudo tubi in  $S'$ , quae ob  $SS' = v dt$  erit  $= rr + v dt \cdot \frac{drr}{ds}$ , ex quo volumen particulae  $S's'$  erit  $= rrd s + rrd s dt \left( \frac{dv}{ds} \right) + v dt ds \cdot \frac{drr}{ds}$  vbi notandum est  $\frac{drr}{ds}$  esse functionem datam ipsius  $s$ . At densitas quae in  $S$  erat  $= q$ , nunc post tempusculum  $dt$  et per spatium  $SS' = v dt$  progrediendo colligitur  $= q + dt \left( \frac{dq}{dt} \right)$

$+v dt \left( \frac{dq}{ds} \right)'$ , hincque massa particulae, in  $S's'$  translatae :

$$= qrr ds + qrr ds dt \left( \frac{dv}{ds} \right) + qv dt ds \cdot \frac{d \cdot rr}{ds} + rrr ds dt \left( \frac{dq}{dt} \right) + rrv ds dt \left( \frac{dq}{ds} \right)$$

neglectis scilicet terminis, in quibus differentialia secundum gradum essent superaturae.

14. Quoniam itaque haec massa praecedenti  $qrr ds$  debet esse aequalis facta diuisione per  $ds dt$  hanc consequimur aequationem, qua iam vna motus conditio determinatur :

$$qrr \left( \frac{dv}{ds} \right) + qv \frac{d \cdot rr}{ds} + rrv \left( \frac{dq}{ds} \right) + rr \left( \frac{dq}{dt} \right) = 0$$

cuius tria membra priora manifesto in hoc vnum coeunt  $\left( \frac{d \cdot qrrv}{ds} \right)$ , ita vt nostra aequatio in hanc formam contrahatur :

$$\left( \frac{d \cdot qrrv}{ds} \right) + rr \left( \frac{dq}{dt} \right) = 0$$

cuius prius membrum ex sola variabilitate ipsius  $s$ , posterius vero ipsius  $t$  tantum est repetendum, quemadmodum motus signandi iam satis receptus declarat, quam ob rem eius ulteriori explicationi supersedeo. Quia amplitudo tubi est data, hac aequatione certa relatio inter densitatem et celeritatem exprimitur.

15. Altera aequatio qua adhuc indigemus, ex acceleratione concludi potest. Scilicet cum celeritas nunc in  $S$  sit  $v$ , haecque particula tempusculo  $dt$  per spatium  $SS' = v dt$  promoueatur, hic eius cele-

celeritas erit  $v + v dt \left( \frac{dv}{ds} \right) + dt \left( \frac{dv}{dt} \right)$ , ideoque acceleratio  $= v \left( \frac{dv}{ds} \right) + \left( \frac{dv}{dt} \right)$ , quae vi acceleranti est proportionalis statuenda. Consideremus ergo particulam  $Ss$ , cuius massa  $= qrrds$ , quae primo ob gravitatem secundum  $Ss'$  vrgetur vi acceleratrice  $= -\frac{dz}{ds}$ , tum vero ob pressionem in  $S$  vi motrice  $= prr$ , ab altera verò parte  $s$  contra vi  $= rr \left( p + ds \left( \frac{dp}{ds} \right) \right)$  hinc ergo nascitur vis motrix  $= -rrds \left( \frac{dp}{ds} \right)$  et vis acceleratrix  $= -\frac{z}{q} \left( \frac{dz}{ds} \right)$  in eandem directionem. Quod si iam  $g$  denotet altitudinem, ex qua graua tempore vnus minuti secundi delabuntur, nouimus poni debere:

$$v \left( \frac{dv}{ds} \right) + \left( \frac{dv}{dt} \right) = -\frac{zg}{ds} - \frac{z}{q} \left( \frac{dp}{ds} \right) \text{ seu}$$

$$\frac{z}{q} \left( \frac{dp}{ds} \right) + \frac{zg}{ds} + v \left( \frac{dv}{ds} \right) + \left( \frac{dv}{dt} \right) = 0$$

quae ergo est altera aequatio desiderata et priori adiuncta omnes fluidorum motus in tubis complectitur.

16. Vt nunc has formulas ad casum propositum accommodemus, sumamus tubam in singulis punctis tam efficaci caloris gradu esse praeditum, vt simulac fluidum eo peruenit cum eo idem caloris gradus communicetur, quod quidem si tubus ingentem habeat extensionem simulque fuerit valde angustus, etiam in praxi facile obtinetur, quandoquidem tum per insignem tractum caloris gradus parum immutatur, fluidoque transfluenti eadem

mutatio mox inducitur, nisi forte eius motus vehementer fuerit rapidus. Quia autem hic ad primam motus generationem potissimum spectamus, hic casus nostram inuestigationem haud perturbabit. Tubi ergo loco cuique  $S$  eiusmodi tribuo calorem, eumque perennem, ut fluidi eo versantis densitas sit  $=q$ , quae cum in eodem tubi loco semper sit eadem, neque successu temporis varietur, erit haec quantitas  $q$  functio solum variabilis  $s$  ab altera  $t$  neutiquam pendens, ideoque  $(\frac{dq}{dt}) = 0$ .

17. Cum igitur sit  $(\frac{dq}{dt}) = 0$ , prima aequatio pro motu definiendo inuenta hanc habebit formam  $(\frac{d(qrrv)}{ds}) = 0$  ita ut quantitas  $qrrv$  differentiale ex solum variabilitate ortum sit nullum; ex quo sequitur istam quantitatem plane non ab  $s$  pendere, sed vel esse constantem vel functionem solum temporis  $t$ , ex quo deducimus hanc aequationem integratam  $qrrv = \Gamma : t$ , hincque  $v = \frac{\Gamma : t}{qrr}$  ita ut eodem tempore per totum tubum celeritas sit reciproce ut tubi amplitudo in densitatem ducta. Cum iam quantitates  $q$  et  $rr$  non a tempore  $t$  pendeant erit  $(\frac{dv}{dt}) = \frac{\Gamma' : t}{qrr}$  ex quo altera aequatio fit  $\frac{2g}{q}(\frac{dp}{ds}) + \frac{2g}{ds} + v(\frac{dv}{ds}) + \frac{1}{qrr} \Gamma' : t = 0$  multiplicetur ea per  $qds$ , et tempus  $t$  pro constante habetur, ut haec prodeat aequatio:

$$2gdp + 2gqdz + qv dv + \frac{ds}{rr} \Gamma' : t = 0$$

quae

quae ergo integrata praebet:

$$2gp + 2g\int qdz + \int qv dv + \Gamma' : t \int \frac{ds}{rr} = \Delta : t.$$

18. In hac aequatione quia  $q, rr$  et  $z$  sunt functiones ipsius  $s$  tantum, integralia  $\int qdz$  et  $\int \frac{ds}{rr}$  nullam habent difficultatem; at cum sit  $\int qv dv = \frac{1}{2}qv^2 - \frac{1}{2}\int vvdq$  ob  $v = \frac{T:t}{qr}$  erit

$$\int qv dv = \frac{(T:t)^2}{2qr^2} - \frac{1}{2}(\Gamma:t)^2 \int \frac{dq}{qqr^2}$$

sed est  $\int \frac{dq}{qqr^2} = -\frac{1}{qr^2} - 4\int \frac{dr}{qr^5}$  vnde fit

$$\int qv dv = (\Gamma:t)^2 \left( \frac{1}{qr^2} + 2\int \frac{dr}{qr^5} \right)$$

vnde etiam haec integratio quouis casu facile expeditur. Ponamus breuitatis gratia  $\Gamma:t = T$  vt fit  $v = \frac{T}{qr}$  denotante littera  $T$  functionem ipsius  $t$  tantum, et quia est  $\Gamma':t = \frac{dT}{dt}$  altera aequatio motum determinans erit:

$$2gp = \Delta:t = 2g\int qdz - \frac{T^2}{qr^2} - 2TT\int \frac{dr}{qr^5} - \frac{dT}{dt} \int \frac{ds}{rr},$$

vbi notetur litteram  $T$  exhibere celeritatem fluidi in eo tubi loco vbi est  $qrr = 1$ .

19. Quia hic assumimus densitatem fluidi vnice a calore pendere, perspicuum est hanc hypothefin ad eiusmodi fluida esse restrictam, quae a viribus comprimentibus nullam mutationem patiuntur, cuiusmodi est aqua; neque ergo has aequationes ad aërem transferre licet, quippe cuius densitas insuper a pressione seu elasticitate determinatur. In-

terim autem facile intelligitur, si motum aquae in tubis diuerso calore affectis definire nouerimus, aëris motum haud multo fore abfimilem, easdemque fere leges esse secuturum. Quam ob rem quaestionem resoluendam ita constituam:

Tab. IX. *Si habetur tubus in se rediens figurae cuiuscunque ACBD et amplitudinis utcunque variabilis, in cuius singulis locis certus caloris gradus vigeat cum fluido ibi transfuente mox communicandus; hincque tubus aqua repleatur, quae primo ope diaphragmatis Aa tubo alicubi inserti in quiete seruetur; tum vero diaphragmate remoto quaeritur motus, qui aquae ob diuersam caloris temperiem inducetur.*

20. Sumto pro libitu in tubo puncto fixo A, ab eo vocetur puncti cuiusuis S distantia seu arcus  $AS = s$ , amplitudo tubi ibidem  $= rr$ , et gradus caloris tantus, ut aqua ibi versans densitatem obtineat  $= q$ ; tum vero puncti huius S altitudo super certo quodam plano horizontali sit  $= z$ , ita ut hae tres quantitates  $rr, q$  et  $z$  tanquam functiones datae ipsius  $s$  spectari queant. Deinde elapso tempore  $= t$  min. sec. fit aquae celeritas in loco S  $= v$  in plagam SCB tendens, ibique statuatur pressio  $= p$ . His positis pro motu cognoscendo habebimus primo

$v = \frac{T}{qrr}$ , existente T certa functione temporis T deinceps definienda, tum vero insuper hanc aequationem:

$$2gp = \Delta : t - 2g \int q dz - \frac{TT}{qr^4} - 2TT \int \frac{dr}{qr^3} - \frac{dT}{dt} \int \frac{ds}{rr}$$

vbi

ubi  $g$  denotat altitudinem, ex qua grauia vno minuto secundo delabuntur, quam nouimus esse 15, 625 ped. Rhen.

21. Tota quaestio ergo huc reducitur; quomodo hinc temporis functionem  $T$  definiri oporteat, quandoquidem ea cognita motus aquae in toto tubo ad quoduis tempus innotescit, dum altera temporis functio  $\Delta : z$  tantum in pressione  $p$  determinationem ingreditur, atque adeo a iudicio nostro pendet, quia quouis tempore tubum constringendo pressionem vel intendere vel remittere licet. Ex rei autem natura functio illa temporis  $T$  sequenti ratione elici debet: ponatur primo arcus  $AS = s = 0$ , tempore vt constante spectato, vt  $p$  praebet pressionem in loco  $A$ ; tum ipsi  $s$  detur valor toti tubi longitudini  $ACBDA$  aequalis, vt in eundem locum  $A$  reuertamur, atque valor pro  $p$  hinc resultans necessario praecedenti aequalis esse debet: atque ex hac aequatione functionem illam  $T$  determinare licebit; quae quoniam per integrationem elicitur, ita debet esse comparata, vt posito tempore  $t = 0$  ea euanescat, quia initio omnis aqua in quiete fuisse assumitur. Quare si tempore succedente quantitas  $T$  non amplius fuerit nulla, hinc concludendum erit, aquam deinceps non amplius in quiete permanere posse.

22. Quo autem clarius perspiciatur a qua causa aqua primum ad motum concitetur, ponamus septimum



septum  $Aa$ , quo omnis motus coercetur, adhuc adesse et quia in hoc statu quantitas  $T$  necessario est nulla, pro pressione in singulis punctis  $S$  altera nostra aequatio praebet  $2gp = \Delta : t - 2g \int q dz$  seu  $p = f : t - \int q dz$ , unde si integrale  $\int q dz$  ita capiatur ut evanescat sumto arcu  $AS = s = 0$ , functio  $f : t$  dat pressionem aquae supra septum  $Aa$ . Quodsi iam integrale  $\int q dz$  per totum tubum  $ACBDA$  extendatur, eiusque valor tum fiat  $= k$ , infra septum pressio erit  $= f : t - k$ ; unde patet sublato septo  $Aa$  guttulam aquae ibi deorsum vrgeri pressione  $f : t$ , sursum vero pressione  $f : t - k$ , ideoque deorsum pressione  $k$ , cui cum iam nihil obsistat, manifestum est totam aquam in tubo ad motum concitatum iri. Quare nisi ille integralis  $\int q dz$  per totum tubum extensi valor  $k$  evanescat, sublato septo fieri nequit, ut aqua in quiete perseveret; simul vero etiam hinc causa perspicitur motum producens, quae ubicunque septum  $Aa$  concipiatur, eadem prodire debet ita ut omnia aquae elementa in toto tubo simul ad motum pari vi impellantur.

23. Hinc autem primo perspicuum est, si densitas  $q$  ubique esset eadem, seu  $q = b$ , ob  $\int q dz = bz$ , siquidem planum horizontale, a quo altitudinem  $z$  metimur, per ipsum locum  $A$  ducamus, reuersione per totum facta, altitudinem  $z$  iterum evanescere, ideoque fore  $k = 0$ ; quo ergo casu etiam remoto septo  $Aa$  aequilibrium conservabitur. Idem quoque

quoque innumerabilibus aliis casibus, quibus densitas  $q$  est variabilis euenire potest, veluti si fuerit  $q = A + Bz^\alpha + Cz^\beta + Dz^\gamma$  etc. quoniam integrale  $\int q dz = Az + \frac{B}{\alpha+1} z^{\alpha+1} + \frac{C}{\beta+1} z^{\beta+1} + \frac{D}{\gamma+1} z^{\gamma+1}$  etc. ita sumtum  $vs$  euanescat posito  $z = 0$ , facta integra resolutione, ubi fit iterum  $z = 0$  denuo euanescit. Atque in genere hoc euenire debere perspicuum est, quoties densitas  $q$  a sola altitudine  $z$  pendet, ita vt vbique in paribus altitudinibus densitas sit eadem; quam conditionem ad aequilibrium absolute necessariam esse iam olim demonstraui.

24. Eatenus autem quantitas  $k$  non euanescit, quatenus in aequalibus altitudinibus non eadem densitasprehenditur, id quod sequenti modo luculentissime ostenditur. Ponamus in A densitatem esse minimam, indeque per C vsque ad B progrediendo continuo augeri, vt in B sit maxima, hinc vero per D a A reuertendo iterum dimiuui; iam ducta recta verticali CABD, cuius puncta A, C, B, D altitudines eorundem tubi locorum referant, ad quae constituentur applicatae Aa, Cc, Bb, Dd densitates aquae in his locis representantes; eorumque puncta  $a, c, b, d$ , in curua quadam in se redeunte  $acbd$ ; ac si punctum S altitudini loci in tubo S respondeat, vt sit  $AS = z$ , erit hic applicata  $Ss = q$ , ideoque integrale  $\int q dz$  exprimit aream Aa Ss; vnde si punctum S vsque ad summum C promoueamus, area habebitur Aa Cc; hinc autem vterius vsque

Tab. X.  
Fig. 5.

ad B progrediendo, quia areae per altitudines imminutas negative capi debent, pro hoc loco B integrale  $\int q dz$  erit  $AaCc - CcbB$  pro puncto autem imo D erit  $= AaCc - CcbD$ . Atque iterum a D ad A ascendendo fit id  $AaCc - CcbD + DdaA$ , quod cum det valorem ipsius  $k$  erit  $k =$  areae  $acbdba$ , unde patet littera  $k$  designari aream a linea  $acbdba$  in se redeunte inclusam.

Tab. X.  
Fig. 6.

25. Hic observo fieri posse, ut aqua in tubo quiescat, etiam si in paribus altitudinibus eius densitas non sit eadem. Euenit hoc si curua illa in se redeuntis eiusmodi semnisci  $Oasc\sigma aO\delta dbO$  habeat figuram, ut areae a nodo  $O$  separatae inter se sint aequales, quia enim hoc casu altera areae negative accipi debet, area tota  $k$  in nihilum abire est censenda. Hic ergo casus locum habet, si a puncto imo D sinistrosum per A ad summum C ascendendo scala densitatum  $q$  sit curuae ramus  $dbOasc$ , tum vero a puncto summo C ad infimum D dextrorsum per B descendendo scala densitatum sit ramus  $c\sigma aO\delta d$ . Etsi ergo in aequalibus altitudinibus AS densitates sunt inaequales in altero loco scilicet sinistro  $Ss$  dextro vero  $S\sigma$ , tamen haec inaequalitas non obstat quo minus aqua in tubo contenta statum aequilibrum seruare possit; dummodo ambo illi rami eiusmodi lineam in se redeuntem constituent cuius tota area ad nihilum reducatur.

26. Ne-

26. Nequaquam autem hi casus Theoriae iam olim stabilitae, qua ad aequilibrium in altitudinibus paribus aequales densitates requiruntur, aduersatur; namque Theoria illa in genere ad fluida quae versus patentia et secum communicantia est accommodata, in quibus utique nullum aequilibrium sine ista conditione dari potest. Quando autem fluida tubis sunt inclusa, ita ut diuersae fluidi partes non aliter nisi per tubum inter se communicare queant, tum illa conditio vehementer restringitur, ut non amplius absolute sit necessaria. Atque adeo iam insignem exceptionem hic notauimus, dum tubi continuitate septo interclusa fluidum semper necessario in aequilibrio coercetur quantumuis etiam densitates in paribus altitudinibus fuerint diuersae. Deinde vero etiam remoto septo, dummodo tubus non prorsus aqua sit plenus, sed portio quaedam eius vacua relinquatur, iam dudum constat semper aequilibrium existere posse, etiamsi in paribus altitudinibus non aequalis fluidi densitas reperiatur. Quare eo magis mirum videri debet, hoc non semper evenire posse, quando tubus in se rediens omnino fluido est repletus, adhuc magis autem hoc paradoxum augebitur, quando ostendero ad id ut aequilibrium certo obtineri queat, requiri ut ad minimum certum aliquod spatium vacuum relinquatur, cuius adeo quantitatem quouis casu assignare licet.

Tab. X. 27. His praemissis, ut tandem quaestionis  
 Fig. 7. principalis §. 19. propositae solutionem determina-  
 tam exhibeam, ne vniuersalitas calculum impediatur,  
 tubo primum figuram circulaem tribuam eumque  
 in plano verticali constitutum considerabo; tum ve-  
 ro etiam quo facilius calculi difficultates superem,  
 amplitudinem eius vbique eandem statuam, ut quan-  
 titas  $rr$  sit constans. Deinde ducto diametro hori-  
 zontali AB, in eius termino A calorem maximum  
 in B vero minimum esse assumam, ut aquae den-  
 sitas in A sit minima in B vero maxima, in loco  
 autem summo C et imo D valorem quendam me-  
 dium teneat. Parum autem referet, quomodo va-  
 riatio densitatis constituatur, igne autem ad A susci-  
 tato quia calor in ratione duplicata distantiarum  
 decrefcere aestimatur, pro quouis autem tubi pun-  
 cto S distantiae seu cordae AS quadratum, sinu-  
 verso AZ est proportionale, posito angulo AOS =  $\Phi$ ,  
 statuamus aquae in S densitatem  $q = 1 - \alpha \cos. \Phi$ ,  
 ut densitas minima in A sit  $= 1 - \alpha$  maxima in  
 B  $= 1 + \alpha$ , et media in C vel D  $= 1$ . Tum vero  
 posito circuli radio OA =  $a$ , erit arcus AS =  $s = a\Phi$ ,  
 et puncti S altitudo sZ =  $z = a \sin. \Phi$ .

28. Sit porro amplitudo tubi constans  $rr = ff$ ,  
 et elapso tempore =  $t$  celeritas aquae in C vel D =  $u$ ,  
 ut sit T =  $ffu$ , celeritas vero in S =  $\frac{ffu}{qrr} = \frac{u}{1 - \alpha \cos. \Phi} = v$ ,  
 quam in plagam ACBD dirigi assumo. Iam sin-  
 gula

gula membra aequationis §. 20. exhibitae seorsim  
euoluamus, et primo ob  $dz = ad\Phi \cos.\Phi$  habebimus

$$\int q dz = a \int d\Phi \cos.\Phi (1 - \alpha \cos.\Phi) =$$

$$a \int d\Phi (\cos.\Phi - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha \cos.2\Phi) \text{ vnde fit:}$$

$$\int q dz = a \sin.\Phi - \frac{1}{2}\alpha a \Phi - \frac{1}{4}\alpha a \sin.2\Phi.$$

Deinde est  $\frac{r}{q r^4} = \frac{u u}{1 - \alpha \cos.\Phi}$ , et  $\int \frac{dr}{q r^4} = 0$  ob  $r r$  con-  
stans, ac denique  $\frac{dr}{dt} \int \frac{ds}{r r} = \frac{s du}{dt} = \frac{a \Phi du}{dt}$

vnde aequatio pro motu determinando colligitur:

$$2gp = \Delta : t = 2ga (\sin.\Phi - \frac{1}{2}\alpha \Phi - \frac{1}{4}\alpha \sin.2\Phi) - \frac{u u}{1 - \alpha \cos.\Phi} - \frac{a \Phi du}{dt}$$

nunc posito angulo  $\Phi = 0$  pro pressione in puncto  
A nanciscimur:  $2gp = \Delta : t = \frac{u u}{1 - \alpha}$ , at posito  
 $\Phi = 2\pi$  seu 4 angulis rectis pro eodem loco con-  
sequimur:

$$2gp = \Delta : t + 2\pi a g a - \frac{u u}{1 - \alpha} - \frac{2\pi a du}{dt}$$

qui duo valores aequales positi praebent:

$$a g \frac{du}{dt} = 0 \text{ et integrando } u = a g t.$$

29. Hinc intelligimus, cum primo instanti  
quo septum remouetur, vniuersa aqua fuisset in  
quiete, dehinc eam mox motum esse concepturam  
eumque vniuniformiter acceleratum, ita vt celeritas in  
ipsa temporis ratione increseat. Videmus quoque  
motum fore eiusmodi, vti initio dixi, scilicet in  
parte inferiori e loco frigido B per D ad locum  
calidum A accedentem, supra vero hinc per C ad  
frigidum B recedentem. Deinde etiam perspicimus

hunc motum eo fore vehementiorem, quo maior fuerit littera  $\alpha$ , seu quo magis densitas aquae in B superet densitatem in A. Cum igitur quo maior fuerit tubi diameter AB refrigeratio in B quasi in ratione fiat duplicata, manifestum est, quo maior fuerit tubus eo celeriores motum generatum iri. Perpetuo autem ex discrimine quo calor in A excipit superat caloris vel frigoris gradum in B, motus acceleratio est iudicanda.

30. Primo quidem initio satis tuto colligere possumus, celeritatem motus in ratione temporis incrementum, statim autem ac motus tam velox evanescit, ut aquae calor se ad tubi temperaturam componere nequeat, ideoque iam in B aqua multo calidior, in A vero frigidior reperitur quam in calculo assumimus, mirum non est si acceleratio mox multo minorem rationem sequatur, ac tandem ad certum uniformitatis gradum sit perventura, quod autem fieri nequit nisi aqua vel ad eundem caloris gradum ubique fuerit perducta vel saltem in locis aequae altis eundem gradum conceperit. Ad quietem autem nunquam redigi poterit, quoniam simul ac paulisper quienerit, ignisque effectum in A senserit, contra vero ad B fuerit refrigerata, motus de nouo instauraretur. Ex quo quamdiu tubus in A calidior fuerit quam in B, motus aquae continuo debet durare. Ceterum facile intelligitur ad motum producendum hunc casum, quo gradus maxi-

maximi minimique caloris in diametro horizontali sibi oppositos assumimus maxime esse efficacem, lentioyemque motum esse futurum, si haec oppositio in diametro obliquo fieret quod ostendisse operae erit praetium.

31. Ponamus ergo maximum calorem in A minimum in B, ut diameter AB ad horizontalem HK inclinatus sit angulo HOA = ζ, sit ut ante angulus AOS = Φ, radius AO = a, hinc arcus AS = s = aΦ et densitas in S nempe q = 1 - α cos Φ; atque omnia se habebunt ut ante nisi quod altitudo SZ sit hic z = a sin. (Φ - ζ), vnde ob dz = a dΦ cos. (Φ - ζ) erit

$$f q dz = a s d\Phi (\cos.(\Phi - \zeta) - \frac{1}{2} \alpha \cos. \zeta - \frac{1}{2} \alpha \cos. (2\Phi - \zeta))$$

$$\text{feu } f q dz = a \sin. (\Phi - \zeta) - \frac{1}{2} \alpha a \Phi \cos. \zeta - \frac{1}{2} \alpha a \sin. (2\Phi - \zeta)$$

ita ut iam habeamus:

$$2gp = \Delta : t - 2ga (\sin. (\Phi - \zeta) - \frac{1}{2} \alpha \Phi \cos. \zeta - \frac{1}{2} \alpha \sin. (2\Phi - \zeta))$$

$$- \frac{u u}{1 - \alpha \cos. \Phi} - \frac{a \Phi du}{a t}$$

quae cum eadem esse debeat siue ponatur Φ = 0 siue Φ = 2π oportet esse:  $2\pi a g a \cos. \zeta - \frac{2\pi a a du}{a t} = 0$  ideoque  $u = a g t \cos. \zeta$ , vnde discimus motum etiam fore uniformiter acceleratum, sed minus quam ante in ratione cosinus anguli AOH, ita ut si hic angulus fuerit rectus, motus plane nullus sit oriturus. Euenit ergo hoc si maximus calor in tubi loco siue summo siue imo excitetur, minimusque e regione



gione reperiatur; tum enim utique in paribus altitudinibus densitas erit eadem.

Tab. X.  
Fig. 7.

32. Maneat autem ut supra maximus calor in A minimusque in B ut diameter AB sit horizontalis; tum vero etiam sit aquae in S versantis densitas  $q = 1 - \alpha \cos \Phi$  existente angulo AOS =  $\Phi$ , ideoque arcu AS =  $s = a\Phi$  ob radius OA =  $a$ ; et altitudo SZ =  $z = a \sin \Phi$ . At amplitudo tubi iam non amplius ubique sit eadem, sed eam ita variari assumamus, ut sit  $rr = \frac{ff}{1 + \beta \cos \Phi + \gamma \sin \Phi}$ , ponamusque iterum  $T = ffu$ , ut sit  $v = \frac{ffu}{qr} = \frac{u}{q} (1 + \xi \cos \Phi + \gamma \sin \Phi)$ . His positis habebimus ut ante:

$$\int q dz = a \sin \Phi - \frac{1}{2} \alpha a \Phi - \frac{1}{2} \alpha a \sin 2\Phi.$$

Verum pro hoc casu adipiscimur:

$$\frac{T T}{q r^2} = \frac{u u (1 + \beta \cos \Phi + \gamma \sin \Phi)^2}{1 - \alpha \cos \Phi}$$

$$\text{et ob } d \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} d (1 + \xi \cos \Phi + \gamma \sin \Phi)^2 = \frac{-2 dr}{r^3}$$

$$\text{erit } \frac{-\beta d \Phi \sin \Phi + \gamma d \Phi \cos \Phi}{r^2} (1 + \xi \cos \Phi + \gamma \sin \Phi) = \frac{-2 dr}{r^3}$$

hincque

$$2 T T \int \frac{dr}{q r^3} = u u \int \frac{d \Phi (\beta \sin \Phi - \gamma \cos \Phi) (1 + \beta \cos \Phi + \gamma \sin \Phi)}{1 - \alpha \cos \Phi}$$

Quia vero fractio  $\alpha$  ut valde parva spectari potest, loco  $\frac{1}{1 - \alpha \cos \Phi}$  scribendo  $1 + \alpha \cos \Phi$  prodibit integrando:

$$2 T T \int \frac{dr}{q r^3} = u u \left\{ \begin{array}{l} -\xi \cos \Phi - \gamma \sin \Phi - \frac{1}{2} (\xi \xi - \gamma \gamma) \cos 2\Phi - \frac{1}{2} \xi \gamma \sin 2\Phi - \frac{1}{4} \xi \cos 2\Phi \\ -\frac{1}{2} \alpha \gamma \Phi - \frac{1}{4} \alpha \gamma \sin 2\Phi - \frac{1}{4} \alpha (\xi \xi - \gamma \gamma) \cos \Phi - \frac{1}{4} \alpha \xi \gamma \sin \Phi \\ -\frac{1}{8} \alpha (\xi \xi - \gamma \gamma) \cos 3\Phi - \frac{1}{8} \alpha \xi \gamma \sin 3\Phi \end{array} \right.$$

ac denique  $\frac{d\tau}{dt} \int \frac{ds}{rr} = \frac{adu}{dt} \int d\Phi (1 + \varepsilon \cos \Phi + \gamma \sin \Phi)$   
 $= \frac{adu}{dt} (\Phi + \varepsilon \sin \Phi - \gamma \cos \Phi)$ . Quare cum valor  
 ipsius  $p$  idem prodire debeat siue ponatur  $\Phi = 0$   
 siue  $\Phi = 2\pi$ , peruenimus ad hanc aequationem:

$$2\pi a g a + \pi a \gamma u u - \frac{2\pi a d u}{dt} = 0$$

$$\text{seu } dt = \frac{2adu}{a(2ga + \gamma uu)} \text{ seu } ag dt = \frac{du}{1 + \frac{\gamma uu}{2ga}}$$

33. Hic ergo primum obseruo, si fuerit  
 $\gamma = 0$ , seu amplitudo  $rr = \frac{ff}{1 + \beta \cos \Phi}$ , fore vt ante  
 pro tubo aequaliter vbique amplo  $u = agt$ ; hoc  
 igitur euenit si in aequalibus a puncto A distantiis  
 tam supra diametrum AB quam infra amplitudo  
 fuerit eadem, siue in A amplitudo sit maxima  
 siue in B. Cum igitur ob quantitatem  $\varepsilon$  nulla  
 mutatio in motu oriatur, nisi quatenus celeritas  
 $v = \frac{u}{\alpha \cos \Phi} (1 + \varepsilon \cos \Phi + \gamma \sin \Phi)$  ab ea pendet,  
 dum celeritas media  $u$  eadem manet; ponamus  $\varepsilon = 0$ ,  
 vt sit  $rr = \frac{ff}{1 + \gamma \sin \Phi}$ ; ac si  $\gamma$  habeat valorem po-  
 sitiuum, amplitudo tubi in loco summo C sit mi-  
 nima  $= \frac{ff}{1 + \gamma}$  in imo vero D maxima  $\frac{ff}{1 - \gamma}$ ; at contra  
 si  $\gamma$  valorem habeat negatiuum puta  $\gamma = -\delta$  tubi  
 amplitudo in C sit maxima  $\frac{ff}{1 - \delta}$  in D vero mi-  
 nima  $= \frac{ff}{1 + \delta}$ . Perspicuum est autem hos duos ca-  
 sus probe a se inuicem distingui oportere, cum ae-  
 quationis inuentae integratio priori casu per loga-

rithmos, posteriori vero per arcus circulares absolui debeat: quam ob rem utrumque casum seorsim euolui operae erit pretium, quo deinceps in genere facilius iudicare queamus, quantum motus aquae in tubo immutetur, si tubus in parte superiori fuerit vel amplior vel tenuior quam in parte inferiori.

34. Sit  $\gamma$  quantitas positua seu tubus in C angustior quam in D, ponaturque  $\gamma = \frac{2ga}{cc}$  vt fit  $rr = \frac{ccff}{cc + 2ga \sin. \Phi}$  eritque  $\alpha g dt = \frac{ccdu}{cc + uu}$  et  $\alpha g t = c \text{Ang. tang. } \frac{u}{c}$  seu  $u = c \text{ tang. } \frac{\alpha g t}{c}$  vnde patet celeritatem  $u$  iam fieri infinitam elapso tempore finito  $t = \frac{\pi c}{2 \alpha g}$ , hoc ergo casu motus aquae multo magis acceleratur, quam casu, quo tubus utique est aequae amplus, quia vt vidimus tum elapso demum tempore infinito celeritas fit infinita. Contrarium euenit quando  $\gamma = \frac{2ga}{cc}$  seu  $rr = \frac{ccff}{cc - 2ga \sin. \Phi}$ , ideoque tubus in superiori parte C amplior est quam in parte inferiori D, cum enim tum fit  $\alpha g dt = \frac{ccdu}{cc - uu}$  erit  $\alpha g t = \frac{1}{2} c l \frac{c+u}{c-u}$ , vnde patet elapso tempore infinito celeritatem  $u$  non ultra terminum  $c$  crescere posse. Hoc ergo casu motus aquae multo minus acceleratur, quam si tubus esset vbiue aequae amplus. Quam ob rem in genere affirmare licet, quoties tubi pars superior ad C angustior fuerit quam inferior ad D tum motum aquae in tubo magis accelerari, minus vero, si superior pars fuerit amplior inferiori.

35. Quae

35. Quae haftenus de tubo circulari sunt inventa ad tubos figurae cuiuscunque haud difficulter extenduntur. Quomocunque enim figura et amplitudo tubi fuerit comparata, formulam generalem § 20. traditam facile simili modo tractare licet. Ponatur enim  $T = ffu$ , ut  $u$  denotet aquae celeritatem in eo tubi loco, ubi amplitudo est  $= ff$  et densitas aquae  $= 1$ , tum vero fit  $rr = \frac{ff}{\omega}$  ut in loco quouis  $S$  fit celeritas  $v = \frac{\omega u}{q}$ ; quia nunc est  $\frac{r}{r^2} = \frac{\omega u}{r^2}$  erit  $\frac{1}{r^2} = \frac{\omega^2 u}{f^2}$ , vnde haec habebitur aequatio:

Tab. IX.  
Fig. 4.

$$2gp = \Delta : t - 2g \int q dz - \frac{\omega^2 uu}{q} + uu \int \frac{\omega d\omega}{q} - \frac{du}{dt} \int \omega ds$$

sumantur iam haec integralia ita ut evanescant posito  $s = 0$ , tum vero loco  $s$  scribatur tota tubi longitudo ASCBDA, fiatque

$$\int q dz = A; \int \frac{\omega d\omega}{q} = B \text{ et } \int \omega ds = C.$$

Atque tum necesse est ut sit:

$$2gA + Buu - \frac{Cdu}{dt} = 0 \text{ seu } dt = \frac{Cdu}{Buu - 2gA}$$

vnde ad quodvis tempus celeritas  $u$  facile definitur.

36. Iam supra observavi eatenus tantum in tubo, qui ex una parte A calidior est quam e regione B, fluidum necessario ad motum concitari, quatenus tubus vel prorsus vel propemodum plenus statuatur; si enim ex parte tantum plenus assumatur, semper eiusmodi fluidi situs assignari poterit,

in quo aequiescat. Quocirca hunc statum aequilibrum quoties locum habere potest, ex formulis nostris ita definiam, ut inde pateat, quousque aquae insulae quantitatem augere liceat, antequam status aequilibrum penitus excludatur. Consideremus in hunc finem iterum rubum circularem aequaliter amplum in plano verticali constitutum in quo diversus caloris gradus ita sit distributus, ut in A sit maximus in B vero minimus existente AB diametro horizontali; iterumque hypothese utamur, ut sumto angulo  $AOS = \Phi$  densitas aquae ibi versantis sit  $q = 1 - a \cos \Phi$ . Radius quoque sit ut ante  $OA = a$ , et arcus  $AS = s = a\Phi$ , hincque altitudo  $sZ = z = a \sin \Phi$ . Amplitudo porro tubi sit  $rn = ff$ ; atque cum aequilibrium adesse ponamus, ob celeritatem  $u = 0$ , nostra aequatio hanc induet formam:

Tab. X.  
Fig. 9.

$$2gp = \Delta : t - 2g \int q dz = \Delta : t - 2ga(\sin \Phi - \frac{1}{2} a \Phi - \frac{1}{2} a \sin 2\Phi)$$

37. Ponamus nunc in statu aequilibrum aquam ex vna parte ad  $Mm$  pertingere ex altera vero ad  $Nn$ , sintque arcus  $AM = m$ ,  $BN = n$ , et anguli  $AOM = \mu$  et  $BON = \nu$  ut sit  $m = a\mu$  et  $n = a\nu$ , atque tubi spatium vacuum  $MN = a(\pi - \mu - \nu)$  quod siue sit prorsus vacuum siue aërem contineat, necesse est ut pressio ad M praecise sit aequalis pressioni ad N. At pro pressione ad M ponendo  $\Phi = \mu$  habebimus:

$$2gp = \Delta : t - 2ga(\sin \mu - \frac{1}{2} a \mu - \frac{1}{2} a \sin 2\mu)$$

pressio-

pressionem vero ad N obtinebimus si ab A retrocedendo pro  $\Phi$  ponamus  $-\pi - \nu$ , ut sit  $\sin. \Phi = \sin. \nu$ , et  $\sin. 2\Phi = -\sin. 2\nu$ , unde fiet:

$$2gp = \Delta : t - 2ga(\sin. \nu + \frac{1}{2}\alpha(\pi + \nu) + \frac{1}{2}\alpha \sin. 2\nu).$$

Pro aequilibrio ergo requiritur ut sit:

$$\sin. \mu - \frac{1}{2}\alpha \mu - \frac{1}{2}\alpha \sin. 2\mu = \sin. \nu + \frac{1}{2}\alpha(\pi + \nu) + \frac{1}{2}\alpha \sin. 2\nu$$

unde patet si esset  $\alpha = 0$ , seu idem caloris gradus per totum tubum regnaret, tum utique fore  $\nu = \mu$ , terminosque M et N ad libellam dispositos, quemadmodum notissima aequilibrii natura postulat.

38. Nisi autem spatium vacuum MN =  $\alpha(\pi - \mu - \nu)$  sit minimum ob  $\alpha$  fractionem semper valde exiguam, perspicuum est ex nostra aequatione semper situm ita defini posse, ut aequilibrium resultet. Ponamus enim esse  $\pi - \mu - \nu = \omega$  seu  $\nu = \mu - \omega$ , hincque  $\sin. \nu = \sin. (\mu - \omega) = \sin. \mu \cos. \omega - \cos. \mu \sin. \omega$  et  $\sin. 2\nu = \sin. 2\mu \cos. 2\omega - \cos. 2\mu \sin. 2\omega$ , eritque nostra aequatio  $\sin. \mu - \frac{1}{2}\alpha \mu - \frac{1}{2}\alpha \sin. 2\mu = \sin. \mu \cos. \omega - \cos. \mu \sin. \omega + \frac{1}{2}\alpha(2\pi - \mu - \omega) - \frac{1}{2}\alpha \sin. 2\mu \cos. 2\omega - \frac{1}{2}\alpha \cos. 2\mu \sin. 2\omega$  seu

$$\sin. \mu(1 - \cos. \omega) - \cos. \mu \sin. \omega - \frac{1}{2}\alpha \sin. 2\mu(1 - \cos. 2\omega) + \frac{1}{2}\alpha \cos. 2\mu \sin. 2\omega = \frac{1}{2}\alpha(2\pi - \omega)$$

cui aequationi non amplius satisfieri potest, si capiatur  $\omega = 0$ , quia tum prius aequationis membrum evanescit, posteriori manente  $\alpha\pi$ . Statuamus

K k 3

ergo

ergo  $\omega$  valde paruum et ob fin.  $\omega = a$ ,  $1 - \cos \omega = \frac{1}{2} \omega \omega$  fiet:

$$\frac{1}{2} \omega \omega \sin \mu - \omega \cos \mu = \frac{1}{2} \alpha \omega \omega \sin 2\mu + \frac{1}{2} \alpha \omega \cos 2\mu = \frac{1}{2} \alpha (2\pi - \omega)$$

vnde proxime colligitur  $\cos \mu = \frac{\alpha \pi}{\omega}$ , ficque patet statim atque  $\omega$  minus fit quam  $\alpha \pi$ , tum hanc aequationem ac proinde etiam aequilibrium nullum amplius locum habere posse. Extremo autem casu quo aequilibrium adhuc est possibile, fit  $\mu = \pi$  hincque:

$$\omega + \frac{1}{2} \alpha \omega = \frac{1}{2} \alpha (2\pi - \omega) \text{ seu } \omega = \frac{\alpha \pi}{1 + \alpha}.$$

39. Quamdiu ergo spatium vacuum  $MN = a\omega$  maius est quam  $\frac{\alpha}{1 + \alpha} \pi a$ , tamdiu aqua eiusmodi situm recipere potest, in quo acquiescat, ac si fuerit  $MN = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \pi a$  seu  $MN = \alpha \pi a$ , (quoniam  $\alpha$  est fractio valde parua), hic casus erit aequilibrii posterioris in quo spatium vacuum  $MN$  circa locum maxime frigidum  $B$  versabitur. Sin autem hoc spatium adhuc sit minus, tum nullum aequilibrium amplius locum habere poterit, sed utcumque aqua in tubo fuerit disposita, necessario ad motum concitabitur. Quodsi tubus loco aquae contineat aërem, ob analyseos defectum motus simili modo determinari nequit; necessario autem motum oriri debere sequenti ratione demonstrabitur.

Tab. X. 40. Aërem igitur tantum tubus noster contineat, cui figuram circularem et amplitudinem vni-

uniformem tribuamus, situm autem teneat verticalem., et ita calore diuerso sit affectus, vt in A sit calor maximus  $= 1 + \alpha$ , in B vero minimus  $= 1 - \alpha$ , in loco autem quouis medio S posito angulo AOS  $= \Phi$  sit calor gradus  $= 1 + \alpha \cos. \Phi$ , existente diametro AB horizontali. Vnde si in S densitas aeris sit  $= q$ , et pressio seu elasticitas  $= p$ , experientia nouimus pressionem  $p$  esse in ratione composita densitatis  $q$  et caloris  $1 + \alpha \cos. \Phi$ , vnde ponamus  $p = bq(1 + \alpha \cos. \Phi)$ . Iam cum motum ipsum determinare non liceat, statuamus in A septum, quo omnis motus compellatur, et ob  $v = 0$  aequatio statum aëris exprimens erit:

$$\frac{z}{q} \left( \frac{dp}{ds} \right) + \frac{z}{as} \frac{dz}{ds} = 0 \text{ seu } \frac{dp}{q} + dz = 0$$

vbi  $z$  denotat altitudinem  $s Z = a \sin. \Phi$  posito radio circuli  $= a$ .

4r. Cum nunc sit  $q = \frac{p}{b(1 + \alpha \cos. \Phi)}$ , aequatio nostra hanc induet formam:

$$\frac{b dp}{p} + \frac{dz}{1 + \alpha \cos. \Phi} = 0 \text{ seu } \frac{b dp}{p} + \frac{a d\Phi \cos. \Phi}{1 + \alpha \cos. \Phi} = 0$$

$$\text{vel. } \frac{a b d p}{p} + d\Phi = \frac{a d\Phi}{1 + \alpha \cos. \Phi} = 0$$

cuius integrale reperitur:

$$\frac{a b}{a} \log p + \Phi = \frac{\int \sin. \Phi \sqrt{1 - \alpha \cos. \Phi}}{1 + \alpha \cos. \Phi} = C$$

vnde pro pressione supra scriptum Aa ponendo  $\Phi = 0$

$$\text{prodit pro pressione } \frac{a b}{a} \log p = C \text{ seu } p = e^{\frac{C a}{a b}}$$

Facia-



Faciamus nunc  $\Phi = 2\pi$ , ut revolutione integra facta infra septum Aa perveniamus, reperiemusque pro pressione  $p$  hanc aequationem:

$$\frac{a^b}{a} l p = C + \frac{2\pi(1-\alpha)(1-\alpha\alpha)}{\sqrt{(1-\alpha\alpha)}}$$

et cum  $\alpha$  spectari possit ut fractio valde parva, erit:

$$\frac{a^b}{a} l p = C + \pi\alpha\alpha \text{ seu } l p = \frac{Ca}{ab} + \frac{\pi\alpha\alpha}{b}$$

fit  $\frac{Ca}{ab} = m$  ut pressio supra septum sit  $= e^m$ , et infra septum ea erit  $= e^{\frac{m + \pi\alpha\alpha}{b}} = e^m \left(1 + \frac{\pi\alpha\alpha}{b}\right)$ .

42. Hinc ergo manifestum est pressionem infra septum maiorem esse pressione supra id, quare septo remoto aër in tubo contentus necessario ad motum concitabitur, idque eo maiori vi, quo maius discrimen inter calorem maximum in A minimumque in B versatur. Quanquam ergo ipsum motum ob analyseos defectum determinare haud valemus, primam tamen eius generationem distincte perspicuimus, atque intelligimus statim atque in A tubo maior calor conciliatur quam in B, aërem non amplius in aequilibrio subsistere posse, atque ita motum iri, ut in tubi parte inferiori ad locum calidum A accedat, hinc vero per partem superiorem ad locum frigidum B deferatur, sicque motu continuo per tubum reuoluatur, simili modo quo id in aqua euenire ostendimus. Quia etiam omnia phaenomena, quae experientia suppeditat, talem motum apertissime declarant.

43. Vidimus etiam vbicunque ignis vel saltem calor excitatur, eo per regiones humiores aërem constanter affluere, dummodo per regiones sublimiores iterum dissipari possit, atque hic aëris fluxus cum ignis natura tam arcte coniunctus videtur, vt ne ignis quidem subsistere possit, nisi in aëre talis motum locum inuenire queat; neque etiam tam ipse aër, quam talis eius motus ad ignis sustentationem absolute necessarius videtur, quoniam simul ac motus iste compestitur, ignis extinguitur, etiam si alias sufficiens aëris copia adfit. Probe igitur cauendum est ne hoc phaenomeno decepti putemus ad ignem ideo nouum aërem continuo requiri, quod eo quasi pabulum quoddam igni suppeditur, quo absumto aër non amplius aptus sit igni alendo. Quin potius iam olim eiusmodi experimenta instituta esse comperio, quibus adeo fumus per tubos inflexos iterum inferne ad ignem reductus, per eumque ascendens fere penitus consumtus est: deprehensus, sine vlllo ignis detrimento.

44. Quae experimenta si omni cura sint instituta, nullaque causa physica adhuc ignota obstat, eadem aëris copia igni sustentando sufficere poterit, dummodo tubis ita includatur, vt inferne libere ad ignem affluere; superne vero inde defluere possit. Ex hoc principio eiusmodi fornaces construi posse videntur, quibus nulli camini fumum egerentes sint adiuncti, sed potius fumus per tubos rite dispositos

Tom. XI. Nou. Comm. L I con-

continuo inferne ad ignem reducatur, ibique quasi destruat, ac simul ignis ab hac continua aeris circulatione sustineatur. Huiusmodi fornacem fig. 10 repraesentat ubi A est fornax proprie sic dicta et craticula instructa, super qua ignis suscitatur. Haec fornax iuxta parietem conclavis construatur, et tam superne ad E quam inferne ad G in tubum definat in se redeuntem ECFBHDG, et parieti affixum, in quo aer libere circulari, et per tubi partem inferiorem D continuo ad ignem reuerti queat. Sic enim eadem aeris copia in tubo contenta motu suo ignem conseruabit, ac si forte nouo subinde aere fuerit opus, is facile per ostiolum fornacis intro mittetur.

45. Quo haec constructio facilius succedat, conueniat ut tubus EFHG ita totum parietem occupet, ut tam altitudo CD, quam distantia AB tanta fiat, quantum circumstantiae admittunt. Quo enim maior fuerit altitudo CD, eo maiori vi aer ad motum impelletur, tum vero maior distantia AB plurimum conferet ad motum accelerandum; quoniam quo magis tubus FH a fornace est remotus, eo magis aer eo delatus refrigerabitur, motusque causa intendetur. Deinde vero etiam supra vidimus, si tubus supremus C angustior fuerit infimo D, hinc quoque motum rapidiorem generari. Quod si talis fornax successu non careat nullum est dubium, quin hoc modo conclavia minimo ligni dispendio calefieri queant,