DE PHAENOMENIS COELI PER SEGMENTA SPHAERICA DIAPHANA SPECTATI.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Si coelum ſpectatur per hemisphaerium vitreum oculo ad eius centrum applicato, omnes ſtellae quaeque in ſuo loco conſpicientur, perinde ac ſi nudo oculo cernerentur; propterea quod radii ad oculum pertingentes in ſuperficiem vitri normaliter ingrediuntur, ideoque nullam refractionem patiuntur. Sin autem vitri figura ſit ſegmentum ſphaerae ſiue minus ſiue maius haemiſphaerio, eique oculus in ipſo axe applicetur, ſtellae extra axem ſitae non ſolum de loco ſuo depulſae apparebunt, ſed etiam euenire poteſt, vt quaedam plane non fiant conſpicua, aliae geminatae in diuerſis coeli punctis videantur, atque aliqua coeli regio omnino vacua ſpectetur. Quae phaenomena ſingularia digna videntur vt accuratius euoluantur.

2. Quae autem ad ſegmenta ſphaerae tam maiora quam minora ſpectant, ea vna inueſtigatione

complecti licet, si sphaeram vitream integram contemplemur, in qua alicubi oculus sit constitutus. Tab. IV. Fig. 1. Sit igitur proposita sphaera reuolutione semicirculi APB circa diametrum AB genita, in cuius puncto O constitutus sit oculus, extra centrum C, vnde coelum spectetur. Quod si iam secundum OP plano ad diametrum AB normali sphaera secetur, bina segmenta alterum minus APO, alterum maius BPO obtinebimus, per quae separata oculus vtrique in O applicatus coelum intueatur. In calculo autem instituendo nihil impedit, quo minus haec segmenta coniuncta consideremus et oculum in O intra sphaeram quasi inclusum assumamus, vt hoc modo vtrique casui satisfiat, simulque ratio continui habeatur.

3. Iam primum obseruo stellas E et F in ipso sphaerae axe AB sitas sine vlla loci mutatione conspici, quia radii inde ad oculum O pertingentes normaliter in sphaeram intrant. At si extra axem stella nobis in V sita appareat, quam scilicet per radium MO spectemus, haec stella re vera non in V haerere est censenda, sed ad eius locum verum, vbi nudo oculo conspiceretur, explorandum ex centro C per punctum M agatur recta CMN, vtpote normalis in superficiem sphaerae, et constituatur angulus NMS, cuius sinus sit ad sinum anguli NMV in ratione refractionis ex aëre in vitrum, ac verus stellae locus alicubi in recta MS reperietur,

tur, cuius distantia cum sit quasi infinita, ex O ducatur Os ipsi MS parallela, et a nudo oculo stella in directione Os cerneretur, quae nunc per vitrum in directione OV conspicitur, ita vt ob refractionem angulo sOV de suo loco vero deturbetur.

4. Hanc visionis mutationem in vtroque segmento in figura expressi, vnde colligere licet per segmentum minus AOP stellam in directione Os versantem propius ad axem vitri OE admoueri, sicque spatium coeli Es ob refractionem sub minore angulo EOV apparere, vnde magnitudo stellarum imminuetur. Contra autem per segmentum maius BOP stella in directione Os sita et angulo FOs ab axe remota in directione OV sub maiore angulo FOV ab axe videbitur vnde etiam stellae magnitudo aucta prodibit. Atque haec potissimum de stellis axi vtrinque proximis sunt intelligenda, in maioribus enim elongationibus singularia phaenomena, quorum initio mentionem feci, locum habere possunt.

5. Ad haec diligentius inuestiganda, ponamus:

radium sphaerae $CA = CB = CM = a$

distantiam oculi O a centro sphaerae, $CO = d$

Distantiam apparentem stellae ab axe, seu angulum $AOV = \phi$

angulum refractionis $OMC = \eta = NMV$
angulum incidentiae $NMS = \zeta$
rationem refractionis $\sin.\zeta : \sin.\eta = n : 1$.

Hinc erit angulus $VMS = \zeta - \eta$, cui cum fit angulus VOs aequalis, erit diftantia vera ftellae ab axe OAE, hoc eft ang. $AOs = \phi + \zeta - \eta$, ideoque definiri oportet, quomodo ex diftantia apparente feu angulo $AOV = \phi$, diftantia vera feu angulus $AOs = \phi + \zeta - \eta$ ac viciffim determinetur. Hic quidem nulla difficultas occurrit, verum euolutio fingulorum phaenomenorum eo maiorem diligentiam ac circumfpectionem requirit.

6. Confideremus angulum $AOV = \phi$ tanquam datum, qui cum fit externus trianguli OMC, in quo dantur duo latera $CM = a$ et $CO = d$, erit $\sin.\phi : \sin.\eta = a : d$, ideoque $\sin.\eta = \frac{d}{a}\sin.\phi$; vbi obferuo angulum η femper effe acutum, etiam fi angulus ϕ euadat obtufus, ita vt haec determinatio nullam ambiguitatem implicet inde oriundam, quod eidem finui gemini anguli conueniant. Cum nunc fit $\sin.\zeta = n\sin.\eta$, inuento angulo η erit $\sin.\zeta = \frac{nd}{a}\sin\phi$, qui angulus pariter nunquam obtufus effe poteft. Ad rectum poteft increfcere, fi $nd = a$ vel $nd > a$. Inuentis ergo his binis angulis η et ζ ex formulis $\sin.\eta = \frac{d}{a}\sin.\phi$ et $\sin.\zeta = \frac{nd}{a}\sin.\phi$, colligitur elongatio vera ab axe $AOs = \phi + \zeta - \eta$, ita vt $\zeta - \eta$ fit effectus refractionis.

7. Quem-

7. Quemadmodum nulla turbatio oritur, ſi oculus in centro C teneatur ſeu $d = 0$, ita ſi interuallum $CO = d$ prae radio ſphaerae a ſit valde exiguum, turbatio parum ſentitur. Quo magis autem locus oculi a centro C remouetur, eo magis phaenomena a veritate diſcrepant, quae tum imprimis prorſus fiunt ſingularia, quando $d > \frac{a}{n}$. Tum enim angulo Φ eo vsque aucto vt ſit $\sin.\Phi > \frac{a}{nd}$, ob $\sin\zeta > 1$, fit angulus ζ imaginarius, neque ergo ſub his angulis Φ vllum obiectum apparere poteſt. Sit $\frac{a}{nd} = \sin.\alpha$, et quamdiu angulus Φ inter limites α et $180^\circ - \alpha$ continetur, in hoc interuallo viſionis nulla prorſus ſtella videbitur: et quoniam nullus radius in oculum ingreditur, tota regio intra angulos α et $180^\circ - \alpha$ contenta obſcuriſſima et nigra apparebit, omnes autem ſtellae, quas quidem videre licet extra iſtos limites conſpicientur.

8. Interuallum hoc obſcurum euaneſcit, ſi capiatur $d = \frac{a}{n}$ oculusue adhuc propius centro C admoueatur; quo magis autem a centro remoueatur, interuallum illud obſcurum amplificatur, fit maximum ſumto $d = a$, quo caſu ſegmentum ſphaericum in integram ſphaeram abit, cui oculus in A applicatur, interuallo AO euaneſcente. Hi ergo duo caſus $d = a$ et $d = \frac{a}{n}$ ſunt quaſi praecipui, qui ſeorſim euolui merentur; ac poſtquam aſpectum ſiderum pro his caſibus definiuerimus, quoniam ca-

ſus $d=0$ per ſe eſt perſpicuus, inde facile, qua ratione coelum reliquis caſibus ſit appariturum, colligere licebit.

I. De aſpectu coeli per ſphaeram diaphanam integram.

Tab. IV. Fig. 2. 9. Oculo O ſphaerae in A applicato appareat ſtella in directione OM quaſi eſſet in V ſita, quae reuera exiſtit in directione Os. Referantur haec loca ad directionem fixam ABF, ſitque hinc elongatio ſtellae apparens, ſeu angulus BOV $=\psi$, poſitisque vt ante angulis OMC $=\eta$ et SMN $=\zeta$ ob $d=a$ erit ſin. $\eta=\frac{d}{a}$ ſin. $\psi=$ ſin ψ et ſin. $\zeta=\frac{nd}{a}$ ſin. ψ $=n$ ſin. ψ vnde fit elongatio vera ſeu angulus BO$s=\psi-\zeta+\eta$. Cum igitur ſit ſin. $\eta=$ ſin. ψ, et ψ angulus acutus, erit $\eta=\psi$, ideoque elongatio vera BO$s=2\psi-\zeta$. Hic primo apparet angulum ψ maiorem eſſe non poſſe, quam vt ſit ſin. $\psi=\frac{1}{n}$. Ducatur ergo recta AG vt ſit ſin. BAG $=\frac{1}{n}$ ſeu AB ad cordam BG in ratione refractionis $n:1$, eritque totus arcus AG obſcurus, omnesque ſtellae intra angulum BOG conſpicientur.

10. Sit angulus BOG $=\alpha$ ſeu ſin. $\alpha=\frac{1}{n}$, ita vt angulus ψ hunc limitem α transgredi nequeat, vera autem elongatio BOs apparenti BOV $=\psi$ reſpondens, ponatur $=\omega$, erit vt vidimus $\omega=2\psi-\zeta$, exiſtente ſin. $\zeta=n$ ſin. ψ. Hinc primo patet ſi ſit angulus

angulus ψ quam minimus, ob $\zeta - \frac{1}{6}\zeta^3 = n\psi - \frac{n}{6}\psi^3$, seu $\zeta = n\psi + \frac{n(nn-1)}{6}\psi^3$, fore $\omega = (2-n)\psi - \frac{n(nn-1)}{6}\psi^3$, seu proxime $\omega = (2-n)\psi$, quare cum sit $n > 1$, neque vero vnquam n ad 2 increscere queat, erit vtique $\omega < \psi$, seu stellae prope F apparentes, revera puncto F sunt propiores, refractio scilicet stellas axi proximas magis inde deducit, quo maior fuerit sphaerae refractio.

11. Consideremus nunc stellam in directione extrema OG apparentem, vbi $\psi = \alpha$, et ob $\sin.\zeta = n \sin.\alpha = 1$ seu $\zeta = 90^\circ$, erit huius stellae elongatio vera ab axe $= 2\alpha - 90^\circ$, ideoque si $\alpha < 45^\circ$ seu $n > \sqrt{2}$, stella adeo ad alteram axis AF partem erit sita. Sit nunc $\psi = \alpha - \delta$, existente angulo δ minimo, ob $\sin.\zeta = n \sin.\alpha - n\delta \cos.\alpha = 1 - n\delta \cos.\alpha$ ponatur $\zeta = 90 - \varepsilon$, vt sit $\cos.\varepsilon = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon = 1 - n\delta \cos.\alpha$, et colligitur $\varepsilon = \sqrt{2n\delta \cos.\alpha}$, ex quo elongatio vera stellae ab axe erit $\omega = 2\alpha - 90^\circ - 2\delta + \sqrt{2n\delta \cos.\alpha}$ seu

$$\omega = 2\alpha - 90^\circ + \sqrt{2n\delta \cos.\alpha}$$

quandoquidem particula 2δ prae $\sqrt{2n\delta \cos.\alpha}$ euanescit; ita vt minimae mutationi in loco apparente respondeat maxima mutatio in loca stellae vero.

12. Quoniam stella in ipso axe visa, ibidem quoque sita est, et quae in directione extrema OG conspicitur, parum ab axe distat, videmus quanta sit maxima distantia vera ω, ad quam stellae etiam

nunc

nunc sint conspicuae. Cum igitur poni oporteat $2d\psi - d\zeta = 0$ ob $d\zeta \cos.\zeta = n\,d\psi \cos.\psi$ fit $2\cos.\zeta = n\cos.\psi$, ideoque $4 - 4nn\sin.\psi^2 = nn - nn\sin.\psi^2$ vnde colligitur $\sin.\psi = \frac{\sqrt{(4-nn)}}{n\sqrt{3}}$, hinc $\cos.\psi = \frac{2\sqrt{(nn-1)}}{n\sqrt{3}}$ et $\cos.\zeta = \frac{\sqrt{(nn-1)}}{\sqrt{3}}$ ac $\sin.\zeta = \sqrt{\frac{4-nn}{3}}$. His ergo valoribus elongatio vera $\omega = 2\psi - \zeta$ fit maxima, eiusque sinus et cosinus ita determinantur:

$$\sin.\omega = \frac{(4-nn)\sqrt{(4-nn)}}{3nn\sqrt{3}}, \text{ et } \cos.\omega = \frac{(nn-8)\sqrt{(nn-1)}}{3nn\sqrt{3}}$$

nullae ergo stellae per sphaeram spectanti apparebunt, nisi quae axi fuerint propiores, et quae satis modico interuallo continentur.

13. Dum igitur angulus ψ ab axe OB vsque ad limitem α digreditur, vt sit $\sin.\alpha = \frac{1}{n}$ angulus ω primo quoque ita crescit, vt quamdiu angulus ψ est minimus, fit $\omega = (2-n)\psi - \frac{n(nn-1)}{6}\psi^3$ tum vero angulus ω maximum valorem attingit, vbi fit $\sin.\psi = \frac{\sqrt{(4-nn)}}{n\sqrt{3}}$, ibique est $\sin.\omega = \frac{(4-nn)\sqrt{(4-nn)}}{3nn\sqrt{3}}$, vlteriusque aucto angulo ψ ad limitem α vsque, angulus ω iterum decrescit, donec tandem fiat $\omega = 2\alpha - 90$. Vltimus hic valor ipsius ω fit negatiuus si $n > \sqrt{2}$ quemadmodum euenit in vitro, ideoque antequam eo pertingit, denuo euanuerit necesse est, quod scilicet fit vbi $2\psi = \zeta$, ideoque $\sin.\zeta = n\sin.\psi = 2\sin.\psi\cos.\psi$, seu $\cos.\psi = \frac{n}{2}$. In vitro igitur vbi $n > \sqrt{2}$, stella in axe OF sita non solum per sphaeram ibidem cernitur, sed etiam eadem

dem in elongatione ab axe ad angulum ψ vt ſit $\operatorname{cof.}\psi = \frac{n}{4}$ apparet, quod cum quaqua verſus in omnibus meridianis contingat, eadem ſtella inſtar circuli lucidi polum B ambientis ſpectabitur, in cuius quoque centro ſimul videbitur.

§. 14. Per ſphaeram ergo pellucidam ſtellae tantum circum axem OF ſitae, quarum diſtantia non ſuperat angulum, cuius ſinus eſt $= \frac{(4 - nn)\sqrt{(4 - nn)}}{3nn\sqrt{3}}$, ſunt conſpicuae, niſi forte diſtantia negatiua $2\alpha - 90^\circ$, caſu $n > \sqrt{2}$ illa ſit maior; tum enim etiam has remotiores cernere liceret. Operae igitur pretium erit inueſtigare, quo caſu angulus $90^\circ - 2\alpha$ illi diſtantiae, cuius ſinus eſt $\frac{(4 - nn)\sqrt{(4 - nn)}}{3nn\sqrt{3}}$ fiat aequalis. Aequato autem hoc ſinu ipſi $\operatorname{fin.}(90 - 2\alpha)$ ſeu $\operatorname{cof.} 2\alpha = 1 - \frac{2}{nn}$, prodit aequatio $(4 - nn)\sqrt{(4 - nn)} = 3(nn - 2)\sqrt{3}$, qua euoluta, et diuiſione per $nn - 1$ facta, obtinetur $n^4 + 16nn - 44 = 0$, vnde elicitur $nn = 6\sqrt{3} - 8$, et vero proxime $n = 1,5467$.

§. 15. Cum in vitro refractio ita ſit comparata, vt pro radiis rubris ſit $n = 1,54$, et pro violaceis $n = 1,56$, valor inuentus $n = 1,5467$ vtique in vitro locum habet, quae proprietas haud parum notatu digna videtur. Per huiusmodi ergo ſphaeram vitream ſingulae ſtellae, quae quidem ſunt conſpicuae neque vltra angulum $90^\circ - 2\alpha$ ab axe remotae, triplicatae, ſeu in ternis diuerſis coeli punctis conſpicientur; ac praeterea ſtella quidem in ipſo axe ſita per totum quendam circulum diffuſa ſpectabitur.

Pro hoc ergo casu tabulam adiungam, in qua pro singulis elongationibus ab axe apparentibus ψ, elongationes verae exhibentur; vnde deinceps cuiuslibet stellae conspicuae terna loca apparentia colligere licebit.

ψ	ω	ψ	ω
0°, 0′, 0″	0°, 0′, 0″	23°, 0′, 0″	8°, 49′, 2″
1, 0, 0	0, 27, 12	24, 0, 0	9, 0, 58
2, 0, 0	0, 54, 21	25, 0, 0	9, 10, 49
3, 0, 0	1, 21, 25	26, 0, 0	9, 18, 36
4, 0, 0	1, 48, 22	27, 0, 0	9, 23, 44
5, 0, 0	2, 15, 10	28, 0, 0	9, 26, 12
6, 0, 0	2, 41, 45	28, 14, 55	9, 26, 19
7, 0, 0	3, 8, 5	29, 0, 0	9, 25, 10
8, 0, 0	3, 34, 9	30, 0, 0	9, 20, 38
9, 0, 0	3, 59, 42	31, 0, 0	9, 11, 29
10, 0, 0	4, 25, 12	32, 0, 0	8, 57, 42
11, 0, 0	4, 50, 7	33, 0, 0	8, 36, 26
12, 0, 0	5, 14, 30	34, 0, 0	8, 7, 40
13, 0, 0	5, 38, 18	35, 0, 0	7, 27, 49
14, 0, 0	6, 1, 31	36, 0, 0	6, 36, 52
15, 0, 0	6, 24, 3	37, 0, 0	5, 23, 9
16, 0, 0	6, 45, 55	38, 0, 0	3, 46, 40
17, 0, 0	7, 6, 51	39, 0, 0	1, 15, 5
18, 0, 0	7, 26, 52	39, 20, 39	0, 0, 0
19, 0, 0	7, 45, 49	40, 0, 0	−3, 49, 41
20, 0, 0	8, 3, 42	40, 16, 0	−8, 4, 5
21, 0, 0	8, 20, 15	40, 16, 51	−9, 26, 18
22, 0, 0	8, 35, 28	limes vltimus.	

16. Re-

16. Relatio inter hos binos angulos ψ et ω quorum ille distantiam stellae apparentem, hic vero distantiam eius veram ab axe sphaerae OF designat, commodissime linea curua repraesentari potest; sumtis enim in directrice FG abscissis FV distantiae apparenti ψ proportionalibus, ad singulas constituantur applicatae VS distantiam veram referentes, sicque formabitur linea curua FSQRH, primo quidem a recta vix differens, tum vero ad axem se magis inflectens, vt abscissae $FP = 28°, 14', 55''$ conueniat applicata maxima $PQ = 9°, 26', 19''$. Inde vero satis subito ad axem vergit, eum secans in R vt sit $FR = 39°, 20', 39''$, hincque in alteram partem porrigitur fere normaliter ad axem, vbi denique in puncto H terminatur, cuius abscissa $FG = 40°, 16', 51''$ et applicata $GH = 9°, 26', 18''$ illi maximae PQ aequali. Tab. IV. Fig. 3.

17. Si axis FG retro vltra F continuetur ei similis curua inuersa conueniet, applicatis in partem contrariam cadentibus; quandoquidem sumto angulo ψ negatiuo alterius anguli ω signum tantum mutari oportet; vnde cum vtrinque sit $GH = PQ$, omnes rectae axi FG parallelae has binas curuas iunctim sumtas in tribus punctis intersecabunt, nisi earum distantia ab axe maior sit quam PQ. Quare vnicuique stellae, non vltra $9°, 26', 18''$ ab axe sphaerae remotae, terni conueniunt anguli apparentes ψ, totidem in coelo loca denotantes,

tes, vbi eadem ſtella ſimul conſpicietur. Stella autem in ipſo axe ſita, primo quidem in loco vero apparebit, ſimul vero ſub figura annuli lucidi conſpicietur, cuius ab axe diſtantia $= 39°, 20', 39''$, vti iam ſupra obſeruaui.

18. Ex tabula data ſequentes concluſiones deduxiſſe iuuabit. Primo omnes ſtellae ab axe F ad elongationem $9°, 26', 19''$ in coelo ſitae per ſphaeram hanc vitream ſimili fere ordine per ſpatium $28°, 14', 55''$ ideoque fere triplo maius diſperſae conſpicientur; deinde eaedem ſtellae ſed ordine inuerſo a diſtantia $28°, 14', 55''$ vsque ad diſtantiam $39°, 20', 39''$ ab axe denuo apparebunt. Tertio vero ad alteram axis partem eaedem ſtellae in exiguo ſpatio intra $39°, 20', 39''$ et $40°, 16', 51''$ comprehenſo iterum inuerſo ordine ſpectabuntur, ita vt ſingulae ſtellae in ternis coeli locis per huiusmodi globum vitreum repraeſententur. Hic autem de repraeſentatione qualicunque loquor; quippe quae minime erit diſtincta, cum ſingulae imagines pone oculum cadant. Sin autem globus fuerit maximus, oculis presbytis haec apparentia ſatis erit diſtincta.

19. Multo aliter autem viſio ſe habebit, ſi coelum per globum aqueum, ſeu quod eodem redit, per ſphaeram vitream cavam aqua repletam intueamur, ſi modo vitrum ſit tenuiſſimum, vt eius refractionem negligere liceat. Hic enim cum ſit $n = \frac{4}{3}$

ideoque

ideoque $n < \sqrt{2}$, non ſolum nulla ſtella triplicata apparebit, ſed etiam quaedam ſemel tantum repraeſentabuntur. Similem ergo tabulam pro tali ſphaera adiiciam, ex his elementis computatam, quod ſi diſtantia ab axe apparens vocetur $= \psi$ indeque angulus colligatur ζ, vt ſit ſin. $\zeta = \frac{2}{3}$ ſin. ψ eius ſtellae diſtantia vera ab axe futura ſit $= 2\psi - \zeta = \omega$. Patet autem maximum valorem anguli apparentis ψ eſſe $48°, 35', 25''$, anguli autem veri $= 21°, 0', 53''$, qui reſpondet angulo $\psi = 40°, 12', 11''$ ita, vt hic maius ſpatium aperiatur, maiorque coeli portio offeratur.

ψ	ω	ψ	ω
0°, 0′, 0″	0°, 0′, 0″	14, 0, 0	9°, 10′, 47″
1, 0, 0	0, 40, 6	15, 0, 0	9, 48, 45
2, 0, 0	1, 20, 6	16, 0, 0	10, 26, 11
3, 0, 0	2, 0, 1	17, 0, 0	11, 3, 11
4, 0, 0	2, 39, 51	18, 0, 0	11, 39, 41
5, 0, 0	3, 19, 36	19, 0, 0	12, 16, 12
6, 0, 0	3, 59, 14	20, 0, 0	12, 52, 8
7, 0, 0	4, 38, 46	21, 0, 0	13, 27, 24
8, 0, 0	5, 18, 12	22, 0, 0	14, 2, 5
9, 0, 0	5, 57, 32	23, 0, 0	14, 36, 10
10, 0, 0	6, 36, 46	24, 0, 0	15, 9, 31
11, 0, 0	7, 15, 35	25, 0, 0	15, 42, 9
12, 0, 0	7, 54, 11	26, 0, 0	16, 13, 57
13, 0, 0	8, 32, 35	27, 0, 0	16, 44, 53

ψ	ω	ψ	ω
27°, 0′, 0″	16°, 44′, 53″	40°, 12′, 11″	21°, 0′, 53″
28, 0, 0	17, 14, 50	41, 0, 0	20, 59, 6
29, 0, 0	17, 43, 42	42, 0, 0	20, 51, 9
30, 0, 0	18, 11, 23	43, 0, 0	20, 35, 13
31, 0, 0	18, 37, 49	44, 0, 0	20, 8, 54
32, 0, 0	19, 2, 40	45, 0, 0	19, 28, 16
33, 0, 0	19, 25, 57	46, 0, 0	18, 26, 22
34, 0, 0	19, 47, 25	47, 0, 0	16, 48, 11
35, 0, 0	20, 6, 49	48, 0, 0	13, 45, 8
36, 0, 0	20, 23, 53	48, 30, 0	10, 1, 27
37, 0, 0	20, 38, 19	48, 35, 0	8, 0, 37
38, 0, 0	20, 49, 36	48, 35, 25	7, 10, 50
39, 0, 0	20, 57, 19	limes	vltimus
40, 0, 0	21, 0, 47		

20. Per ſphaeram ergo vitream ſpatium lucidum ab axe ad angulum 48°, 35′, 25″ extenſum conſpicitur, in quo autem ſtellae ab axe non vltra 21°, 0′, 53″ remotae conſpiciuntur; ſtella quidem in ipſo axe ſita ibidem ac ſemel tantum apparet, ſicuti etiam eae, quae minus quam 7°, 10′, 50″ ab axe diſtant: remotiores vero ſingulae bis cernuntur, et ea, cuius diſtantia eſt 21°, 0′, 53″ in diſtantia 40°, 12′, 11″ quaſi duplicata ſpectatur. Quae vero ſtellae vltra 40°, 12′, 11″ ab axe videntur, eaedem iam in minoribus interuallis erant conſpicuae, nunc autem ordine inuerſo exhibentur.

II. De

II. De Aſpectu coeli per ſegmenta diaphana ſphaerica caſu quo $d = \frac{a}{n}$.

21. Loco igitur oculi O intra ſphaeram aſſumto, vt ſit $d = \frac{a}{n}$, ſeu CB : CO in ratione refractionis $n : 1$, aſpectum coeli per ambo ſegmenta ſimul definire licet. Pro minore ſcilicet ſegmento, poſito angulo apparente EOV $= \phi$, cum ſit ſin. ζ $=$ ſin. ϕ et ſin. $\eta = \frac{1}{n}$ ſin. ϕ, ideoque $\zeta = \phi$ angulus ab axe verus EOS erit $= 2\phi - \eta$. Pro maiore autem ſegmento poſito angulo apparente FOV $= \psi$ ob ſin. $\zeta =$ ſin. ψ ideoque $\zeta = \psi$ et ſin. $\eta = \frac{1}{n}$ ſin. ψ, erit angulus ab axe verus FO$s = \psi - \zeta + \eta = \eta$, vnde idem calculus, quo anguli η determinantur, vtriusque ſegmenti phaenomena patefaciet, etiamſi ea non continuitatis lege inter ſe cohaereant. Calculum ergo hunc pro vitro quo $n = 1,5467$ inſtituamus. Fig. 1.

22. Pro vitro et ſegmento minore

ang. ap. EOV	ang. verus EOs	ang. ap. EOV	ang. verus EOs
0°	0°, 0′, 0″	45°	62°, 47′, 43″
5	6, 46, 11	50	70, 18, 43
10	13, 33, 14	55	78, 1, 14
15	20, 22, 1	60	85, 56, 59
20	27, 13, 29	65	94, 7, 44
25	34, 8, 34	70	102, 35, 15
30	41, 8, 21	75	111, 21, 13
35	48, 13, 57	80	120, 27, 9
40	55, 26, 37	85	129, 54, 12
45	62, 47, 43	90	139, 43, 8

Pro

Pro vitro et segmento maiore.

ang. app. FOV	ang. verus FOs	ang. app. FOV	ang. verus FOs
0°	0°, 0′, 0″	45°	27°, 12′, 17″
5	3, 13, 49	50	29, 41, 17
10	6, 26, 46	55	31, 58, 46
15	9, 37, 59	60	34, 3, 1
20	12, 46, 31	65	35. 52, 16
25	15, 51, 26	70	37, 24, 45
30	18, 51, 39	75	38, 38, 47
35	21, 46, 3	80	39, 32, 51
40	24, 33, 23	85	40, 5, 48
45	27, 12, 17	90	40, 16, 52

23. Hic ergo nulla ſtella bis ſpectatur, neque etiam vlla conſpectui ſubtrahitur, et tota ſphaera radiis ad oculum directis impletur, ita vt nulla portio obſcura relinquatur. Per ſegmentum vero minus multo maior coeli portio detegitur, ad gradus 279 expanſa dum ea quae per ſegmentum maius cernitur, non vltra 80°,33′,44″ patet. Coelum igitur per ſegmentum minus intuentibus interualla ſtellarum contrahuntur, et quidem maxime circa oras vbi ad ſemiſſem rediguntur. Contra autem per ſegmentum maius ſtellarum interualla amplificantur, atque adeo maxime earum, quae ab axe ad 90° remotae apparent. Ac ſi centrum ſolis ab axe diſtet 139°,43′,8″ ſemiſſis per ſegmentum minus conſpicuus tantum 8′, alter vero per ſegmen-

tum

tum maius visus propemodum 7 gradus in coelo occupare videbitur, ita vt hoc loco aspectus maximus maxime turbetur, et continuitatis legi aduersetur.

24. Similia erunt phaenomena in sphaera aquea, vbi cum refractio n sit minor, distantia oculi a centro maior est capienda, vt inter ambo segmenta maior inaequalitas intercedat, contra vero portiones coeli per vtrumque seorsim spectabiles magis ad aequalitatem reducantur, sicque perturbatio visionis imminuatur. Quam ob rem superfluum foret huiusmodi tabulam quoque pro aquae refractione computare; cum autem sphaera vitrea integra singulas stellas, quae quidem sunt conspicuae, in ternis diuersis locis spectandas exhibeant, dum hoc casu quo $d = \frac{a}{n}$ subito vnica repraesentatio locum habeat, haud abs re erit casum quendam intermedium euoluere, quo facilius intelligatur, quomodo saltus a casu priori ad posteriorem progrediatur; ex quo casum quo $\frac{d}{a} = \sqrt{\frac{1}{n}}$ examini subiiciam.

III. De aspectu coeli per segmenta sphaerica diaphana casu quo $d = a\sqrt{\frac{1}{n}}$.

25. Sumto ergo interuallo $CO = CA\sqrt{\frac{1}{n}}$, pro segmento minore AOP si angulus apparens EOV vocetur $= \Phi$, indeque definiantur anguli acuti ζ et η vt sit $\sin.\zeta = \sqrt{n} \cdot \sin.\Phi$ et $\sin \eta = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \Phi$, erit angulus verus $EOs = \Phi + \zeta - \eta$. At pro segmen- Tab. IV. Fig. 1.

to maiore BOP, vocato angulo apparente $FOV = \psi$ indeque deductis angulis pariter acutis ζ et η, vt sit $\sin.\zeta = \sqrt{n}\sin.\psi$ et $\sin.\eta = \frac{1}{\sqrt{n}}\sin.\psi$, erit angulus verus $FOs = \psi - \zeta + \eta$. Quodsi iam sphaeram statuamus vitream et $n = 1,5467$, erit $\sqrt{n} = 1,24366$ et $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,804078$ vnde ne angulus ζ fiat imaginarius, angulum ϕ vel ψ non vltra $53°,31',16''$ augere licet; sicque in vtroque segmento illuminatio, vlterius non porrigetur, ita vt vtrinque circa rectam OP spatium $36°,28',44''$ obscurum relinquatur, vnde nulli radii ad oculum pertingant.

Pro segmento minore		Pro segmento maiore	
ang. app. EOV	ang. verus EOs	ang. app. FOV	ang. verus FOs
0°	0°, 0′, 0″	0°	0°, 0′, 0″
5	7, 12, 13	5	2, 47, 47
10	14, 26, 46	10	5, 33, 14
15	21, 45, 55	15	8, 14, 5
20	29, 12, 39	20	10, 47, 21
25	36, 50, 34	25	13, 9, 26
30	44, 34, 40	30	15, 25, 20
35	53, 2, 33	35	16, 57, 27
40	61, 57, 9	40	18, 2, 51
45	71, 55, 12	45	18, 4, 48
50	84, 17, 8	50	15, 42, 52
52	91, 12, 31	52	12, 47, 29
53	96, 22, 37	53	9, 37, 23
53, 31′	102, 36, 48	53, 31′	4, 25, 12
53, 31, 16″	103, 14, 24	53, 31, 16″	3, 48, 8

26. Hic

26. Hic circa segmentum minus nihil admodum notatu dignum occurrit, nisi quod, quo magis oculus O a centro C remouetur, tam spatium illuminatum quam campus coeli in eo conspicuus magis contrahatur, ideoque stellarum interualla minuantur, ordine seruato. In segmento autem maiore haec interualla dilatantur, donec perueniatur ad distantiam maximam ab axe, quae colligitur 18°, 14′, 37″ et respondet angulo apparenti $FOV = 42°$, 46′, 40″ neque enim stellas magis remotas cernere licebit, apparebunt in maioribus ab axe distantiis eaedem stellae, quae propius conspiciebantur, sed ordine inuerso, quoad recurrat stella ab axe 3°, 48′, 8″ remota, quae in extremitate conspicietur, ita vt omnes stellae magis remotae bis repraesententur; propiores vero tantum semel. Vnde colligere licet, si oculus magis a centro remoueatur, mox ipsam stellam in F sitam dupliciter conspici, tum vero etiam quasdam stellas triplicari.

27. Haud facile hic pro segmento maiore definitur locus, vbi angulus $FOs = \psi - \zeta + \eta$ fit maximus. Cum enim sit $\sin.\zeta = \frac{nd}{a}\sin.\psi$ et $\sin.\eta = \frac{d}{a}\sin.\psi$, ob $d\zeta\cos.\zeta = \frac{nd}{a}d\psi\cos.\psi$ et $d\eta\cos.\eta = \frac{d}{a}d\psi\cos.\psi$, pro hoc loco habetur:

$$0 = 1 - \frac{nd\cos.\psi}{a\cos.\zeta} + \frac{d\cos.\psi}{a\cos.\eta}.$$

Cum nunc sit $\frac{nd}{a} = \frac{\sin.\zeta}{\sin.\psi}$ et $\frac{d}{a} = \frac{\sin.\eta}{\sin.\psi}$, aequatio haec istam induet formam:

$$o = 1 - \frac{tang.\,\zeta}{tang.\,\psi} + \frac{tang.\,\eta}{tang.\,\psi} \text{ seu } tang.\,\psi = tang.\,\zeta - tang.\,\eta$$

ita vt angulus FOs ibi sit maximus, vbi fit tang ψ $=$ tang. ζ $-$ tang. η. Verum si hinc angulum ψ definire velimus, ad aequationem quarti ordinis delabimur, quam nonnisi operosa illa methodo *Cartesiana* resoluere licet.

PHYSI-