RECHERCHES

Sur l'intégration de l'équation

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{b}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{c}{xx}z$$

PAR M. EULER.

I. CETTE équation eſt d'un genre tout-à-fait différent de celui, auquel le calcul intégral a été appliqué juſqu'ici, puiſqu'elle renferme trois variables t, x, & z, & qu'il s'agit de déterminer la quantité z par les deux autres t & x, c'eſt-à-dire qu'on demande quelle fonction de t & x doit être priſe pour z, afin que la condition preſcrite ſoit remplie. Mais on cherche principalement une ſolution compléte qui nous découvre à la fois toutes les fonctions poſſibles, qui étant ſubſtituées à la place de z, ſatisfaſſent à l'équation propoſée; comme cette équation contient des différentiels du ſecond dégré, ſon intégrale compléte doit néceſſairement renfermer deux fonctions abſolument indéfinies & arbitraires, comme je l'ai prouvé autresfois.

II. Ce n'eſt pas une pure ſpéculation, qui a fourni cette équation, mais elle renferme la ſolution de pluſieurs queſtions phyſico-mathématiques de la dernière importance. Le cas, où les quantités b & c ſont zero, n'eſt que trop connu par les recherches ſur les vibrations des cordes, dont le mouvement en général eſt toujours déterminé par cette équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, pourvu que la corde ait par tout la même groſſeur, & que les excurſions ſoient quaſi infiniment petites. Enſuite la queſtion ſur la propaga-

tion du ſon m' aiant conduit à cette équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{4a^2}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)$ il eſt aſsès clair, que l' équation propoſée étant plus générale eſt de la dernière importance.

III. Comme cette équation apartient à un genre de calcul tout particulier, dont les premiers élémens ne ſont pas encore aſsès bien développés, je me propoſe d'établir ici quelques méthodes, qui peuvent être d'un grand uſage dans ce nouveau calcul. Car quoique j'aie donné les intégrales complétes des deux cas mentionnés, c' eſt plutôt par une heureuſe induction, que j' y ai été conduit, que par une méthode certaine, & lorſque Mrs Bernoulli & D'Alembert ont traité le probleme des cordes vibrantes, ils ſe ſont contentés des ſolution particulières, ſans ſe ſoucier trop de toute l' étendue, que la queſtion renferme par ſa nature. Or avant que d' entreprendre l'intégration de l'équation générale miſe dans le titre, il ſera bon de traiter plus en détail l' équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, & d' expoſer quelques méthodes, qui nous conduiſent à ſon intégrale compléte.

De l'équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$.

IV. Si l' on vouloit ſe contenter de ſolutions particulières, il ſeroit fort facile d' en trouver une multitude infinie, toutes les valeurs ſuivantes ſatisfont également à cette équation ;

$z = A(x \pm at)^n$, $z = Ae^{n(x \pm at)}$, $z\ A$ ſin. $n(x \pm at)$, & l' on peut encore joindre enſemble autant qu'on voudra de telles valeurs, de ſorte que par ce moyen on pourroit donner une ſolution qui renfermât une infinité de quantité

de quantités constantes, & absolument arbitraires. Cependant une telle solution ne seroit pas encore compléte, & ne comprendroit point toutes les solutions possibles. Mais quand j' ai trouvé $z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at)$, où $\Gamma : (x + at)$ marque une fonction quelconque de $x + at$, & $\Delta : (x - at)$ de $x - at$, on voit bien que cette forme est infiniment plus générale, aussi est-elle l' intégrale compléte de notre équation.

V. Il est aisé de s' assurer, que cette formule convient à l'équation proposée; car en marquant le différentiel de $\Gamma : u$ par $du\,\Gamma' : u$, & celei de $\Gamma' : u$ par $du\,\Gamma'' : u$, on en tire

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \Gamma' : (x + at) + \Delta'' : (x - at) \;\&$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = a\Gamma' : (x + at) - a\Delta' : (x - at)$$

& par la différentiation réitérée

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \Gamma'' : (x + at) + \Delta'' : (x - at) \;\&$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = a^2\Gamma'' : (x + at) + a^2\Delta'' : (x - at)$$

d'où l'on a évidemment $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$. Mais il s'agit ici d' une méthode, qui partant de l' équation différentio-différentielle nous conduise immédiatement à la formule $z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at)$, & par laquelle nous puissions être assurés, que cette formule est en effet l' intégrale compléte de l' équation différentio-différentielle. Je m'en vais proposer deux méthodes qui conduisent à ce but.

VI. *Première méthode.* Je transforme l'équation par cette substitution $\left(\frac{dz}{dt}\right) + a\left(\frac{dz}{dx}\right) = u$, d'ou je tire:

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + a\left(\frac{ddz}{dt\,dx}\right) \;\&\; \left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dt\,dx}\right) +$$

$a\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$; & partant $\left(\frac{du}{dt}\right) - a\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) - aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = 0$. Nous voilà donc parvenus à une équation différentielle du premier dégré $\left(\frac{du}{dt}\right) = a\left(\frac{du}{dx}\right)$, dont il s' agit de trouver la fonction u. Or, puisque $du = dt\left(\frac{du}{dt}\right) + dx\left(\frac{du}{dx}\right)$, nous aurons $du = \left(\frac{du}{dx}\right)\cdot(adt + dx)$; laquelle formule devant être intégrable, il faut que $\left(\frac{du}{dx}\right)$ soit une fonction de la quantité $x + at$. Posons donc $\left(\frac{du}{dx}\right) = \Gamma'' : (x + at)$, & l'équation $du = (dx + adt)$, $\Gamma'' : (x + at)$ donne $u = \Gamma' : (x + at)$. Maintenant nous avons à résoudre cette équation $\left(\frac{dz}{dt}\right) + a\left(\frac{dz}{dx}\right) = \Gamma' : (x + at)$ dont je cherche l' intégrale de la manière suivante.

VII. Posant $dz = pdx + qdt$, pour avoir $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ & $q = \left(\frac{dz}{dt}\right)$, à cause de $q = -ap + \Gamma' : (x + at)$, nous aurons :

$$dz = p(dx - adt) + dt\,\Gamma' : (x + at)$$

Posons $p = r + \alpha\Gamma' : (x + at)$, pour avoir :

$$dz = r(dx - adt) + [\alpha dx + (1 - \alpha a)dt]\Gamma' : (x + at)$$

& soit $\frac{1 - \alpha a}{\alpha} = a$ ou $\alpha = \frac{1}{2a}$, donc

$$dz = r(dx - adt) + \frac{1}{2a}(dx + adt)\Gamma' : (x + at),$$

& puisque le dernier nombre est intégrable, l' intégrale étant $\frac{1}{2a}\Gamma : (x + at)$ ou bien simplement $\Gamma : (x + at)$

pour rendre le premier membre également intégrable, il faut qu'il soit $r = \Delta' : (x - at)$, d'où nous tirons

$$z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at)$$

& il est évident en même tems, que cette forme est l'intégrale compléte de l'équation proposée.

VIII. *Autre méthode*. Changeons les variables t & x, dont z doit être une fonction, & posons $x + at = p$, & $x - at = q$, de sorte qu'il faille à présent trouver, quelle fonction de p & q doit être z. Il s'agit donc d'éliminer t & x, & de trouver une équation différentielle entre p, q, & z, ce qui se fera de la manière suivante. Puisque $dz = dt\left(\frac{dz}{dt}\right) + dx\left(\frac{dz}{dx}\right)$ & $dz = dp\left(\frac{dz}{dp}\right) + dq\left(\frac{dz}{dq}\right)$, à cause de $dp = dx + adt$, & $dq = dx - adt$, nous aurons

$$dt\left(\frac{dz}{dt}\right) + dx\left(\frac{dz}{dx}\right) =$$

$$(dx + adt)\left(\frac{dz}{dp}\right) + (dx - adt)\left(\frac{dz}{dq}\right).$$

Maintenant parceque t & x ne dépendent point l'une de l'autre, les membres affectés de dx & dt doivent être égales séparément, ce qui donne

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dp}\right) + \left(\frac{dz}{dq}\right) \text{ \& } \left(\frac{dz}{dt}\right) = a\left(\frac{dz}{dp}\right) - a\left(\frac{dz}{dq}\right)$$

& de là nous tirons

$$\left(\frac{ddz}{dpdx}\right) = \left(\frac{ddz}{dp^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dpdq}\right) \text{ \& } \left(\frac{ddz}{dpdt}\right) = a\left(\frac{ddz}{dp^2}\right) - a\left(\frac{ddz}{dpdq}\right)$$

$$\left(\frac{ddz}{dqdx}\right) = \left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + \left(\frac{ddz}{dq^2}\right) \text{ \& } \left(\frac{ddz}{dqdt}\right) = a\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) - a\left(\frac{ddz}{dq^2}\right)$$

IX. Pour achever la substitution, aiant

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dpdx}\right) + \left(\frac{ddz}{dqdx}\right) \text{ \& } \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = a\left(\frac{ddz}{dpdt}\right) - a\left(\frac{ddz}{dqdt}\right)$$

on n'a qu'à substituer ici les valeurs, que nous venons de trouver, & nous obtiendrons

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dp^2}\right) + 2\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + \left(\frac{ddz}{dq^2}\right) \text{ \&}$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dp^2}\right) - 2aa\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + aa\left(\frac{ddz}{dq^2}\right).$$

Donc notre équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ se change en celle-ci :

$2aa\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = -2aa\left(\frac{ddz}{dpdq}\right)$, ou bien $\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = 0$ qui est beaucoup plus simple que la proposée, ne contenant qu'un seul membre, qu'il faut égaler à zero, d'où l'on comprend de quelle importance peuvent souvent être de telles transformations, dans ce nouveau genre du calcul intégral.

X. Tout se rêduit donc à trouver, quelle fonction des deux variables p & q doit être la quantité z, afin que l'on ait $\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = 0$. Or cette équatiou est fort aisée à résoudre; qu'on pose, pour mettre l'opération dans tout son jour, $\left(\frac{dz}{dq}\right) = u$, & puisque $\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = \left(\frac{du}{dp}\right)$, il faut qu'il soit $\left(\frac{du}{dp}\right) = 0$, d'où il est clair que la quantité u ne sauroit renfermer la variable p, & partant elle sera fonction de la seule variable q, & une fonction quelconque de q mise pour u satisfera à la condition $\left(\frac{du}{dp}\right) = 0$. Posons donc $u = \Delta : q$, ce qui est l'intégrale compléte de l'équation $\left(\frac{du}{dp}\right) = 0$, & maintenant nous aurons $\left(\frac{dz}{dq}\right) = \Delta' : q$. Considérons ici l'autre quantité p constante, pour avoir $dz = dq\,\Delta' : q$, & partant son intégrale $z = \Delta : q +$ const.; mais cette constante renferme

une fonction quelconque de p, au lieu de laquelle écrivant $\Gamma : p$ nous trouvons comme ci-dessus $z = \Gamma : p + \Delta : q$ ou bien $z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at)$.

XI. Pour mettre devant les yeux toute l'étendue de cette solution, on peut décrire à volonté deux courbes quelconques EMS & FNT (*fig.* * *plan.* 1.) raportées à leur axes & BD, & alors pour avoir la valeur de z, qui répond à des valeurs quelconques des deux variables x & t, qu'on prenne dans la première courbe l'abscisse $AP = x + at$, & dans l'autre l'abscisse $BQ = x - at$, & la somme des deux appliquées $PM + QN$ ou bien aussi leur différence représentera en général la nature de la fonction cherchée z qui convient à l'équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$. Cette construction est si générale, que des traits tirés librement sur le papier sans aucune loi peuvent être employés pour les deux lignes EMS & FNT.

XII. C'est aussi en quoi consiste le caractère essentiel de ce genre de calcul intégral, & qui le distingue des intégrations ordinaires, où aucune ligne courbe destituée de la loi de continuité, ne sauroit jamais avoir lieu. Mais ici les lignes EMS & FNT peuvent être tirées d'une maniére quelconque, sans qu'elles soient comprises dans quelque équation que ce soit; on les peut terminer brusquement où l'on veut, & les composer d'arcs de courbes tout-à-fait différentes. De quelque manière qu'on ait commencé à tirer ces lignes, on est toujours le maître de les continuer de part & d'autre comme on veut, sans qu'on soit astreint à aucune loi; toutes ces irrégularités n'empêchent pas que la construction donnée ne satisfasse aussi bien à l'équation proposée, que si ces deux lignes courbes étoient tout-à-fait régulières.

De l'équation $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\alpha}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{\beta}{xx} z.$

XIII. D'abord je remarque qu'on peut transformer cette équation en d'autres ſemblables, en ſuppoſant $z = x^\lambda u$, d'où l'on a

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = x^\lambda \left(\frac{du}{dt}\right), \left(\frac{dz}{dx}\right) = \lambda x^{\lambda-1} u + x^\lambda \left(\frac{du}{dx}\right), \text{ \& de là}$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = x^\lambda \left(\frac{ddu}{dt^2}\right), \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \lambda(\lambda - 1) x^{\lambda-2} u$$

$+ 2\lambda x^{\lambda-1}\left(\frac{du}{dx}\right) + x^\lambda\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)$, & partant cette ſubſtitution, en diviſant par x^λ, nous fournit l'équation :

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \frac{\alpha + 2\lambda}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\beta + \alpha\lambda + \lambda(\lambda - 1)}{xx} u.$$

Donc ſi nous prenons $\lambda = -\frac{1}{2}\alpha$, de ſorte que $z = x^{-\frac{1}{2}\alpha} u$, l'équation propoſée ſe transforme dans celle-ci

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \frac{4\beta - \alpha\alpha + 2\alpha}{4xx} \cdot u$$

qui aiant un terme de moins, doit être regardée comme plus ſimple.

XIV. Par la même ſubſtitution on peut fair évanoüir le dernier terme, en poſant $\beta + \alpha\lambda + \lambda\lambda - \lambda = 0$, ce qui donne

$$\lambda = \frac{1-\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(1-\alpha)^2}{4} - \beta\right)} \text{ \& } \alpha + 2\lambda = 1 \pm \sqrt{[(1-\alpha)^2 - 4\beta]}$$

donc la ſubſtitution $z = x^\lambda u$ nous conduit à cette équation:

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \frac{1 \pm \sqrt{((1-\alpha)^2 - 4\beta)}}{x}\left(\frac{du}{dx}\right).$$

Donc ſans reſtraindre la forme propoſée nous pouvons d'abord ſuppoſer $\beta = 0$, de ſorte que nous aions à réſoudre cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\alpha}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

où il eſt remarquable que poſant $z = x^{1-\alpha} u$, elle ſe transforme dans celle-ci, qui lui eſt ſemblable.

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \frac{2-\alpha}{x}\left(\frac{du}{dx}\right),$$

& partant ſi la réſolution de l' équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\alpha}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

réuſſit dans le cas de $\alpha = n$, elle réuſſira auſſi dans le cas de $\alpha = 2 - n$.

XV. Mais puiſque la deſtruction du dernier terme pourroit conduire à des valeurs imaginaires, qu'il faudroit donner à l' expoſant λ, il vaudra mieux chaſſer l' avant dernier terme, ce qui ſe peut toujours faire ſans tomber dans cet inconvénient, & partant nos recherches rouleront ſur la réſolution de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\beta}{xx} z,$$

ſur laquelle je remarque, qu'on la peut réduire à une forme où le dernier terme manque d'une double manière, en poſant $z = x^{\frac{1 \pm \sqrt{(1-4\beta)}}{2}} u$, d' où l' on parvient à cette forme;

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \frac{1 + \sqrt{(1-4\beta)}}{x}\left(\frac{du}{dx}\right).$$

Or ſi β eſt un nombre poſitif plus grand que $\frac{1}{4}$ cette forme devient imaginaire.

XVI. Or par raport à cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\beta}{xx} z$$

je dois avertir d'avance, que je ne la ſaurois réſoudre en général, quelque nombre qu'on prenne ponr β, il n'y a

que certaines valeurs de cette lettre, où l' intégration réussisse, en quoi la résolution est semblable à la fameuse équation de Riccati, qui n' est résoluble qu'en certains cas. Mais aussi dans ces cas je dois avoüer, que je ne pas suis assès content de la méthode, qui m'a conduit à l'intégration de ces cas, puisqu'elle m' a été fournie par la considération d'une solution particulière, comme on peut le voir dans mes Recherches sur la propagation du son. Cependant j'expliquerai cette méthode, toute imparfaite qu'elle puisse paroître encore, peut étre qu'elle donnera à d'autres occasion de mieux approfondir les mystères, que ce nouveau genre de calcul intégral renferme.

XVII. Après plusieurs essais j'ai trouvé que l' intégrale de cette équation $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\beta}{xx}\zeta$ peut étre représentée par une telle suite indéfinie :

$$\zeta = Ax^n\Gamma:(x \pm at) + Bx^{n+1}\Gamma':(x \pm at)$$
$$+ Cx^{n+2}\Gamma'':(x \pm at) + Dx^{n+3}\Gamma''':(x \pm at) + \&c.$$

d' où nous tirons d' abord

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = Ax^n\Gamma'':(x \pm at) + Bx^{n+1}\Gamma''':(x \pm at)$$
$$+ Cx^{n+2}\Gamma^{\text{IV}}:(x \pm at) + Dx^{n+3}\Gamma^{\text{V}}:(x \pm at) + \&c.$$

pour la première partie de l' équation ; or pour l' autre nous trouvons

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = n(n-1)Ax^{n-2}\Gamma:(x \pm at) + 2nAx^{n-1}\Gamma':(x \pm at) + Ax^n\Gamma'':(x \pm at)$$
$$+ (n+1)nB \qquad + 2(n+1)B$$
$$+ (n+2)(n+1)C$$
$$\frac{\beta}{xx}\zeta = \beta A \qquad + \beta B \qquad + \beta C$$

qui devant être égalée à celle-là, nous en tirons les déterminations suivantes

$n(n-1) + \beta = 0$, ou $\beta = -n(n-1)$

$2nA + 2nB = 0$, ou $B = -A$

$2(n+1)B+2(2n+1)C=0$, ou $(n+1)B+2(n+\frac{1}{2})C=0$
$2(n+2)C+2(3n+3)D=0$, ou $(n+2)C+3(n+\frac{2}{2})D=0$
$2(n+3)D+2(4n+6)E=0$, ou $(n+3)D+4(n+\frac{3}{2})E=0$
$2(n+4)E+2(5n+10)F=0$, ou $(n+4)E+5(n+\frac{4}{2})F=0$.

XVIII. Voici donc les déterminations de tous nos coéficiens, en supposant $\beta = -n(n-1)$.

$$B=-A$$

$$C=-\frac{(n+1)B}{2(n+\frac{1}{2})}=+\frac{(n+1)}{2(n+\frac{1}{2})}A$$

$$D=-\frac{(n+2)C}{3(n+1)}=-\frac{(n+2)}{2.3(n+\frac{1}{2})}A$$

$$E=-\frac{(n+3)D}{4(n+\frac{3}{2})}=+\frac{(n+2)(n+3)}{2.3.4(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}A$$

$$F=-\frac{(n+4)E}{5(n+2)}=-\frac{(n+3)(n+4)}{2.3.4.5(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}A$$

$$G=-\frac{(n+5)F}{6(n+\frac{5}{2})}=+\frac{(n+3)(n+4)(n+5)}{2.3.4.5.6(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})(n+\frac{5}{2})}A$$

$$H=-\frac{(n+6)G}{7(n+3)}=-\frac{(n+4)(n+5)(n+6)}{2.3.4.5.6.7(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})(n+\frac{5}{2})}A$$

&c. &c.

XIX. De là nous voions que toutes les fois que n est un nombre entier négatif, la série supposée devient finie, & partant c' est dans ces cas, que nous pouvons assigner l' intégrale de notre équation. Posons donc $n=-i$, marquant par i un nombre entier quelconque, & l'équation, dont nous sommes en état de trouver l'intégrale sera

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)-\frac{i(i+1)}{xx}z$$

de laquelle il eſt bon de remarquer, que poſant $z = x^{i+1} u$, elle ſe change dans cette forme:

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \frac{2(i+1)}{x}\left(\frac{du}{dx}\right)$$

Or poſant $z = x^{-i} u$ elle ſe transforme dans celle-ci

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2i}{x}\left(\frac{du}{dx}\right)$$

d' où nous voions que cette forme

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\alpha}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

eſt intégrable toutes les fois, que α eſt un nombre pair, ſoit poſitif, ſoit négatif.

1e CAS $n = -1$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{2}{xx} z.$$

XX. Puiſque $n = -1$, nous aurons $B = -A$, & les coéficiens ſuivans s'évanoüiront tous, donc l' intégrale de cette équation ſera, en prenant $A = 1$, & partant $B = -1$,

$$z = \frac{1}{x}\,\Gamma:(x \pm at) - \Gamma':(x \pm at)$$

& tenant compte du ſigne ambigu de la quantité a, l'intégrale compléte ſera exprimée ainſi

$$z = \frac{1}{x}\,\Gamma:(x - at) - \Gamma':(x - at)$$
$$+ \frac{1}{x}\,\Delta:(x + at) - \Delta':(x + at)$$

& de la même manière on pourra aiſément trouver les intégrales complétes pour tous les autres cas intégrables. Aiant trouvé les coéficiens de la forme ſuppoſée, on n' a

qu'à résoudre chaque terme en deux, en emploiant pour l'un la forme $x + at$, & pour l'autre la forme $x - at$.

2^d CAS $n = -2$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{6}{xx}z.$$

XXI. Aiant toujours $B = -A$ à cause de $n = -2$, nous aurons $C = \frac{1}{3}A$; prenant $A = 3$, & partant $B = -3$, & $C = 1$, l'intégrale compléte de notre équation sera

$$z = \frac{3}{x^2}\Gamma:(x + at) - \frac{3}{x}\Gamma':(x + at) + \Gamma'':(x + at)$$
$$+ \frac{3}{x^2}\Delta:(x - at) - \frac{3}{x}\Delta':(x - at) + \Delta'':(x - at)$$

où Γ & Δ signifient des fonctions quelconques, exprimées par des appliquées de lignes courbes quelconques, tant régulières qu'irrégulières, & puisque ces deux fonctions sont absolument indépendantes l'une de l'autre, c'est en quoi consiste le caractère de la solution compléte.

3e CAS $n = -3$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{12}{xx}z.$$

XXII. Ici le quatrième coéficient D entre aussi dans l'intégral avec les trois précédens, dont voici les valeurs

$$B = -A, C = -\frac{2}{5}B = \frac{2}{5}A, D = -\frac{1}{6}C = -\frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 6}A.$$

Posons

Posons donc pour éviter les fractions
$A = 3 \cdot 5$, $B = -3 \cdot 5$, $C = 2 \cdot 3$, $D = -1$
& l'intégrale compléte sera

$$z = \frac{3 \cdot 5}{x^3} \Gamma : (x + at) - \frac{3 \cdot 5}{x^2} \Gamma' : (x + at)$$
$$+ \frac{2 \cdot 3}{x} \Gamma'' : (x + at) - \Gamma''' : (x + at)$$
$$+ \frac{3 \cdot 5}{x^3} \Delta : (x - at) - \frac{3 \cdot 5}{x^2} \Delta' : (x - at)$$
$$+ \frac{2 \cdot 3}{x} \Delta'' : (x - at) - \Delta''' : (x - at)$$

4e CAS $n = -4$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{20}{xx} z .$$

XXIII. Ici les coéficiens sont déterminés ainsi ;

$$B = -A, \; C = -\frac{3}{7} B = \frac{3}{7} A,$$
$$D = -\frac{2}{9} C = -\frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 9} A, \; E = -\frac{1}{10} D = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{7 \cdot 9 \cdot 10} A$$

de sorte qu'en entiers nous aurons
$A = 3 \cdot 5 \cdot 7$, $B = -3 \cdot 5 \cdot 7$, $C = 3 \cdot 3 \cdot 5$, $D = -2 \cdot 5$, $E = 1$
& l' intégrale compléte sera

$$z = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{x^4} \Gamma : (x + at) - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{x^3} \Gamma' : (x + at)$$
$$+ \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{x^2} \Gamma'' : (x + at) - \frac{2 \cdot 5}{x} \Gamma''' : (x + at) + \Gamma'''' : (x + at)$$
$$+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{x^4} \Delta : (x - at) - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{x^3} \Delta' : (x - at)$$
$$+ \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{x^2} \Delta'' : (x - at) - \frac{2 \cdot 5}{x} \Delta''' : (x - at) + \Delta'''' : (x - at)$$

5e CAS $n = -5$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{30}{xx}z.$$

XXIV. Les coéficiens sont déterminés de la manière suivante

$$B = -A,\ C = -\frac{4}{9}B,\ D = -\frac{3}{12}C,$$

$$E = -\frac{2}{14}D,\ F = -\frac{1}{15}E$$

& prenant $A = 3.5.7.9$, nous aurons

$$A = 3.5.7.9,\ B = -3.5.7.9,\ C = 4.3.5.7,$$
$$D = -3.5.7,\ E = 3.5,\ F = -1$$

& après avoir trouvé ces coéficiens, on n'a qu'à observer que l' intégrale compléte sera

$$z = \frac{A}{x^5}\Gamma:(x+at) + \frac{B}{x^4}\Gamma':(x+at)$$
$$+ \frac{C}{x^3}\Gamma'':(x+at) + \frac{D}{x^2}\Gamma''':(x+at) + \&c.$$
$$+ \frac{A}{x^5}\Delta:(x-at) + \frac{B}{x^4}\Delta':(x-at)$$
$$+ \frac{C}{x^3}\Delta'':(x-at) + \frac{D}{x^2}\Delta''':(x-at) + \&c.$$

6e CAS $n = -6$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{42}{xx}z.$$

XXV. Pour les valeurs des coéficiens on aura

$$B = -A,\ C = -\frac{5}{11}B;\ D = -\frac{4}{15}C,$$

$$E = -\frac{3}{18}D,\ F = -\frac{2}{20}E,\ G = -\frac{1}{21}F$$

& prenant $A = 3.5.7.9.11$ les autres feront
$B = -3.6.7.9.11$, $C = +5.3.5.7.9$, $D = -4.5.7.9$,
$E = +2.3.5.7$, $F = -3.7$, $G - 1$
d' où l' intégrale compléte devient

$$z = \frac{A}{x^6}\Gamma:(x+at) + \frac{B}{x^5}\Gamma':(x+at)$$
$$+ \frac{C}{x^4}\Gamma'':(x-at) + \frac{D}{x^3}\Gamma''':(x+at) + \&c.$$
$$+ \frac{A}{x^6}\Delta:(x+at) + \frac{B}{x^5}\Delta':(x-at)$$
$$+ \frac{C}{x^4}\Delta'':(x-at) + \frac{D}{x^3}\Delta''':(x-at) + \&c.$$

XXVI. En général pour cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{i(i+1)}{xx}z$$

l' intégrale compléte fera

$$z = \frac{A}{x^i}\Gamma:(x-at) + \frac{B}{x^{i-1}}\Gamma':(x+at)$$
$$+ \frac{C}{x^{i-2}}\Gamma'':(x+at) + \frac{D}{x^{i-3}}\Gamma''':(x+at) + \&c.$$
$$+ \frac{A}{x^i}\Delta:(x-at) + \frac{B}{x^{i-1}}\Delta':(x-at)$$
$$+ \frac{C}{x^{i-2}}\Delta'':(x-at) + \frac{D}{x^{i-3}}\Delta''':(x-at) + \&c$$

où les coéficiens doivent être déterminés de la manière suivante

$$B = -A$$
$$C = -\frac{(i-1)B}{2i-1} = +\frac{(i-1)A}{2i-1}$$
$$D = -\frac{(i-2)C}{3i-3} = -\frac{(2i-4)A}{2.3(2i-1)}$$
$$E = -\frac{(i-3)D}{4i-6} = +\frac{(2i-4)(2i-6)A}{2.3.4(2i-1)(2i-3)}$$

$$F = -\frac{(i-4)E}{5i-10} = -\frac{(2i-6)(2i-8)A}{2.3.4.5(2i-1)(2i-3)}$$

$$G = -\frac{(i-5)F}{6i-15} = +\frac{(2i-6)(2i-8)(2i-10)A}{2.3.4.5.6(2i-1)(2i-3)(2i-5)}$$

&c. &c.

XXVII. Pour comprendre mieux la loi de ces coéficiens j' obſerve, qu'on trouve les mêmes coéficiens, en intégrant cette équation différentio-différentielle :

$$\frac{xxddy}{dx^2} + \frac{2xxdy}{dx} - i(i+1)y = 0$$

ſi l' on ſuppoſe l' intégrale exprimée par cette ſérie

$$y = \frac{A}{x^i} + \frac{B}{x^{i-1}} + \frac{C}{x^{i-2}} + \frac{D}{x^{i-3}} + \&c.$$

Or ſi i eſt un nombre entier, cette même équation nous fournit les coéficiens en ordre retrograde, car ſi nous ſuppoſons

$$y = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \frac{E}{x^4} + \frac{F}{x^5} + \&c.$$

nous trouvons

$$B = -\frac{i(i+1)}{2}A$$

$$C = -\frac{(i-1)(i+2)}{4}B = +\frac{i(ii-1)(i+2)}{2\,.\,4}A$$

$$D = -\frac{(i-2)(i+3)}{6}C = -\frac{i(ii-1)(ii-4)(i+3)}{1\,.\,4\,.\,6}A$$

$$E = -\frac{(i-3)(i+4)}{8}D = +\frac{i(ii-1)(ii-4)(ii-9)(i+4)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}A$$

$$F = -\frac{(i-4)(i+5)}{10}E = -\frac{i(ii-1)(ii-4)(ii-9)(ii-16)(i+5)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,10}A$$

&c. &c.

XXVIII. Donc ſi nous marquons les fonctions en aſcendant par intégration, de cette maniére :

$'\Gamma : s = \int ds \Gamma : s$, $''\Gamma : s = \int ds\, '\Gamma : s$, $'''\Gamma : s = \int ds\, ''\Gamma : s$ &c.

l' intégrale de notre équation $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{i(i+1)}{xx}\,z$ sera:

$$z = A\,\Gamma:(x+at) + \frac{B}{x}\,'\Gamma:(x+at)$$
$$+ \frac{C}{xx}\,''\Gamma:(x+at) + \frac{D}{x^3}\,'''\Gamma:(x+at) + \&c.$$
$$+ A\,\Delta:(x-at) + \frac{B}{x}\,'\Delta:(x-at)$$
$$+ \frac{C}{xx}\,''\Delta:(x-at) + \frac{D}{x^3}\,'''\Delta:(x+at) + \&c.$$

& pour les diverses valeurs de i ces coéficiens seront

i	A	—B	+ C	— D	+ E	— F
1	1	$\frac{1.2}{2}$				
2	1	$\frac{2.3}{2}$	$\frac{2.3.4}{2.4}$			
3	1	$\frac{3.4}{2}$	$\frac{3.8.5}{2.4}$	$\frac{3.8.5.6}{2.4.6}$		
4	1	$\frac{4.5}{2}$	$\frac{4.15.6}{2.4}$	$\frac{4.15.12.7}{2.4.6}$	$\frac{4.15.12.7.8}{2.4.6.8}$	
5	1	$\frac{5.6}{2}$	$\frac{5.24.7}{2.4}$	$\frac{5.24.21.8}{2.4.6}$	$\frac{5.24.21.16.9}{2.4.6.8}$	$\frac{5.24.21.16.9.10}{2.4.6.8.10}$
6	1	$\frac{6.7}{2}$	$\frac{6.35.8}{2.4}$	$\frac{6.35.32.9}{2.4.6}$	$\frac{6.35.32.27.10}{2.4.6.8}$	$\frac{6.35.32.27.20.11}{2.4.6.8.10}$
7	1	$\frac{7.8}{2}$	$\frac{7.48.9}{2.4}$	$\frac{7.48.45.10}{2.4.6}$	$\frac{7.48.45.40.11}{2.4.6.8}$	$\frac{7.48.45.40.33.12}{2.4.6.8.10}$
			&c.		&c.	

XXIX. J' observe encore, que l' intégrale de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{n(n+1)}{xx}\,z$$

ſe peut exprimer d' une double manière, l' une finie, & l' autre infinie, puiſque on peut mettre tant $i = n$ que $i = -n - 1$. Pour rendre l' une & l' autre plus évidente, poſons $x + at = p$, & $x - at = q$, & que P marque une fonction quelconque de p, & Q de q; cela poſé la première forme ſera

$$z = \frac{A}{x^n}(P + Q) + \frac{B}{x^{n-1}}\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right)$$
$$+ \frac{C}{x^{n-2}}\left(\frac{ddP}{dp^2} + \frac{ddQ}{dq^2}\right) + \&c.$$

les coéficiens étant déterminés ainſi:

$$B = -A, C = -\frac{2(n-1)}{2(2n-1)}B, D = -\frac{2(n-2)}{3(2n-2)}C,$$
$$E = -\frac{2(n-3)}{4(2n-3)}D, F = -\frac{2(n-4)}{5(2n-4)}E \ \&c.$$

Or l' autre forme eſt

$$z = Ax^{n+1}(P + Q) + Bx^{n+2}\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right)$$
$$+ Cx^{n+3}\left(\frac{ddP}{dp^2} + \frac{ddQ}{dq^2}\right) + \&c.$$

où les coéficiens ont les valeurs ſuivantes

$$B = -A, C = -\frac{2(n+2)}{2(2n+3)}B, D = -\frac{2(n+3)}{3(2n+5)}C,$$
$$E = -\frac{2(n+4)}{4(2n+5)}D, F = -\frac{2(n+6)}{5(2n+6)}E \ \&c.$$

Il eſt bien remarquable que ces deux expreſſions ſont équivalentes, & que dans les cas $n = 0$, & $n = -1$, l' une & l' autre devient infinie, & ſe réduit à $z = P + Q$.

XXX. Puiſque cette réduction ne paroit pas d' abord, il eſt bon de la démontrer. Soit donc $n = 0$, & pour la premieère forme on aura

$$A = 1, B = -1, C = \frac{2}{2}, D = -\frac{2^2}{2.3}, E =$$

$+ \frac{2^3}{2.3.4}$, $F = - \frac{2^4}{2.3.4.5}$ &c.

d' où nous tirons

$$z = 1 (P + Q) - \frac{x}{1} \left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right) + \frac{2x^2}{1.2} \left(\frac{ddP}{dp^2} + \frac{ddQ}{dq^2}\right)$$
$$- \frac{2x^3}{1.2.3.} \left(\frac{d^3P}{dp^3} + \frac{d^3Q}{dq^3}\right) + \&c.$$

Puiſque chaque membre contient deux termes, ſoit M la ſérie qui contient les termes dépendans de P & N celle qui contient Q, de ſorte que $z = M + N$; maintenant puiſque $P = \Gamma : p = \Gamma : (x + at)$, à cauſe de $p = x + at$, ſi nous poſons $p - 2x$ au lieu de x, on aura par la nature des différentiels

$$\Gamma : (p - 2x) = P - \frac{2x}{1} \times \frac{dP}{dp} + \frac{2^2x^2}{1.2} \times \frac{ddP}{dp^2}$$
$$- \frac{2^3x^3}{1.2.3} \times \frac{d^3P}{dp^3} + \frac{2^4x^4}{1.2.3.4} \times \frac{d^4P}{dp^4} - \&c.$$

donc, puiſque $M = P - \frac{x}{1} \times \frac{dP}{dp} + \frac{2x^2}{1.2} \times \frac{ddP}{dp^2} - \frac{2^2x^3}{1.2.3} \times \frac{d^3P}{dp^3} + \&c.$, il eſt évident, que $2M - \Gamma : (p - 2x) = P = \Gamma : p$, & partant $M = \frac{1}{2} \Gamma : (p - 2x) = \frac{1}{2} \Gamma : (x + at) + \frac{1}{2} \Gamma : (at - x)$. De la même manière on verra que

$N = \frac{1}{2} \Delta : q + \frac{1}{2} \Delta : (q - 2x) = \frac{1}{2} \Delta : (x - at) + \frac{1}{2} \Delta : (- at - x)$, & par conſéquent $z = M + N$ ſe trouve égale à la ſomme de deux fonctions, l' une de $x + at$, & l' autre de $x - at$.

XXXI. L'autre forme posant $n = 0$ donne

$$A = 1,\ B = -1,\ C = \frac{2}{3},\ D = -\frac{2^2}{3.4},$$

$$E = +\frac{2^3}{3.4.5},\ F = -\frac{2^4}{3.4.5.6}\ \&c.$$

d'où l'on obtient

$$z = x\,(P + Q) - \frac{2x^2}{2.3}\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right) +$$

$$\frac{2^2x^3}{1.2.3}\left(\frac{ddP}{dp^2} + \frac{ddQ}{dq^2}\right) - \frac{2^3x^4}{1.2.3.4}\left(\frac{d^3P}{dp^3} + \frac{d^3Q}{dq^3}\right) + \&c.$$

Posons $z = M + N$, de sorte que M contienne les termes renfermans P, & N les Q. Considérons à présent la forme $\int P\,dp = \Gamma : p = \Gamma : (x + at)$, & posons $p - 2x$ au lieu de p, pour avoir

$$\Gamma : (p - 2x) = \Gamma : p - \frac{2x}{1} \times P + \frac{2^2x^2}{1.2} \times \frac{dP}{dp}$$

$$- \frac{2^3x^3}{1.2.3} \times \frac{ddP}{dp^2} + \&c.$$

Or $M = \frac{x}{1}\,P - \frac{2x^2}{1.2} \times \frac{dP}{dp} + \frac{2^2x^3}{1.2.3} \times \frac{ddP}{dp^2} + \&c.$

donc $2M + \Gamma : (p - 2x) = \Gamma : p$ & partant

$$M = \frac{1}{2}\Gamma : p - \frac{1}{2}\Gamma : (p - 2x) = \frac{1}{2}\Gamma : (x + at) -$$

$$- \frac{1}{2}\Gamma : (at - x)$$

& de la même manière on trouve

$$N = \frac{1}{2}\Delta : q - \frac{1}{2}\Delta : (q - 2x) = \frac{1}{2}\Delta : (x - at)$$

$$- \frac{1}{2}\Delta : (-at - x)$$

d'où il est clair que $z = M + N$ devient comme ci-devant la somme des deux fonctions, l'une de $x + at$, & l'autre de $x - at$. Cette réduction pour le cas le plus simple est très remarquable.

XXXII.

XXXII. Par les mêmes principes on peut prouver l'identité des deux expreſſions pour les autres cas. Soit $n = 1$, & la première forme donnant $A = 1$ & $B = -1$, l'intégrale eſt $z = \frac{1}{x}(P + Q) - 1\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right)$.

Or l'autre forme donne ces coéficiens $B = -A$, $C = +\frac{3}{5}A$, $D = -\frac{2.4}{5.6}A$, $E = +\frac{2^2.5}{5.6.7}A$, $F = -\frac{2^3.6}{5.6.7.8}A$ &c.

Poſons $A = \frac{2^3}{1.2.3.4}$, pour avoir la forme ſuivante de l'intégrale, dans laquelle je ne mets que les termes renfermant $P = \Gamma : (x + at)$, puiſque la réduction pour les Q eſt la même :

$$z = \frac{2^3x^3}{1\ldots4}P - \frac{2^3x^3}{1\ldots4}\cdot\frac{dP}{dp} + \frac{2^3.3x^4}{1\ldots5}\cdot\frac{ddP}{dp^2} - \frac{2^4.4x^5}{1\ldots6}\cdot\frac{d^3P}{dp^3} + \frac{2^5.5x^6}{1\ldots7}\cdot\frac{d^4P}{dp^4} \text{ \&c.}$$

que je décompoſe en deux parties, ſavoir

$$z = \frac{2x^2}{1.2}P - \frac{2^2x^3}{1.2.3}\cdot\frac{dP}{dp} + \frac{2^3x^4}{1\ldots4}\cdot\frac{ddP}{dp^2} - \frac{2^4x^5}{1\ldots5}\cdot\frac{d^3P}{dp^3} + \frac{2^5x^6}{1\ldots6}\cdot\frac{d^4P}{dp^4} - \text{ \&c.}$$

$$-\frac{2^2x^2}{1.2.3}P + \frac{2^3x^3}{1\ldots4}\cdot\frac{dP}{dp} - \frac{2^4x^4}{1\ldots5}\cdot\frac{ddP}{dp^2} + \frac{2^5x^5}{1\ldots6}\cdot\frac{d^3P}{dp^3} - \frac{2^6x^6}{1\ldots7}\cdot\frac{d^4P}{dp^4} + \text{ \&c.}$$

pour avoir une telle forme $z = M - N$, où M & N marquent les ſéries trouvées, qui étant aſsès régulières, la valeur de l'une & de l'autre ſe découvrira ainſi.

XXXIII. Pour la première ſérie M, je poſe $P = \frac{ddR}{dp^2}$, où R eſt auſſi une fonction de $x + at$, & j'aurai

$$M = \frac{2x}{1.2} \cdot \frac{ddR}{dp^2} - \frac{2^2x^4}{1.2.3} \cdot \frac{d^3R}{dp^3} + \frac{2^3x^5}{1 \ldots 4} \cdot \frac{d^4R}{dp^4} - \&c.$$

Mais posant $R = \Gamma : p$, il me vient

$$\Gamma : (p - 2x) = R - \frac{2x}{1} \cdot \frac{dR}{dp} + \frac{2^2x^2}{1.2} \cdot \frac{ddR}{dp^2}$$
$$- \frac{2^3x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3R}{dp^3} + \&c.$$

& partant $\Gamma : (p - 2x) = R - \frac{2x}{1} \cdot \frac{dR}{dp} + 2M$, d'où l'on tire la valeur de M, savoir

$$M = \frac{1}{2} \Gamma : (p - 2x) - \frac{1}{2} \Gamma : p + x \Gamma : p.$$

Pour l'autre série je fais $P = \frac{d^3S}{dp^3}$ pour avoir

$$N = \frac{2^2x^2}{1.2.3} \cdot \frac{d^3S}{dp^3} - \frac{2^3x^3}{1 \ldots 4} \cdot \frac{d^4S}{dp^4} + \frac{2^4x^4}{1 \ldots 5} \cdot \frac{d^5S}{dp^5} - \&c.$$

Mais puisque $\frac{d^3S}{dp^3} = \frac{ddR}{dp^2}$, il suit que $\frac{dS}{dp} = R = \Gamma p$, donc $S = \Gamma : p$ & $\Gamma : (p - 2x) = S - \frac{2x}{1} \cdot \frac{dS}{dp}$
$+ \frac{2^2x^2}{1.2} \cdot \frac{ddS}{dp^2} - \frac{2^3x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3S}{dp^3} + \frac{2^4x^4}{1 \ldots 4} \cdot \frac{d^4S}{dp^4} - \&c.$
& partant $\Gamma : (p - 2x) = \Gamma : p - 2x \Gamma : p + 2xx \Gamma : p$
$- 2xN$, de sorte que $N = - \frac{1}{2x} \Gamma : (p - 2x) +$
$\frac{1}{2x} \Gamma : p - \Gamma : p + x \Gamma : p$, par conséquent $M - N =$
$\frac{1}{2} \Gamma : (p - 2x) + \frac{1}{2x} \Gamma : (p - 2x) + \frac{1}{2} \Gamma : p -$
$\frac{1}{2x} \Gamma : p$, ce qui est la valeur de z.

XXXIV. Puisque $p = x + at$, en doublant les termes, & posant Γ au lieu de Γ, la partie de l'intégrale, qui renferme la lettre P, se réduit à cette forme

$$\zeta = \Gamma' : (x + at) - \frac{1}{x} \Gamma : (x + at)$$

$$+ \Gamma' : (-x + at) + \frac{1}{x} \Gamma : (-x + at)$$

or la même méthode nous fournit pour les termes Q

$$\zeta = \Delta' : (x - at) - \frac{1}{x} \Delta : (x - at)$$

$$+ \Delta' : (-x - at) + \frac{1}{x} \Delta : (-x - at)$$

& ces deux expreſſions combinées enſemble donnent l'intégrale trouvée par la première forme.

Soit pour cela $\Delta : (-x - at) - \Gamma : (x + at) = P =$ funct. $(x + at = p)$, & la différentiation donnera $- \Delta' : (-x - at) - \Gamma' : (x + at) = \frac{dP}{dp}$; poſant de même $\Gamma : (-x + at) - \Delta : (x - at) = Q =$ funct. $(x - at = q)$, on aura par la différentiation : $- \Gamma' : (-x + at) - \Delta' : (x - at) = \frac{dQ}{dq}$, & de là il eſt clair qu'on aura, comme ci-deſſus :

$$\zeta = \frac{1}{x} (P + Q) - 1 \left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right).$$

XXXV. Ces réductions que je viens de faire pour les cas $n = 0$ & $n = 1$, peuvent être appliquées avec le même ſuccès à des plus grands nombres pris pour n, mais il eſt aiſé de prevoir, qu'elles deviendront de plus en plus embarraſſantes. Cependant il ſuffit d'avoir fait voir la poſſibilité de réduire la forme infinie de l'intégrale à la finie, dans les cas, où n eſt un nombre entier. Mais pour les cas, où n eſt une fraction, les deux formes trouvées pour l'intégrale dans le §. XXIX. deviennent infinies, & il ne paroit aucun moyen de réduire

l' une ou l' autre à une forme finie. On y rencontre les mêmes difficultés que dans les cas irréſolubles de l' équation de Riccati, & quoique j' aie trouvé moyen de conſtruire ces cas par une méthode tout-à-fait particulière, il ne ſemble point, que cette méthode puiſſe être appliquée aux cas dont il s' agit ici. Mais non obſtant le nombre infini des termes, dont les intégrales de ces cas ſont compoſées, elles ne ſont pas moins complétes, puiſqu'elles renferment deux fonctions abſolument indéterminées & arbitraires.

XXXVI. Or pour trouver plus facilement les intégrales complétes de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{n(n+1)}{xx}z$$

qu'on poſe $x + at = p$ & $x - at = q$, enſuite ſoit P une fonction quelconque de p, & Q une fonction quelconque de q, qu'on faſſe outre cela pour abreger :

$P' = \int P dp$, $P'' = \int P' dp$, $P''' = \int P'' dp$, $P'' = \int P''' dp$ &c.

$Q' = \int Q dq$, $Q'' = \int Q' dq$, $Q''' = \int Q'' dq$, $Q'' = \int Q''' dq$ &c.

toutes ces valeurs pouvant aiſément être repréſentées par des quadratures de lignes courbes, enfin qu'on forme les coéficiens ſuivans

$$A = + 1$$

$$B = + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$C = + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 4}$$

$$D = + \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$E = + \frac{(n-3)(n-2) \cdots\cdots (r+4)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$$

$$F = + \frac{(n-4)(n-3) \cdots\cdots (n+5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}$$

&c.

& l' intégrale cherchée sera

$$z = A(P+Q) - \frac{B}{x}(P'+Q') + \frac{C}{xx}(P''+Q'')$$
$$- \frac{D}{x^3}(P'''+Q''') + \&c.$$

XXXVII. Aiant trouvé cette intégrale ou valeur de z, on aura aussi les intégrales de toutes les équations qui en sont transformées, comme posant $z = x^{-m} u$, à cause de $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = x^{-m}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)$ &

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = x^{-m}\left(\frac{du}{dx}\right) - m x^{-m-1} u$$
$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = x^{-m}\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - 2mx^{-m-1}\left(\frac{du}{dx}\right) + m(m+1)x^{-m-2}u$$

l' équation transformée sera:

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-n)(m+n+1)}{xx} u$$

& partant son intégrale sera:

$$u = Ax^m(P+Q) - Bx^{m-1}(P'+Q')$$
$$+ Cx^{m-2}(P''+Q'') - Dx^{m-3}(P'''+Q'''). \&c.$$

XXXVIII. Développons les cas les plus simples de cette équation généralisée, en conservant les mêmes significations $p = x + at$ & $q = x - at$, & des fonctions qui en sont formées P, P', P'', P''' &c. Q, Q', Q'', Q''' &c.

$$1^\circ \frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{m(m+1)}{xx} u$$

l'intégrale est: $u = x^m(P+Q)$

$$2^\circ \frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-1)(m+2)}{xx} u$$

l'intégrale: $u = x^m(P+Q) - \frac{1.2}{2} x^{m-1}(P'+Q')$

$$3^\circ \frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-2)(m+3)}{xx} u$$

dont l' intégrale est

$$u = x^m (P + Q) - \frac{2.3}{2} x^{m-1} (P' + Q')$$
$$+ \frac{1.2.3.4}{2.4} x^{m-2} (P'' + Q'').$$

4° $\frac{1}{aa} \left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x} \left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-3)(m+4)}{xx} u$

dont l' intégrale eſt

$$u = x^m (P + Q) - \frac{3.4}{2} x^{m-1} (P' + Q')$$
$$+ \frac{2.3.4.5}{2.4} x^{m-2} (P'' + Q'') - \frac{1.2.3.4.5.6}{2.4.6} x^{m-3} (P''' + Q''')$$

5° $\frac{1}{aa} \left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x} \left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-4)(m+5)}{xx} u$

dont l' intégrale

$$u = x^m (P + Q) - \frac{4.5}{2} x^{m-1} (P' + Q')$$
$$+ \frac{3.4.5.6}{2.4} x^{m-2} (P'' + Q'') - \frac{2.3.4.5.6.7}{2.4.6} x^{-3} (P''' + Q''')$$
$$+ \frac{2.3.4.5.6.7.8}{2.4.6.8} x^{m-4} (P^{\text{IV}} + Q^{\text{IV}}).$$

6° $\frac{1}{aa} \left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x} \left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-5)(m+6)}{xx} u$

dont l' intégrale

$$u = x^m (P + Q) - \frac{5.6}{2} x^{m-1} (P' + Q')$$
$$+ \frac{4.5.6.7}{2.4} x^{m-2} (P'' + Q'') - \frac{3.4.5.6.7.8}{2.4.6} x^{m-3} (P''' + Q''')$$
$$+ \frac{2.3.4.5.6.7.8.9}{2.4.6.8} x^{m-4} (P^{\text{IV}} + Q^{\text{IV}}) - \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{2.4.6.8.10} x^{m-5}$$
$$(P^{\text{V}} + Q^{\text{V}}).$$

XXXIX. Juſqu'ici je n' ai donné que les intégrales pour les cas de l' équation propoſée qui en ſont ſuſceptibles, ſans y avoir été conduit par une méthode certaine, &

directe, car toute l'analiſe dont je me ſuis ſervi eſt uniquement fondée ſur une heureuſe conjecture, qui regarde la forme de ces intégrales, & que le pur hazard m' a quaſi fournie. Il eſt donc d' autant plus important de découvrir une méthode directe, qui nous puiſſe mener au même but, qu'il n'y a aucun doute, qu'une telle méthode n'apporte de très-grands éclairciſſemens dans cette nouvelle carrière; or la conſidération de ces intégrales nous porte aiſément à penſer, qu'il doit y avoir une méthode, qui, moyennant une certaine transformation conduiſe des cas plus ſimples aux plus compliqués, de la même manière que dans le développement de la fameuſe équation de Riccati on a réuſſi à déduire les cas plus difficiles des plus ſimples, en y employant une certaine ſubſtitution. C' eſt donc par une ſemblable méthode, que je m'en vais enſeigner la réſolution de l' équation, que j'ai traitée juſqu'ici.

XL. L' équation propoſée étant donc:

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx}\right) - \frac{k}{xx}z$$

je la transforme par le moyen de cette ſubſtitution:

$$u = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{m}{x}z$$

en cherchant une équation, qui détermine la fonction u par t & x; or il eſt aiſé de prevoir, que l' équation transformée aura une telle forme

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{k'}{xx}u$$

ſemblable à la propoſée, avec cette ſeule différence que le nombre k' ſera différent du nombre k; ou bien ſans ſuppoſer une telle prévoyance, on peut regarder cette dernière équation comme la propoſée, & introduire z à la place de u par la ſubſtitution indiquée.

XLI. Suppoſant donc $u = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{m}{x}z$, on en tire

d' abord

$$\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^3z}{dt^2\,dx}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

Or la première équation donnant

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{aak}{xx}\,z$$

si nous différentions par la seule variabilité de x, nous aurons :

$$\left(\frac{d^3z}{dt^2\,dx}\right) = aa\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) - \frac{aak}{xx}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{2aak}{x^3}\,z$$

d' où nous tirons :

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{k}{xx}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{(m-2)k}{x^3}\,z.$$

Maintenant la même substitution donne :

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{m}{xx}\,z$$

& de là

$$\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{2m}{xx}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{2m}{x^3}\,z\,;$$

or $-\frac{k'}{xx}\,u = -\frac{k'}{xx}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{mk'}{x^3}\,z$

& partant ces deux dernières expressions ensemble doivent être égales à celle, qui vient d' être trouvée pour $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)$.

XLII. Puisque les termes $\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)$ & $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ se détruisent d'eux mêmes, il ne reste qu'à égaler séparément ceux qui sont affectés par $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ & par z, d'où nous tirons ces deux égalités $-k = -2m - k'$ & $-(m-2)k = 2m - mk'$, ou $m = \frac{k-k'}{2}$, & $2k = m(k - k' + 2)$ donc $(k - k')^2 - 2k - 2k' = 0$, & partant

$k' =$

$k' = k + 1 \pm \sqrt{(1 + 4k)}$, & $m = \frac{-1 \mp \sqrt{(1+4k)}}{2}$

Par conséquent si nous avons réussi à trouver l'intégrale de cette équation $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{k}{xx} z$, nous aurons aussi l'intégrale de celle-ci : $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{k'}{xx} u$ posant $k' = k + 1 \pm \sqrt{(1 + 4k)}$, puisque $u = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{k - k'}{2x} z$.

XLIII. Or aiant assigné ci-dessus, indépendamment de ces recherches, l'intégrale de notre équation pour le cas $k = 0$, cette nouvelle méthode nous fournit l'intégrale pour le cas $k' = 2$, & supposant ensuite $k = 2$, nous en tirons le troisiéme cas $k' = 3 + \sqrt{9} = 6$, & celui-ci, posant $k = 6$, nous conduit au quatriéme $k' = 7 + \sqrt{25} = 12$, lequel, en faisant $k = 12$, nous méne au cinquiéme $k' = 13 + \sqrt{49} = 20$, & ainsi de suite selon cette progression :

k	0	2	6	12	20	30	42	&c.
k'	2	6	12	20	30	42	56	&c.

d'où l'on voit que toutes les valeurs de k sont comprises dans cette formule générale $k = i(i + 1)$, & ce cas considéré en général nous conduit au suivant $k' = i(i + 1) + 1 + \sqrt{[1 + 4i(i + 1)]} = ii + 3i + 2 = (i + 1)(i + 2)$, d'où nous tirons tous les cas dont j'ai assigné ci-dessus les integrales.

XLIV. Donc si nous connoissons, pour le cas $k = n(n + 1)$ l'intégrale de cette équation $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{n(n+1)}{xx} z$, qui soit $z = V$, nous en tirerons, pour le cas $k' = (n + 1)(n + 2)$ l'intégrale de celle-ci :

$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{(n+1)(n+2)}{xx}\,z$, qui sera $z = \left(\frac{dV}{dx}\right) - \frac{(n+1)}{x}V$, ou bien, puisqu'on peut multiplier la valeur de z par une constante quelconque, cette dernière intégrale peut être exprimée ainsi: $z = \frac{1}{x}V - \frac{1}{n+1}\left(\frac{dV}{dx}\right)$. Par conséquent, puisque pour le cas, $k = 0$, l'intégrale est $z = \Gamma:(x + at) + \Delta:(x - at)$, en écrivant S pour cette double fonction, nous aurons pour l'équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{k}{xx}\,z$$

les intégrales suivantes:

si	
$k = 0$	$z = S$
$k = 1.2$	$z = \frac{1}{x}S - \left(\frac{dS}{dx}\right)$
$k = 2.3$	$z = \frac{3}{2x^2}S - \frac{3}{2x}\left(\frac{dS}{dx}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{ddS}{dx^2}\right)$
$k = 3.4$	$z = \frac{5}{2x^3}S - \frac{5}{2x^2}\left(\frac{dS}{dx}\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{ddS}{dx^2}\right) - \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3S}{dx^3}\right)$
&c.	&c.

XLV. Soit, pour le cas $k = n(n+1)$, l'intégrale:

$$z = \frac{A}{x^n}S - \frac{B}{x^{n-1}}\left(\frac{dS}{dx}\right) + \frac{C}{x^{n-2}}\left(\frac{ddS}{dx^2}\right) - \frac{D}{x^{n-3}}\left(\frac{d^3S}{dx^3}\right) + \frac{E}{x^{n-4}}\left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) - \&c.$$

& pour le cas $k = n(n+1)(n+2)$, à cause de $z = \left(\frac{dV}{dx}\right) - \frac{(n+1)}{x}V$, nous aurons:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = -\frac{nA}{x^{n+1}}S + \frac{A}{x^n}\left(\frac{dS}{dx}\right) - \frac{B}{x^{n-1}}\left(\frac{ddS}{dx^2}\right) + \frac{(n-1)B}{x^n} - \frac{(n-2)C}{x^{n-1}}$$

$$+ \frac{C}{x^{n-2}} \left(\frac{d^3 S}{dx^3}\right) - \&c.$$

$$+ \frac{(n-3)D}{x^{n-2}} \quad - \&c.$$

$$- \frac{(n+1)}{x} V = - \frac{(n+1)A}{x^{n+1}} S + \frac{(n+1)B}{x^n} \left(\frac{dS}{dx}\right)$$

$$- \frac{(n+1)C}{x^{n-1}} \left(\frac{ddS}{dx^2}\right) + \frac{(n+1)D}{x^{n-2}} \left(\frac{d^3 S}{dx^3}\right) - \&c.$$

& partant l'intégrale pour le cas $k = (n+1)(n+2)$ en changeant les ſignes ſera :

$$z = \frac{(2n+1)A}{x^{n+1}} S - \frac{(A+2nB)}{x^n} \left(\frac{dS}{dx}\right) + \frac{(B+[2n-1]C)}{x^{n-1}}$$

$$\left(\frac{ddS}{dx^2}\right) - \frac{(C+[2n-2]D)}{x^{n-2}} \left(\frac{d^3 S}{dx^3}\right) + \&c.$$

& il eſt évident que cette méthode nous fournit les mêmes intégrales que la précédente; quoique les valeurs pour chaque nombre n ne paroiſſent point ſi ouvertement, cependant une légère attention nous découvrira bientôt la même loi de progreſſion entre les coéficiens A, B, C, D &c. qui a été trouvée ci-deſſus.