RECHERCHES

Sur le mouvement des cordes inégalement grosses.

PAR M. EULER.

I. AYANT examiné dans le Mémoire précédent le mouvement des cordes également grosses, j'y ai donné l'équation générale pour le mouvement des cordes, dont la grosseur est variable selon une loi quelconque, où il faut toujours sous-entendre que les agitations de la corde sont quasi infiniment petites. Soit donc IK (*fig.* 1.) une telle corde quelconque tendue par la force $= T$, & prenant d'un point fixe I une portion indéfinie $IX = x$, posons l'épaisseur en $X = qq$, ensorte que $qqdx$ exprime la masse & le poids de l'élément $Xx = dx$, & partant $\int qqdx$ la masse & le poids de la portion $IX = x$, que j'avois nommé $= p$. Cela posé si à un tems quelconque de t *secondes* depuis une époque fixe le point de la corde X se trouve en Y, nommant l'intervalle $XY = y$, le mouvement de la corde sera exprimé par cette équation

$$\frac{2Tg}{qq}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right),$$

où g marque la hauteur, d'où la gravité fait tomber les corps dans une *seconde*.

II. Puisque la tension T est mesurée par un poids, en le prenant de la même matière dont est faite la corde, nous pouvons substituer sa masse, ou son volume à sa place, de sorte que T sera une grandeur de trois dimensions, & partant $\frac{2Tg}{qq}$ une de deux, que je nommerai $\frac{2Tg}{qq} = rr$, d'où l'on voit que r sera une certaine fonction de x don-

née par la grosseur & la tension de la corde. Tout revient donc à résoudre cette équation $rr\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, ou à trouver quelle fonction sera l'appliquée y des deux variables x & t. Il faut donc chercher l'intégrale, & même l'intégrale compléte de cette équation, qui exigeant une double intégration, l'intégrale ne sauroit être compléte à moins qu'elle ne renferme deux fonctions arbitraires.

III. Or sur ce sujet je dois d'abord cette facheuse remarque, que tous mes efforts ont été jusqu'ici inutiles pour trouver en général l'intégrale compléte de notre équation, quelque fonction que soit la quantité rr de x, cependant j'ai trouvé une infinité de cas, où l'intégration réussit, & partant où l'on peut déterminer le mouvement de la corde. Il faut donc absolument borner nos recherches à de certaines espèces de cordes, dont la grosseur $qq = \frac{2Tg}{rr}$ est exprimée par de certaines fonctions de x. Car il arrive à notre équation $rr\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ à peu près la même chose qu'à l'équation $dy + yy\,dx = X\,dx$ proposée autrefois par le Comte Riccati, qu'elle n'est intégrable qu'en de certains cas, & ces cas suivent dans l'une & l'autre presque la même loi. Il est donc bien important de chercher ces cas ou les loix de la grosseur variable, où l'on est en état de déterminer le mouvement de la corde.

IV. Comme dans le cas des cordes également grosses, où rr étoit une quantité constante $= cc$ l'intégrale compléte a été trouvée $y = \Gamma:(x + ct) + \Delta:(x - ct)$; On comprend qu'en général toutes les fois que l'intégration réussit, la forme de l'intégrale doit être semblable, & après quelques essais j'ai trouvé que dans ces cas l'intégrale peut être représentée sous cette forme : $y =$

$P\Gamma:(\int udx+t)+Q\Gamma':(\int udx+t)+R\Gamma''(\int udx+t)+$ &c. où P, Q, R &c. de même que u ſont de certaines fonctions de la ſeule variable x. Enſuite puiſque la quantité t ſe peut prendre auſſi bien négativement que poſitivement, pour compléter l'intégrale on y doit enſuite ajouter encore ces termes :

$P\Delta:(\int udx-t)+Q\Delta':(\int udx-t)+R\Delta''(\int udx-t)+$ &c. qui n'exigent donc point une recherche particuliére. De là il eſt clair que pour trouver des cas intégrables, on n'a qu'à pouſſer ſucceſſivement plus loin les termes de cette expreſſion générale, ce qui me fournit le ſujet des problemes ſuivans.

PROBLEME I.

V. Trouver les conditions de la fonction rr, pour que l'intégrale de notre équation $rr\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)=\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ ait cette forme $y=P\Gamma:(\int udx+t)$.

SOLUTION.

Puiſque P & u ſont des fonctions de la ſeule variable x, prenons de cette forme les différentiels du premier dégré $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dP}{dx}\Gamma:(\int udx+t)+Pu\Gamma':(\int udx+t)$ & $\left(\frac{dy}{dt}\right)=P\Gamma':(\int udx+t)$, & de là paſſons aux différentiels du ſecond dégré : $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)=\frac{ddP}{dx^2}\Gamma:(\int udx+t)+\frac{2udP+Pdu}{dx}\Gamma':(\int udx+t)+Puu\Gamma'':(\int udx+t)$ & $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=P\Gamma'':(\int udx+t)$. Maintenant faiſons

$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{1}{rr}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, enſorte que chaque eſpace de fonctions ſoit ſéparément réduite à zero, & nous aurons ces trois égalités

$$\frac{ddP}{dx^2} = 0, \quad \frac{2u\,dP + P\,du}{dx} = 0, \text{ \& } Puu = \frac{P}{rr},$$

dont la première donne $P = \alpha x + \beta$, la ſeconde $PPu = A$ ou $u = \frac{A}{(\alpha x + \beta)^2}$, & la troiſiéme $uu = \frac{1}{rr}$ ou $rr = \frac{(\alpha x + \beta)^4}{AA}$. Ainſi notre équation eſt intégrable dans le cas $rr = \frac{(\alpha x + \beta)^4}{AA}$ où la groſſeur de la corde devient $qq = \frac{2Tg \,.\, AA}{(\alpha x + \beta)^4}$, & alors on aura $P = \alpha x + \beta$ & $u = \frac{1}{r} = \frac{A}{(\alpha x + \beta)^4}$.

COROLL. 1.

VI. Poſant $\alpha = 0$ & $\beta = 1$ nous aurons le cas des cordes également groſſes ou $qq = 2Tg \,.\, AA$, donc poſant la groſſeur $= ff$, à cauſe de $AA = \frac{ff}{2Tg}$, il en réſulte $rr = \frac{2Tg}{ff}$, $P = 1$, & $u = \frac{f}{\sqrt{2Tg}}$; de ſorte que l'intégrale compléte de cette équation $\frac{2Tg}{ff}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ ſera $y = \Sigma\left(\frac{fx}{\sqrt{2Tg}} + t\right) + \Delta\left(\frac{fx}{\sqrt{2Tg}} - t\right)$.

COROLL. 2.

VII. Si α n'eſt pas zero il eſt permis de poſer $\beta = 0$ & $\alpha = 1$, puiſqu'on peut prendre le point I où l'on

veut indépendamment des points A & B, où l'on veut ensuite fixer la corde. Soit donc la grosseur de la corde en $X = \frac{c^6}{x^4} = qq$, & nous aurons $2Tg \cdot AA = c^6$, donc $A = \frac{c^3}{\sqrt{2Tg}}$, $P = x$, & $u = \frac{c^3}{xx\sqrt{2Tg}}$, par conséquent $\int u\,dx = \frac{-c^3}{x\sqrt{2Tg}}$.

COROLL. 3.

VIII. Donc si l'épaisseur de la corde en X est $qq = \frac{c^6}{x^4}$, la tension étant $= T$, le mouvement de la corde sera contenu dans cette équation:

$$y = x\Gamma : \left(\frac{c^3}{x\sqrt{2Tg}} - t\right) + x\Delta : \left(\frac{c^3}{x\sqrt{2Tg}} + t\right),$$

& on peut maintenant fixer la corde en tels deux points A & B que l'on veut.

SCHOLIE.

IX. Voilà donc déja une certaine espèce de cordes, dont on peut déterminer le mouvement; une telle corde est formée par la révolution d'une hyperbole Fab (*fig.* 2.) autour de son asymtote IB, la nature de cette hyperbole étant exprimée par cette équation $XQ = \frac{h^3}{gX^2} = \frac{h^3}{xx}$ car alors la section de la corde au point X devient $= \frac{\pi h^6}{x^4}$ qui étant égale à $qq = \frac{c^6}{x^4}$, on aura $c^6 = \pi h^6$ & $c^3 = h^3\sqrt{\pi}$. Donc si nous exprimons la tension T par le poids d'un cylindre fait de la même matière, dont le demi diamètre de la base est $= h$ & la hauteur $= k$,

on aura $T = \pi hhk$, & partant $\frac{c^3}{x\sqrt{2Tg}} = \frac{hh}{x\sqrt{2gk}}$. Puisque l'épaisseur de cette corde au point I devient infiniment grande, on comprend aisément, que la partie de la corde qu'on veut ébranler, AB, doit être assès éloignée du point I, afin que la corde ne soit pas trop grosse.

PROBLEME 2.

X. Trouver les conditions de la fonction rr, ou bien de la grosseur qq, pour que l'intégrale de notre équation $(\frac{ddy}{dx^2}) = \frac{qq}{2Tg}(\frac{ddy}{dt^2})$ ait cette forme:

$$y = P\Gamma:(\int u\,dx + t) + Q\Gamma':(\int u\,dx + t).$$

SOLUTION.

Puisque P, Q & u sont des fonctions de la seule variable x, en prenant les différentiels du second dégré comme dans le Problème précédent, & en omettant pour abréger la quantité $\int u\,dx + t$ après les signes de fonctions Γ, Γ', Γ'', &c. nous aurons:

$$(\frac{ddy}{dx^2}) = \frac{ddP}{dx^2}\Gamma: + \frac{2u\,dP + P\,du}{dx}\Gamma': + Puu\Gamma'':$$
$$+ \frac{ddQ}{dx^2}\Gamma': + \frac{2u\,dQ + Q\,du}{dx}\Gamma'': + Quu\Gamma''':$$

qu'il faut égaler à

$$\frac{qq}{2Tg}(\frac{ddy}{dt^2}) = \frac{qqP}{2Tg}\Gamma'': + \frac{qqQ}{2Tg}\Gamma''':$$

d'où nous tirons d'abord $\frac{qq}{2Tg} = uu$, & ensuite

$$\frac{2u\,dQ + Q\,du}{dx} = 0;\ \frac{2u\,dP + P\,du}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0,\ \&\ \frac{ddP}{dx^2} = 0$$

dont l'intégration fournit:

QQu

$QQu = A$; $PPu + \int \frac{PddQ}{dt} = B$ & $P = \alpha x + \beta$.

Or $\int \frac{PddQ}{dx} = \frac{PdQ}{dx} - \int \frac{dP}{dx} dQ$, & puisque $\frac{dP}{dx} = \alpha$, nous aurons $\int \frac{PddQ}{dx} = \frac{(\alpha x + \beta) dQ}{dx} - \alpha Q$, de sorte que notre seconde équation sera : $(\alpha x + \beta)^2 u + \frac{(\alpha x + \beta) dQ}{dx} - \alpha Q = B$, ou bien à cause de $u = \frac{A}{QQ}$ par la première :

$$\frac{A(\alpha x + \beta)^2 dx}{QQ} + (\alpha x + \beta) dQ - \alpha Q dx = B dx.$$

Posons maintenant $Q = (\alpha x + \beta) z$, pour avoir

$$\frac{A dx}{zz} + (\alpha x + \beta)^2 dz = B dx,$$

d' où nous tirons

$$\frac{dx}{(\alpha x + \beta)^2} = \frac{zz dz}{Bzz - A}, \text{ \& } C - \frac{1}{\alpha(\alpha x + \beta)} = \int \frac{zz dz}{Bzz - A}$$

& de là nous aurons z déterminé par x ; ensuite aiant $Q = (\alpha x + \beta) z$, $u = \frac{A}{QQ}$, $P = \alpha x + \beta$, & $qq = 2 T g u u$, on verra sous quelle loi de la grosseur notre équation admet l' intégration.

Coroll. 1.

XI. Afin que z puisse aisément se déterminer par x, limitons les cas ensorte que $B = 0$, & $\int \frac{zz dz}{Bzz - A} = \frac{-z^3}{3A}$. Or alors il convient de distinguer deux cas selon que $\alpha = 0$ ou non. Soit premièrement $\alpha = 0$ & $\beta = 1$, pour avoir $x = c - \frac{z^3}{3A}$, donc $z = \sqrt[3]{3A(c - x)}$

$= Q$, $u = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{9(c-x)^2}}$, $P = 1$, & $qq = \frac{2Tg\sqrt[3]{AA}}{\sqrt[3]{81(c-x)^4}}$.

COROLL. 2.

XII. Posons pour ce cas $e = 0$, & soit la grosseur $qq = cc\sqrt[3]{\frac{c^4}{x^4}}$; nous aurons donc $\sqrt[3]{AA} = \frac{cc\sqrt[3]{81c^4}}{2Tg}$, & $\sqrt[3]{A} = \frac{c\sqrt[3]{9cc}}{\sqrt{2Tg}}$; donc $u = \frac{c}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{cc}{xx}}$, & $\int u\,dx = \frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}}$, & $Q = -\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}}$, de sorte que pour ce cas l'équation intégrale sera

$$y = \Gamma:\left(\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} + t\right) - \frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}}\Gamma':\left(\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} + t\right)$$
$$+ \Delta:\left(\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} - t\right) - \frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}}\Delta':\left(\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} - t\right).$$

COROLL. 3.

XIII. Pour l'autre cas posons $\beta = 0$ & $\alpha = 1$ pour avoir $\frac{1}{x} + \frac{1}{c} = \frac{z^3}{3A} = \frac{c+x}{cx}$, donc $z = \sqrt[3]{\frac{3A(c+x)}{cx}}$, & ensuite $Q = \sqrt[3]{\frac{3A}{c}}\,xx\,(c+x)$, $u = \frac{\sqrt[3]{Acc}}{\sqrt[3]{9x^4(c+x)^2}}$; $P = x$, & $qq = \frac{2Tg\sqrt[3]{AAc^4}}{\sqrt[3]{81x^8(c+x)^4}}$. Soit donc la grosseur $qq = ff\sqrt[3]{\frac{f^8c^4}{x^8(c+x)^4}}$ pour avoir $\sqrt[3]{A} = \frac{f\sqrt[3]{9f^4}}{\sqrt{2Tg}}$, donc $Q = \frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{fxx(c+x)}{c}}$, & $u = \frac{ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{ccf}{x^4(c+x)^2}}$.

COROLL. 4.

XIV. Dans ce même cas posons $c = \infty$, de sorte que la grosseur de la corde soit $qq = ff\sqrt[3]{\frac{f^8}{x^8}}$, & puisque $P = x$, $Q = \frac{3ff\sqrt[3]{fxx}}{\sqrt{2Tg}}$, & $u = \frac{ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f}{x^4}}$, donc $\int u\,dx = \frac{-3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f}{x}}$, & l'équation intégrale sera

$$y = x\Gamma:\left(\frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f}{x}} - t\right) + \frac{3ff\sqrt[3]{fxx}}{\sqrt{2Tg}}\Gamma':\left(\frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f}{x}} - t\right)$$
$$+ x\Delta:\left(\frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f}{x}} + t\right) + \frac{3ff\sqrt[3]{fxx}}{\sqrt{2Tg}}\Delta':\left(\frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f}{x}} + t\right).$$

SCHOLIE.

XV. Prenant pour la grosseur de la corde cette forme $qq = \frac{f^{2+n}}{x^n}$ nous avons déja decouvert quatre cas, qui admettent la résolution, qui sont $n = 0$, $n = 4$, $n = \frac{4}{3}$, $n = \frac{8}{3}$, & c'est aussi dans ces mêmes cas que l'équation Riccatienne $dy + yy\,dx = \frac{A\,dx}{x^n}$ est intégrable : d'où l'on peut conclure, que les cas suivans $n = \frac{8}{5}$, $n = \frac{12}{5}$, $n = \frac{12}{7}$, $n = \frac{16}{7}$ &c. auront aussi la même propriété, que le mouvement de la corde pourra alors être déterminé. Mais le cas du Coroll. 3. n'est pas moins remarquable, où la grosseur de la corde est $qq = ff\sqrt[3]{\frac{f^8c^4}{x^8(c+x)^4}}$; pour la résolution duquel j'observe que $\int u\,dx = \frac{-3ff\sqrt[3]{f}}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{c+x}{cx}} = \frac{-3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f(c+x)}{cx}}$ d'où

l'on formera aisément l'équation intégrale complète. Mais notre résolution s'étend beaucoup plus loin; d'abord aiant trouvé le raport entre x & z par cette équation $\frac{dx}{(\alpha x+\beta)^2}$ $= \frac{zzdz}{Bzz-A}$, on aura $P = \alpha x + \beta$, $Q = (\alpha x + \beta) z$ & $u = \frac{A}{(\alpha x + \beta)^2 zz}$, d'où nous tirons

$$\int u\,dx = \int \frac{A\,dx}{(\alpha x + \beta)^2 zz} = \int \frac{A\,dz}{Bzz - A},$$

de sorte que toutes nos quantités peuvent être déterminées assés simplement par la nouvelle variable z, aiant $\frac{1}{\alpha x + \beta}$ $= -\alpha \int \frac{zzdz}{Bzz-A}$. Ainsi ce Probleme nous fournit une infinité d'espèces de cordes dont le mouvement peut être déterminé.

PROBLEME 3.

XVI. Trouver les conditions de la grosseur de la corde qq, pour que l'intégrale de notre équation $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ $= \frac{qq}{2Tg}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ ait cette forme:

$$y = P\Gamma:\left(\int udx + t\right) + Q\Gamma':\left(\int udx + t\right) + R\Gamma'':\left(\int udx + t\right).$$

SOLUTION.

Faisant le calcul comme dans le Probleme précédent, on trouve d'abord $qq = 2Tguu$, & ensuite il faut satisfaire à ces équations:

$$\frac{ddP}{dx^2} = 0, \quad 2udP + Pdu + \frac{ddQ}{dx} = 0,$$

$$2udQ + Qdu + \frac{ddR}{dx} = 0, \& \; 2udR + Rdu = 0,$$

dont la première & dernière donnent

$$P = \alpha x + \beta, \; \& \; RRu = A, \text{ ou } u = \frac{A}{RR},$$

la seconde donne

$$PPu + \frac{PdQ}{dx} - \alpha Q = B, \text{ ou bien } \frac{APP}{RR} + \frac{PdQ}{dx} - \alpha Q = B,$$

& la troisiéme

$$QQu + \frac{QdR}{dx} - \int \frac{dQ}{dx} dR = C.$$

Je m' arrêterai ici uniquement aux cas, où l' épaisseur qq, & partant aussi u devient égale à une certaine puissance de x, & où les lettres Q & R peuvent aussi être exprimées par des puissances de x. Ici il faut considérer deux cas, l' un ou $P = 1$, & l' autre ou $P = x$.

1° Soit donc $P = 1$ & $u = \alpha x^n$, posons $Q = \beta x^{n+1}$, & $R = \gamma x^{2n+2}$, pour obtenir le même nombre de dimensions dans nos égalités, & puisque la premiére est remplie d' elle même, les autres donneront

$$2udP + Pdu + \frac{ddQ}{dx} = 0,$$

$$n\alpha + (n+1)n\beta = 0,$$

$$2udQ + Qdu + \frac{ddR}{dx} = 0,$$

$$2(n+1)\alpha\beta + n\alpha\beta + (2n+2)(2n+1)\gamma = 0,$$

$$2udR + Rdu = 0,$$

$$4(n+1)\alpha\gamma + n\alpha\gamma = 0;$$

donc $5n + 4 = 0$, & $n = -\frac{4}{5}$: or de la premiè-

re nous tirons $\beta = -\frac{\alpha}{n+1} = -5\alpha$, & de la seconde $(3n+2)\alpha\beta + 2(n+1)(2n+1)\gamma = 0$ il résulte $\gamma = \frac{25}{3}\alpha\alpha$. Donc si $u = \alpha x^{-\frac{4}{5}}$ ou bien la grosseur de la corde $qq = 2Tg\alpha\alpha x^{-\frac{8}{5}}$ à cause de $\int u\,dx = 5\alpha x^{\frac{1}{5}}$, le mouvement de la corde sera exprimé par cette équation

$$y = \Gamma:(5\alpha x^{\frac{1}{5}} + t) - 5\alpha x^{\frac{1}{5}}\Gamma':(5\alpha x^{\frac{1}{5}} + t)$$

$$+ \frac{25}{3}\alpha\alpha x^{\frac{2}{5}}\Gamma'':(5\alpha x^{\frac{1}{5}} + t) + \Delta:(5\alpha x^{\frac{1}{5}} - t)$$

$$- 5\alpha x^{\frac{1}{5}}\Delta':(5\alpha x^{\frac{1}{5}} - t) + \frac{25}{3}\alpha\alpha x^{\frac{2}{5}}\Delta'':(5\alpha x^{\frac{1}{5}} - t),$$

où posant $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{8}{5}}$ il faut prendre $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}}f^{\frac{4}{5}}$.

2° Soit $P = x$ & $u = \alpha x^n$, posons $Q = \beta x^{n+2}$, & $R = \gamma x^{2n+3}$, & nos égalités donneront

$$2u\,dP + P\,du + \frac{ddQ}{dx} = 0,$$

$$2\alpha + n\alpha + (n+2)(n+1)\beta = 0$$

$$2u\,dQ + Q\,du + \frac{ddR}{dx} = 0,$$

$$2(n+2)\alpha\beta + n\alpha\beta + (2n+3)(2n+2)\gamma = 0,$$

$$2u\,dR + R\,du = 0,$$

$$2(2n+3)\alpha\gamma + n\alpha\gamma = 0;$$

d'où nous tirons

$$\beta = -\frac{(n+2)\alpha}{(n+1)(n+2)} = -\frac{\alpha}{n+1},\ \gamma = -\frac{(3n+4)\alpha\beta}{(2n+3)(2n+2)},$$

& $5n + \beta = 0$; donc puisque $n = -\frac{6}{5}$, nous aurons $\beta = 5\alpha$, & $\gamma = \frac{25}{3}\alpha\alpha$, & ensuite $u = \alpha x^{-\frac{4}{5}}$,

$\int u\,dx = -5\alpha x^{-\frac{1}{5}}$, & $qq = 2Tg\alpha\alpha x^{-\frac{12}{5}}$, de sorte que posant $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{12}{5}}$ nous aions $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}} f^{\frac{6}{5}}$, & pour le mouvement

$$y = x\Gamma:(5\alpha x^{-\frac{1}{5}} - t) + 5\alpha x^{\frac{4}{5}}\Gamma':(5\alpha x^{-\frac{1}{5}} - t)$$
$$+ \frac{25}{3}\alpha\alpha x^{\frac{3}{5}}\Gamma'':(5\alpha x^{-\frac{1}{5}} - t) + x\Delta:(5\alpha x^{-\frac{1}{5}} + t)$$
$$+ 5\alpha x^{\frac{4}{5}}\Delta':(5\alpha x^{-\frac{1}{5}} + t) + \frac{25}{3}\alpha\alpha x^{\frac{3}{5}}\Delta'':(5\alpha x^{-\frac{1}{5}} + t).$$

PROBLEME 4.

XVII. La grosseur de la corde qui répond à l'intervalle $IX = x$ étant exprimée ainsi $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{2-2n}$, trouver l'équation générale, qui en détermine le mouvement.

SOLUTION.

Prenons $u = \alpha x^{n-1}$, & il faut qu'il soit $\alpha = \frac{f^{2-n}}{\sqrt{2Tg}}$; d'où nous tirons $\int u\,dx = \frac{\alpha}{n} x^n$. Posons maintenant pour notre équation intégrale cherchée

$$y = P\Gamma:\left(\frac{\alpha}{n}x^n + t\right) + Q\Gamma':\left(\frac{\alpha}{n}x^n + t\right)$$
$$+ R\Gamma'':\left(\frac{\alpha}{n}x^n + t\right) + S\Gamma''':\left(\frac{\alpha}{n}x^n + t\right) + \&c.$$
$$+ P\Delta:\left(\frac{\alpha}{n}x^n - t\right) + Q\Delta'\left(\frac{\alpha}{n}x^n - t\right)$$
$$+ R\Delta'':\left(\frac{\alpha}{n}x^n - t\right) + S\Delta'':\left(\frac{\alpha}{n}x^n - t\right) + \&c.$$

& ſoit $P = x^m$, $Q = Bx^{m+n}$, $R = Cx^{m+2n}$, $S = Dx^{m+3n}$ &c. où il faut remarquer que l' expoſant m doit être ou $= 0$, ou $= 1$, afin que $\frac{ddP}{dx^2} = 0$. Cela poſé nos égalités donneront comme il ſuit:

$$2\,u\,dP + P\,du + \frac{ddQ}{dx} = 0$$

$$2m\alpha + (n-1)\,\alpha + (m+n)\,(m+n-1)\,B = 0$$

$$2\,u\,dQ + Q\,du + \frac{ddR}{dx} = 0$$

$$2\,(m+n)\,\alpha B + (n-1)\,\alpha B + (m+2n)(m+2n-1)\,C = 0$$

$$2\,u\,dR + R\,du + \frac{ddS}{dx} = 0$$

$$2\,(m+2n)\,\alpha C + (n-1)\,\alpha C + (m+3n)(m+3n-1)\,D = 0$$

$$2\,u\,dS + S\,du + \frac{ddT}{dx} = 0$$

$$2\,(m+3n)\,\alpha D + (n-1)\,\alpha D + (m+4n)(m+4n-1)\,E = 0,$$

d' où nous tirons donc ſi $m = 0$ & ſi $m = 1$

$B = -\frac{\alpha(2m+n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$;	$B = -\frac{\alpha(n-1)}{n(n-1)}$;	$B = -\frac{\alpha(n+1)}{n(n+1)}$;
$C = -\frac{\alpha B(2m+3n-1)}{(m+2n)(m+2n-1)}$;	$C = -\frac{\alpha B(3n-1)}{2n(2n-1)}$;	$C = -\frac{\alpha B(3n+1)}{2n(n+1)}$;
$D = -\frac{\alpha C(2m+5n-1)}{(m+3n)(m+3n-1)}$;	$D = -\frac{\alpha C(5n-1)}{3n(3n-1)}$;	$D = -\frac{\alpha C(5n+1)}{3n(3n+1)}$;
$E = -\frac{\alpha D(2m+7n-1)}{(m+4n)(m+4n-1)}$:	$E = -\frac{\alpha D(7n-1)}{4n(4n-1)}$;	$E = -\frac{\alpha D(7n+1)}{4n(4n+1)}$.

Conſidérons ſéparément les deux cas où $m = 0$ & $m = 1$.

1er CAS OU $m = 0$, ET $P = 1$.

Dans ce cas nous voions que notre expreſſion devient finie toutes les fois que n eſt une telle fraction $\frac{1}{\lambda}$ où λ eſt un nombre impair. Poſons donc $n = \frac{1}{\gamma}$ pour avoir

$B =$

$$B = -\frac{\alpha\lambda(\lambda-1)}{1(\lambda-1)} = -\lambda\alpha$$

$$C = -\frac{\lambda\alpha B(\lambda-3)}{2(\lambda-2)} = +\frac{\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-3)}{1\cdot2(\lambda-1)(\lambda-2)}\alpha^2$$

$$D = -\frac{\lambda\alpha C(\lambda-5)}{3(\lambda-3)} = -\frac{\lambda^3(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)}{1\cdot2\cdot3(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}\alpha^3$$

$$E = -\frac{\lambda\alpha D(\lambda-7)}{4(\lambda-4)} = +\frac{\lambda^4(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-7)}{1\cdot2\cdot3\cdot4(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)}\alpha^4$$

&c. &c.

Je n'ai pas ici effacé les facteurs qui se détruisent dans les numérateurs & dénominateurs, puisque toutes les fois qu'un numérateur évanoüit, non seulement le coéficient qui lui répond, mais aussi tous les suivans peuvent être négligés. Voici donc les cas qui en résultent.

1° Si $\lambda = 1$, $n = 1$; $qq = ff$, $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}}$, $\int udx = \alpha x$; $P = 1$, $Q = 0$, $R = 0$ &c.

2° Si $\lambda = 3$, $n = \frac{1}{3}$; $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{4}{3}}$, $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}} f^{\frac{2}{3}}$, $\int udx = 3\alpha x^{\frac{1}{3}}$; $P = 1$, $Q = -\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\alpha x^{\frac{1}{1}}$, $R = 0$, $S = 0$ &c.

3° Si $\lambda = 5$, $n = \frac{1}{5}$; $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{8}{5}}$, $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}}\cdot^{\frac{4}{5}}$, $\int udx = 5\alpha x^{\frac{1}{5}}$; $P = 1$, $Q = -\frac{5}{1}\cdot\frac{4}{4}\alpha x^{\frac{1}{5}}$, $R = +\frac{5\cdot5}{1\cdot2}\frac{4\cdot2}{4\cdot3}\alpha^2 x^{\frac{2}{5}}$, $S = 0$ &c.

4° Si $\lambda = 7$, $n = \frac{1}{7}$; $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{12}{7}}$, $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}}\cdot f^{\frac{6}{7}}$, $\int udx = 7\alpha x^{\frac{1}{7}}$; $P = 1$, $Q = -\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{6}\alpha x^{\frac{1}{7}}$, $R = +\frac{7\,7}{1\cdot2}\cdot\frac{6\cdot4}{6\cdot5}\alpha^2 x^{\frac{2}{7}}$, $S = -\frac{7\cdot7\cdot7}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{6\,4\cdot2}{6\,5\cdot4}\alpha^3 x^{\frac{3}{7}}$, $T = 0$ &c.

[illegible] $= 9$, $x = \frac{1}{9}$; $yy = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{16}{9}}$, $a = \frac{f}{[illegible]} f^{\frac{8}{9}}$;

[illegible] $P = 1$, $Q = -\frac{9}{1} \cdot \frac{8}{8} a x^{\frac{1}{9}}$, $R = [illegible] \cdot \frac{9 \cdot 9}{1 \cdot 2}$

[illegible] $S = -\frac{9 \cdot 9 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{8 \cdot 6 \cdot 4}{8 \cdot 8 \cdot 8} a^3 x^{\frac{3}{9}}$; $T = [illegible]$

[illegible] $a^4 x^{\frac{4}{9}}$, $V = 0$ &c.

Puisque donc en général $\lambda = 2\mu + 1$, & ici $\lambda = 3$; il faut que la grosseur de la corde $yy = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{4\mu}{2\mu+1}}$; on prendra $\beta = \frac{(2\mu+1)f}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} = \frac{(2\mu+1)ff}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{-\frac{1}{2\mu+1}}$

& $\int a dx = \frac{a}{\mu} x^{\mu} = \beta x^{\frac{1}{2\mu+1}}$. Or les coefficiens P, Q, R &c. seront déterminés ainsi:

$$P = 1$$

$$Q = -\frac{2\mu}{2\mu} \cdot \frac{\beta x^{\frac{1}{2\mu+1}}}{1}$$

$$R = +\frac{2\mu(2\mu-2)}{2\mu(2\mu-1)} \cdot \frac{\beta\beta x^{\frac{2}{2\mu+1}}}{1 \cdot 2}$$

$$S = -\frac{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)}{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)} \cdot \frac{\beta^3 x^{\frac{3}{2\mu+1}}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$T = +\frac{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)(2\mu-5)}{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)(2\mu-3)} \cdot \frac{\beta^4 x^{\frac{4}{2\mu+1}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \quad \&c.$$

2^d CAS OÙ $n = 1$ ET $P = x$.

Dans ce cas notre expression devient finie toutes les fois que n est une telle fraction $-\frac{1}{\lambda}$ prenant pour λ un nombre impair quelconque. Posons donc $n = -\frac{1}{\lambda}$, de sorte que la grosseur de la corde soit $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{2\lambda+2}{\lambda}}$. Soit ensuite $\alpha = \frac{ff}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{1}{\lambda}}$ ou $\lambda\alpha = \beta = \frac{\lambda ff}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{1}{\lambda}}$, & nous aurons $\int u\,dx = \frac{\alpha}{n} x^n = -\beta x^{-\frac{1}{\lambda}}$, d'où les autres coéficiens seront

$$B = \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1}\beta$$

$$C = \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)}{(\lambda-1)(\lambda-2)} \cdot \frac{\beta^2}{1\cdot 2}$$

$$D = \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)}{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)} \cdot \frac{\beta^3}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$E = \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-7)}{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)} \cdot \frac{\beta^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \text{ \&c.}$$

Soit maintenant $\lambda = 2\mu + 1$, ou bien la grosseur de la corde $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{4\mu+4}{2\mu+1}}$. Qu'on prenne $\beta = \frac{(2\mu+1)ff}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{1}{2\mu+1}}$, & nous aurons $\int u\,dx = \frac{\alpha}{n} x^n = -\beta x^{-\frac{1}{2\mu+1}}$.

Or les coéficiens P, Q, R, S &c. se trouveront déterminés de cette manière

$$P = x$$

$$Q = \frac{2\mu}{2\mu} \cdot \frac{\beta}{1} \cdot x^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}$$

$$R = \frac{2\mu(2\mu-2)}{2\mu(2\mu-1)} \cdot \frac{\beta^2}{1\cdot 2} \cdot x^{\frac{2\mu-1}{2\mu+1}}$$

$$S = \frac{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)}{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)} \cdot \frac{\beta^3}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot x^{\frac{2\mu-2}{2\mu+1}}$$

$$T = \frac{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)(2\mu-6)}{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)(2\mu-3)} \cdot \frac{\beta^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \cdot x^{\frac{2\mu-3}{2\mu+1}} \quad \&c.$$

COROLL. I.

XVIII. Voions quelles valeurs obtiendront les coéficiens B, C, D &c. dans l'un & l'autre de nos deux cas, & d'abord au premier ou $m = 0$ & $n = \frac{1}{\lambda}$, nous aurons

	$\lambda = 1$	$\lambda = 3$	$\lambda = 5$	$\lambda = 7$	$\lambda = 9$	$\lambda = 11$	$\lambda = 13$
$P =$	1	1	1	1	1	1	1
$B =$	0	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$
$C =$	0	0	$+\frac{1}{3}\beta^2$	$+\frac{2}{5}\beta^2$	$+\frac{3}{7}\beta^2$	$+\frac{4}{9}\beta^2$	$+\frac{5}{11}\beta^2$
$D =$	0	0	0	$-\frac{1}{15}\beta^3$	$-\frac{2}{21}\beta^3$	$-\frac{3}{27}\beta^3$	$-\frac{4}{33}\beta^3$
$E =$	0	0	0	0	$+\frac{1}{105}\beta^4$	$+\frac{1}{63}\beta^4$	$+\frac{2}{99}\beta^4$
$F =$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{945}\beta^5$	$-\frac{1}{495}\beta^5$
$G =$	0	0	0	0	0	0	$+\frac{1}{10395}\beta^6$

COROLL. 2.

XIX. Or pour l' autre cas où $m = 1$ & $n = -\frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{2\mu + 1}$ ces coéficiens auront les valeurs ſuivantes ;

	$\lambda = 1$	$\lambda = 3$	$\lambda = 5$	$\lambda = 7$	$\lambda = 9$	$\lambda = 11$	$\lambda = 13$
$P =$	x	x	x	x	x	x	x
$B =$	0	β	β	β	β	β	β
$C =$	0	0	$\frac{1}{3}\beta^2$	$\frac{2}{5}\beta^2$	$\frac{3}{7}\beta^2$	$\frac{4}{9}\beta^2$	$\frac{5}{11}\beta^2$
$D =$	0	0	0	$\frac{1}{3 \cdot 5}\beta^3$	$\frac{2}{3 \cdot 7}\beta^3$	$\frac{3}{3 \cdot 9}\beta^3$	$\frac{4}{3 \cdot 11}\beta^3$
$E =$	0	0	0	0	$\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7}\beta^4$	$\frac{3}{3 \cdot 7 \cdot 9}\beta^4$	$\frac{6}{3 \cdot 9 \cdot 11}\beta^4$
$F =$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}\beta^5$	$\frac{3}{3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 11}\beta^5$
$G =$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}\beta^6$

qui ſont les mêmes que les précédentes.

PROBLEME 5.

XX. La groſſeur de la corde étant exprimée par cette formule $qq = \frac{f^6}{x^4}$, où x eſt l'intervalle IX (*fig.* 1.), & qq la groſſeur au point X: déterminer le mouvement de la corde fixée dans les deux points A & B, de ſorte que $IA = a$, & $IB = b$, la tenſion étant $= T$.

SOLUTION.

Cette corde apartient au ſecond cas du Probleme précédent, en poſant $\mu = 0$, d' où l' on doit prendre

$\beta = \frac{f'}{\sqrt{2 l g}}$, & puisque $\int u\,dx = -\frac{\beta}{x}$, l'equation pour le mouvement sera

$$y = x\Gamma : \left(\frac{\beta}{x} - t\right) + x\Delta : \left(\frac{\beta}{x} + t\right) = XY$$

d'où l'on tire la vitesse du point Y dans le sens YX,

$$-\left(\frac{dy}{dt}\right) = x\Gamma' : \left(\frac{\beta}{x} - t\right) - x\Delta' : \left(\frac{\beta}{x} + t\right).$$

Pour représenter ces fonctions qu'on tire un autre axe ki (*fig.* 3.) sur lequel on prenne $kx = \frac{\beta}{x}$, $ka = \frac{\beta}{a}$, & $kb = \frac{\beta}{b}$, de sorte qu'ici les points a & b répondent aux deux termes A & B où la corde est fixée. Qu'on décrive sur l'espace ab les deux courbes $m\Delta n$ & $\mu\Gamma\nu$, de sorte que l'appliquée de celle-là $x\Delta$ représente la fonction $\Delta : \frac{\beta}{x}$, & l'appliquée de celle-ci $x\Gamma$ négativement la fonction $\Gamma : \frac{\beta}{x}$, pour l'abscisse $kx = \frac{\beta}{x}$. Ces deux courbes sont arbitraires, pourvû qu'elles aient certaines propriétés exigées par la condition, que les deux points de la corde A & B demeurent immobiles. Pour connoître ces propriétés considérons l'état initial de la corde, où le tems $t = 0$, & alors aiant

$$XY = y = x\,(\Delta - x\Gamma), \text{ \& } \left(\frac{dy}{dt}\right) = x\left(\Delta' : \frac{\beta}{x} + \Gamma' : \frac{\beta}{x}\right)$$

on voit que transportant le point X en A ou B, ou bien x en a & b, il faut qu'il soit $\alpha\mu = am$ &, $b\nu = bn$. Outre cela pour que les vitesses en A & B évanoüissent aussi, il est nécessaire que les tangentes de ces deux courbes tant en m & μ, qu'en n & ν soient paralelles entr'elles. En observant ces conditions la figure de ces deux courbes $m\Delta n$ & $\mu\Gamma\nu$ est arbitraire, & on les peut toujours

décrire ensorte, qu'il en résulte l'état initial, qui aura été imprimé à la corde au commencement. Ensuite pour connoître l'état de la corde après le tems écoulé $= t$, on n'a qu'à prendre du point x les intervalles xT & $xt = t$, pour avoir $kT = \frac{\beta}{x} + t$ & $kt = \frac{\beta}{x} - t$, & partant les appliquées $TU = \Delta : (\frac{\beta}{x} + t)$ & $tu = -\Gamma : (\frac{\beta}{x} - t)$, d'où l'on aura l'écart du point X de l'axe dans cet instant $XY = y = x\,(TU - tu) = IX\,(TU - tu)$ [*figg.* 1. & 3.]. Mais quand les points T & t tombent au delà des termes a & b, il faut continuer la courbe $n\Delta m$ au delà de a, & la courbe $\mu\Gamma\nu$ au delà de b, ensorte que prenant le point x ou en a, ou en b, il y ait toujours $TU = tu$, d'où l'on entend que la partie continuée mn' doit être semblable à la courbe $\mu\nu$, & la partie $\nu\mu'$ à la courbe nm. Donc prenant de part & d'autre les intervalles ab', $b'a''$ &c. ba', $a'b''$ &c. égaux à l'espace ab, les parties vers la droite nm, mn', $n'm'$ &c. seront alternativement semblables à nm & $\mu\nu$; & de la même manière les parties vers la gauche $\mu\nu$, $\nu\mu'$, $\mu'\nu'$ &c. alternativement semblables à $\mu\nu$ & nm; comme on le verra aisément par la figure.

Maintenant quelque grand que soit le tems écoulé t, on pourra assigner l'intervalle XY, auquel le point de la corde X sera alors éloigné de son état naturel, d'où l'on voit qu'après le tems $t = 2ab$, où les points T & t tombent en x' & x'' analogues à x, on aura $XY = x\,(x'\delta' = x''\gamma'') = x\,(x\Delta - x\Gamma)$ tout comme au commencement, de sorte que la corde est parvenue au même état, après avoir achevé dans ce tems deux vibrations, ou selon les circonstances peut être 4 ou 6, ou même plusieurs selon un nombre pair quelconque. Le tems

d'une vibration ſera donc $t = ab = \frac{\beta}{a} - \frac{\beta}{b} = \frac{\beta(b-a)}{ab}$ $= \frac{(b-a)f^3}{ab\sqrt{2Tg}}$, ou bien le nombre des vibrations rendues dans une ſeconde ſera $= \frac{ab\sqrt{2Tg}}{(b-a)f^3}$, ou ſelon les circonſtances 2, 3, 4 &c. fois plus grand.

COROLL. 1.

XXI. Une telle corde fera donc des vibrations réguliè-res, de quelque manière qu'elle aura été ébranlée au commencement, & partant les ſons qu'elle rend, ſeront auſſi juſtes que ceux d'une corde partout également épaiſſe.

COROLL. 2.

XXII. Puiſque l'épaiſſeur de la corde en X eſt $qq = \frac{f^6}{x^4}$, la maſſe ou bien le poids de la portion AX ſera $= \frac{1}{3} f^6 \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{x^3}\right)$, & partant le poids de la corde entière $AB = \frac{1}{3} f^6 \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right)$. Soit ce poids $= P$ pour avoir $f^3 = \frac{ab\sqrt{3Pab}}{\sqrt{(b^3 - a^3)}}$, & le nombre des vibrations rendues par ſeconde ſera $= \sqrt{\frac{2Tg(aa+ab+bb)}{3Pab(b-a)}}$.

COROLL. 3.

XXIII. Poſant le poids de la corde $AB = P$ pour avoir $\frac{1}{3} f^6 = \frac{Pa^3b^3}{b^3 - a^3}$, le poids de la partie AX, en nom-

mant

mant $IX = x$, ſera $= \frac{Pb^3}{b^3 - a^3}(1 - \frac{a^3}{x^3})$. Mais il eſt plus convenable, pour ſe former une juſte idée de cette corde, de remarquer que la groſſeur en X eſt réciproquement proportionnelle au quarré-quarré de l'intervalle $IX = x$.

SCOLIE.

XXIV. Pour connoitre les circonſtances, ſous leſquelles cette même corde fera deux ou trois &c. fois plus de vibrations qu'à l'ordinaire, étant ébranlé d'une manière quelconque; on comprend de ce que j'ai dit des cordes de la même épaiſſeur, que cela arrive, lorſque la courbe nm eſt ſemblable à la courbe nn', ou nm'' &c., & en même tems la courbe $\mu\nu$ ſemblable à $\mu\mu'$ ou $\mu\nu''$ &c., ou bien ſi l'on applique à chaque point x dans l'eſpace ab une appliquée $= x\Delta - x\Gamma$, il faut que cette nouvelle courbe ait deux ou pluſieurs parties ſemblables entr'elles, & alternativement ſituées à l'égard de l'axe ab (*fig.* 4.). Ainſi pour le cas de deux fois plus d'oſcillations, cette nouvelle courbe doit avoir la figure $aycy'b$, de ſorte que la partie cya ſoit égale & ſemblable à la partie $cy'b$, ou bien en prenant les intervalles $cx = cx'$, qu'il ſoit $x'y' = xy$. Donc puiſque $ka = \frac{\beta}{a}$, & $kb = \frac{\beta}{b}$, nous aurons $kc = \frac{\beta(a+b)}{2ab}$; de là nous formerons ainſi la figure de la corde même au commencement. Aiant $IA = a$ & $IB = b$ (*fig.* 5.), le nœud tombera au point C, enſorte que $IC = \frac{2ab}{a+b}$, c'eſt-à-dire que IC ſera la moyenne harmonique entre IA & IB; & prenant IX

$= \frac{\beta}{kx}$, l'appliquée XY sera $IX \times xy$. Pour rendre cela plus clair, posons $kc = c$, & $cx = cx' = u$, & puisque $IC = \frac{\beta}{c}$, prenons $IX = \frac{\beta}{c+u}$ & $IX' = \frac{\beta}{c-u}$, de sorte que $CX = \frac{\beta u}{c(c+u)}$, & $CX' = \frac{\beta u}{c(c-u)}$, & partant $CX : CX' = IX : IX'$. Maintenant, parceque $XY = IX \times xy$, & $X'Y' = IX' \times xy$, il est évident que $CX : XY = CX' : X'Y'$, & que la droite YY' passe par le nœud C. D'où nous tirons la construction suivante de la courbure de la corde, qui ne dépend plus de la fig. 4.

Aiant partagé la corde AB en C, de manière que IC soit la moyenne harmonique entre IA & IB, qu'on décrive sur AC une courbe quelconque AYC, & pour chaque point X qu'on prenne le point X', ensorte que les trois lignes IX, IC, IX' soient en proportion harmonique, alors la droite tirée de Y par le point C marquera sur l'appliquée $X'Y'$ le point Y' dans la courbe $CY'B$. Si l'on vouloit que la corde rendît trois fois plus de vibrations, il faudroit entre A & B établir deux nœuds C & D, de sorte que les distances IA, IC, ID, IB fissent une proportion harmonique, & aiant pris à volonté la figure d'une partie AYC on formeroit de la même manière la figure au delà du nœud C, & ensuite aussi au delà du nœud D. Cette même construction aura aussi lieu, lorsqu'on voudra établir un plus grand nombre de nœuds.

SCOLIE.

XXV. Voilà donc une espèce de cordes fort remarquable, puisqu'elle a cela de commun avec les cordes uniformément épaisses, que de quelque manière qu'on les ébran-

le, elles produisent toujours des vibrations régulières; or nous verrons bientôt que cette propriété ne sauroit avoir lieu dans aucune autre espèce. Le fondement de cette propriété est, qu'en quelque état que la corde soit mise au commencement, elle y doit nécessairement revenir après un certain tems; or dans les autres espèces de cordes ce rétablissement dans le premier état n'arrive peut-être jamais, & quand il arrive, ce n'est que sous de certaines circonstances, sans lesquelles le son ne sauroit être régulier ou formé par des vibrations isochrones. D'abord les espèces suivantes, que nous sommes en état de développer mettent cette différence dans tout son jour, & de là on pourra juger avec d'autant plus de raison, des autres espèces de cordes, qu'il ne nous est pas encore permis de soumettre au calcul.

PROBLEME 6.

XXVI. La grosseur de la corde étant exprimée par cette formule $qq\,ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{4}{3}}$, où x est l'intervalle IX (*fig.* 1.) & qq la grosseur au point X: déterminer le mouvement de la corde fixée dans les deux points A & B, de sorte que $IA = a$ & $IB = b$, la tension étant $= T$.

SOLUTION.

Cette corde apartient au premier cas du Probl. 4, en prenant $\mu = 1$, d'où l'on a $\beta = \frac{3\,ff}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{-\frac{1}{3}}$, & $\int u dx = \beta x^{\frac{1}{3}}$ & ensuite $P = 1$, & $Q = -\beta x^{\frac{1}{3}}$; tous les mouvemens de cette corde seront donc exprimés par cette équation;

$$y = \Gamma : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) + \Delta : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t)$$

$$- \beta x^{\frac{1}{3}} \Gamma' : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) - \beta x^{\frac{1}{3}} \Delta' : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t)$$

où y exprime l'intervalle XY, dont le point X est éloigné de l'axe après le tems $= t$ *secondes*, d'où la vitesse de ce point Y dans le sens YX sera

$$-\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\Gamma' : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) + \Delta' : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t)$$

$$+ \beta x^{\frac{1}{3}} \Gamma'' : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) - \beta x^{\frac{1}{3}} \Delta'' : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t).$$

Qu'on tire maintenant un nouvel axe ik (*fig.* 6.), sur lequel on prenne $ia = \beta a^{\frac{1}{3}}$, $ib = \beta b^{\frac{1}{3}}$ & $ix = \beta x^{\frac{1}{3}}$; or posons $ix = \beta x^{\frac{1}{3}} = v$, & sur l'espace ab tirons les deux courbes $m\Gamma n$ & $\mu \Delta \nu$ pour représenter nos deux fonctions arbitraires, de manière qu'il soit $x\Gamma = \Gamma' : v$ & $x\Delta = \Delta' : v$, d'où nous aurons $\Gamma : v = am\,x\Gamma$, & $\Delta : v = a\mu\,x\Delta$, en remarquant que puisque nous représentons ici la fonction Δ sous l'axe, il faut changer le signe des fonctions Δ, Δ', Δ'' dans nos formules précédentes. Donc pour l'état initial de la corde où $t = 0$, nous aurons

$$y = am\,x\Gamma - a\mu\,x\Delta - v\,.\,x\Delta,$$

$$-\left(\frac{dy}{dt}\right) = -x\Gamma - x\Delta + \frac{v\,d.x\Gamma}{dv} + \frac{v\,d.x\Delta}{dv}.$$

Or puisque aux points A & B, l'une & l'autre de ces deux valeurs doit évanouir, nous aurons ces conditions à remplir; 1° $am = a\mu$; 2° $am + a\mu = ia \times \frac{d.am + d.a\mu}{dv}$; 3° $ambn - a\mu b\nu = ib\,(bn - b\nu)$; 4° $bn + b\nu = ib \times \frac{d.bn + d.b\nu}{dv}$, & pourvû que ces quatre propriétés aient lieu dans les deux courbes mn & $\mu\nu$, leur dé-

ſcription eſt arbitraire ; & on les peut toujours tracer en ſorte qu'elles repréſentent un état initial quelconque donné de la corde.

Or maintenant il faut continuer la courbe $\nu\mu$ à gauche & la mn à droite ; la première opération eſt déterminée par cette condition, que le point A ou a demeure immobile, & l'autre par l'immobilité du point b.

Pour la continuation de la courbe $\nu\mu$ prenons $ax' = ax = t$, & ſoit $x'\delta'$ l'appliquée cherchée au point x' ; donc puiſque pour ce cas ;

$$\Gamma : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) = amx\Gamma \quad , \quad \beta x^{\frac{1}{3}}\Gamma' : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) = ia.x\Gamma$$

$$\Delta : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t) = -a\mu x'\delta' \quad , \quad \beta x^{\frac{1}{3}}\Delta' : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t) = ia.x'\delta'$$

il faut qu'il ſoit

$$o = amx\Gamma + a\mu x'\delta' - ia.x\Gamma + ia.x'\delta'.$$

Pour la continuation de la courbe mn prenons $bx'' = bx = t$, & ſoit $x''\gamma''$ l'appliquée cherchée au point x'' on aura donc

$$\Gamma : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) = amx''\gamma'' \quad , \quad \beta x^{\frac{1}{3}}\Gamma' : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) = ib.x''\gamma''$$

$$\Delta : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t) = a\mu x\Delta \quad , \quad \beta x^{\frac{1}{3}}\Delta' : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t) = ib.x\Delta$$

& partant il faut qu'il ſoit

$$o = amx''\gamma'' - a\mu x\Delta - ib.x''\gamma'' + ib.x\Delta$$

Or $amx''\gamma'' = ambn + bnx''\gamma'' = a\mu b\nu + ib.bn - ib.b\nu + bnx''\gamma''$, d'où notre équation ſe change en cette forme :

$$o = bnx''\gamma'' + b\nu x\Delta + ib\,(bn - x''\gamma'') - ib\,(\beta\nu - x\Delta).$$

Aiant continué ainſi nos deux courbes, pour trouver l'eſpace $XY = y$ (*fig.* 1.) après un tems quelconque de t *ſecondes*, qu'on prenne $xT = tu = t$, & on aura

$$y = amTU - a\mu tu - \beta x^{\frac{1}{3}}(TU - tu);$$

c' est donc de cette formule qu'il faut déterminer l'état de la corde à un tems quelconque t depuis son état initial.

COROLL. 1.

XXVII. Par cette construction on voit qu'on ne sauroit assigner aucun tems, auquel la corde revienne nécessairement à son état initial, & partant les ébranlemens dont une telle corde est susceptible, ne sauroient être réduits à un mouvement régulier de vibrations isochrones, comme dans le cas précédent.

COROLL. 2.

XXVIII. Aussi la continuation des deux courbes mn & $\mu\nu$ demande une construction transcendente. Car posant $ax = ax' = t$, $x\Gamma = p$ & $x'\delta' = z$, la continuation de la courbe $\mu\nu$ doit être tirée de cette équation : $\int p\,dt + \int z\,dt - ia\,(p - z) = 0$, ou posant $ia = \alpha$ de celle-ci $\alpha\,dz + z\,dt = \alpha\,dp - p\,dt$, qui donne

$$\alpha e^{\frac{t}{\alpha}} z = \int e^{\frac{t}{\alpha}} (\alpha\,dp - p\,dt) = \alpha e^{\frac{t}{\alpha}} p - 2\int e^{\frac{t}{\alpha}} p\,dt,$$

ou $z = p - \frac{2}{\alpha} e^{-\frac{t}{\alpha}} \int e^{\frac{t}{\alpha}} p\,dt.$

COROLL. 3.

XXIX. De la même manière pour la continuation de la courbe mn posant $bx'' = bx = t$, $x\Delta = q$, $x''\gamma'' = z$ & $ib = \beta$, on aura $2m'x''\gamma'' = ambn + \int z\,dt$, $a\mu x\Delta = a\mu b\nu - \int q\,dt$, donc $ambn - a\mu b\nu + \int z\,dt + \int q\,dt - \beta z + \beta q = 0$, ou $\beta\,dz - z\,dt = \beta\,dq + q\,dt$, &

partant $\beta e^{-\frac{t}{\beta}} z = \int e^{-\frac{t}{\beta}} (\beta dq + q dt)$, ou $z = q + \frac{2}{\beta} e^{\frac{t}{\beta}} \int e^{-\frac{t}{\beta}} q dt$.

SCOLIE.

XXX. Or il n'eſt pas abſolument impoſſible qu'une telle corde produiſe des vibrations régulières ou iſochrones; cela dépend de l'état initial, auquel la corde a été réduite, qui peut bien être tel, que les vibrations deviennent régulières. Pour trouver de tels cas, ſoit pour abreger $\beta x^{\frac{1}{3}} = v$, & poſons

$$\Gamma : (v + t) = C \text{ ſin. } (nv + nt + \zeta), \text{ \&}$$
$$\Delta : (v - t) = C \text{ ſin. } (nv + \zeta - nt)$$

d'où nous aurons

$$\Gamma' : (v + t) = nC \text{ coſ. } (nv + \zeta + nt), \text{ \&}$$
$$\Delta' : (v - t) = nC \text{ coſ. } (nv + \zeta - nt),$$

& partant

$y = 2\, C \text{ ſin. } (nv + \zeta) \text{ coſ. } nt - 2nCv \text{ coſ. } (nv + \zeta) \text{ coſ. } nt$.

Maintenant, cette quantité devant évanoüir, ſoit qu'on poſe $x = a$ ou $x = b$, ſoit pour abreger $\beta a^{\frac{1}{3}} = h$ & $\beta b^{\frac{1}{3}} = k$, & il faudra remplir ces deux conditions;

1° ſin. $(nh + \zeta) - nh$ coſ. $(nh + \zeta) = 0$, &

2° ſin. $(nk + \zeta) - nk$ coſ. $(nk + \zeta) = 0$,

d'où nous tirons

tang. $(nh + \zeta) = nh$, & tang. $(nk + \zeta) = nk$.

Il s'agit donc de déterminer de ces deux égalités le nombre n avec l'angle ζ. Or éliminant l'angle ζ, nous aurons

$$\text{tang. } n\,(k - h) = \frac{n\,(k - h)}{1 + nnhk},$$

où il faut remarquer que $h = \frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{1}{3}}$, & $k = \frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\left(\frac{b}{f}\right)^{\frac{1}{3}}$. Tout revient donc à déduire de l'équation trouvée le nombre n, ce qui se peut toujours exécuter d'une infinité de manières, attendu que cette équation renferme une infinité de racines, dont aiant trouvé une quelconque pour n, on voit qu'après le tems $t = \frac{2\pi}{n}$, la corde revient au même état, & le tems d'une vibration est par conséquent $= \frac{\pi}{n}$, de sorte que le nombre des vibrations rendues par seconde sera $= \frac{n}{\pi}$. Or pour trouver un tel nombre n on ne sauroit opérer qu'en tatonnant, en prenant successivement plusieurs valeurs pour en conclure enfin la véritable. Pour cet effet aiant pris pour n un nombre quelconque, qu'on cherche les angles φ & ψ, de sorte que $nh =$ tang. φ, & $nk =$ tang. ψ, & alors il faut qu'il provienne $n\,(k - h) = \psi - \varphi + i\pi$, où l'on peut prendre pour i ou zero ou un nombre entier quelconque, & quand cela arrivera on aura l'angle $\zeta = \varphi - nh$ ou $\zeta = \psi + i\pi - nk$.

SCOLIE 2.

XXXI. Cette question devient plus aisée à résoudre, si l'on regarde les points A & B où l'on doit fixer la corde, comme inconnus, & le nombre n comme connu, car alors, posant $nh = p$, & $nk = q$, pour avoir tang. $(p+\zeta) = p$ & tang. $(q + \zeta) = q$, ou tang. $(q - p) = \frac{q - p}{1 + pq}$, soit q

$-p$

$-p = r$ & $1 + pq = s$, & on aura $s = \frac{r}{\text{tang. } r}$. Qu'on prenne pour r un angle quelconque, & qu'on en cherche la valeur de s, de là on trouvera $q + p = \sqrt{(rr + 4s - 4)}$, & ensuite on aura $h = \frac{\sqrt{(rr + 4s - 4)} - r}{2n}$ & $k = \frac{\sqrt{(rr + 4s - 4)} + r}{2n}$, d'où l'on voit que s doit être plus grand que 1, & partant l'angle r plus grand que 180°, afin qu'on obtienne $r >$ tang. r. Maintenant pour connoître tous les mouvemens réguliers dont la même corde est susceptible, on n'a qu'à prendre l'angle r en sorte, qu'il en résulte le même raport entre h & k; soit pour cet effet $k = mh$, & on aura $(m + 1)\, r = (m - 1) \sqrt{(rr + 4s - 4)}$ ou $mrr = (m - 1)^2 (s - 1)$, donc $s = 1 + \frac{mrr}{(m-1)^2} = \frac{r}{\text{tang. } r}$, d'où l'on tire $h = \frac{r}{n(m-1)}$, & $k = \frac{mr}{r(m-1)}$, & pour chaque nombre m on peut trouver une infinité de valeurs pour l'angle r.

EXEMPLE.

XXXII. Prenons $m = 2$, de sorte que $k = 2h$ & $b = 8a$, & l'équation à résoudre sera $1 + rr = \frac{r}{\text{tang. } r}$, d'où l'on tire $h = \frac{r}{n}$ & $k = \frac{2r}{n}$. Or il faut remarquer que pour réduire un angle exprimè en secondes à des parties du rayon, il faut ajouter 4, 6855749 au logarithme du nombre des *secondes*, mais puisque nous savons que $r > \pi$, & que posant $r = \pi + \varphi$, l'angle φ doit être plus grand que 10°, nous aurons à très-peu près tang. $r =$ tang. $\varphi = \varphi$

$+ \frac{1}{3} \varphi^3$, donc $\varphi (1 + 2 r r) = \frac{r}{1 + \frac{1}{3} \varphi^2} = r$ $(1 - \frac{1}{3} \varphi\varphi)$ ou bien

$$6 \pi \pi \varphi + 13 \pi \varphi \varphi + 7 \varphi^3 = 3 \pi,$$

d'où l'on tire à peu près $\varphi = \frac{7 + 18 \pi \pi + 12 \pi^4}{\pi (21 + 52 \pi \pi + 24 \pi^4)}$, ou $\varphi = \frac{1}{2\pi} - \frac{13}{24 \pi^3} + \frac{37}{36 \pi}$ &c. Pour les autres valeurs on n'a qu'à poser successivement 2π, 3π, 4π &c. au lieu de π. Or pour ces derniers cas on a assès exactement $\varphi = \frac{1}{2i\pi}$, donc $r = i\pi + \frac{1}{2i\pi}$, & de là le nombre $n = \frac{r}{h}$ & le nombre des vibrations rendues par seconde $= \frac{i}{h} + \frac{1}{2 i \pi \pi h}$.

Faisons donc le calcul pour trouver les valeurs du nombre r.

	si $i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$\frac{1}{2i\pi} =$	0, 159153	0, 079576	0, 053051	0, 039788
$\frac{13}{24 i^3 \pi^3} =$	0, 017469	0, 002185	0, 000647	0, 000273
$\frac{37}{36 i^5 \pi^5} =$	0, 003359	0, 000105	0, 000014	0, 000003
$\varphi =$	0, 145043	0, 077496	0, 052418	0, 039518
$\pi =$	3, 141593	6, 283185	9, 424778	12, 566371
$r =$	3, 286636	6, 360681	9, 477196	12, 605889
$\zeta =$	65° 4′	76° 38′	80° 59′	83° 12′

d'où l'on voit que cette même corde peut rendre plusieurs sons réguliers qui sont entr'eux, comme ces valeurs

de r, dont les plus bas s' écartent ſenſiblement de la ſuite des nombres naturels, mais les aigus s' y conforment de plus en plus. Aiant ainſi trouvé r, puiſque $nh = p = r$, on aura auſſi l' angle ζ = A: tang. $r - r$ = A: tang. $2r - 2r$ dont j' ai auſſi marqué les valeurs ci-deſſus.

CONCLUSION.

XXX. De la même manière on déterminera les ébranlemens des autres eſpèces de cordes, que nous ſommes en état de ſoumettre au calcul, & eu général on verra, que tous ces ébranlemens ne ſont pas réductibles à des vibrations régulières. Mais on peut toujours aſſigner des conditions, ſous leſquelles ces cordes peuvent recevoir un mouvement régulier, & cela même d'une infinité de manière différentes. Or il eſt bon de remarquer ici, que tous les ſons, dont une même corde de ces eſpèces eſt ſuſceptible, ſont incommenſurables entr' eux; pendant que ceux des deux premières eſpèces ſuivent entr' eux la progreſſion des nombres naturels. C' eſt donc à cauſe de cette incommenſurabilité que les ſons des autres eſpèces ſont ſi irréguliers & contraires à l' harmonie, puiſqu'on les peut regarder comme un mélange de pluſieurs ſons ſimples, que la même corde pourroit rendre ſous de certaines conditions.