ÉCLAIRCISSEMENS
SUR LE MOUVEMENT DES CORDES VIBRANTES
PAR M. EULER.

I. TOus ceux qui ont entrepris de déterminer le mouvement des cordes vibrantes ont borné leurs recherches à ces trois conditions:

1° Ils ont considéré la corde comme fixée en ses deux extrémités A & B (*fig.* 1.), & tendue par une force quelconque, en sorte que dans son état naturel sa figure soit représentée par la ligne droite AB: ce n'est que dans cet état que la corde peut demeurer en repos ou en équilibre.

2° Ils n'ont considéré que les mouvemens extrêmement petits d'une telle corde, en sorte que si la ligne AYB représente la figure que la corde prend pendant son mouvement à un instant quelconque, on puisse toujours regarder les appliquées XY de cette ligne comme infiniment petites.

3° Ils ont supposé que le mouvement de chaque élément de la corde Y se fasse toujours suivant la direction de l'appliquée YX ou qu'il ne s'en écarte qu'infiniment peu. On pourroit bien traiter plus généralement cette question, mais alors la Théorie conduit à un calcul si embarrassé qu'on n'en sauroit rien conclure.

II. La dernière condition se réduit à celle-ci, que l'inclinaison de chaque élément de la corde Yy à l'axe AB soit infiniment petite, ou bien que la tangente tirée à chaque point Y fasse avec l'axe AB un angle infiniment petit. Ce n'est que dans ce cas qu'on peut regarder chaque élément de la courbe Yy comme égal à l'élément répondant de l'axe Xx: or cette condition est absolument nécessaire, pour que le mouvement de chaque point Y ſe faſſe dans la direction de l'appliquée YX. Delà on comprend auſſi réciproquement que toutes les fois, que cette condition convient à la figure AYB, le mouvement de chaque point Y ne ſauroit s'écarter de la direction de l'appliquée YX.

III. Donc quand on demande le mouvement de la corde après qu'elle aura reçu une impulſion quelconque, il faut abſolument que la figure qui lui a été imprimée d'abord ſoit telle, que non ſeulement toutes les appliquées XY ſoient quaſi infiniment petites, mais que l'inclinaiſon de tous les élémens de la courbe AYB ſoit auſſi infiniment petite. On pourroit encore ajouter cette condition, qu'on ait imprimé en même tems à chaque élément de la corde un certain mouvement ſelon la direction de l'appliquée, & ce mouvement initial doit auſſi être tel, qu'il n'en réſulte aucun ſaut dans la ſuite; ou bien que la figure de la corde demeure toujours conforme aux loix preſcrites. Cela remarqué, examinons plus ſoigneuſement tant la queſtion en elle même, que la ſolution que la Théorie fournit.

QUESTION.

IV. *Aiant réduit la corde tendue à une figure quelconque, ſi au moment qu'on la relache, on imprime encore à chaque élément de la corde un mouvement quelconque: on demande, pour chaque moment du tems ſuivant, tant la figure, que le mouvement que la corde aura alors, ſuppoſant que tant la figure initiale que le mouvement qui lui aura été imprimé ſoient d'acord avec les loix preſcrites.*

EXPLICATIONS.

V. Soit *A B* (*fig.* 2.) la corde fixée dans ſes deux extrémités *A* & *B*, & tendue par une force quelconque, à laquelle on ait imprimé au commencement la figure *A S B*, & d' abord cette courbe doit être telle, que 1° toutes ſes appliquées ſoient quaſi infinimens petites, & 2° que toutes ſe tangentes ne s' écartent qu'infiniment peu de l' axe *A B*. Ces deux conditions ſont ſi naturellement liées avec la tenſion, qu'il ſeroit preſque impoſſible de réduire la corde à une telle figure, où ces deux conditions n'euſſent pas lieu. De là il eſt clair, que la figure initiale peut être variée à l' infini, & qu'elle dépend entiérement de notre volonté. Il eſt donc poſſible de donner à la corde une telle figure, qui ne ſauroit être exprimée par aucune équation analitique, comme ſi on la tiroit par un mouvement libre de la main, ſans qu'aucune loi de continuité y ait lieu.

VI. Il n'y a certainement aucun doute, qu'on ne puiſſe imprimer à la corde une telle figure, & où pourtant les deux conditions preſcrites aient lieu. Pour s' en aſſurer mieux, on n'a qu'à tirer de *A* à *B* une ligne courbe quelconque *A M B* en obſervant cette ſeule condition, qu'il n'y ait nulle part une tangente perpendiculaire à l'axe: alors en diminuant toutes les appliquées *X M* quaſi à l' infini ſelon un même rapport, de ſorte que $XS = \alpha\, XM$, prenant α pour une fraction extrémement petite, non ſeulement toutes les appliquées *X S* deviendront infiniment petites, mais auſſi les tangentes dans tous les points *S* ſeront infiniment peu inclinées à l'axe *A B*, tout comme les deux conditions preſcrites l'exigent.

VII. On ne ſauroit douter non plus qu'après avoir imprimé à la corde une telle figure diſcontinue ou irreductible à aucune équation analitique, la corde étant ſubitement relachée, ſoit qu'on lui imprime encore quelque mouvement ou non, n' en reçoive un certain mouvement de vibration. Mais on trouve ici bien des raisons de douter si dans ces cas la Théorie est suffisante de nous conduire à une solution, puisqu'il semble que l'analise, comme elle a été traitée jusqu'ici, ne sauroit être appliquée qu'à des courbes, dont la nature peut être renfermée dans une équation analitique. Mais il n' est pas encore tems de décider cette question: si l'analise est incapable de nous fournir une solution pour ces cas, nous ne nous en appercevrons que trop tôt: & partant il n'est pas nécessaire de restraindre d'abord la question aux seules courbes continues, dont la nature est exprimée par quelque équation.

VIII. Mais si la Théorie nous conduit à une solution si générale, qu'elle s'étend aussi bien à toutes les figures discontinues que continues il faudra avouer, que cette recherche nous ouvre une nouvelle carrière dans l' analise, en nous mettant en état d' appliquer le calcul à des courbes qui ne sont assujetties à aucune loi de continuité, & si cela a paru impossible jusqu'ici, la découverte sera d'autant plus importante. Or en effet j' ai remarqué à cette occasion, que la partie de l'analise des infinis, à laquelle cette question appartient, renferme essentiellement ce caractère, qu'elle reçoit des fonctions absolumens arbitraires, pendant que de telles fonctions sont entiérement bannies de l'analise ordinaire qu'on a cultivée jusqu'ici, & qui roule principalement sur des fonctions d' une seule variable. Mais l' analise dont nous avons besoin ici, s'occupe des fonctions de deux ou plusieurs variables: où cela arrive de bien remarquable, que chaque intégration introduit dans le calcul une fonction absolument arbitraire au lieu d' une simple quantité constante.

IX. Après avoir réduit la corde à une figure quelconque ASB, on suppose communement qu'on la relache subitement, sans lui imprimer aucun mouvement, de sorte que dans ce premier inſtant tous les élémens de la corde ſont en repos, ou leur viteſſe nulle. Mais il eſt poſſible que dans le moment même, où l' on relache la corde, on imprime à chacun de ſes élémens un certain mouvement, dont la direction doit toujours être perpendiculaire à l'axe. Pour tenir compte de cette circonſtance on peut décrire ſur l' axe *A B* l' échelle des viteſſes initiales *A V B* dont chaque appliquée *X V* marque la viteſſe, qui aura été imprimée au point de la corde *S* ſelon la direction *S X*. Puiſque les extrémités de la corde *A* & *B* demeurent toujours immobiles, il eſt évident que cette courbe *A V B* doit paſſer par les deux termes *A* & *B*, de même que la figure initiale *A S B*.

SOLUTION DINAMIQUE DE LA QUESTION.

X. Poſons maintenant la longueur de la corde $AB = a$ (*fig.* 2.) ſon poids $= P$, & la force dont elle eſt tendue $= T$; or prenant une partie quelconque $AX = x$, ſoit le poids de cette partie $= p$, qui marque une fonction quelconque de x, afin que la ſolution s' étende à des cordes dont l' épaiſſeur eſt variable. Enſuite pour l' état forcé auquel la corde a été réduite au commencement, ſoit l'appliquée $XS = s$, & la viteſſe qui aura été imprimée au point *S* dans la direction *S V* ſoit $XV = u$, enſorte que u marque l'eſpace parcouru par cette viteſſe dans une ſeconde. Cela poſé on demande quelle figure, & quel mouvement la corde aura, après un tems quelconque écoulé depuis cet état initial.

XI. Soit donc écoulé depuis ce commencement un tems $= t$ *ſecondes*, & ſuppoſons que la corde ait à préſent la figure *A Y B* (*fig.* 3.), pour laquelle poſons l' appliquée

$XY = y$, qui répond à la même abſciſſe $AX = x$, où au commencement l'appliquée étoit $XS = s$, & il eſt clair que y ſera une certaine fonction tant de l'abſciſſe x que du tems t, dont la nature doit être déterminée par l'état initial, auquel nous ſuppoſons que la corde a été réduite. Tout revient donc à trouver cette fonction y, dont la valeur elle même nous découvre la figure AYB, & la formule différentielle $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ la viteſſe du point Y dans le ſens XY, de ſorte que ſi le point Y ſe meut vers X, ſa viteſſe ſera $= -\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

XII. Delà il eſt évident, que la fonction y que nous cherchons doit avoir les propriétés ſuivantes :

1° Poſant le tems $t = 0$, il faut qu'il devienne $y = s$, puiſqu'au commencement la corde eſt ſuppoſée avoir eu la figure donnée ASB (*fig.* 2.) dont l'appliquée répondante à la même abſciſſe $AX = x$ vient d'être nommée $XS = s$.

2° Poſant encore $t = 0$, il faut que la formule différentielle $-\left(\frac{dy}{dt}\right)$ devienne $= u$, puiſque u marque la viteſſe initiale, dont le point S aura été pouſſé ſelon la direction SX. Donc ſi la corde n'avoit reçu aucun mouvement au commencement, mais qu'elle eut été ſimplement relachée, il faudroit qu'il fut $-\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$, en ſuppoſant le tems $t = 0$.

3° Enſuite puiſque les deux extrémités A & B de la corde demeurent immobiles, l'appliquée y doit auſſi être une telle fonction des deux variables x & t, que poſant ou $x = 0$, ou $x = a$ elle s'évanouiſſe toujours dans l'un & l'autre cas ; par la même raiſon il faudra que dans ces deux cas la formule de la viteſſe $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ s'évanouiſſe auſſi.

XIII. Maintenant pour découvrir les forces, dont l'élément de la corde en Y est poussé à présent, tirons en Y la tangente YT, & posons l'angle qu'elle fait avec l'axe $XYT = \omega$, que nous supposons être infiniment petit, & puisque en vertu de la tension T l'élément Y est tiré suivant la direction YT par cette même force T, il en résulte suivant la direction YX la force T sin. $\omega = T\omega$, & suivant la direction de l'axe XA la force T cos. $\omega = T$, qui est détruite par la tension de l'autre coté, d'où l'on voit que la tension est par tout la même. Mais de l'autre côté, dans l'élément suivant, l'angle ω devient $\omega + d\omega$, & partant l'élément Y sera poussé par la force $T(\omega + d\omega)$ suivant la direction contraire XY. Donc puisque l'élément Y est sollicité par ces deux forces ensemble, il sera poussé suivant la direction XY par la force $= Td\omega$.

XIV. Tant que nous envisageons la courbe AYB, le tems t demeure le même: donc puisque l'angle $XTY = \omega$ est infiniment petit, nous aurons $\omega = (\frac{dy}{dx})$, & partant $d\omega = dx\,(\frac{ddy}{dx^2})$, de sorte que l'élément en Y est sollicité dans le sens XY par la force motrice $Tdx\,(\frac{ddy}{dx^2})$. Or le poids de la partie de la corde AX ou AY a été supposé $= p$, d'où le poids de l'élement en question sera $= dp$, qui exprime en même tems sa masse; donc la force accélératrice dans le sens XY sera $= \frac{Tdx}{dp}(\frac{ddy}{dx^2})$, où puisque p est une fonction de x connue par l'épaisseur variable de la corde, la formule $\frac{Tdx}{dp}$ aura aussi une valeur connue. Si la corde avoit partout la même épaisseur, le poids de toute la longueur $AB = a$

aiant été posé $= P$, nous aurions $a : P = x : p$, & partant $\frac{dx}{dp} = \frac{a}{p}$, ou bien la force accélératrice seroit $= \frac{Ta}{P} \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$.

XV. Aiant trouvé la force accélératrice de l'élèment Y dans le sens $YY = \frac{Tdx}{dp} \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. Nous n'avons qu'à considérer le mouvement de ce même élément. Or aiant déja remarqué (XI.) que la vitesse de cet élément dans le sens XY est $= \left(\frac{dy}{dt}\right)$ son accélération dans le même sens sera $= \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, qui doit donc être proportionelle à la force accélératrice. Mais pour obtenir une équation déterminée puisque nous exprimons le tems t en secondes, & la vitesse par l'espace parcouru dans une seconde, nous n'avons qu'à introduire la hauteur, d'où la gravité fait tomber les corps dans une seconde. Soit donc cette hauteur $= g$, & la comparaison de la force accélératrice avec l'accélération nous fournit cette équation :

$$\frac{2Tg\,dx}{dp} \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right).$$

XVI. Voilà donc une équation differentielle du second dégré de la résolution de laquelle dépend la détermination du mouvement de la corde, & tout revient maintenant à chercher, quelle fonction des deux variables x & t doit être l'appliquée y, afin qu'elle satisfasse non seulement à cette équation, mais qu'elle renferme aussi les conditions marquées ci-dessus (XII.). Or j'observe ici que $\frac{2Tg\,dx}{dp}$ est une certaine fonction de la seule variable x, sans que le tems t y soit compris, & que cette fonction dépend de l'épaisseur de la corde. Mais il encore impossible

de

de résoudre cette équation en général, quelle que soit la variabilité de l'épaisseur de la corde, puisqu'ici je n'ai pu découvrir que certains cas, dont le nombre est bien infini, où la résolution réussit, mais à présent je me bornerai uniquement aux cordes, dont l'épaisseur est par tout la même, parceque c'est le cas, auquel presque tous ceux qui ont traité cette question se sont attachés.

Résolution analitique de la question pour le cas, où la corde a partout la même épaisseur.

XVII. Puisque la corde a partout la même épaisseur, à cause de $dx : dp = a : P$, notre équation sera

$$\frac{2Tga}{P} \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right),$$

où a marque la longueur de la corde, P son poids, & T la force dont elle est tendue, la valeur de g étant $15\frac{5}{8}$ pieds de Rhin; la quantité $\frac{2Tga}{P}$ est donc constante, & exprime une certaine surface, & partant pour abreger je poserai $\frac{2Tga}{P} = cc$, pour avoir à résoudre cette équation

$$cc \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right).$$

Il est aisé de trouver une infinité des fonctions des deux variables x & t, qui étant substituées au lieu de y satisfont à cette équation, & qui remplissent en même tems la condition qu'il devienne $y = 0$, soit qu'on pose $= 0$, ou $x = a$.

XVIII. Pour en donner un exemple supposons $y = \alpha$ sin. mx cos. nt, & puisque

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \alpha m \operatorname{cof.} mx \operatorname{cof.} nt, \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = - \alpha mm \operatorname{fin.} mx \operatorname{cof.} nt$

$\left(\frac{dy}{dt}\right) = - \alpha n \operatorname{fin.} mx \operatorname{fin.} nt, \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = - \alpha nn \operatorname{fin.} mx \operatorname{cof.} nt$

l'équation trouvée exige qu'il ſoit $mmcc = nn$, ou $n = mc$; de ſorte que $y = \alpha$ ſin. mx coſ. mct, laquelle valeur évanouit déja au cas où $x = 0$, mais pour qu'elle évanouiſſe auſſi au cas où $x = a$, il faut prendre $ma = i\pi$, où π marque la périphérie d'un cercle, dont le diamètre $= 1$, & i un nombre entier quelconque. Voilà donc une ſolution particulière de notre queſtion renfermée dans cette équation :

$$y = \alpha \operatorname{fin} \frac{i\pi x}{a} \cdot \operatorname{cof.} \frac{i\pi ct}{a}.$$

XIX. Puiſqu'on peut prendre pour i un nombre entier quelconque, cette formule fournit une infinité de formules dont non ſeulement chacune donne une valeur convenable à y, mais auſſi deux ou pluſieurs jointes enſemble. D'où l'on tire une ſolution beaucoup plus générale renfermée dans cette expreſſion qu'on peut continuer à l'infini:

$$y = \alpha \operatorname{fin.} \frac{\pi x}{a} \operatorname{cof.} \frac{\pi ct}{a} + \beta \operatorname{fin.} \frac{2\pi x}{a} \operatorname{cof.} \frac{2\pi ct}{a} + \&c.$$

& puiſqu'en écrivant ſin. $\frac{i\pi ct}{a}$ au lieu de coſ. $\frac{i\pi ct}{a}$ on ſatisfait également aux conditions préſcrites, on peut donner cette ſolution encore plus générale:

$$y = \alpha \operatorname{fin.} \frac{\pi x}{a} \operatorname{cof.} \frac{\pi ct}{a} + \beta \operatorname{fin.} \frac{2\pi x}{a} \operatorname{cof.} \frac{2\pi ct}{a} + \&c.$$

$$+ \alpha' \operatorname{fin.} \frac{\pi x}{a} \operatorname{fin.} \frac{\pi ct}{a} + \beta' \operatorname{fin.} \frac{2\pi x}{a} \operatorname{cof.} \frac{2\pi ct}{a} + \&c.$$

XX. Voyons maintenant, quel devroit être l'état initial de la corde, pour que cette formule exprimât le mouvement dont la corde ſera agitée dans la ſuite. Pour cet effet nous n'avons qu'à poſer $t = 0$, & puiſque alors

y devient égale à l'appliquée s dans la figure initiale *ASB* (*fig.* 2.) nous aurons pour cette courbe l'équation qui suit :

$$s = \alpha \text{ sin. } \frac{\pi x}{a} + \beta \text{ sin. } \frac{2\pi x}{a} + \gamma \text{ sin. } \frac{3\pi x}{a} + \&c.$$

Or pour les vitesses u qui doivent être imprimées à tous les élémens de la corde, puisque $u = -\left(\frac{dy}{dt}\right)$, en posant $t = 0$; nous aurons

$$u = -\frac{\pi c}{a}\alpha' \text{ sin. } \frac{\pi x}{a} - \frac{2\pi c}{a}\beta' \text{ sin. } \frac{2\pi x}{a} - \frac{3\pi x}{a}\gamma' \text{ sin. } \frac{3\pi x}{a} - \&c.$$

Donc réciproquement toutes les fois qu'on aura imprimé à la corde une telle figure & un tel mouvement, la valeur de y donnée ci-dessus nous découvrira pour tout tems suivant tant la figure, que le mouvement de la corde.

XXI. Comme les valeurs de s & de u contiennent une infinité de termes, il semble qu'elles renferment tous les cas possibles, de sorte que quelque figure & quelque mouvement, qu'on ait imprimé à la corde au commencement, ces deux valeurs y puissent être ajustées. Car en effet on peut toujours déterminer ensorte les coéficiens α, β, γ &c. & α', β', γ' &c. que l'une & l'autre des courbes *ASB* & *AVB* passe par une infinité de points donnés. Cependant quelque convainquant que paroisse cet argument, je ne saurois envisager cette solution, que comme très-particulière ; & cela par la même raison, qu'on regarderoit fort-mal à propos toutes les courbes possibles comme renfermèes dans cette équation parabolique $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. quoi qu'on puisse faire passer cette courbe par une infinité de points donnés.

XXII. Je soutiens donc que cette solution quelque générale qu'elle paroisse, n'est que très-particulière, & qu'elle n'épuise point l'étenduë de l'équation différentielle du ſecond dégré $cc\ (\frac{ddy}{dx^2}) = (\frac{ddy}{dt^2})$ qui renferme la ſolution complete de notre queſtion. Pour nous aſſurer entièrement de cette inſuffiſance, on n'a qu'à conſidérer le cas où l'on n'auroit ébranlé au commencement qu'une partie de la corde comme AX, le reſte BX aiant demeuré dans un repos parfait. Car poſant cette partie ébranlée $= b$, il faudroit déterminer en ſorte les expreſſions trouvées pour s & u, que prenant $x > b$ elles devinſent $= 0$, & cela pour toutes les valeurs poſſibles entre b & a, ce qui eſt manifeſtement impoſſible. Ainſi le mouvement, que la corde recevra dans ce cas, ne ſauroit jamais être repréſentée par l' expreſſion donnée ci-deſſus pour l' appliqué y.

Intégration complete de l' équation.

$$cc\ (\frac{ddy}{dx^2}) = (\frac{ddy}{dt^2}).$$

XXIII. Mais pourquoi vodroit-on s' arrêter à une ſolution particulière & exiger la détermination d' une infinité de coéficiens, tandis qu'on eſt en état d'aſſigner l'intégrale complete de cette équation, qui doit néceſſairement renfermer tous les cas poſſibles, & qu'on peut même aiſément appliquer à toutes les figures & à tous les mouvemens qu'on aura imprimés au commencement à la corde. Je me tiendrai donc uniquement à l' intégrale complete de cette équation differentio - differentielle qu'on trouve exprimée, de cette manière

$$y = \Gamma : (x + ct) + \Delta : (x - ct),$$

où $\Gamma : (x - ct)$ marque une fonction quelconque de la quantité $x + ct$, & $\Delta : (x - ct)$ une fonction auſſi quelconque de la quantité $x - ct$. Donc puiſque cette expreſſion renferme deux fonctions abſolument arbitraires, c'eſt une marque certaine qu'elle eſt l'intégrale compléte de notre équation différentio-différentielle.

XXIV. Pour faire voir comment cette expreſſion ſatisfait à la queſtion, on n'a qu'à en faire la ſubſtitution; pour cet effet je marquerai le différentiel d'une telle fonction générale $\Gamma : u$ par $du\ \Gamma' : u$; donc ſi nous poſons $z = \Gamma : (x + ct)$ nous aurons $dz = (dx + c\,dt)\ \Gamma' : (x + ct)$, & partant $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \Gamma' : (x + ct)$, & $\left(\frac{dz}{dt}\right) = c\,\Gamma' : (x + ct)$. De là notre expreſſion fournira par la différentiation :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \Gamma' : (x + ct) + \Delta' : (x - ct),\ \left(\frac{dy}{dt}\right) = c\Gamma' : (x + ct) - c\Delta' : (x - ct)$$

$$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \Gamma'' : (x + ct) + \Delta'' : (x - ct),\ \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc\Gamma'' : (x + ct) + cc\Delta'' : (x - ct)$$

d'où il eſt évident, que $cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ devient égal à $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, tout comme la nature de notre queſtion exige.

XXV. Puiſque cette intégrale contient deux fonctions abſolument arbitraires, il n'y a aucun doute qu'on ne les puiſſe prendre enſorte, qu'elles conviennent à l'état initial auquel la corde aura été réduite au commencement. On n'a qu'à remarquer que la fonction $\Gamma : (x + ct)$ repréſente l'appliquée d'une courbe quelconque, prenant l'abſciſſe $= x + ct$, & que l'autre fonction $\Delta : (x - ct)$, repréſente l'appliquée d'une autre courbe quelconque, qui répond à l'abſciſſe $x - ct$. Donc au lieu de ces deux fonctions arbitraires on peut ſubſtituer deux courbes quelconques ſoit régulières, ou compriſes dans quelques équations, ſoit irrégulières ou tracées à volonté ſans qu'elles ſoient attachées à quelque loi de continuité.

XXVI. Comme la queſtion elle même renferme déja deux courbes abſolument arbitraires, l'une *ASB* (*fig.* 2.) qui eſt la ſigure qu'on a donnée au commencement à la corde, & l'autre *AVB*, qui eſt l' échelle des viteſſes imprimées à la corde au premier inſtant du relâchement; aucune ſolution ne ſauroit être compléte, à moins qu'elle ne fût applicable à ces deux courbes abſolument arbitraires. Donc puiſque ces deux courbes ne ſont ſujettes à aucune loi de continuité, il faut bien que la ſolution ne ſoit ſujette à aucune limitation à cet égard. Ainſi la nature de la queſtion elle même nous donne déja à connoitre que la ſolution, pour qu'elle ſoit compléte, doit néceſſairement renfermer deux fonctions abſolument arbitraires pour qu'on en puiſſe faire l' application à toutes les circonſtances de la queſtion.

XXVII. Cette reflexion eſt d'autant plus importante, que de telles ſolutions ont été tout-à-fait inconnues juſqu'ici dans l'Analiſe, & qu'on a cru même, que le calcul n'étoit applicable qu' à des quantités ſoumiſes à la loi de continuité, ou compriſes dans quelque expreſſion analitique. Ce préjugé, s' il eſt permis de le nommer ainſi, a été ſans doute la cauſe que ma ſolution générale des cordes vibrantes a paru fort ſuſpecte même à des Géomêtres du premier ordre; mais à préſent j'eſpère que quand ils voudront bien peſer la nature de la queſtion, ils conviendront avec moi, que la ſolution ne ſauroit être moins générale, que celle que j'ai donnée, & tous les prétendus inconvéniens, dont on a chargé ma ſolution, ne tombent que ſur les premiéres limitations, auxquelles on eſt obligé de reſtraindre la queſtion.

XXVIII. Mais rien ne ſauroit mieux lever tous les doutes, que l'application de ma ſolution générale au mouvement déterminé d'une corde, après qu'on l'aura réduite au commencement dans un état déterminé quelconque. Car il faut bien considérer, qu'il ne s'agit pas ici de déterminer d'une manière vague les mouvemens dont une corde tendue est susceptible, mais je suppose expressément, qu'on ait forcé au commencement la corde à une certaine figure donnée, & qu'on lui ait imprimé en même tems un certain mouvement pareillement donné. Cet état initial de la corde étant donc entièrement déterminé, il faut bien que le mouvement suivant le soit aussi, & qu'il dépende nécessairement de toutes les conditions de l'état initial. Je m'en vais donc examiner de quelle manière les deux fonctions arbitraires de ma solution doivent être déterminées, pour qu'elles répondent à l'état initial, auquelle la corde a été réduite au commencement.

Application de la solution générale à l'état initial de la corde.

XXIX. Aiant trouvé pour l' état de la corde après un tems quelconque de t *secondes* écoulé depuis le commencement, cette équation intégrale compléte.

$$y = \Gamma : (x + ct) + \Delta : (x + ct)$$

qui exprime la figure que la corde aura alors, on en déduit aisément la vitesse, que le point Y aura dans la direction YX (*fig.* 3.); car puisqu'elle est $= -\left(\frac{dy}{dt}\right)$ nous aurons

$$-\left(\frac{dy}{dt}\right) = -c\Gamma' : (x + ct) + c\Delta' : (x - ct).$$

Maintenant nous n' avons qu'à poser $t = o$ pour avoir l' état initial de la corde auquel nous avons vû, qu'il doit devenir $y = s$, & $-\left(\frac{dy}{dt}\right) = u$, où s & u sont des fonctions données de x; nous aurons donc

$$s = \Gamma : x + \Delta : x \ \& \ u = -c\Gamma' : x + c\Delta' : x;$$

& de ces deux équations il faut déterminer la nature des deux fonctions indiquées par les signes Γ & Δ, ou bien des deux courbes dont les appliquées représentent ces fonctions.

XXX. Pour cet effet multiplions la dernière équation par dx, & en prenant l'intégrale nous aurons

$$\frac{\int u\,dx}{c} = -\Gamma : x + \Delta : x,$$

cette équation jointe à la première nous fournit

$$\Gamma : x = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2c}\int u\,dx \;\&\; \Delta : x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2c}\int u\,dx,$$

où il faut remarquer que s marque l'appliquée XS de la courbe donnée ASB, qui répond à l'abscisse x, & que $\int u\,dx$ exprime l'aire AXV de l'autre courbe aussi donnée AVB, qui convient à la même abscisse x. D'où l'on comprend, que pour avoir les fonctions $\Gamma : (x + ct)$ & $\Delta : (x - ct)$ on n'a qu'à prendre au lieu de l'abscisse x, dans les deux courbes données, ou $x + ct$ pour la première, ou $x - ct$ pour l'autre fonction.

XXXI. De là on tire d'abord la construction suivante de notre question. Soit ASB (*fig.* 4.) la figure à laquelle a été réduite la corde au commencement, AVB l'échelle des vitesses, dont les appliquées XV représentent les vitesses que tous les points de la corde S ont reçues au commencement dans le sens SX. Cela posé après le tems écoulé $= t$, le point de la corde S sera parvenu en Y, de sorte que l'intervalle XY soit $= \Gamma : (x + ct) + \Delta : (x - ct)$; or nous venons de voir que $\Gamma : x = \frac{1}{2}XS - \frac{1}{2c}AXV$ & $\Delta : x = \frac{1}{2}XS + \frac{1}{2c}AXV$. Donc prenant de part & d'autre du point X les intervalles $XT = Xt = ct$ pour avoir les abscisses $AT = x + ct$ & $At = x - ct$, nous aurons pour le lieu cherché

Y l'ap-

Y l'appliquée $XY = \frac{1}{2} TN - \frac{1}{2c} . ATU + \frac{1}{2} tn + \frac{1}{2c} . Atu$ ou bien $XY = \frac{1}{2c} (TN + tn) - \frac{1}{2c} . tTUu$.

XXXII. Voici donc une conſtruction bien ſimple pour déterminer le lieu de chaque point de la corde après un tems quelconque de t *ſecondes* écoulé depuis le commencement, & cette conſtruction eſt uniquement fondée ſur les deux courbes données ASB & AVB, par leſquelles l'état initial de la corde eſt déterminé. On voit auſſi que cette conſtruction réuſſit également bien, ſoit que ces deux courbes données ſoient renfermées dans quelque équation analitique, ou qu'elles ſoient tirées d'une manière quelconque ſans qu'aucune loi de continuité y ait lieu. Il n'y a ici abſolument rien, qui demaude une expreſſion analitique pour la nature de ces deux courbes, & dès qu'elles ſont tracées leur route ſuffit toute ſeule pour déterminer le mouvement tout entier de la corde, puiſque ſachant pour tout tems les lieux de tous les points de la corde, on ne ſauroit plus rien déſirer pour une parfaite connoiſſance du mouvement. Je ne reconnois ici d'autres limitations, que celles que j'ai raportées au commencement, ſans leſquelles notre ſolution ne ſauroit avoir lieu.

XXXIII. Cette conſtruction n'eſt aſſujettie à aucun inconvénient, tant que les points T & t tombent entre les termes de la corde A & B, mais quand ils tombent au delà, où ni l'une, ni l'autre courbe donnée ne fournit plus des appliquées, on voit bien qu'il faut continuer l'une & l'autre de ces courbes pour que cette conſtruction puiſſe être miſe en pratique. D'où réſulte cette queſtion bien importante, ſelon quelle loi il faut continuer les deux courbes données ASB & AVB au delà des termes de la corde A & B, afin que notre conſtruction nous découvre le vrai mouvement de la corde; comme cette loi doit être commune à toutes les courbes données par l'état initial, soit qu'elles soient continues ou discontinues, je remarque d'abord que cette loi ne sauroit être attachée à l'équation analitique qui exprimeroit peut-être la nature d'une telle courbe. Ainsi par exemple, si l'une de ces courbes étoit un arc de cercle, il seroit fort-mal à propos, si l'on vouloit continuer cet arc jusques à remplir un cercle tout entier.

XXXIV. Dans cette incertitude il faut s'en tenir uniquement à la Théorie, qui nous a conduit si bien jusqu'ici sans que nous aions besoin de nous livrer à des conjectures. En effet n'aiant pas encore tenu compte de toutes les circonstances qui concourent à déterminer le mouvement de la corde, il ne faut pas être surpris que la continuation de ces courbes ne soit pas encore décidée. Or nous n'avons pas encore introduit dans le calcul cette circonstance fort-essentielle à la question, que la corde est fixée par ces deux bouts *A* & *B*, de sorte que l'un & l'autre de ces points demeure toujours en repos. Sans cette condition la continuation de nos courbes seroit effectivement indéterminée, & partant c'est de là qu'il faut tirer la véritable loi que nous devons suivre dans cette opération. Je m'en vais donc rechercher cette loi dans les Articles suivans.

Continuation des deux courbes données pour achever notre construction.

XXXV. Puisque notre question renferme essentiellement cette condition, que les deux points *A* & *B* demeurent toujours immobiles, la continuation des deux courbes *ASB* & *AVT* doit être telle, que si nous en déterminons pour un tems quelconque les éloignemens de ces deux points à l'axe, ils se trouvent constamment $= 0$; donc si nous concevons le point *X* transporté ou en *A*, ou en *B*, il faut que dans l'un & l'autre cas on ait toujours

$$\frac{1}{2}(TN + tn) - \frac{1}{2c}\, tTUu = 0$$

quelque grands ou petits qu'on prenne de part & d'autre les intervalles égaux $XT = Xt$, qui sont proportionels au tems. C'est donc cette circonstance si essentielle à notre question, qui nous montrera de quelle manière il faut continuer les deux courbes données ASB & AVB au delà de l'étendue de la corde AB.

XXXVI. Comme cette expression qu'on doit égaler à zero dépend des deux courbes données à la fois, j'observe d'abord, que chaque partie doit évanoüir séparément. Car si au commencement la corde aiant été réduite à la figure ASB avoit été relachée sans lui imprimer du mouvement, la courbe AVB évanoüiroit ou seroit confondue avec l'axe même AB, & alors il s'agiroit de continuer la seule courbe ASB, d'où l'on tireroit $TN + tn = 0$. De la même manière, si au commencement la corde avoit été laissée dans son état naturel, & qu'on eut imprimé à chacun de ses points un certain mouvement représenté par la courbe AVB, de sorte que l'autre courbe ASB fût confonduë avec l'axe AB: on n'auroit qu'à continuer la seule courbe AVB, dont la continuation devroit être telle, qu'il fut $tLUu = 0$, en prenant le point X ou en A, ou en B.

XXXVII. Cependant il n'est pas absolument nécessaire, qu'on pose séparément $TN + tn = 0$, & l'aire $tTUu = 0$, car on verra facilement que tout revient au même, pour vû qu'on fasse ensorte que $TN + tn - \frac{1}{c}\, tTUu$ évanoüisse, sans que chaque partie séparément se réduise à rien. Ainsi quoique la continuation de nos deux courbes soit indéterminée en elle même, l'usage que nous en ferons est néanmoins déterminé, & partant rien n'empêche que nous ne continuions chacune à part, sans avoir égard à l'autre,

& de là nous tirerons la methode la plus ſimple pour la pratique. Donc puiſque nous avons à remplir ces deux conditions,

$$1^\circ\ TN + tn = 0 \ \&\ 2^\circ\ tTUu = 0$$

la première détermine la continuation de la courbe ASB au delà du terme A, & nous fait voir, que l' appliquée tn doit être égale à TN, mais poſée dans une ſituation contraire par rapport à l' axe AB continué. Or la même continuation doit auſſi avoir lieu dans l'autre courbe AUB afin que l' aire $tTUu$ ſoit réduite à rien.

XXXVIII. Soit donc AB (*fig.* 5.) la corde dans ſon état naturel, que nous ſuppoſons de la même épaiſſeur par tout, & nommant comme ci-deſſus ſa longueur $AB = a$, ſon poids $= P$, & ſa tenſion $= T$, poſons pour abreger $c = \sqrt{\frac{2Tga}{P}}$, où g marque la hauteur d'où un corps tombe dans une ſeconde. Cela poſé ſoit ASB la figure, à laquelle la corde a été réduite au commencement, & AVB l'échelle des viteſſes qui lui ont été imprimées au moment du rélachement, & pour déterminer le mouvement que la corde aura dans la ſuite, il faut continuer les deux courbes au delà de A enſorte, que prenant les intervalles AX & Ax égaux entr'eux, il ſoit $xs = XS$ & $xu = XV$. D'où l'on voit que les courbes continuées AsB' & AuB' ſeront égales & ſemblables aux données ASB & AVB. Par la même raiſon au delà du terme B il faut décrire les courbes $Bs'A'$ & $Bu'A'$ égales & ſemblables aux courbes BSA & BVA, mais dans une ſituation contraire à l' égard de l' axe continué AB.

XXXIX. Par cette opération on pouſſera la continuation de nos courbes par les eſpaces AB' & BA' égaux à la longueur de la corde AB. Aiant maintenant à droite du point A les courbes $ASBs'A'$ & $AVBu'A'$, il faut qu'on ait à gauche des courbes ſemblables & égales $AsB'S'A''$

& $A\,u\,B'\,V'\,A''$ décrites de l'autre côté de l'axe : & il en est encor de même au delà du terme B. D'où il est évident comment la continuation doit se faire de part & d'autre à l'infini ; on n'a qu'à prendre sur la continuation de l'axe les intervalles $A\,B'$, $B'\,A''$, $A''\,B'''$ &c. & $B\,A'$, $A'\,B''$, $B''A'''$ &c. égaux à la longueur de la corde $A\,B$, & décrire sur chacun de ces intervalles les deux courbes données $A\,S\,B$ & $A\,V\,B$ alternativement au dessus & au dessous de l'axe ; comme l'ordre des lettres A & B le marque plus clairement qu'on ne le sauroit expliquer par une longue description. Voilà donc nos deux courbes continuées à l'infini, & cela conformément à la Théorie du mouvement.

Détermination de l'état de la corde pour chaque tems proposé.

XL. Pour déterminer l'état de la corde à un tems quelconque de t *secondes* (*fig.* 5.) depuis le commencement, tout revient à déterminer le lieu où se trouvera alors chaque point de la corde, c'est-à-dire sa distance de l'axe ou de l'état naturel de la corde $A\,B$. Considerons donc un point quelconque de la corde X, qui au commencement a été en S, & soit y la distance à laquelle il se trouvera à présent au dessus de l'axe selon la figure. Pour cet effet qu'on prenne sur l'axe de part & d'autre du point X les intervalles $X\,T = X\,t = c\,t$, & puisque l'appliquée dans ces deux points ont une situation contraire à celle que nous avons supposées ci-dessus, nous aurons en vertu du §. XXXI.

$$y = -\frac{1}{2}\,(T\,N + t\,n) - \frac{1}{2\,c}\cdot \text{aire } t\,T\,U\,u$$

en tant que cette aire tombe au dessous de l'axe.

XLI. Or pour avoir cette aire de l'échelle des vitesses $A\,V\,B$ continuée, qui est comprise entre les appliquées

tu & TU, on voit qu'elle eſt compoſée de l'aire AVB au deſſous de l'axe, & des deux aires Atu & BTU au deſſus de l' axe : d' où nous aurons

$$y = -\frac{1}{2}(TN + tn) - \frac{1}{2}(AVB - Atu - BTU)$$

pour l' éloignement du point X au deſſus de l' axe, d' où l'on comprend que ſi la valeur de cette expreſſion eſt négative, le point X ſe trouve alors au deſſous ou de l'autre côté de l' axe. Comme ces deux courbes ſe trouvent alternativement an deſſus & au deſſous de l' axe, il eſt clair qu'avec le tems le point X paſſera tantôt au deſſus & tantôt au deſſous de l' axe, d' où réſultera un mouvement d' oſcillation ſemblable à celui d' un pendule que je m' en vais examiner plus ſoigneuſement, puiſque c'eſt à cet article auquel preſque tous ceux qui ont traité cette matière, ſe ſont attaché principalement.

Conſidérations ſur le mouvement de vibration des cordes également épaiſſes.

XLII. Cherchons d' abord l' état de la corde après le tems t, qui donne $XT = Xt = AB = a$, de ſorte que ce tems ſoit $t = \frac{a}{c} = a\sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ exprimé en *ſecondes*. Donc puiſque $XT = AB$ & $Xt = AB$, nous aurons $BT = AX$ & $At = BX$. Prenons ſur la corde AB le point ξ enſorte que $B\xi = AX$, pour avoir $BT = B\xi$ & $At = A\xi$, & par la loi de continuation nous aurons les appliquées $TN = \xi\sigma$, $TU = \xi\upsilon$, & $tn = \xi\sigma$, $tu = \xi\upsilon$, & de là les aires $BTU = B\xi\upsilon$ & $Atu = A\xi\upsilon$; de ſorte que $AVB - Atu - BTU = \sigma$. Par conſéquent le point X de la corde ſe trouvera alors à la diſtance de l' axe $y = -\frac{1}{2}(TN + tn) = -\xi\sigma$

ou bien au dessous de l'axe en y de sorte que $Xy = \xi\tau$, d'où l'on voit qu'après le tems $t = a \sqrt{\frac{P}{2Tga}} = \sqrt{\frac{Pa}{2Tg}}$, toute la corde aura la figure $Ay\zeta B$ semblable à la figure initiale, mais doublement renversée, savoir de haut en bas, & de droite à gauche. Il y aura donc aussi $\xi\zeta = XS$.

XLIII. De là on comprend déja qu'après le tems double $t = 2a \sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ la corde doit reprendre la première figure ASB, qui lui a été imprimé au commencement. Car supposant $t = \frac{2a}{c}$ les points T, t parviendront en X' & X'', de sorte que $XX' = XX'' = 2AB$, & les appliquées en X' & X'' les mêmes qu'en X, aussi l'aire de l'échelle des vitesses comprise entre les appliquées $X'V'$ & $X''V''$ devient $= 0$. Alors donc l'éloignement du point X à l'axe AB en haut sera $y = \frac{1}{2}(X'S' + X''S'')$ $= XS$, ou bien la corde se trouvera parfaitement rétablie dans sa première situation ASB, & aura aussi par conséquent le même mouvement, qui lui a été imprimé au commencement. Il n'est pas besoin d'avertir ici, que je fais abstraction de tous les empêchemens & autres causes, qui affoiblissent peu à peu le mouvement de la corde, & l'éteignent enfin tout-à-fait. Cette circonstance ne touche pas plus la solution générale que je donne ici, que toutes les solutions particulières qui ont été publiées par d'autres.

XLIV. Puisque nous venons de voir qu'après le tems $t = 2a \sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ la corde parvient dans son premier état, & qu'au milieu de ce tems elle s'est trouvée dans une situation renversée, en comparant ce mouvement avec celui d'un pendule, on a raison de dire, que pendant le tems

$t = 2a\sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ la corde a achevé deux oscillations ou deux vibrations, de sorte que le tems de chaque vibration est censé d' être $= a\sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ *secondes*, & partant le nombre des vibrations, que la corde achevera pendant une *seconde* sera $= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2Tga}{P}} = \sqrt{\frac{2Tg}{Pa}}$. C' est ce nombre qu'on regarde comme la mesure du son que la corde rend par son mouvement de vibration. Pour mieux comprendre cette mesure absoluë, supposons la tension T équivalente au poids qu'auroit une corde de la même grosseur dont la longueur seroit $= k$, de sorte qu'on ait $T : P = k : a$, & alors nous aurons pour la mesure du son ce nombre $\frac{\sqrt{2gk}}{a}$, d'où l'on voit que le son est réciproquement proportionel à la longueur de la corde, la tension k demeurant la même.

XLV. Quoiqu'il soit certain que la corde revient toujours après le tems $t = 2a\sqrt{\frac{P}{2Tga}} = \frac{2a}{\sqrt{2gk}}$ dans le même état; il ne s' ensuit pas nécessairement que la corde n' acheve dans ce tems que deux vibrations, & il seroit bien possible qu'elle en fit cependant ou quatre, ou 6, ou 8, ou plusieurs selon un nombre pair quelconque, & alors le nombre des vibrations rendues dans une *seconde* deviendroit deux, ou 3, ou 4, ou plusieurs fois plus grand que je l'ai supposé. Cela dépend d'une certaine disposition de l'état initial, comme je l'ai remarqué autres fois, & d'où M. Bernoulli sur tout a dérivé l'explication de tous les sons qu'une corde peut rendre tant séparément qu'à la fois. Je remarque ici seulement que toutes les belles propriétés que ce profond Géomêtre a déduites de la nature des lignes courbes comprises dans les équations des *sinus* raportées ci-dessus §. XIX. convien-

nent

nent également à toutes les autres courbes qui ont à peu près la même figure, quand même leur nature ne pourroit pas être exprimée par aucune équation analitique; ou bien les mêmes phénomènes résulteroient, si les plusieurs ventres, que M. Bernoulli considère dans les cordes, étoient des arcs circulaires, ou des portions de toute autre courbe, égales entr'elles.

XLVI. Ainsi si les deux courbes *ASB* & *AVB* qui déterminent l'état initial de la corde, étoient semblables à nos deux courbes représentées dans notre figure sur l'espace ou double *AA'* ou triple *AB''* &c. de la longueur de la corde *AB*, de sorte que ces courbes fussent réduites dans l'espace *AB*, alors la corde rendroit ou deux ou trois fois plus de vibrations, que je viens de marquer, tout comme si ces courbes étoient des lignes de *sinus*. Je remarque encore, que si les deux courbes *ASB* & *AVB* avoient deux moitiés semblables entr'elles, ou que la ligne droite tirée perpendiculairement par le milieu de la corde *AB*, fût un diamêtre de ces deux courbes, alors toute la corde parviendroit au même instant dans l'état naturel *AB*, de sorte que ce n'est pas non plus une propriété, qui ne convienne qu'aux seules lignes des *sinus*.

Du mouvement d'une corde qui n'est ébranlée que dans une partie.

XLVII. De là il est clair, que tant s'en faut que ma solution soit contraire à celles que M.rs Bernoulli & D'Alembert ont données de cette question, qu'elle les comprend plutôt parfaitement avec cette seule circonstance, qu'elle me paroit beaucoup plus générale. Si l'on me vouloit objecter, que l'équation générale pour les lignes des *sinus* donnée ci-dessus §. XIX. renferme en soi toutes les courbes possibles, je crois que le cas que je m'en vais développer détruira ce sentiment. Qu'on n'ébranle d'abord que la partie AD de la corde AB, en la réduisant à la figure AnD, & qu'on la relâche subitement sans lui imprimer du mouvement, de sorte que l'échelle des vitesses se confonde par tout avec l'axe pendant que l'autre ligne est composée de la courbe AnD, & de la droite DB, dont la continuation formera au delà de A la courbe Ad, & de part & d'autre du point A' les courbes $A'D'$, & $A'd'$ égales à AnD, & ainsi de suite.

XLVIII. Dans ce cas il ne s'agit point proprement d'un mouvement de vibration, mais on demande comment cette agitation initiale, est successivement répandue par toute la corde. Soit comme auparavant la longueur $AB = a$, le poids $= P$, la tension $= T$, & pour abreger $c = \sqrt{\frac{2Tga}{P}}$: considérons un point quelconque de la corde X, qui depuis l'ébranlement restera en repos pendant le tems $= \frac{XD}{c}$ & alors il commencera à être agité pendant un tems $= \frac{2\,AD}{c}$ après quoi il sera encore en repos jusqu'à ce que le tems t multiplié par c atteigne la courbe $d'A'D'$, & ainsi de suite; de sorte que chaque partie de la corde sera mise alternativement en mouvement & en repos. Dès le commencement on verra avancer l'agitation AnD jusqu'à B, d'où elle retournera jusqu'en A, & ainsi de suite, en faisant chaque tour en même tems, que la corde acheveroit une oscillation. Maintenant on m'accordera aisément que ce mouvement ne sauroit en aucune manière être représenté par les lignes des *sinus*.