



S U R
L'AVANTAGE DU BANQUIER
A U
J E U D E P H A R A O N.
P A R M. E U L E R.

Pour rendre la recherche plus générale, je marquerai le nombre des Cartes que le Banquier a en main par la lettre *n*. Parmi ces cartes, il y en aura ou une ou deux ou trois ou quatre semblables à celle sur laquelle le Ponte aura mis. Je nommerai ces cartes *signifiantes* pour les distinguer des autres, dont l'espece n'entre pas en considération. Quoique le nombre des cartes *signifiantes* ne surpasse pas quatre, pour rendre le calcul plus complet, je passerai à des nombres plus grands; un tel cas pourroit avoir lieu, si par exemple le Ponte mettoit sans distinction sur un Roi ou une Dame à la fois, de sorte qu'il gagne ou perde, soit qu'un Roi ou une Dame sorte la premiere; dans ce cas le nombre des cartes *signifiantes* pourroit monter jusqu'à huit. J'aurai donc autant de cas à examiner, qu'il y a de cartes *signifiantes*, & je déterminerai pour chacun l'avantage du Banquier: pour cet effet je marquerai par l'unité la mise du Ponte, & je chercherai la prétention que le Banquier y pourra faire conformément aux regles de la probabilité. Car, si le jeu étoit égal, le Banquier n'y sauroit former aucune prétention; & ce n'est qu'à cause de son avantage, qu'il peut pretendre à une certaine partie.

P R O B L E M E I.

1. Le nombre de routes les cartes étant $\equiv n$, s'il n'y a qu'une seule carte *signifiante*, trouver l'avantage du Banquier.

. S O L U -



SOLUTION.

Que le Banquier tire une carte après l'autre, & la probabilité que la première Carte soit la signifiante, est $\frac{1}{n}$, & qu'elle ne la soit pas, la probabilité sera $\frac{n-1}{n}$. Au premier cas il gagne la mise

$= 1$, ce qui vaut $\frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n}$, au second cas il faut passer outre.

Supposant donc que l'avantage du Banquier, quand il va tirer la seconde carte, lui vaille a ; & puisque la probabilité que ce cas arrive est $\frac{n-1}{n}$, son avantage au commencement est $x = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}a$,

posant x pour l'avantage du Banquier au commencement du jeu. Maintenant, pour trouver a , je considère la seconde carte, & à cause du nombre des cartes $= n - 1$, la probabilité que la seconde carte soit la signifiante, est $\frac{1}{n-1}$, & qu'elle ne la soit pas, $= \frac{n-2}{n-1}$,

là il perd 1, & ici il passe à l'espérance, qu'il aura à la troisième carte, laquelle soit posée $= b$, de là nous aurons $a = -\frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}b$,

& partant $x = \frac{n-2}{n}b$. Qu'il tire à présent la troisième carte,

& pour qu'elle soit la signifiante, la probabilité est $\frac{1}{n-2}$, & qu'elle

ne la soit pas, $= \frac{n-3}{n-2}$: le premier cas lui fait gagner 1, & l'autre le met à l'espérance qu'il aura à la quatrième carte, laquelle soit

$= c$; d'où nous aurons $b = \frac{1}{n-2} + \frac{n-3}{n-2}c$, & partant

$x = \frac{1}{n} + \frac{n-3}{n}c$. Qu'il tire la quatrième carte, & la



probabilité qu'elle soit la signifiante étant $= \frac{1}{n-3}$, & qu'elle ne la soit pas $= \frac{n-4}{n-3}$; il perdra 1 dans le premier cas, & dans l'autre, il obtient l'espérance qu'il peut avoir à la cinquieme, laquelle soit $= d$: de là nous aurons $c = -\frac{1}{n-3} + \frac{n-4}{n-3} d$, & $x = \frac{n-4}{n} d$. De la même maniere si nous posons

	l'espérance du Banquier
au commencement	$= x.$
à la seconde carte	$= a.$
à la troisieme carte	$= b.$
à la quatrieme carte	$= c.$
à la cinquieme carte	$= d.$
à la sixieme carte	$= e. \quad \&c.$

nous aurons les valeurs suivantes.

$$\begin{array}{ll}
 x = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} a; & x = \frac{n-2}{n} b; \\
 x = \frac{1}{n} + \frac{n-3}{n} c; & x = \frac{n-4}{n} d; \\
 x = \frac{1}{n} + \frac{n-5}{n} e; & x = \frac{n-6}{n} f; \quad \&c.
 \end{array}$$

Mais il faut remarquer que le nombre de toutes les cartes n est pair, & que le Banquier ne perd rien, quand la carte signifiante est la dernière, quoiqu'elle soit paire en ordre. Donc, s'il étoit $n = 2$, il seroit $a = 0$; si $n = 4$, il seroit $c = 0$; si $n = 6$, il seroit $e = 0$, & ainsi de suite: d'où l'on voit qu'il y aura en général $x = \frac{1}{n}$, quelque nombre pair que soit n .

Remar-

Remarque I.

2. Il est évident que cet avantage du Banquier $x = \frac{1}{n}$, vient uniquement de la loi, que la dernière carte ne fait pas gagner au Ponte: car, si sans cette exception toutes les cartes paires lui étoient favorables, comme toutes les impaires le sont au Banquier, le parti seroit parfaitement égal, & l'avantage de celui-ci seroit $x = 0$.

Remarque II.

3. Cette seule considération m'auroit pu d'abord conduire à la solution du problème. Car, puisque la probabilité que la carte significative soit la dernière, est $= \frac{1}{n}$, & que dans ce cas le Banquier ne perd pas 1, comme il devroit, si le parti étoit égal, il est autant que si ce cas lui rapportoit 1, outre l'égalité; d'où son avantage est estimé $x = \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n}$.

Remarque III.

4. Puisqu'un entier jeu de cartes, qui en contient 52, renferme quatre cartes significatives, ce cas ne sauroit avoir lieu, que lorsque la taille est déjà diminuée au dessous de 49 cartes. Mais, puisqu'on tire les cartes toujours deux à deux, le nombre des cartes, dans ce cas, n sera 48 tout au plus, ou quelque autre nombre pair plus petit. Donc, le plus petit avantage du Banquier dans ce cas, qu'il aura quand $n = 48$, sera $= \frac{1}{48}$, ou vaudra un peu plus que deux pour 100: & si le Banquier n'avoit plus que 10 cartes en main, son avantage vaudroit $\frac{1}{10}$ ou 10 pour cent.

P R O B L E M E II.

5. Le nombre de toutes les cartes étant $= n$, s'il y a deux cartes significatives, trouver l'avantage du Banquier.

S O L U T I O N.

Soit x l'avantage du Banquier au commencement du jeu, & puisqu'il tire les cartes deux à deux, soit a son avantage, après qu'il aura tiré deux cartes, (supposé qu'aucune des cartes significantes ne soit sortie), & b celui après qu'il aura tiré 4 cartes, c celui après qu'il aura tiré 6, d celui après qu'il aura tiré 8, & ainsi de suite jusqu'à la fin. Maintenant, pour la première paire de cartes, il faut considérer 4 cas.

- 1°. lorsque la première & la seconde sont significantes, où le jeu finit, & le Banquier gagne la moitié de la mise, ou $\frac{1}{2}$, selon les règles du jeu.
- 2°. lorsque la première est significative, & l'autre non; dans ce cas le Banquier gagne toute la mise 1.
- 3°. lorsque la première n'est pas significative, mais que la seconde est significative: dans ce cas le Banquier perd 1.
- 4°. lorsque ni la première ni la seconde n'est significative; dans ce cas on continue le jeu, & le Banquier arrive à l'avantage que j'ai marqué par la lettre a .

Or, puisqu'il y a 2 cartes significantes parmi toutes dont le nombre est n , la probabilité que la première soit significative est $= \frac{2}{n}$, & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n - 2}{n}$.

Soit la première significative; & puisque dans le reste des cartes, dont le nombre est $n - 1$, il n'y a plus qu'une significative, la probabilité qu'elle soit la seconde, est $= \frac{1}{n - 1}$, & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n - 2}{n - 1}$: donc, pour que le premier cas arrive, la probabilité

est

$$\text{est} = \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n-1}, \quad \& \text{ que le second arrive la probabilité est}$$

$$= \frac{2}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1}.$$

Que la première ne soit pas signifiante; & puisqu'il y a encore 2 cartes signifiantes parmi les autres, dont le nombre $n-1$, la probabilité que la seconde soit signifiante est $= \frac{2}{n-1}$, & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n-3}{n-1}$. Donc qu'il arrive

$$\text{le troisieme cas, la probabilité est} = \frac{2(n-2)}{n(n-1)}$$

$$\text{le quatrieme cas, la probabilité est} = \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}$$

La probabilité de l'arrivée de ces quatre cas, avec le profit ou la perte que chacun apporte au Banquier, est donc.

$$x = \frac{2}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2(n-2)}{n(n-1)} \cdot 1 - \frac{2(n-2)}{n(n-1)} \cdot 1 + \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} a,$$

$$\text{ou bien } x = \frac{1}{n(n-1)} + \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} a.$$

De la même manière nous trouverons l'avantage du Banquier a , qu'il aura après avoir déjà tiré 2 cartes; car, ayant alors encore $n-2$ cartes, parmi lesquelles se trouvent deux signifiantes, mettant $n-2$ au lieu de n , & b au lieu de a nous aurons:

$$a = \frac{1}{(n-2)(n-3)} + \frac{(n-4)(n-5)}{(n-2)(n-3)} b,$$



& continuant le même raisonnement nous trouverons

$$b = \frac{1}{(n-4)(n-5)} + \frac{(n-6)(n-7)}{(n-4)(n-5)} c,$$

$$c = \frac{1}{(n-6)(n-7)} + \frac{(n-8)(n-9)}{(n-6)(n-7)} d,$$

$$d = \frac{1}{(n-8)(n-9)} + \frac{(n-10)(n-11)}{(n-8)(n-9)} e,$$

&c.

Mais il faut ici avoir égard à une exception, que les règles du jeu renferment, qui est, que lorsque les deux cartes significantes sont les dernières, le Banquier gagne la mise toute entière, & non pas seulement la moitié, comme il arrive lorsque les deux cartes significantes se rencontrent dans une autre paire quelconque. Or la probabilité

que les deux cartes significantes soient les dernières étant $= \frac{2}{n(n-1)}$,

& ce cas lui rapportant un gain d' $\frac{1}{2}$ au dessus de l'ordinaire, nous

n'aurons qu'à ajouter encore $\frac{2}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n(n-1)}$, à l'a-

vantage, que nous fournissent les déterminations précédentes.

Substituons donc successivement les valeurs trouvées pour $a, b, c, d, \&c.$ & nous trouverons:

$$x = \frac{1 + 1 + (n-4)(n-5)b}{n(n-1)},$$

$$x = \frac{1 + 1 + 1 + (n-6)(n-7)c}{n(n-1)},$$

$$x = \frac{1 + 1 + 1 + 1 + (n-8)(n-9)d'}{n(n-1)},$$

&c.

Donc

Donc, s'il étoit $n = 4$, nous aurions $x = \frac{2}{n(n-1)}$; s'il étoit $n = 6$, nous aurions $x = \frac{3}{n(n-1)}$; s'il étoit $n = 8$, nous aurions $x = \frac{4}{n(n-1)}$, &c. & partant en général quelque nombre pair que puisse être n , nous aurons

$$x = \frac{n:2}{n(n-1)} = \frac{1}{2(n-1)}$$

Nous n'avons donc qu'à ajouter l'avantage qui résulte du cas, lorsque les deux cartes significantes sont les dernières, & nous obtiendrons l'avantage entier du Banquier

$$x = \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n+2}{2n(n-1)}$$

Remarque I.

6. Lorsque parmi les n cartes il n'y a qu'une seule carte significative, l'avantage du Banquier vaut $\frac{1}{n} = \frac{2n-2}{2n(n-1)}$: donc, à moins que n ne soit 4 ou deux, l'avantage du Banquier est plus grand, lorsqu'il n'y a qu'une carte significative que lorsqu'il y en a deux.

Remarque II.

7. Il est donc au contraire plus profitable pour le Ponte qu'il y ait encore deux cartes significantes dans la taille, pourvu que la taille contienne encore plus de 4 cartes.

Remarque III.

8. Ce cas peut avoir lieu lorsque $n = 50$, & alors l'avantage du Banquier sera $\frac{52}{100 \times 49} = \frac{13}{1225}$, ou vaudra un peu plus qu'un
pour

pour 100. Mais, si le nombre des cartes n n'étoit que 10, son avantage seroit $\frac{12}{20 \times 9} = \frac{1}{15}$, ou vaudroit presque 7 pour Cent.

P R O B L E M E III.

9. Le nombre de toutes les cartes étant $= n$, s'il y a trois cartes significantes, trouver l'avantage du Banquier.

S O L U T I O N.

Posant l'avantage cherché du Banquier $= x$, & que $a, b, c, d, \&c.$ marquent ses avantages, qu'il aura après avoir tiré 2, 4, 6, 8, &c. cartes; nous aurons à considérer les mêmes quatre cas, qui sont exposés dans la solution du second probleme.

Donc, puisqu'il y a 3 cartes significantes parmi n cartes, la probabilité que la premiere tirée soit significative, fera $= \frac{3}{n}$, & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n-3}{n}$.

Soit la premiere significative; & puisqu'il y en a encore 2 parmi $n-1$ cartes, la probabilité que la seconde soit significative sera $\frac{2}{n-1}$; & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n-3}{n-1}$: donc, qu'il arrive

le premier cas, la probabilité est $= \frac{3 \cdot 2}{n(n-1)}$,

le second cas, la probabilité est $= \frac{3(n-3)}{n(n-1)}$.

Or, si la premiere n'est pas significative, puisque parmi les $n-1$ cartes restantes il y a 3 cartes significantes, la probabilité que la seconde soit significative, est $= \frac{3}{n-1}$, & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n-4}{n-1}$.

Donc



Donc pour qu'il arrive

$$\text{le troisieme cas, la probabilité est } = \frac{3(n-3)}{n(n-1)},$$

$$\text{le quatrieme cas, la probabilité est } = \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)},$$

De là nous concluons l'avantage du Banquier

$$x = \frac{3 \cdot 2}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3(n-3)}{n(n-1)} \cdot 1 - \frac{3(n-3)}{n(n-1)} n + \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)} a,$$

$$\text{ou bien } x = \frac{3 + (n-3)(n-4) a}{n(n-1)}.$$

Par un raisonnement tout semblable nous déterminerons la valeur de a , en posant le nombre des cartes $= n - 2$;

$$a = \frac{3 + (n-5)(n-6) b}{(n-2)(n-3)}, \quad \& \text{ ensuite}$$

$$b = \frac{3 + (n-7)(n-8) c}{(n-4)(n-5)},$$

$$c = \frac{3 + (n-9)(n-10) d}{(n-5)(n-7)}, \quad \&c.$$

Substituons ces valeurs trouvées, & nous en tirerons:

$$x = \frac{3}{n(n-1)} + \frac{3(n-4)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{(n-4)(n-5)(n-6) b}{n(n-1)(n-2)},$$

$$x = \frac{3}{n(n-1)} + \frac{3(n-4)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{3(n-6)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{(n-6)(n-7)(n-8) c}{n(n-1)(n-2)},$$

&c.

& poursuivant ces substitutions jusqu'à la fin:

$$x = \frac{3}{n(n-1)(n-2)} ((n-2) + (n-4) + (n-6) + (n-8) + \dots + 0),$$



nous avons donc une progression arithmétique à sommer, dont le nombre des termes est $\frac{n}{2}$, & la somme du premier & dernier $= n - 2$,

d'où la somme de la progression est $= \frac{n(n-2)}{4}$, & partant

$x = \frac{3}{4(n-1)}$. C'est aussi la véritable valeur de l'avantage du

Banquier, puisque le cas irrégulier des deux dernières cartes ne sauroit ici avoir lieu. Donc l'avantage cherché du Banquier est dans ce

cas en général $x = \frac{3}{4(n-1)}$.

Remarque I.

10. Si parmi les n cartes il n'y en a qu'une signifiante, l'avantage du Banquier est $= \frac{1}{n}$, & s'il n'y a que deux, son avantage est

$= \frac{n+2}{2n(n-1)}$: Donc, selon qu'il y a une, ou deux, ou trois cartes

signifiantes, l'avantage du Banquier suit le rapport de ces trois nombres: $4n - 4$; $2n + 4$; $3n$. Donc, pourvu qu'il soit $n > 4$, l'avantage du Banquier est le plus petit, lorsque la taille contient encore deux cartes signifiantes.

Remarque II.

11. Or, si $n > 4$, l'avantage du Banquier est plus grand, si la taille contient une carte signifiante, que si elle en contient trois. Donc, le nombre des cartes de la taille demeurant le même, le Ponte agira le plus avantageusement lorsqu'il met sur une carte qui se trouve encore deux fois dans la taille.

Remarque III.

12. Lorsque la taille contient trois cartes signifiantes, l'avantage du Banquier est d'autant plus petit, plus le nombre des cartes est grand.

grand. Le plus petit avantage sera donc, lorsque $n = 50$, qui vaut $\frac{3}{4 \times 49} = 1\frac{3}{49}$, ou $1\frac{3}{49}$ pour cent à peu près. Lorsque la taille ne contient plus que 10 cartes, l'avantage du Banquier sera $= \frac{3}{4 \times 9} = 1\frac{3}{9}$, ou $8\frac{1}{3}$ pour cent.

P R O B L E M E IV.

13. Le nombre des cartes étant $= n$, s'il y a quatre cartes significantes, trouver l'avantage du Banquier.

S O L U T I O N.

En opérant de la maniere précédente; puisqu'il y a 4 cartes significantes, la probabilité que la premiere tirée en soit une sera $\frac{4}{n}$, & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n - 4}{n}$.

Soit donc la premiere significative, & puisqu'il y en a encore 3 parmi les $n - 1$ cartes restantes, la probabilité que la seconde soit significative, est $\frac{3}{n - 1}$, & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n - 4}{n - 1}$.

Donc, pour qu'il arrive

le premier cas, la probabilité est $= \frac{4 \times 3}{n(n - 1)}$,

la second cas, la probabilité est $= \frac{4(n - 4)}{n(n - 1)}$.

Or, si la premiere n'est pas significative, puisqu'il y en a encore 4 parmi les $n - 1$ restantes, la probabilité que la seconde soit significative est $= \frac{4}{n - 1}$, & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n - 5}{n - 1}$.



Donc, pour qu'il arrive

$$\text{le troisieme cas, la probabilité est } = \frac{4(n-4)}{n(n-1)},$$

$$\text{le quatrieme cas, la probabilité est } = \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)}$$

De là nous concluons :

$$x = \frac{12}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4(n-4)}{n(n-1)} \cdot 1 - \frac{4(n-4)}{n(n-1)} \cdot 1 + \frac{(n-4)(n-5)a}{n(n-1)},$$

$$\text{ou bien } x = \frac{6}{n(n-1)} + \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)} a,$$

& de la même manière :

$$a = \frac{6 + (n-6)(n-7)b}{(n-2)(n-3)},$$

$$b = \frac{6 + (n-8)(n-9)c}{(n-4)(n-5)},$$

$$c = \frac{6 + (n-10)(n-11)d}{(n-6)(n-7)},$$

&c.

De là nous tirerons la valeur de x cherchée :

$$x = \frac{6}{n(n-1)(n-2)(n-3)} ((n-2)(n-3) + (n-4)(n-5) + (n-6)(n-7) + \dots + 0).$$

Cette progression étant algébrique, si nous en cherchons la somme par les règles connues, nous la trouvons $= \frac{n(n-2)(2n-5)}{12}$,

& partant l'avantage du Banquier sera :

$$x = \frac{2n-5}{2(n-1)(n-3)}$$



L'AVANTAGE DU BANQUIER

vaut autant pour cent, que la table suivante montre,

Nombre de toutes les Cartes.	Pour une Carte significative.	Pour deux Cartes significantes.	Pour trois Cartes significantes.	Pour quatre Cartes significantes.
2	50, 000	100, 000	*	*
4	25, 000	25, 000	25, 000	50, 000
6	16, 667	13, 333	15, 000	23, 333
8	12, 500	8, 929	10, 714	15, 714
10	10, 000	6, 667	8, 333	11, 905
12	8, 333	5, 303	6, 818	9, 596
14	7, 143	4, 395	5, 769	8, 042
16	6, 250	3, 750	5, 000	6, 923
18	5, 556	3, 268	4, 412	6, 078
20	5, 000	2, 895	3, 947	5, 48
22	4, 545	2, 597	3, 571	4, 887
24	4, 167	2, 355	3, 261	4, 451
26	3, 846	2, 154	3, 000	4, 087
28	3, 571	1, 984	2, 778	3, 777
30	3, 333	1, 839	2, 586	3, 512
32	3, 125	1, 714	2, 419	3, 272
34	2, 941	1, 604	2, 273	3, 078
36	2, 778	1, 508	2, 143	2, 901
38	2, 632	1, 422	2, 027	2, 741
40	2, 500	1, 346	1, 923	2, 599
42	2, 381	1, 277	1, 829	2, 470
44	2, 273	1, 216	1, 744	2, 354
46	2, 174	1, 160	1, 667	2, 248
48	2, 084	1, 108	1, 596	2, 151
50	*	1, 061	1, 531	2, 061
52	*	*	*	1, 981

*Remarque I.*

14. En considérant cette Table, on peut donner aux Pontes cette regle, afin qu'ils risquent le moins. *Qu'ils attendent jusqu'à ce que deux cartes d'une espece soient sorties, & aussitôt que cela est arrivé, qu'ils choisissent cette carte pour leur mise.*

Remarque II.

15. Le cas le plus avantageux pour les Pontes est donc, lorsque le Banquier tire au premier coup deux cartes semblables, de sorte qu'il lui reste encore 50 Cartes dans la main. Car alors quand le Ponte met sur cette carte, l'avantage du Banquier sera le plus petit possible.

Remarque III.

16. Cependant s'il n'arrivoit pas, que deux cartes semblables sortissent avant que le Banquier eut tiré 16 cartes, il vaudroit autant, que le Ponte mette d'abord au second coup, sur une carte qui seroit sortie au premier coup: mais, comme il n'y a que 13 cartes de chaque espece, ce cas ne sauroit arriver.

Remarque IV.

17. Quand le Banquier n'a plus que 28 cartes dans la main, où encore moins, il n'est plus à propos de mettre sur une carte quoiqu'elle ne se trouve que 2 fois dans la taille. Il vaudra mieux d'attendre que le Banquier recommence, & de mettre alors sur une carte quelconque; mais le plus seur moyen est toujours d'attendre encore alors le second coup, & de mettre sur une carte qui sera sortie au premier.

Remarque V.

18. C'est encore une regle fort essentielle pour les Pontes, qu'ils ne mettent jamais sur une carte, qu'elle qu'elle soit, lorsque la taille a déjà fort diminué. Il n'est aussi jamais bon, de mettre sur une carte qui ne se trouve plus qu'une seule fois dans la taille. Car, quand



quand même cela arriveroit déjà au troisieme coup, le Banquier auroit plus que 2 pour cent d'avantage sur lui. Or un prudent Ponte peut toujours faire en sorte que l'avantage du Banquier surpasse à peine un pour cent.

PROBLEME V.

18. Le nombre des cartes étant $= n$, s'il y a cinq cartes significantes, trouver l'avantage du Banquier.

SOLUTION.

Pofant l'avantage cherché du Banquier $= x$, & faisant le même raisonnement comme auparavant, on parviendra enfin à cette équation:

$$x = \frac{10((n-2)(n-3)(n-4) + (n-4)(n-5)(n-6) + (n-5)(n-6)(n-7) + \dots + 0)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

Or la somme de la progression, qui fait ici partie du numérateur, se trouve $= \frac{n(n-2)^2(n-4)}{8}$, d'où nous tirons l'avantage du

$$\text{Banquier } x = \frac{5(n-2)}{4(n-1)(n-3)}$$

PROBLEME VI.

20. Le nombre des cartes étant $= n$, s'il y a six cartes significantes, trouver l'avantage du Banquier.

SOLUTION.

Pour trouver cet avantage, que je nomme $= x$, on parvient à cette progression:

$$s = (n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + (n-4)(n-5)(n-6)(n-7) + \dots + 0,$$

dont on trouve la valeur

$$s = \frac{n(n-2)(n-4)(2nn - 13n + 16)}{20},$$

&



& celle de x sera

$$x = \frac{155}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}$$

Par conséquent l'avantage du Banquier sera :

$$x = \frac{3(2nn - 13n + 16)}{4(n-1)(n-3)(n-5)}$$

P R O B L E M E VII.

21. Le nombre des cartes étant $= n$, s'il y a 7 cartes significantes, trouver l'avantage du Banquier.

S O L U T I O N.

On parviendra à cette équation

$$x = \frac{215}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}$$

$$\& s = (n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) + (n-4) \dots (n-8) + \dots + 0,$$

$$\text{Or la somme est } s = \frac{n(n-2)(n-4)(n-6)(2nn - 12n + 13)}{24}$$

$$\text{Donc: } x = \frac{7(2nn - 12n + 13)}{8(n-1)(n-3)(n-5)} : \text{ ce qui est l'avantage du Banquier.}$$

P R O B L E M E VIII.

22. Le nombre des cartes étant $= n$, s'il y a 8 cartes significantes, trouver l'avantage du Banquier.

S O L U T I O N.

Maintenant il s'agit de trouver la somme de cette progression :

$$s = (n-2) \dots (n-7) + (n-4) \dots (n-9) + (n-6) \dots (n-11) + \dots + 0,$$

Or les règles connues nous fournissent cette somme :

$$s = \frac{1}{12} n(n-2)(n-4)(n-6)(4n^3 - 50nn + 176n - 151),$$

&



& alors on aura :

$$x = \frac{285}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}$$

Par conséquent l'avantage du Banquier sera :

$$x = \frac{4n^3 - 50nn + 176n - 151}{2(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)}$$

Remarque I.

23. Si l'on veut aller plus loin, & supposer le nombre des cartes significantes plus grand, tout revient à la formation de semblables progressions, qui étant algebriques, on n'a qu'à faire l'application des règles connues pour en trouver la somme.

Remarque II.

24. Pour mettre devant les yeux tout ce que nous venons de trouver, en marquant le nombre de toutes les cartes par n , on a l'avantage du Banquier.

Pour 1 Carte signifiante - $\frac{1}{n}$,

Pour 2 Cartes significantes - $\frac{n-2}{2n(n-1)}$,

Pour 3 Cartes significantes - $\frac{3}{4(n-1)}$,

Pour 4 Cartes significantes - $\frac{2n-5}{2(n-1)(n-3)}$,

Pour 5 Cartes significantes - $\frac{5n-10}{4(n-1)(n-3)}$,

Pour 6 Cartes significantes - $\frac{3(2nn-13n+16)}{4(n-1)(n-3)(n-5)}$,

Pour 7 Cartes significantes - $\frac{7(2nn-12n+13)}{8(n-1)(n-3)(n-5)}$,

Pour 8 Cartes significantes - $\frac{4n^3 - 50nn + 176n - 151}{2(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)}$.

*Remarque III.*

25. Il est difficile de découvrir une loi dans ces expressions; aufi n'en faut il pas chercher parmi toutes, puisque la première & la seconde sont assujetties à des irrégularités, qui n'ont pas lieu dans les suivantes. Or, si nous négligeons ces anomalies des cas d'une & deux cartes significantes, l'avantage se trouve au premier $= 0$, & au second $= \frac{1}{2(n-1)}$; & ce sont les formules, qui avec les suivantes doivent observer une certaine loi de progression.

Remarque IV.

26. Quelque embrouillée que paroisse cette loi, elle paroitra assez clairement, si nous décomposons les fractions trouvées en des fractions simples selon les facteurs du dénominateur de chacune. Par ce moyen on changera ces expressions dans les suivantes:

N. des Cartes sign.	Avantage du Banquier
.....	0
.....	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1}$
3	$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{n-1}$
4	$\frac{1}{8} \left(\frac{6}{n-1} + \frac{2}{n-3} \right)$
5	$\frac{1}{8} \left(\frac{10}{n-1} + \frac{10}{n-3} \right)$
6	$\frac{1}{5 \cdot 2} \left(\frac{15}{n-1} + \frac{30}{n-3} + \frac{3}{n-5} \right)$
7	$\frac{1}{8 \cdot 4} \left(\frac{21}{n-1} + \frac{70}{n-3} + \frac{21}{n-5} \right)$
8	$\frac{1}{8 \cdot 8} \left(\frac{28}{n-1} + \frac{110}{n-3} + \frac{84}{n-5} + \frac{4}{n-7} \right)$.

En

En considérant ces formules, on y découvrira aisément la loi de la progression, & posant en général le nombre des cartes significantes = v , le nombre de toutes les cartes étant, = n l'avantage du Banquier sera :

$$\frac{1}{2^{v-1}} \left(\frac{v(v-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n-1} + \frac{2v(v-1)(v-2)(v-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{n-3} + \frac{3v(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)(v-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \frac{1}{n-5} + \text{etc.} \right),$$

qui se change en celle-ci :

$$\frac{v}{2} \left(\frac{v-1}{1(n-1)} + \frac{(v-1)(v-2)(v-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 (n-3)} + \frac{(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)(v-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 (n-5)} + \&c. \right).$$

P R O B L E M E G É N É R A L.

27. Le nombre de toutes les cartes étant = n , si le nombre des cartes significantes est = v , trouver l'avantage du Banquier

S O L U T I O N.

Nous venons de voir que l'avantage du Banquier sera :

$$\frac{v}{2} \left(\frac{v-1}{1(n-1)} + \frac{(v-1)(v-2)(v-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 (n-3)} + \frac{(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)(v-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 (n-5)} + \&c. \right),$$

excepté les cas, où l'on a $v = 1$, ou $v = 2$. Or, si nous considérons cette progression, nous verrons aisément, qu'elle peut être renfermée dans une expression finie intégrale.

$$\frac{v}{2^{v+1}} \left(\int z^{n-1} dz \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{v-1} - \int z^{n-1} dz \left(1 - \frac{1}{z} \right)^{v-1} \right).$$

Car, ayant pris ces integrales en sorte qu'elles évanouissent posant $z = 0$, on n'a qu'à mettre ensuite $z = 1$.

En observant cette regle dans les intégrations, l'avantage du Banquier pourra aussi être exprimé en sorte :

$$\frac{v}{2^{v+1}} \left(\int z^{n-1} dz (z + 1)^{v-1} - \int z^{n-1} dz (z - 1)^{v-1} \right),$$

posant après l'intégration $z = 1$. On voit d'abord que cette formule

mule ne fauroit avoir lieu, à moins qu'il ne soit $n > v$, puisqu'on ne fauroit rendre l'intégrale $= 0$, au cas $x = 0$, ce qui est conforme à la nature de la question.

Remarque I.

28. Suivant la méthode directe nous aurions eu à sommer cette progression :

$s = (n-2) \dots (n-v+1) + (n-4) \dots (n-v-1) + \dots + 0$,
& l'avantage du Banquier auroit été :

$$x = \frac{v(v-1)s}{n(n-1)(n-2)\dots(n-v+1)}$$

Donc, réciproquement, on obtiendra la somme de la progression :

$$s = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-v+1)}{(v-1)2^{v-1}} (\int x^{n-1} dx (x+1)^{v-1} - \int x^{n-1} dx (x-1)^{v-1}),$$

Remarque II.

29. Or, posant $n - 1 = 2t$, ou $n = 2t + 1$, la quantité s marque la somme d'une progression algébrique, dont le terme général, ou celui qui répond à l'exposant t , est

$$T = 2t(2t-1)(2t-2)(2t-3)\dots(2t-v+3).$$

Et partant nous pourrions assigner la somme S. T qui convient à ce terme général, par l'expression intégrale suivante.

$$S.T = \frac{(t+1)(2t+1)}{(v-1)2^v} T (\int x^{2t+2-v} dx ((x+1)^{v-1} - (x-1)^{v-1})).$$

Remarque III.

30. Mais, en développant cette formule intégrale, nous aurons :

$$S.T = \frac{(t+2)(2t+1)}{2^{v-1}} T \left(\frac{1}{2^{v+1}} + \frac{(v-2)(v-3)}{2 \cdot 3 (2t-1)} + \frac{(v-2)(v-3)(v-4)(v-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 (2t-3)} + \dots \right),$$

& cette sommation est juste, quelques nombres entiers qu'on mette pour les lettres t & v , en sorte que $v < 2t + 2$, ou plutôt que v ne soit pas plus grand que $2t + 2$. Cette somme répond donc au terme général,

$$T = 2t(2t-1)(2t-2)(2t-3)\dots(2t-v+3),$$

l'exposant du dernier terme de la progression étant $= t$.

