SOLUTION
D'UNE
QUESTION CURIEUSE QUI NE PAROIT SOUMISE À AUCUNE ANALYSE,
PAR M. EULER.

I.

Je me trouvai un jour dans une compagnie, où, à l'occaſion du jeu d'echecs quelqu'un propoſa cette queſtion: *de parcourir avec un cavalier toutes les caſes d'un échiquier, ſans parvenir jamais deux fois à la même, & en commençant par une caſe donnée.* On mettoit pour cette fin des jettons ſur toutes les 64 caſes de l'échiquier, à l'exception de celle où le Cavalier devoit commencer ſa route; & de chaque caſe où le Cavalier paſſoit conformément à ſa marche, on ôtoit le jetton, de ſorte qu'il s'agiſſoit d'enlever de cette façon ſucceſſivement tous les jettons. Il faloit donc éviter d'un côté, que le cavalier ne revint jamais à une caſe vuide, & d'un autre côté il faloit diriger en ſorte ſa courſe, qu'il parcourut enfin toutes les caſes.

2. Ceux qui croyoient cette queſtion aſſez aiſée firent pluſieurs eſſais inutiles ſans pouvoir atteindre au but; après quoi celui qui avoit propoſé la queſtion, ayant commencé par une caſe donnée, a ſçu ſi bien diriger la route, qu'il a heureuſement enlevé tous les jettons. Cependant la multitude des caſes ne permettoit pas qu'on ait pû imprimer à la mémoire la route qu'il avoit ſuivie; & ce n'étoit qu'après pluſieurs eſſais, que j'ai enfin rencontré une telle route, qui ſatisfit à la queſtion; encore ne valoit-elle que pour une certaine caſe initiale. Je ne me ſouviens plus, ſi on lui a laiſſé la liberté de la choiſir lui-même; mais il a très poſitivement aſſuré qu'il étoit en état de l'éxécuter, quelle que ſoit la caſe où l'on voulut qu'il commençat.

3.

3. Pour éclaircir mieux cette queſtion, j'ajouterai ici une route, où, en commençant par un coin de l'échiquier, on parcourt toutes les caſes:

42	59	44	9	40	21	46	7
61	10	41	58	45	8	39	20
12	45	60	55	22	57	6	47
53	62	11	30	25	28	19	38
32	13	54	27	56	23	48	5
63	52	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	64	15	34	3	50	17	36

J'ai marqué ici les caſes par l'ordre des nombres, ſuivant lequel elles ſont ſucceſſivement parcourues. Ainſi le cavalier ayant été poſé dans la caſe 1 ſaute en 2, de là en 3, & depuis en 4, 5, 6, &c. jusqu'à ce que venant enfin dans la caſe 64 il aura paſſé toutes les caſes. Il eſt évident, que cette route ſatisfait également, quand on veut commencer par quelqu'un des autres angles.

4. En retournant par la même route on pourra auſſi commencer par la caſe 64, & de là en paſſant ſucceſſivement par les caſes 63, 62, 61, &c. on parviendra enfin, après avoir parcouru toutes les caſes, à celle du coin 1. Mais cette route ne ſervira de rien, quand on doit commencer par quelque autre caſe: & alors on ſera obligé de chercher par des eſſais une nouvelle route, dont le commencement ſoit dans la caſe donnée. Or on reconnoitra aiſément, qu'une telle ſolution du probleme propoſé ſeroit trop pénible, & ne conviendroit pas au but en vue; ou il s'agit de trouver promtement la route, qu'il faut ſuivre. D'ailleurs une telle recherche ne merite aucune attention, à moins qu'elle ne ſoit fondée ſur quelques principes; ou qu'on ne la puiſſe ſoumettre à quelque eſpece d'Analyſe, qui en dirige les opéracions

5. Ce n'eſt auſſi que dans cette vue que j'oſe propoſer mes recherches ſur cette queſtion: auxquelles j'ai été conduit par une idée

tou-

toute particpliere, que Mr. Bertrand de Geneve m'a fournie; car, quoiqu'elle ſoit legere en elle-même, & tout à fait étrangere à la Géométrie, elle doit être regardée comme très remarquable, dès qu'on aura trouvé moyen d'y appliquer l'Analyſe. Or je ferai voir qu'elle eſt ſuſceptible d'une analyſe tout particuliere, qui doit mériter d'autant plus d'attention, que cette analyſe demande des raiſonnemens peu uſités ailleurs. On convient aiſément de l'excellence de l'Analyſe, mais on la croit communément bornée à de certaines recherches, qu'on rapporte aux Mathématiques; & partant il ſera toujours fort important d'en faire uſage dans des matieres qui lui ſemblent refuſer tout accès: puisqu'il eſt certain qu'elle renferme l'art de raiſonner dans le plus haut degré. On ne ſauroit donc étendre les bornes de l'Analyſe, ſans qu'on ait raiſon de s'en promettre de très grands avantages.

6. Or d'abord je remarque, qu'on pourroit ſatisfaire à la queſtion, ſi l'on trouvoit une telle route, où la derniere caſe marquée par 64 ſeroit éloignée de la premiere 1 d'un ſaut de cavalier, de ſorte qu'il pourroit ſauter de la derniere ſur la premiere. Car, ayant trouvé une telle route rentrante en elle-même, on pourra commencer par quelque caſe que ce ſoit, & de là continuer la courſe ſuivant l'ordre des nombres jusqu'à la caſe marquée par 64, d'où, en ſautant à celle qui eſt marquée par 1, il acheveroit la courſe jusqu'à retourner à celle d'où il étoit parti. Or voilà une telle route rentrante en elle-même,

42	57	44	9	40	21	46	7
55	10	41	58	45	8	39	20
12	43	56	61	22	59	6	47
63	54	11	30	25	28	19	38
32	13	62	27	60	23	48	5
53	64	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	52	15	34	3	50	17	36

7.

7. Ayant donc bien imprimé à la mémoire une telle route, on ſera en état de ſatisfaire à la queſtion en commençant par une caſe quelconque. Car, ſoit par exemple la caſe marquée par 25, d'où le cavalier doit partir, & on n'aura qu'à le faire marcher ſucceſſivement par les caſes 26, 27, 28 . . . . . jusqu'à 64, d'où paſſant à la caſe 1, il pourſuivra ſa route par les caſes 2, 3, 4, jusqu'à ce qu'il ſoit parvenu à celle qui eſt marquée par 24: & ainſi il aura parcouru toutes les caſes de l'échiquier. J'indiquerai cette route en repréſentant les nombres qui marquent les caſes, en ſorte

25 . . . . 64. 1 24,

& il eſt évident qu'on réuſſira également en commençant par toute autre caſe: ainſi cette diſpoſition

46 . . . . 64. 1 45

ſervira, quand on doit commencer par la caſe 46.

8. Il eſt auſſi évident que la même diſpoſition fournit, pour chaque caſe où l'on doit commencer, une double route: puisqu'on peut également paſſer de la caſe marquée contre l'ordre des nombres jusqu'à celle qui contient 1, & de là ſautant en 64 continuer la courſe par les caſes 63, 62, 61, &c. jusqu'à ce qu'on parvienne à celle où l'on a commencé. Que le nombre 40 indique la caſe d'où il faut partir, & on aura ces deux routes à pourſuivre:

40. 41 . . . . 64. 1. 2 39,

& 40. 39 . . . . 1. 64. 63 41,

où la premiere finit par la caſe 39, & l'autre par 41. Toute autre diſpoſition rentrante en elle-même fournira les mêmes avantages, & il ſuffit d'en ſavoir une ſeule par-coeur: mais on comprendra aiſément, que ce ſeroit un ouvrage extrêmement embarraſſant, que de trouver en tâtonnant par pluſieurs eſſais une telle diſpoſition, & qu'on riſqueroit de n'y réuſſir peut-être jamais.

9. Je m'en vai donc expliquer une méthode certaine, qui nous conduira infailliblement au but proposé, & par le moyen de laquelle on sera en état de découvrir autant de routes satisfaisantes qu'on voudra: car, quoique le nombre de ces routes ne soit pas infini, il sera toujours si grand, qu'on ne le sauroit jamais épuiser. Mais il faut ici distinguer deux especes de routes, l'une qui parcourt simplement toutes les cases de l'échiquier sans que le cavalier puisse sauter de la derniere à la premiere; l'autre espece est celle des routes rentrantes en elles mêmes, où le cavalier, après avoir parcouru toutes les cases, peut sauter de la derniere à la premiere. J'ai donné un exemple de la premiere espece dans le §. 3. & un de la seconde dans le §. 6. l'on peut regarder l'un & l'autre comme trouvé par hazard en tâtonnant; mais la méthode que j'expliquerai, servira à en trouver autant qu'on voudra, tant de l'une que de l'autre espece.

10. Comme il est beaucoup plus difficile de trouver par les seuls essais une route de la seconde espece, je commencerai par donner une méthode, par le moyen de laquelle on pourra, après avoir trouvé une route de la premiere espece, en découvrir non seulement une, mais plusieurs de la seconde espece. Pour cet effet, je remarque d'abord qu'on peut en plusieurs manieres changer la derniere case, celle du commencement demeurant la même. Considérons la route rapportée §. 3. & qu'on marque les cases auxquelles le cavalier pourroit passer de la derniere marquée par 64; or on verra que ces cases sont 63, 31, & 51; dont la premiere, qui renferme le saut dejà employé à 64, n'est d'aucun usage. Mais, puisqu'on peut passer de la case 31 à la case 64, qu'on fasse ce saut après être parvenu de la case 1 par les cases 2, 3, 4, &c. à celle de 31, & depuis qu'on poursuive la route par les cases 64, 63, 62, &c. jusqu'à ce qu'on parvienne à la case 32 qui sera à présent la derniere: cette nouvelle route, sera représentée en sorte

1. 2 . . . . . . 31. 64. 63. . . . . . . 32.

11. De

11. De même, le ſaut de 64 à 51 nous donne à connoitre, qu'on peut paſſer de la caſe 51 à 64: & de là en pourſuivant la route par les caſes 63, 62, &c. la derniere ſera celle qui eſt marquée par 52: cette route entiere ſera donc repréſentée en ſorte:

1. 2 . . . . 51. 64. 63 . . . . 52.

Maintenant, puisque cette derniere caſe 52 fournit un ſaut à la premiere, cette route ſe rapporte à la ſeconde eſpece, & eſt rentrante en elle-même: & c'eſt préciſément la route décrite au §. 6. Quand on ne ſeroit pas encore parvenu à une route rentrante, on pourroit de nouveau transformer celle que nous venons de trouver au §. précédent:

1 . . . . 31. 64 . . . . 32.

où la derniere étant 32, le cavalier en peut ſauter aux caſes 43, 11, 31, 33, ainſi on n'aura qu'à renverſer la partie de cette route compriſe entre l'un de ces nombres & le dernier 32.

12. Le nombre 43 fournira donc cette nouvelle route

1 . . . . . 31. 64 . . . . . 43. 32 . . . . . 42;

où la caſe angulaire 42 eſt la derniere. Le ſecond nombre 11 donnera cette route:

1 . . . . . 11. 32 . . . . . 64. 31 12,

où la caſe marquée de 12 eſt à préſent la derniere. Le troiſieme nombre 31 rend la routè principale, d'où nous avons tiré ces nouvelles ſavoir

1 . . . . 31. 32 64,

& le quatrieme nombre 33 ne change rien dans la route que nous traitons. La route précédente, qui finiſſoit par 12, puisque le cavalier peut ſauter de 12 à ces caſes 59, 41, 11, & 13, fournira ces transformées.

1 . . . . 11. 32 . . . . 59. 12 . . . . 31. 64 61,
1 . . . . 11. 32 . . . . 41. 12 . . . . 31. 64 42,

& celle-là, puisque 60 conduit aux cases 61, 59, 9, 45, 25, 27, 13, & 53, nous ménera à plusieurs nouvelles routes, où les dernieres cases seront 10, 46, 26, 28, 14, & 54.

13. Voilà donc une source bien riche, d'où l'on peut puiser quantité de nouvelles routes, en ayant une fois trouvé une seule: & le nombre des transformations devient encore plus grand, quand on renverse l'ordre de la premiere route en sorte

64 1,

où la derniere case tenant à 52 fournit cette transformée

64 . . . . 52. 1 51

& puisque 51 donne un saut à 64, cette route est rentrante en elle-même, mais elle n'est que la renversée de celle de dessus. Or 51 étant lié avec 64, 52, 54, 56, 26, & 50, fournit ces transformées

64 . . . . . 54. 51 . . . . . 1. 52. 53
64 . . . . . 56. 51 . . . . . 1. 52 . . 55
64 . . . . . 52. 1 . . . . . 26. 51 . . . 27,

& de celles-ci, si l'on veut, on peut encore trouver quantité d'autres: parmi lesquelles on ne manquera pas d'en découvrir qui sont rentrantes en elles-mêmes.

14. Or, en ayant déjà trouvé une, qui est rentrante en elle-même, comme est celle du §. 6. il n'est pas difficile d'en tirer plusieurs autres de même nature: on n'a qu'à arranger les cases en sorte que, tant la premiere que la derniere, se trouve éloignée des bandes, puisqu'alors l'une & l'autre permet 8 sauts. Ainsi, si nous rangeons les nombres de la route §. 6. en sorte

31 . . . . 64. 1 30,

la

la derniere caſe 30 étant jointe à celles-ci: 45, 59, 23, 29, 31, 13, 43, 41, fournit ces transformées

I.	31 . . . . . 45.	30 . . . . 1.	64	46,
II.	31 . . . . . 59.	30 . . . . 1.	64	60,
III.	31 . . . . . 64.	1 . . . . 23.	30	24,
IV.	31 . . . . . 64.	1 . . . . 13.	30	14,
V.	31 . . . . . 43.	30 . . . . 1.	64	44,
VI.	31 . . . . . 41.	30 . . . . 1.	64	42,

où la II. & la IV. ſont rentrantes en elles-mêmes: & tant de celles-ci que des autres on pourra trouver par des transformations ultérieures pluſieurs autres. Comme la III donne

31 . . . . 64. 1 . . . . 13. 24 . . . . 30. 23 14
31 . . 33.24 . . . 30. 23 . . . . 1. 64 34
31 . . . . 64. 1 . . . . 15. 24 . . . . 30. 23 16

15. Mais, quand on n'a pas encore une route de la premiere eſpece, voyons comment il faut s'y prendre pour en trouver une ſans ſe livrer au ſeul hazard. En commençant par une caſe quelconque, qu'on continue à volonté les ſauts du cavalier auſſi loin qu'on pourra, & qu'on mette dans les caſes qui ſont reſtées vuides, des lettres qui leur ſervent de ſigne, comme dans cette figure:

34	21	54	9	32	19	48	7
55	10	33	20	53	8	31	18
22	35	62	*a*	40	49	6	47
11	56	41	50	59	52	17	30
36	23	58	61	42	39	46	5
57	12	25	38	51	60	29	16
24	37	2	43	14	27	4	45
1	*b*	13	26	3	44	15	28

Ici j'ai pu continuer la route jusqu'à la case marquée par 62, & dans les lettres *a* & *b*.

16. Maintenant, ayant 62 cases parcourues par le cavalier, je les représente de cette maniere

1 62,

& regardant la case 62 comme la derniere, je cherche des transformées, qui finissent par d'autres cases, d'où il y ait un passage sur l'une des cases *a* ou *b*. Or la case 62 communique avec celles-ci 9, 53, 59, 61, 23, 11, 55, & 21, d'où nous tirons ces transformées:

I. 1 . . . . 9. 62 . . . . 10, d'où l'on passe en *a*

II. 1 . . . . 53. 62 . . . 54, d'où l'on passe en *a*

III. 1 . . . . 59. 62 . . 60

IV. 1 . . . . 23. 62 24

V. 1 . . . . 11. 62 12

VI. 1 . . . . 55. 62 . . . . 56, d'où l'on passe en *a*

VII. 1 . . . . 21. 62 . . . . . 22.

Donc les routes I, II, & VI, s'étendent déjà jusqu'à la case *a*, & il n'y reste plus vuide que la seule case *b*, & pour la lier avec les autres on n'a qu'à transformer une de ces trois routes par la même méthode. On opéreroit semblablement s'il étoit resté plusieurs cases vuides.

17. Prenons la premiere transformée

1 . . . . 9. 62 . . . . 10. *a*,

dont la derniere case *a* conduit à 32, 8, 52, 42, 58, 56, 10, & 54, parmi lesquelles 58 fournit cette transformée

1 . . . . . 9. 62 . . . . . 58. *a*. 10 57

dont la derniere 57 conduit à la case *b*, de sorte qu'à présent le cavalier aura parcouru toutes les cases, ayant commencé sa course en 1, & fini en *b*.

1 . . . . . 9. 62 . . . . 58. *a*. 10 . . . . . . 57. *b*.

Mais

Mais cette route n'est pas rentrante en elle-même. Pour lui procurer cet avantage, cherchons de nouvelles transformées, la derniere *b* conduisant à ces cases: 57, 25, 43: dont 25 donne cette transformée

1 . . . . 9. 62 . . . . 58. *a.* 10 . . . . 25. *b.* 57 26,

où la derniere conduit à 37, 25, & 51, & 27. Or aucune ne fournit une route de la seconde espece. Prenons donc 43.

1 . . . . 9. 62 . . . 58. *a.* 10 . . . . 43. *b* 57 44,

dont la derniere 44 conduit à 43, 51, 29, & 45: dont aucune ne donne immédiatement une route rentrante en elle-même.

18. Il faudra donc passer à de nouvelles transformées, & pour que cela se puisse faire plus aisément, il sera bon de présenter la route trouvée de la premiere espece par l'ordre naturel des nombres.

40	27	60	9	38	25	54	7
61	16	39	26	59	8	37	24
28	41	10	15	46	55	6	53
17	62	47	56	13	58	23	36
42	29	14	11	48	45	52	5
63	18	31	44	57	12	35	22
30	43	2	49	20	33	4	51
1	64	19	32	3	50	21	34

où la route étant représentée en sorte

1 64,

& la derniere 64 conduisant à 63, 31, 49, on aura deux transformées:

I. 1 . . . . 31. 64 32,

II. 1 . . . . 49. 64 50,

car la case 63 ne change rien dans la proposée.

19. Puisqu'il n'y a que deux cases qui aboutissent à la premiere 1, renversons ces deux transformées pour avoir:

I. 32 . . . . . 64. 31 1,
II. 50 . . . . . 64. 49 1,

& maintenant, la derniere 1 conduisant à 2 & 18, nous en tirons ces deux nouvelles:

A. 32 . . . . . . 64. 31 . . . . . . 18. 1 17,
B. 50 . . . . . . 64. 49 . . . . . . 18. 1 17,

où la derniere 17 conduisant à 16, 10, 14, 18, nous obtiendrons

C. 32 . . . . 64. 31 . . . . 18. 1 . . . . 10. 17 11,
D. 50 . . . . 64. 49 . . . . 18. 1 . . . . 10. 17 11,
E. 32 . . . . 64. 31 . . . . 18. 1 . . . . 14. 17 15,
F. 50 . . . . 64. 49 . . . . 18. 1 . . . . 14. 17 . . . . 15.

La derniere 11 conduit à 46, 58, 12, 20, 2, 18, 62, 10, & donne

G. 32 . . . 46.11 . . . 17.10 . . . 1.18 . . 31.64 . . . 47,
H. 50 . . . 64.49 . . . 46.11 . . . 17.10 . . . 1.18 . . . 45,
I. 32 . . . 58.11 . . . 17.10 . . . 1.18 . . 31.64 . . . 59,
K. 50 . . . 58.11 . . . 17.10 . . . 1.18 . . 49.64 . . . 59,
L. 32 . . . 64.31 . . . 20.11 . . 17.10 . . . 1.18.19,
M. 50 . . . 64.49 . . . 20.11 . . 17.10 . . . 1.18.19,
N. 32 . . . 64.31 . . . 18.1.2.11 . . . 17.10 . . 3,
O. 50 . . . 64.49 . . . 18.1.2.11 . . . 17.10 . . 3,
P. 32 . . . 62.11 . . . 17.10 . . . 1.18 . . 31.64.63,
Q. 50 . . . 62.11 . . . 17.10 . . . 1.18 . . 49.64.63.

20. Or

20. Or E & F dont la derniere 15 conduit à 33, 8, 58, 48, 14, 62, 16, 60, donneront ces transformées:

g. 32 . . 38. 15 . . . 17. 14 . . . 1. 18 . . . 31. 64 . . 39,
h. 50 . . 64. 49 . . . . 38. 15 . . 17. 14 . . . 1. 18 . . . 37,
i. 32 . . 64. 31 . . . . 18. 1 . . . 8. 15 . . . 17. 14 . . 9,
k. 50 . . 64. 49 . . . . 18. 1 . . . 8. 15 . . . 17. 14 . . 9,
l. 32 . . 58. 15 . . . 17. 14 . . . 1. 18 . . . 31. 64 . . 59,
m. 50 . . 58. 15 . . . 17. 14 . . . 1. 18 . . . 49. 64 . . 59,
n. 32 . . 48. 15 . . . 17. 14 . . . 1. 18 . . . 31. 64 . . 49,
o. 50 . . 64. 49. 48. 15 . . 17. 14 . . 1. 18 47,
p. 32 . . 62. 15 . . . 17. 14 . . . 1. 18 . . . 31. 64. 63,
q. 50 . . 62. 15 . . . 17. 14 . . . 1. 18 . . . 49. 64. 63,
r. 32 . . 60. 15 . . . 17. 14 . . . 1. 18 . . . 31. 64 . . 61,
s. 50 . . 60. 15 . . . 17. 14 . . . 1. 18 . . . 49. 64 . . 61,

Mais, parmi toutes ces transformées, il ne s'en trouve pas encore une qui soit rentrante en elle-même, mais leurs transformées ultérieures en fourniront assez.

21. Prenons la route indiquée par la lettre G, où la derniere case 47 communiquant avec celles-ci: 26, 46, 48, 44, 18, 42, 28, 16, les dernieres cases qu'on aura par ces transformations, seront: 27, 11, 47, 45, 19, 43, 29, 17, dont 43 communique avec la premiere 32, & donne par conséquent cette route rentrante,

32 . . 42. 47 . . 64. 31 . . 18. 1 . . 10. 17 . . 11. 46 . . 43,

laquelle pourra donc être représentée en sorte

1 . . 10. 17 . . 11. 46 . . 43. 32 . . 42. 47 . . 64. 31 . . 18,

& marquant les cases par l'ordre naturel des nombres, on aura cette route rentrante.

30	55	46	9	28	57	40	7
47	12	29	56	45	8	27	58
54	31	10	13	18	41	6	39
11	48	33	42	15	44	59	26
32	53	14	17	34	19	38	5
49	64	51	20	43	16	25	60
52	21	2	35	62	23	4	37
1	50	63	22	3	36	61	24

22. La route indiquée par la lettre H ayant 45 pour sa derniere case, les cases

communiquantes sont: 6, 36, 22, 4, 20, 44, 56, 46,

& les dernieres seront: 5, 37, 23, 3, 21, 45, 57, 11,

où 57 communique avec la premiere 50, d'où résulte cette route rentrante:

50 . . 56.45 . . 18.1 . . 10.17 . . 11.46 . . 49.64 . . 57;

qui pourra aussi être représentée en sorte:

1 . . 10.17 . . 11.46 . . 49.64 . . 57.50 . . 56.45 . . 18,

42	55	26	9	44	57	34	7
25	12	43	56	27	8	45	58
54	41	10	13	18	35	6	33
11	24	19	36	15	28	59	46
40	53	14	17	20	37	32	5
23	64	51	38	29	16	47	60
52	39	2	21	62	49	4	31
1	22	63	50	3	30	61	48

qui ne differe pas beaucoup de la précédente.

23. Les routes indiquées par I & K ayant la derniere case 59, on aura

les cases communiquantes: 54, 6, 58, 56, 10, 60,

les dernieres pour I seront: 55, 5, 11, 57, 9, 59,

or les dernieres pour K: 55, 5, 11, 57, 9, 59,

d'où nous tirons encore deux rentrantes, puisque 57 communique tant avec 32 que 50: savoir

32 . . 56.59 . . 64.31 . . 18.1 . . 10.17 . . 11.58.57,

50 . . 56.59 . . 64.49 . . 18.1 . . 10.17 . . 11.58.57,

qui pourront être représentées en sorte:

1 . . 10.17 . . 11.58.57.32 . . 56.59 . . 64.31 . . 18,

1 . . 10.17 . . 11.58.57.50 . . 56.59 . . 64.49 . . 18,

De même, les routes L & M finissant par 19, on aura

les cases communiquantes avec 19 - - 30. 18. 44. 20,

de là les dernieres pour L - - - - 29. 19. 45. 11,

- - - - - - - pour M - - - - 29. 19. 43. 11,

où il n'y a aucune rentrante. Les routes N & O finissant par 3, on aura par rapport à cette derniere:

les cases communiquantes - - - - 2, 44, 12, 4,

alors la derniere devient pour N - - 11, 45, 13, 3,

- - - - - - - - pour O - - 11, 43, 13, 3,

où il n'y en a point non plus.

24. S'il valoit la peine, on pourroit, en poursuivant ces transformations, trouver plusieurs autres routes rentrantes en elles-mêmes, & on ne manqueroit pas de découvrir des moyens pour abréger les opérations, en achevant deux ou plusieurs à la fois, afin qu'on arrive plutôt au but proposé. Aussi n'est-ce pas mon dessein d'assigner tou-

tes les routes poſſibles, qui ſoient rentrantes en elles-mêmes, ce qui ſeroit un ouvrage auſſi pénible qu'inutile; & je me contente d'avoir donné une méthode ſure pour trouver autant de routes qu'on voudra; méthodedont l'application n'eſt pas difficile en chaque cas. Mais on peut ajouter à la queſtion principale encore des conditions, qui la rendent plus curieuſe, comme ſi l'on exigeoit, que les nombres qui ſe trouvent dans des caſes oppoſées ayent la même différence, qui doit être 32 comme la moitié du nombre de toutes les caſes. Or chaque caſe en a une, qui lui eſt oppoſée, de ſorte que la ligne droite tirée par les centres de ces deux caſes diviſe le quarré en deux parties égales. On demande donc que les nombres 33, 34, 35, 36 . . . . 64, ſe trouvent à l'oppoſite des nombres 1, 2, 3, 4 . . . . 32.

25. Pour trouver de telles routes diagonales, on n'a qu'à commencer par écrire les nombres 1, 2, 3, 4, &c. conformément à la marche du cavalier, & à meſure qu'on écrit ces nombres, mettre les nombres 33, 34, 35, 36, &c. dans les caſes oppoſées, & pour ſuivre cet arrangement, tant qu'on pourra: comme on peut le voir par la figure ci-jointe

10	29	48	35	8	31	46	33
49	36	9	30	47	34	7	58·
28	11	A	C	*f*	45	32	19·
37	50	B	D	*e*	6	59	44
12	27	38	E	*d*	*b*	18	5
51·	64	13	F	*c*	*a*	43	60
26·	39	2	15	62	41	4	17
1	14	63	40	3	16	61	42

Ici j'ai pu continuer la ſuite des nombres 1, 2, 3, jusqu'à 19, & celle des nombres 33, 34, 35, jusqu'à 51. Mais en rétrogradant je ſuis paſſé de 1 par 64, 63 jusqu'à 58, & de 33 j'ai pu reculer jusqu'à 26. Douze caſes ſont reſtées vuides que j'ai remplies des lettres A, *a*, B, *b*, C, *c*, D, *d*, E, *e*, F, *f*, diſpoſées par des caſes oppoſées.

26.

26. Nous avons donc deux ſéries ſéparées de caſes, qui ſe ſuivent ſelon la marche du cavalier:

58 . . . . . 64. 1 19,

29 . . . . 51.

La caſe 19 aboutiſſant à 6, nous aurons ces transformées, qui pourront être continuées plus loin:

58 . . . . 64. 1 . . . . 6. 19 . . . . 7, *f*, B, *d*, C,

26 . . . . 38. 51 . . . . . 39, F, *b*, D, *c*,

Maintenant, la caſe C communiquant aux caſes de la premiere ſuite, 8, 6, *d*, ne fournit pas de nouvelles transformations. Mais retranchons les deux dernieres, & puisqu'il ſuffit de transformer une ſeule ſuite, parce que l'autre en eſt déterminée, prenons la premiere

58 . . . . 64. 1 . . . . 6. 19 . . . . 7, *f*, B,

où B aboutiſſant à 12 donne cette transformée à continuer

58 . . . . 64. 1 . . . 6. 19 . . . 12. B. *f*. 7 . . . 11. D. *c*.

Or *c* étant communicable à 16, on aura

58 . . 64. 1 . . 6. 19 . . 16. *c*. D. 11 . . 7. *f*. B. 12 . . 15. *a*. E,

& l'autre ſuite ſera

26 . . . . 38. 51 . . 48. C. *d*. 43 . . 39. F. *b*. 44 . . 47. A. *e*,

où toutes les caſes ſont compriſes.

37. Maintenant il faut lier ces deux ſuites enſemble, en ſorte que la fin de l'une aboutiſſe au commencement de l'autre. Pour cet effet transformons la premiere dont la fin E communique avec la caſe 62, & la fin devenant alors 63 ſera cohérente avec le commencement de l'autre 26. Cette transformation donne donc:

58 . . 62. E. *a*. 15 . . 12. B. *f*. 7 . . 11. D. *c*. 16 . . 19. 6 . . 1. 64 . . 63

26 . . 30. *e*. A. 47 . . 44. *b*. F. 39 . . 43. *d*. C. 48 . . 51. 38 31

& on a en même tems une route rentrante en elle-même, & douée de la condition prescrite:

14	59	42	35	16	31	54	33
41	36	15	58	55	34	17	30
60	13	56	43	18	53	32	7
37	40	19	12	57	6	29	52
20	61	38	25	44	51	8	5
39	64	21	50	11	24	45	28
62	49	2	23	26	47	4	9
1	22	63	48	3	10	27	46

28. Ayant trouvé une seule route de cette nature, il est aisé de la transformer en plusieurs manieres différentes en lui conservant la même propriété. Car, de quelque maniere qu'on partage la suite rentrante des nombres 1 . . . . 64 en deux moitiés, l'une contient toujours les cases opposites de l'autre; comme on peut voir par ces bisections:

1 . . . 32	2 33	3 34	4 35
33 . . . 64	34 . . . 64. 1	35 . . . 64. 1. 2	36 . . 64. 1 . . 3

où les deux moitiés sont toujours cohérentes. Maintenant, on n'a qu'à prendre une telle bisection à volonté, & transformer les deux moitiés semblablement, jusqu'à ce qu'elles redeviennent cohérentes. Ainsi, prenons la moitié 3 . . . . . . 34 dont le bout 34 communiquant à 7 donne la transformée 3 . . . 7. 34 . . . 8, & par renversement 8 . . . 34. 7 . . . 3, dont le bout 3 communiquant à 24 donne

8 . . . . 24. 3 . . . . . . 7. 34 25,

& l'autre moitié sera

40 . . . . 56. 35 . . . . 39. 2. 1. 64. 1 . . 57,

qui

qui sont cohérentes par leurs bouts 25, 40, & 8, 57. Nous pourrons donc représenter en sorte cette nouvelle route:

1. 2. 39 . . . . 35.56 . . . . 40.25 32,
33.34.7 . . . . 3.24 . . . . 8.57 . . . . 64.

29. La même moitié 3 . . . . . 34, puisque le premier bout 3 communique à 24, donne par la transformation:

23 . . . . . 3.24 34,

& 34 communiquant à 7 donne

23 . . . . . 7.34 . . . . . 24.3 6,

& l'autre moitié sera

55 . . . . . 39.2.1.64 . . . 56.35 38,

qui est cohérente. Par conséquent nous aurons une route représentée par ces deux moitiés:

1. 2. 39 . . . . 55.6 . . . . 3.24 32,
33.34.7 . . . . 23.38 . . . . 35.56 . . . . 64.

La moitié 4 . . . . . . 35, à cause de la communication du bout 35 avec 18, donne

4 . . . . . . 18.35 19,

qui est déjà cohérente avec

36 . . . . . 50.3 . . . 1.64 . . . 51,

d'où nous tirons cette route:

1 . . . 3.50 . . . . . 36.19 32
33 . . . 35.18 . . . . . 4.51 64,

& d'autres transformations de la même moitié donnent

1 . . . 3.50 . . . 43.36. 19 . . . 23.10 . . . 5.24 . . . 32
33 . . . 35.18 . . . 11. 4.51 . . . 55.42 . . . 47.56 . . . 64.

30.

30. Voilà donc 4 autres routes, qui ont la même propriété que celle du §. 27.

50	59	22	7	48	31	10	33
23	6	49	58	9	34	47	30
60	51	8	21	46	11	32	35
5	24	45	52	57	36	29	12
44	61	4	25	20	13	56	37
3	64	43	14	53	40	19	28
62	15	2	41	26	17	38	55
1	42	63	16	39	54	27	18

42	59	6	55	44	31	18	33
5	54	43	58	19	34	45	30
60	41	56	7	46	17	32	35
53	4	47	40	57	20	29	16
48	61	52	25	8	15	36	21
3	64	49	14	39	24	9	28
62	13	2	51	26	11	22	37
1	50	63	12	23	38	27	10

40	59	12	35	38	31	54	33
13	18	39	58	55	34	37	30
60	41	56	11	36	53	32	47
17	14	19	42	57	48	29	52
20	61	16	25	10	51	46	49
15	64	21	4	43	24	9	28
62	5	2	23	26	7	50	45
1	22	63	6	3	44	27	8

40	59	50	35	38	31	48	33
51	12	39	58	49	34	37	30
60	41	56	11	36	47	32	21
55	52	13	42	57	22	29	46
14	61	54	25	10	45	20	23
53	64	15	4	43	24	9	28
62	5	2	17	26	7	44	19
1	16	63	6	3	18	27	8

31. A cette condition des cases opposées on peut encore ajouter celle-ci, que la premiere moitié des nombres 1 . . . . . 32 rem-

rempliſſe ſeule la moitié du quarré, en partageant le quarré par un ligne parallele à un côté

								33	
α	1	*a*	*b*	28	7	14	19	16	ϐ
	24	27	8	*c*	20	17	6	13	
	9	2	25	22	11	4	15	18	
	26	23	10	3	*d*	21	12	5	

en ſorte que les nombres 1 . . . . . . 32 ſe trouvent tous au deſſous de la ligne αϐ, & les autres 33 . . . . 64 au deſſus. Il faut donc que l'unité ſe trouve près de la ligne αϐ, afin qu'elle puiſſe communiquer avec le nombre 64 qui ſe trouve au deſſus.

32. Commençons donc par mettre l'unité à une telle caſe quelconque, & en vertu de l'oppoſition la caſe du nombre 33 ſera auſſi déterminée: & il faudra faire en ſorte qu'elle communique avec celle qui contiendra le nombre 32 au deſſous de la ligne αϐ. En eſſayant une telle diſpoſition je ſuis parvenu jusqu'au nombre 28, & j'ai écrit dans les caſes vuides les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, pour l'arrangement desquelles je fais les transformations ſuivantes. La ſuite 1 . . . . . . 28, puisque 28 aboutit à 27, 25, 11, 17, donne ces transformées:

I. 1 . . . . . 25. 28 . . . . . 26;
II. 1 . . . . . 11. 28 . . . . . 12;
& III. 1 . . . . . 17. 28 . . . . . 18;

dont aucune ne s'étend à une des caſes vuides. Mais après pluſieurs transformations on parvient à celle-ci, qui comprend toutes les caſes,

1 . . . 8. 23 . . 21. 18 . . 20. *b*. 24 . . 28. 17 . . 9. *a*. *c*. *d*.

 qui

qui se transforme enfin en celle-ci:

1 . . . . 8.23 . . 21.18 . . 20.*b*.24 . . 28.17 . . 15.*d*.*c*.*a*.9 . . . 14,

dont la fin 14 communique avec le commencement 33 de l'autre moitié au dessus de la ligne $\alpha\beta$: & la fin de celle-ci 64 communiquera d'elle-même avec la case 1.

33. Voici donc cette route représentée en son entier

	37	62	43	56	35	60	41	50	
	44	55	36	61	42	49	34	59	
	63	38	53	46	57	40	51	48	
	54	45	64	39	52	47	58	33	β
α	1	26	15	20	7	32	13	22	
	16	19	8	25	14	21	6	31	
	27	2	17	10	29	4	23	12	
	18	9	28	3	24	11	30	5	

& il est non seulement aisé d'en trouver par la même méthode plusieurs autres, mais on peut aussi transformer celle-ci en plusieurs manieres: dont voici quelques unes:

7 . . . . 1.8 32

7 . . . . 1.8 . . . 25.32 26

15 . . . 10.7 . . . 1.8.9.16 . . . 21.24 . . . . 32.23.22,

qu'on peut encore renverser, de même que la primitive, en la représentant en sorte

32 1

34. Voilà

34. Voilà donc encore quelques routes de cette eſpece:

	35	62	43	56	37	60	41	50	
	44	55	36	61	42	49	38	59	
	63	34	53	46	57	40	51	48	
	54	45	64	33	52	47	58	39	
α	7	26	15	20	1	32	13	22	β
	16	19	8	25	14	21	2	31	
	27	6	17	10	29	4	23	12	
	18	9	28	5	24	11	30	3	

	35	60	43	56	37	62	41	50	
	44	55	36	61	42	49	38	63	
	59	34	53	46	57	40	51	48	
	54	45	58	33	52	47	64	39	
α	7	32	15	20	1	26	13	22	β
	16	19	8	25	14	21	2	27	
	31	6	17	10	29	4	23	12	
	18	9	30	5	24	11	28	3	

	41	60	37	54	43	58	47	50	
	36	63	42	59	38	49	44	57	
	61	40	53	34	55	46	51	48	
	64	35	62	39	52	33	56	45	
α	13	24	1	20	7	30	3	32	β
	16	19	14	23	2	21	8	29	
	25	12	17	6	27	10	31	4	
	18	15	26	11	22	5	28	9	

	62	37	56	41	60	35	54	47	
	57	42	61	36	55	48	51	34	
	38	63	44	59	40	53	46	49	
	43	58	39	64	45	50	33	52	
α	20	1	18	13	32	7	26	11	β
	17	14	21	8	27	12	31	6	
	2	19	16	23	4	29	10	25	
	15	22	3	28	9	24	5	30	

35. Jusqu'ici j'ai conſidéré la queſtion telle qu'elle avoit été propoſée pour l'échiquier ordinaire diviſé en 64 caſes. Or comme ce nombre eſt trop grand, pour qu'on puiſſe concevoir toutes les variétés qui y peuvent avoir lieu, il ſera bon de conſidérer auſſi quelques figures plus ſimples, qui contiennent un moindre nombre de caſes que le cavalier d'echec doive parcourir. Or d'abord il eſt évident, que, ni un quarré de 4, ni un de 9 caſes n'y eſt propre: mais on verra

 qu'on

qu'on ne sauroit réussir non plus dans un quarré de 16 cases. Car, de quelque maniere qu'on s'y prenne, il restera toujours une case angulaire vuide; & on s'appercevra bientôt, que toutes les transformations qu'on puisse faire, ne sont pas capables de la remplir. Il est clair qu'on devroit commencer, & finir par un coin: & partant deux des quatre cases du milieu seront d'abord remplies, & les deux autres devroient être gardées jusqu'à la fin, ce qui ne se peut pas.

1	8	13	10
14	11	4	7
5	2	9	12
	15	6	3

36. Le premier quarré donc que le cavalier puisse parcourir est celui de 25 cases, qu'on pourra remplir moyennant les mêmes regles, en cas qu'on ne réussisse point au premier essai. Or la marche du cavalier produit toujours cette propriété, que les nombres pairs & impairs se suivent alternativement, comme on peut voir par toutes les figures rapportées jusqu'ici. D'où il est évident, que la derniere case contenant 25 ne sauroit jamais communiquer avec la premiere 1: & partant il est impossible de trouver une route rentrante en elle-même dans le quarré de 25, ni dans aucune autre figure, qui contient un nombre impair de cases. On comprend de là aussi, qu'on ne sauroit jamais commencer par une case qui contient un nombre pair; car, de quelque maniere qu'on transforme cette route, les nombres pairs tomberont toujours dans les mêmes cases, & les cases angulaires contiendront des nombres impairs. Dans ce quarré de 25 il est aussi clair, qu'il faut absolument ou commencer ou finir par une case angulaire.

7	12	17	22	5
18	23	6	11	16
13	8	25	4	21
24	19	2	15	10
1	14	9	20	3

37. Mais voyons aussi les transformations, qu'on peut tirer de cette route 1 . . . . . 25 trouvée du quarré de 25 cases.

Or

Or la derniere communiquant aux cafes 20, 10, 16, 22, 12, 18, 24, 14, fournit ces transformées:

I.	1 . . . 20.25 . . . 21;	II.	1 . . . 10.25 . . . 11;
III.	1 . . . 16.25 . . . 17;	IV.	1 . . . 22.25 . . . 23;
V.	1 . . . 12.25 . . . 13;	VI.	1 . . . 18.25 . . . 19;
VII.	1 . . . . 25;	VIII.	1 . . . 14.25 . . . 15.

Donc, commençant par la cafe angulaire, on peut finir par quelcune de ces cafes 21, 11, 17, 23, 13, 19, 25, 15. Mais la premiere donne encore ces transformées,

a. 1 . . 6.21 . . 25.20 . . 7; *b.* 1.2.21 . . . 25.20 . . . 3,

& les autres celle-ci:

c. 1.2.11 . . 25.10 . . 3;	*d.* 1 . . 8.11 . . 25.10.9,
e. 1 . . 4.17 . . 25.16 . . 5;	*f.* 1 . . 8.17 . . 25.16 . . 9,
g. 1 . . 4.23 . . 25.22 . . 4;	*h.* 1.2.23 . . 25.22 3,
i. 1 . . 6.13 . . 25,12 . . 7;	*k.* 1.2.13 . . 25.12 3,
l. 1 . . 6.19 . . 25.18 . . 7;	*m.* 1 . . 4.19 . . 25.18 . . 5,
n. 1 . . 6.15 . . 25.14 . . 7;	*o.* 1 . . 8.15 . . 25.14 . . 9,

où les dernieres cafes font 3, 5, 7, 9.

38. Puisque les cafes angulaires 3, 5, 7, ne communiquent qu'à deux autres, elles ne fourniffent point par notre méthode de nouvelles transformées. Confidérons donc celles qui finiffent par 9, & nous tirerons ces transformées,

p. 1 . . 4.9.10.25 . . 11.8 . . 5;	*q.* 1 . . 8.11 . . 24.9.10.25,
r. 1 . . 4.9 . . 16.25 . . 17.8 . . 5;	*s.* 1 . . 8.17 . . 24.9 . . 16.25,
t. 1 . . 4.9 . . 14.25 . . 15.8 . . 5;	*u.* 1 . . 8.15 . . 24.9 . . 14.25.

Maintenant ces nouvelles routes qui finiffent par 25, nous conduifent à d'autres transformées: & nous parviendrons à plufieurs autres

 rou-

routes qui finiſſent par quelqu'une des caſes qui ſont marquées des nombres impairs: d'où l'on voit qu'en commençant par la caſe angulaire 1, on peut finir par quelque caſe marquée d'un nombre impair qu'on voudra; & cela en pluſieurs manieres différentes. Enſuite, chaque route pouvant être renverſée, le nombre de toutes les routes poſſibles deviendra extrêmement grand.

39. Ici on peut encore ajouter cette condition, que les nombres qui ſe trouvent en deux caſes oppoſées, faſſent partout la même ſomme, ſavoir 26. Il faut donc que la premiere & derniere caſes ſe trouvent en des angles oppoſés; & pour trouver une telle route, on n'à qu'à commencer à remplir le quarré, & mettre à l'oppoſite de chaque nombre ſon complément à 26; & continuer auſſi loin qu'on pourra. Mais, puiſqu'on ſait que la caſe du milieu doit contenir 13, on ne ſauroit presque manquer: & alors, en conſervant la même propriété, on en peut tirer pluſieurs formes différentes: dont voici quelques unes.

23	18	5	10	25
6	11	24	19	14
17	22	13	4	9
12	7	2	15	20
1	16	21	8	3

I. 1 . . . . 4.11 . . . 5.14.13.12.21 . . . 15.22 . . . 25,
II. 1 . . . . 4.7 . . 5.14 . . 18.13.8 . . 12.21 . . 19.22 . . . 25,
III. 1 . . . . 4.21 . . . . 14.13.12 . . . . 5.22 . . . 25,
IV. 1 . . . . 5.14 . . . . 20.13.6 . . . . 12.21 . . . 25,
V. 1 . . . 4.11.12.21 . . . 16.13.10 . . . . 5.14.22 . . . 25,
VI. 1 . . . 4.7 . . . 12.21.20.13 6.5.14 . . . 19.22 . . . 25,
VII. 1 . . . 4.21.12 . . . . . . 6.13.20 . . . . 14.5.22 . . . 25.

40. Dans toutes ces variations, tant les quatre premiers nombres 1 . . . 4, que les quatre derniers 22 . . . 25, avec celui du milieu 13, demeurent invariables, de ſorte que les variations ne s'étendent que ſur les autres. D'où il ſemble auſſi, que la route trouvée

avec

avec les 7 variations épuisent entierement cette espece: voici donc toutes ces 8 routes représentées à la fois.

23	18	5	10	25
6	11	24	19	14
17	22	13	4	9
12	7	2	15	20
1	16	21	8	3

23	18	11	6	25
10	5	24	17	12
19	22	13	4	7
14	9	2	21	16
1	20	15	8	3

23	12	7	16	25
6	17	24	21	8
11	22	13	4	15
18	5	2	9	20
1	10	19	14	3

23	8	21	16	25
20	15	24	7	12
9	22	13	4	17
14	19	2	11	6
1	10	5	18	3

23	10	19	14	25
18	5	24	9	20
11	22	13	4	15
6	17	2	21	8
1	12	7	16	3

23	20	15	8	25
14	9	24	21	16
19	22	13	4	7
10	5	2	17	12
1	18	11	6	3

23	16	21	8	25
12	7	24	15	20
17	22	13	4	9
6	11	2	19	14
1	18	5	10	3

23	10	5	18	25
14	19	24	11	6
9	22	13	4	17
20	15	2	7	12
1	8	21	16	3

41. Les routes trouvées ci-dessus pour un quarré de 25 cases se peuvent ainsi disposer qu'elles remplissent un quarré de 100 cases, en sorte que la route devienne rentrante en elle-même. Voici un tel quarré de 100 cases.

30	41	46	37	32	53	60	67	72	55
47	36	31	40	45	68	73	54	61	66
42	29	38	33	50	59	52	63	56	71
35	48	27	44	39	74	69	58	65	62
28	43	34	49	26	51	64	75	70	57
7	20	25	14	1	76	99	84	93	78
12	15	8	19	24	89	94	77	98	85
21	6	13	2	9	100	83	88	79	92
16	11	4	23	18	95	90	81	86	97
5	22	17	10	3	82	87	96	91	80

où les nombres sont disposés en quatre quartiers, dont chacun contient la même route.

42. Avant que de finir, j'ajouterai encore quelques autres figures, & parmi les rectangulaires, la plus ſimple que le cavalier puiſſe parcourir, eſt de 12 caſes, la largeur contenant 3, & la longeur 4, dont voici quelques routes:

10	7	2	5
1	4	9	12
8	11	6	3

3	6	11	8
12	9	2	5
1	4	7	10

3	6	9	12
8	11	2	5
1	4	7	10

12	9	6	3
1	4	11	8
10	7	2	5

Mais on voit aiſément, que des routes rentrantes ne ſauroient ici avoir lieu. Si la largeur contient trois caſes, & la longueur 5 ou 6, il eſt impoſſible de les parcourir: mais, donnant à la longueur 7 ou pluſieurs caſes, on pourra réuſſir, pourtant ſans rentrer:

3	8	5	18	15	10	13
6	19	2	9	12	21	16
1	4	7	20	17	14	11

15	18	21	2	5	8	11
20	1	16	13	10	3	6
17	14	19	4	7	12	9

Or, ſi nous donnons 4 caſes à la largeur, & 5 ou pluſieurs à la longueur, on aura ces routes:

14	7	20	3	16
19	2	15	8	11
6	13	10	17	4
1	18	5	12	9

16	7	22	3	18	11
23	2	17	12	21	4
8	15	6	19	10	13
1	24	9	14	5	20

20	7	26	13	18	5	24
27	14	19	6	25	12	17
8	21	2	15	10	23	4
1	28	9	22	3	16	11

43. Jusqu'ici les routes rentrantes en elles-mêmes ne peuvent pas avoir lieu; mais, donnant 5 caſes à la largeur, & 6 à la longueur, on pourra auſſi remplir cette condition, de même que dans tous les autres rectangles, dont le nombre des caſes eſt pair, pourvu qu'il n'y ait pas moins de 5 caſes dans un côté. En voici des exemples:

3	20	13	24	5	18
12	29	4	19	14	25
21	2	23	8	17	6
28	11	30	15	26	9
1	22	27	10	7	16

30	21	6	15	28	19
7	16	29	20	5	14
22	31	8	35	18	27
9	36	17	26	13	4
32	23	2	11	34	25
1	10	33	24	3	12

où cette autre figure eſt un quarré de 36 caſes, & la route eſt non ſeulement rentrante en elle-même, mais les nombres dans les caſes oppoſées ont partout la même différence de 18.

44. Mais, ſans ſe borner aux figures rectangulaires, on peut former à volonté quantité d'autres figures, où le cavalier peut paſſer par toutes les caſes: dont j'ajouterai quelques unes, qui ſont plus ſimples, & qui admettent même des routes rentrantes en elles-mêmes.

	10	7	
12	5	2	9
3	8	11	6
	1	4	

		14	19		
		7	12		
6	13	20	15	18	11
1	8	5	10	3	16
		2	17		
		9	4		

	1	14	7	22	
15	8	21	32	13	24
2	31	26	23	6	19
9	16	29	20	25	12
30	3	10	27	18	5
	28	17	4	11	

	1	20	7	26	
21	8	27	32	19	14
2	29	12	15	6	25
9	22	31	10	13	18
30	3	16	17	24	5
	10	23	4	7	