



CONTINUATION  
DES  
RECHERCHES  
SUR  
LA PROPAGATION DU SON.  
PAR M. EULER.

---

I.

Dans les deux Mémoires précédens sur cette matiere j'ai suffisamment fait sentir, combien il seroit important si l'on pouvoit déterminer par la Théorie la propagation du son en considérant l'air étendu en tout sens; & qu'on pût réussir dans cette hypothese aussi bien, que dans celle où l'on ne supposoit à l'air qu'une seule dimension selon une ligne droite. Après avoir expliqué la propagation du son dans cette hypothese d'une seule dimension, dans mon premier Mémoire sur cette matiere, j'ai tâché de traiter ce même sujet dans le supplément, en supposant d'abord à l'air deux dimensions suivant un plan, & ensuite en introduisant dans le calcul toutes les trois dimensions. J'ai aussi réussi à trouver des formules analytiques, qui contiennent tous les mouvemens possibles, dont l'air est susceptible; mais l'application à la question proposée me parut trop difficile, pour que j'en eusse osé esperer un heureux succès.

2. Quand je considérai seulement deux dimensions, j'avois bien appliqué les formules trouvées au cas où la premiere agitation se fait quasi dans un point, d'où les ébranlemens se répandent ensuite par des cercles concentriques partout également, puisque c'est en particulier le cas de la propagation du son. Mais la formule que j'y ai



trouvée, est assujettie à des difficultés si grandes, que je n'ai vu aucun moyen pour les surmonter; & ayant fait la même application dans l'hypothèse de trois dimensions, je pouvois d'autant moins espérer qu'il me seroit possible de développer la formule qui détermine les ébranlemens répandus en tout sens d'un point fixe, par des surfaces sphériques concentriques.

3. Cependant c'est précisément ici, comme je l'ai remarqué depuis, que les difficultés ne sont pas invincibles; & c'est là qu'à lieu un cas semblable à ceux que le Comte Riccati a proposés autrefois, où une certaine équation devient intégrable, pendant qu'en général elle ne l'est pas. Cette découverte est d'autant plus importante, qu'elle me mit bientôt en état de déterminer parfaitement la propagation du son, dans l'hypothèse que l'air est répandu en tout sens; ce qui ma paru jusques là presque impossible. Il n'y a aussi aucun doute, qu'ayant surmonté ce grand obstacle, on ne parvienne enfin à une méthode de résoudre directement les formules, que j'avois trouvées pour la communication des ébranlemens dans l'air, & peut être même des formules plus compliquées du même genre, d'où la partie la plus sublime des Mathématiques retireroit les plus grands avantages.

Fig. 1.

4. Soit A le centre de l'agitation primitive, qui se répande successivement par des couches concentriques en tout sens: soit  $AP = AV = V$ , le rayon d'une surface sphérique quelconque PV, dans l'état d'équilibre, laquelle, après le tems  $= t$ , prenne la situation  $p v$ , dont le rayon soit  $Ap = Av = V + u$ , ou l'intervalle  $Pp = Vv = u$ , que je suppose extrêmement petit: & il s'agit de déterminer cet intervalle  $u$ , par le rayon naturel  $AV = V$ , & le tems écoulé  $t$  depuis l'agitation. Cela posé, j'ai trouvé dans le §. 45. du Mémoire précédent, posant  $s = \frac{u}{V}$ , ou  $u = Vs$ , cette équation:

$$\frac{1}{2gh} \left( \frac{dds}{dt^2} \right) = \frac{4}{V} \left( \frac{ds}{dV} \right) + \left( \frac{d^2s}{dV^2} \right),$$

ou



ou bien en remettant pour  $s$  la valeur  $\frac{u}{V}$ , le paragraphe suivant a fourni cette équation :

$$\frac{1}{2gh} \left( \frac{ddu}{dt^2} \right) = - \frac{2u}{VV} + \frac{2}{V} \left( \frac{du}{dV} \right) + \left( \frac{ddu}{dV^2} \right),$$

où  $h$  est la hauteur d'une colonne d'air, dont le poids est en équilibre avec l'élasticité de l'air:  $g$  marque la hauteur, d'où les corps tombent dans une seconde, exprimant le tems  $t$  en secondes.

5. Si l'on ne supposoit à l'air que deux dimensions selon un plan, & que les ébranlemens se répandissent par des cercles concentriques, en conservant les mêmes dénominations, on auroit à résoudre cette équation

$$\frac{1}{2gh} \left( \frac{dds}{dt^2} \right) = \frac{3}{V} \left( \frac{ds}{dV} \right) + \left( \frac{dds}{dV^2} \right),$$

qui me paroît irrésoluble, du moins par la même méthode qui réussit dans l'équation précédente. Pour faire mieux sentir cette différence, considérons ces équations sous une forme plus générale :

$$\frac{1}{2gh} \left( \frac{dds}{dt^2} \right) = \frac{n}{V} \left( \frac{ds}{dV} \right) + \left( \frac{dds}{dV^2} \right),$$

& voyons comment il faudroit s'y prendre pour trouver la fonction des deux variables  $V$  &  $t$ , à laquelle est égale la variable  $s$ . Je me servirai d'une méthode, qui semble pouvoir être employée avec succès dans toutes sortes de semblables équations, où le tems entre en considération: & qui consiste à éliminer tout à fait le tems.

6. Pour cet effet, je pose  $s = P \sin(\alpha t + \mathfrak{A})$ , où  $P$  soit une fonction de la seule variable  $V$ , & puisqu'on aura

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) = \alpha P \cos(\alpha t + \mathfrak{A}); \quad \left(\frac{dds}{dt^2}\right) = -\alpha\alpha P \sin(\alpha t + \mathfrak{A})$$

$$\left(\frac{ds}{dV}\right) = \frac{dP}{dV} \sin(\alpha t + \mathfrak{A}); \quad \left(\frac{dds}{dV^2}\right) = \frac{ddP}{dV^2} \sin(\alpha t + \mathfrak{A}),$$

notre équation deviendra divisible par  $\sin(\alpha t + \mathfrak{A})$ , & sera:

$$-\frac{\alpha\alpha P}{2gh} = \frac{n dP}{V dV} + \frac{ddP}{dV^2},$$

qui ne contient que deux variables  $V$  &  $P$ , où le différentiel  $dV$  est pris constant. Il s'agit donc de résoudre cette équation différen-

tio-différentielle, qui, posant  $\frac{\alpha\alpha}{2gh} = mm$ , prendra cette forme

$$mmP dV^2 + \frac{n dV dP}{V} + ddP = 0,$$

qui a cette propriété, que la variable  $P$  n'a partout qu'une seule dimension.

7. Donc, posant  $P = e^{\int p dV}$ , ou  $\frac{dP}{P} = p dV$ , cette équation sera réduite à une différentielle du premier degré:

$$mm dV + \frac{np dV}{V} + dp + pp dV = 0,$$

laquelle, posant  $V^n p = q$ , ou  $p = \frac{q}{V^n}$ , se transforme en celle-ci.

$$\frac{dq}{V} + \frac{qq dV}{V^{2n}} + mm dV = 0, \quad \text{ou}$$

$$dq + \frac{qq dV}{V^n} + mm V^n dV = 0,$$

Posons de plus  $V^{n-1} = \frac{1}{r}$ , pour avoir  $\frac{1}{V^{n-1}} = r$ , &

$$- \frac{(n-1) dV}{V^n} = dr, \text{ \& puisque } V = r^{\frac{-1}{n-1}}, \text{ donc}$$

$V^{2n} = r^{\frac{-2n}{n-1}}$ , nous aurons  $-(n-1) V^n dV = r^{\frac{-2n}{n-1}} dr$ ,  
& partant notre équation prendra cette forme :

$$dq - \frac{qq dr}{n-1} + \frac{mm}{n-1} r^{\frac{-2n}{n-1}} dr = 0,$$

qui est la même, qu'autrefois avoit proposée le Comte Riccati.

8. De là il est clair, si l'on prend  $n = 3$ , pour le cas de deux dimensions de l'air, qu'on aura :

$$dq - \frac{1}{2} qq dr - \frac{mm}{2} r^{-3} dr = 0,$$

ce qui est un des cas irréductibles de l'équation de Riccati; & cette raison m'a fait desespérer, qu'on pourroit jamais déterminer la propagation du son, à moins qu'on ne suppose à l'air qu'une seule dimension selon une ligne droite. Mais, posant  $n = 4$ , cette équation devenant  $dq - \frac{1}{3} qq dr - \frac{1}{3} mm r^{-\frac{1}{2}} dr = 0$ , est un des cas réductibles de l'équation de Riccati, ce qui change tout à fait la nature de l'équation que nous avons à résoudre, & nous laisse espérer, que le cas de trois dimensions, que nous donnons à l'étendue de l'air, pourroit admettre la solution, quoique celui de deux dimensions n'en fût pas susceptible.

9. Pour trouver dans ce cas réductible l'équation intégrale, il est bon de se tenir à l'équation différentio-différentielle

$$mm P dV^2 + \frac{n dV dP}{V} + ddP = 0,$$

qu'il faut transformer en supposant  $\frac{dP}{P} = QdV + \frac{dp}{p}$ , où  $Q$  est une certaine fonction de  $V$ , qu'il faut déterminer en sorte que l'intégrale ou la valeur de  $p$  puisse commodément être développée par une série. Ayant donc, à cause de  $dV$  constant: en différentiant

$$\frac{d dP}{P} - \frac{dP^2}{P^2} = dQdV + \frac{d dp}{p} + \frac{dp^2}{p^2}.$$

Or  $\frac{dP^2}{P^2} = QQdV^2 + \frac{2QdVdp}{p} + \frac{dp^2}{pp}$ , donc

$$\frac{d dP}{P} = QQdV^2 + \frac{2QdVdp}{p} + dQdV + \frac{d dp}{p},$$

d'où nous tirons cette équation :

$$mm dV^2 + \frac{nQdV^2}{V} + \frac{ndVdp}{Vp} + \frac{d dp}{p} = 0,$$

$$+ QQdV^2 + dQdV + \frac{2QdVdp}{p}.$$

Où il faut faire en sorte, que la variable  $V$  ait ou nulle ou une seule dimension partout.

10. Posons donc  $Q = mV - 1 + \frac{\lambda}{V}$ , de sorte que

$$dQ = -\frac{\lambda dV}{V^2}, \text{ pour avoir:}$$

$$2\lambda mV - 1 \cdot \frac{dV^2}{V} + \frac{\lambda \lambda dV^2}{V^2} + \frac{ndVdp}{Vp} + 2mV - 1 \cdot \frac{dVdp}{p} + \frac{d dp}{p} = 0,$$

$$+ mnV - 1 \cdot \frac{dV^2}{V} + \frac{\lambda ndV^2}{V^2} + \frac{2\lambda dVdp}{Vp}$$

$$- \frac{\lambda dV^2}{V^2}.$$

Soit





Soit de plus  $\lambda = -n + 1$ , pour obtenir cette plus simple forme :

$$-\frac{(n-2)mdV^2}{V}V^{-1} - \frac{(n-2)dVdp}{Vp} + \frac{2mdVdpV^{-1}}{p} + \frac{ddp}{p} = 0,$$

ou bien, en la multipliant par  $Vp$  celle-ci :

$$Vddp + 2mVaVdpV^{-1} - (n-2)dVdp - (n-2)mpdV^2V^{-1} = 0,$$

dont on cherche la valeur de  $p$  par une série.

11. Supposons  $p = A + BV + CV^2 + DV^3 + EV^4 + \&c.$   
& la substitution donnera :

$$\begin{aligned} \frac{Vddp}{dV^2} &= + 1.2CV + 2.3DV^2 + 3.4EV^3 + 4.5FV^4 \&c. \\ + \frac{2mVdpV^{-1}}{dV} &= + 2mBVV^{-1} + 4mCV^2V^{-1} + 6mDV^3V^{-1} + 8mEV^4V^{-1} \\ - \frac{(n-2)dp}{dV} &= -(n-2)B - 2(n-2)CV - 3(n-2)DV^2 - 4(n-2)EV^3 - 5(n-2)FV^4 \\ - (n-2)mpV^{-1} &= -(n-2)mAV^{-1} - (n-2)mBVV^{-1} - (n-2)mCV^2V^{-1} - (n-2)mDV^3V^{-1} - (n-2)mEV^4V^{-1} \end{aligned}$$

Ces séries prises ensemble devant être  $= 0$ , donnent les déterminations suivantes :

$$\begin{array}{l|l} B + mBV^{-1} = 0 & B = -\frac{mA V^{-1}}{1} \\ 2(n-3)C + (n-4)mBV^{-1} = 0 & C = -\frac{(n-4)mB V^{-1}}{2(n-3)} \\ 3(n-4)D + (n-6)mCV^{-1} = 0 & D = -\frac{(n-6)mC V^{-1}}{3(n-4)} \\ 4(n-5)E + (n-8)mDV^{-1} = 0 & E = -\frac{(n-8)mD V^{-1}}{4(n-5)} \\ 5(n-6)F + (n-10)mEV^{-1} = 0 & \&c. \end{array}$$

d'où

d'où l'on voit que cette série devient finie aux cas:

$$n = 4; \quad n = 6; \quad n = 8; \quad n = 10; \quad \&c.$$

12. Donc, pour notre cas, où  $n = 4$ , nous aurons  
 $B = -mA \sqrt{-1}$ ,  $C = 0$ ,  $D = 0$ , &c. & partant

$$p = A - mAV \sqrt{-1}; \quad \text{donc } Q = m\sqrt{-1} - \frac{3}{V}, \quad \&$$

$\int Q dV = mV \sqrt{-1} - 3 \int \frac{1}{V}$ . Or, ayant posé  $\frac{dP}{P} = Q dV + \frac{dp}{p}$ ,  
 nous aurons en intégrant  $\log P = mV \sqrt{-1} - 3 \log V + \log p$ ,

$$\text{ou } P = \frac{A e^{mV \sqrt{-1}} (1 - mV \sqrt{-1})}{V^3}. \quad \text{Or, puisqu'on peut}$$

prendre  $\sqrt{-1}$ , aussi bien négatif, nous aurons aussi

$$P = \frac{B e^{-mV \sqrt{-1}} (1 + mV \sqrt{-1})}{V^3};$$

& parce que dans notre équation

$$mmP dV^2 + \frac{4dV dP}{V} + ddP = 0,$$

P n'a partout qu'une seule dimension: ces deux valeurs combinées:

$$P = \frac{A e^{mV \sqrt{-1}} (1 - mV \sqrt{-1})}{V^3} + \frac{B e^{-mV \sqrt{-1}} (1 + mV \sqrt{-1})}{V^3},$$

en donnent l'intégrale complete.

13. Il ne s'agit maintenant que de prendre les constantes A & B en sorte que les imaginaires se détruisent. Pour cet effet il faut remarquer que

$$e^{mV \sqrt{-1}} = \cos mV + \sqrt{-1} \sin mV, \quad \&$$

$$e^{-mV \sqrt{-1}} = \cos mV - \sqrt{-1} \sin mV,$$

&



& partant nous aurons :

$$PV^3 = A(1 - mV\sqrt{-1})(\cos mV\sqrt{V-1}, \sin mV) + B(1 + mV\sqrt{-1})(\cos mV\sqrt{-1}, \sin mV)$$

ou

$$PV^3 = (A+B)\cos mV\sqrt{V-1}, \sin mV - mV(A-B)\sqrt{-1}\cos mV + mV(A+B)\sin mV.$$

Soit donc  $A + B = C$ , &  $(A - B)\sqrt{-1} = D$ ,  
pour avoir cette expression réelle :

$$PV^3 = C \cos mV + D \sin mV - mDV \cos mV + mCV \sin mV :$$

soit de plus  $C = E \sin \zeta$ , &  $D = E \cos \zeta$ , pour rendre cette  
équation plus simple

$$PV^3 = E \sin (mV + \zeta) - mEV \cos (mV + \zeta), \text{ ou bien}$$

$$P = \frac{E \sin (mV + \zeta)}{V^3} - \frac{mE \cos (mV + \zeta)}{V^2}.$$

14. Nous avons posé  $\frac{\alpha\alpha}{2gh} = mm$ , d'où il s'enfuit  
 $\alpha = m\sqrt{2gh}$ ; & de là à cause de  $s = P \sin (\alpha t + \mathcal{A})$ , nous  
aurons

$$s = \frac{E \sin (mV + \zeta) \sin (mt\sqrt{2gh} + \mathcal{A})}{V^3} - \frac{mE \cos (mV + \zeta) \sin (mt\sqrt{2gh} + \mathcal{A})}{V^2},$$

où les quantités  $E, m, \zeta, \mathcal{A}$ , sont absolument arbitraires, de sorte  
qu'on peut donner une infinité de formules semblables, dont non seu-  
lement chacune séparément, mais aussi toutes ensemble satisfont éga-  
lement à notre équation :

$$\frac{1}{2gh} \left( \frac{dds}{dt^2} \right) = \frac{4}{V} \left( \frac{ds}{dV} \right) + \left( \frac{dds}{dV^2} \right).$$

& pour la première équation :

$$\frac{1}{2gh} \left( \frac{ddu}{dt^2} \right) = - \frac{2u}{VV} + \frac{2}{V} \left( \frac{du}{dV} \right) + \left( \frac{ddu}{dV^2} \right).$$



nous aurons

$$u = \frac{E \sin(mV + \zeta) \sin(mt\sqrt{2gh} + \mathcal{A})}{VV} - \frac{mE \cos(mV + \zeta) \sin(mt\sqrt{2gh} + \mathcal{A})}{V},$$

ou à un assemblage d'autant de semblables formules qu'on voudra.

15. Or tout cela n'est encore d'aucun secours pour notre dessein, qui demande des fonctions absolument arbitraires, qui puissent même être discontinues. Mais la considération de ces formes m'a fourni l'idée, que notre équation pourroit être résolue par une telle expression.

$$u = \frac{A}{V^2} \Phi(V + t\sqrt{2gh}) + \frac{B}{V} \Phi'(V + t\sqrt{2gh})$$

où  $\Phi$  marque une fonction quelconque, & la fonction  $\Phi'$  en dépend, en sorte que  $d. \Phi z = dz \Phi' z$ ; de la même manière je poseroi  $d. \Phi' z = dz \Phi'' z$ ;  $d. \Phi'' z = dz \Phi''' z$  &c. Or de cette position nous tirons:

$$\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = + \frac{2ghA}{V^2} \Phi''(V + t\sqrt{2gh}) + \frac{2ghB}{V} \Phi'''(V + t\sqrt{2gh})$$

$$\left(\frac{du}{dV}\right) = - \frac{2A}{V^3} \Phi.. + \frac{A}{V^2} \Phi'.. + \frac{B}{V} \Phi''.. \\ - \frac{B}{V^2} \Phi'..$$

$$\left(\frac{ddu}{dV^2}\right) = \frac{6A}{V^4} \Phi.. - \frac{4A}{V^3} \Phi'.. + \frac{A}{V^2} \Phi''.. + \frac{B}{V} \Phi'''.. \\ + \frac{2B}{V^3} \Phi'.. - \frac{2B}{V^2} \Phi''..$$

16. Substituons ces valeurs dans notre équation:

$$0 = - \frac{1}{2gh} \left(\frac{ddu}{dt^2}\right) - \frac{2u}{VV} + \frac{2}{V} \left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right),$$

&



& nous aurons:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{6A}{V^4} \Phi.. + \frac{2B-4A}{V^3} \Phi'.. + \frac{A-2B}{V^2} \Phi''.. + \frac{B}{V} \Phi'''.. \\ &- \frac{4A}{V^4} \Phi.. + \frac{2A-2B}{V^3} \Phi'.. + \frac{2B}{V^2} \Phi''.. \\ &- \frac{2A}{V^4} \Phi.. - \frac{2B}{V^3} \Phi'.. - \frac{A}{V^2} \Phi''.. - \frac{B}{V} \Phi'''.. \end{aligned}$$

qui se réduit à  $-\frac{2A-2B}{V^3} \Phi'.. = 0$ , & partant  $B = -A$ ,  
de sorte que notre intégrale soit

$$u = \frac{A}{V^2} \Phi(V + t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V} \Phi'(V + t\sqrt{2gh}),$$

qui est infiniment plus générale que celle que nous avons trouvée ci-dessus exprimée par des sinus & cosinus.

17. On pourra aussi prendre le signe radical  $\sqrt{2gh}$  négatif, & on aura:

$$u = \frac{A}{V^2} \Phi(V - t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V} \Phi'(V - t\sqrt{2gh})$$

& cette formule jointe à la précédente donnera l'intégrale complète de notre formule. Mais, puisque par l'hypothèse les agitations se répandent en tout sens également, cette dernière formule suffira seule, puisqu'on ne sauroit prendre  $V$  négatif. De là quelque fonction qu'on prenne pour  $\Phi$ , on en connoitra pour chaque tems proposé  $t$  la quantité  $u$  dont une couche sphérique quelconque, dont le rayon  $AV = V$ , sera répandue. On en connoitra aussi la vitesse que cette couche aura pour s'éloigner davantage du centre  $A$ : cette vitesse sera:

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = -\frac{AV\sqrt{2gh}}{V^2} \Phi'(V - t\sqrt{2gh}) + \frac{AV\sqrt{2gh}}{V} \Phi''(V - t\sqrt{2gh}),$$

Or, pour l'état initial, où  $t = 0$ , on aura  $u = \frac{\Lambda}{\sqrt{V}} \Phi V - \frac{\Lambda}{V} \Phi' V$ ,  
 & pour la vitesse

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = - \frac{\Lambda V 2gh}{\sqrt{V}} \Phi' V + \frac{\Lambda V 2gh}{V} \Phi'' V.$$

Fig. 2.

18. Puisqu'il faut supposer qu'au commencement toute l'agitation soit renfermée dans un petit espace autour du centre  $\Lambda$ , la nature de la fonction  $\Phi$  doit être telle, que ces trois expressions  $\Phi$ ,  $\Phi'z$ ,  $\Phi''z$  soient toujours évanouissantes, dès que  $z$  surpasse une petite quantité donnée. Pour cet effet, qu'on décrive sur l'axe  $AE$  une courbe quelconque  $A'p a$ , qu'on dessine encore trois fois alternativement au dessus & au dessous de l'axe, pour avoir la courbe  $A p a c b B$ , dont l'appliquée  $vp$ , qui répond à une abscisse quelconque  $\Lambda v = z$  soit  $= \Phi''z$ . Ensuite, qu'on décrive une autre courbe  $A q c B$  quadratrice de celle là, de sorte que  $vq = \frac{ar. \Lambda vp}{c}$ , & l'on aura  $vq = \frac{1}{c} \Phi'z$ , puisque  $\Phi'z = \int dz \Phi''z$ . Ensuite, qu'on décrive la troisième courbe  $A r B$  quadratrice de celle-ci: dont l'appliquée soit  $vr = \frac{ar. \Lambda vq}{c}$ , ou  $vr = \frac{1}{cc} \Phi.z$ , de sorte que par ces trois courbes on aura:

$$\Phi z = cc.vr; \quad \Phi'z = c.vq, \quad \& \quad \Phi''z = vp.$$

19. Donc, pour l'état initial, prenant l'abscisse  $\Lambda v$  égale au rayon de la couche sphérique, dont on cherche le déplacement, ou  $\Lambda z = V$ , on aura le déplacement:  $u = \frac{\Lambda cc}{\sqrt{V}}. vr - \frac{\Lambda c}{V}. vq$ , & la vitesse

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = - \frac{\Lambda c V 2gh}{\sqrt{V}}. vq + \frac{\Lambda V 2gh}{V}. vp,$$

d'où



d'où l'on connoit l'agitation initiale, & l'on comprend que, celle-ci étant donnée, on en tirera reciproquement la construction de la courbe arbitraire  $Ap a$ . Cependant il importe fort peu de favoir la nature de cette agitation, puisque notre but tend principalement à déterminer la propagation. Au reste on pourroit aussi décrire de semblables courbes tirées des fonctions de  $V + t\sqrt{2gh}$ , qu'on peut combiner avec celles-ci. Mais on verra bientôt que la vitesse de la propagation n'en est pas altérée, & qu'elle demeure la même, quelque courbe qu'on prenne pour  $Ap a$ . Par cette raison je m'arrêterai au cas que je viens d'indiquer.

20. Je dois aussi remarquer que, quoique les membres de nos formules soient divisés par  $V$  &  $VV$ , ils ne deviennent pas pourtant infinis au cas  $V = 0$ ; pourvu que la premiere courbe  $Ap a$  fasse un angle aigu avec l'axe. Car, posant  $Av = V$ ,  $vp = p$ ,  $vq = q$ , &  $vr = r$ , soit pour le commencement  $p = nV$ ; où  $n$  est un nombre fini quelconque, & on aura  $q = \frac{nVV}{2c}$ , &  $r = \frac{nV^3}{6cc}$ : de là si l'abscisse  $V$  est extrêmement petite, on aura:

$$u = \frac{1}{2}nAV - \frac{1}{2}nAV = -\frac{1}{3}nAV,$$

$$\& \left(\frac{du}{dt}\right) = -\frac{1}{2}nA\sqrt{2gh} + nA\sqrt{2gh} = +\frac{1}{2}nA\sqrt{2gh},$$

de sorte que le déplacement du centre  $A$  soit même infiniment petit, & si l'on veut que sa vitesse évanouisse aussi, on n'a qu'à prendre  $n = 0$ , ou faire en sorte que la courbe  $Ap a$  touche l'axe en  $A$ .

21. Prenant maintenant un point quelconque  $V$  hors de l'agitation initiale, & l'on voit qu'au commencement où  $t = 0$ , tant le déplacement  $u$  que la vitesse  $\left(\frac{du}{dt}\right)$  sera zéro. Car, si  $V > AB$ , toutes ces fonctions  $\Phi.V$ ;  $\Phi'.V$ , &  $\Phi''.V$  évanouissent, puisque toutes les trois courbes sont censées se réunir avec l'axe au dela





de B. Mais, après le premier instant, des que la quantité  $V - t\sqrt{2gh}$ , commence à devenir plus petite que AB, la couche qui passe par V sera ébranlée. Qu'on prenne alors  $Vv = t\sqrt{2gh}$ , & on aura pour le déplacement de cette couche

$$u = \frac{Acc}{VV} \cdot vr - \frac{Ac}{V} \cdot vq, \quad \& \text{ pour la vitesse}$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = - \frac{Ac\sqrt{2gh}}{VV} \cdot vq + \frac{A\sqrt{2gh}}{V} \cdot vp,$$

d'où l'on voit que, plus le point V est éloigné du centre A, plus feront aussi petits tant son déplacement que sa vitesse, & cela en raison des distances à peu près, si la distance V est fort grande.

22. On se fera imaginé que les agitations répandues dans l'air devroient diminuer en raison des quarrés des distances, & on sera surpris de voir que les petits espaces par lesquels les couches s'avancent, diminuent seulement en raison des distances, lorsque les distances sont fort grandes. Mais il faut observer, que l'agitation de chaque couche ne dépend pas uniquement de son déplacement  $u$ , mais aussi de sa vitesse, pendant qu'elle est ébranlée; & celle-ci étant aussi réciproquement proportionnelle à la distance au centre, d'où l'agitation entiere doit être censée bien plus petite. Au reste, si la force du son, entant qu'il est apperçu, dépend ou du seul déplacement des particules d'air, ou seulement de leur vitesse, on pourra dire que la force d'un son diminue en raison des distances; mais, si elle dépend de tous les deux conjointement, elle suivra la raison réciproque quarrée des distances.

23. Posons la distance AB  $= a$ , qui est le rayon de la sphere qui aura été primitivement agitée, & cette agitation sera transmise jusqu'en V, la distance AV étant  $= V$ , après le tems  $t$ , en sorte que  $V - t\sqrt{2gh} = AB = a$ , d'où l'on tire  $t = \frac{V - a}{\sqrt{2gh}}$ : ou bien dans une seconde l'agitation sera transmise

par





par un espace  $V = a + \sqrt{2gh}$ , qui est de la quantité  $a$  plus grand, que celui que nous avons trouvé dans l'hypothèse d'une seule dimension, quoique cette même augmentation y ait également lieu. Mais cela ne suffit en aucune manière pour obtenir la vitesse qu'on connoit par les expériences, & partant il n'y a plus de doute, que la force de l'agitation produise cette accélération, pendant que les sons extrêmement foibles seroient d'accord avec notre formule, qui, comme j'ai d'abord remarqué, n'a lieu que lorsque les agitations sont quasi infiniment petites

24. Or l'intégrale complete de notre équation étant

$$u = \frac{A}{\sqrt{2}} \Phi(V + t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{\sqrt{2}} \Phi'(V + t\sqrt{2gh}) + \frac{B}{\sqrt{2}} \Psi(V - t\sqrt{2gh}) - \frac{B}{\sqrt{2}} \Psi'(V - t\sqrt{2gh})$$

on en peut faire varier à l'infini l'agitation primitive, non seulement par rapport au déplacement de chaque couche spherique, mais aussi par rapport à la vitesse qui leur sera imprimée, puisqu'on a en général pour la vitesse:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dt}\right) &= \frac{A\sqrt{2gh}}{V\sqrt{2}} \Phi'(V + t\sqrt{2gh}) - \frac{A\sqrt{2gh}}{V} \Phi''(V + t\sqrt{2gh}) \\ &\quad - \frac{B\sqrt{2gh}}{V\sqrt{2}} \Psi'(V - t\sqrt{2gh}) + \frac{B\sqrt{2gh}}{V} \Psi''(V - t\sqrt{2gh}) \end{aligned}$$

d'où l'on a pour l'état initial, en posant  $t = 0$ :

$$u = \frac{A}{\sqrt{2}} \Phi.V - \frac{A}{\sqrt{2}} \Phi'.V + \frac{B}{\sqrt{2}} \Psi.V - \frac{B}{\sqrt{2}} \Psi'.V, \quad \&$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{A\sqrt{2gh}}{V\sqrt{2}} \Phi'.V - \frac{A\sqrt{2gh}}{V} \Phi''.V - \frac{B\sqrt{2gh}}{V\sqrt{2}} \Psi'.V + \frac{B\sqrt{2gh}}{V} \Psi''.V$$

où les caractères  $\Phi$  &  $\Psi$  marquent des fonctions quelconques, tant continues que discontinues, ce qui nous met en état de donner une solution générale de notre problème, en supposant l'agitation primitive quelconque.

25. On peut bien supposer  $B = A$ , puisque la variété des fonctions  $\Phi$  &  $\Psi$  renferme déjà cette différence: & pour qu'on puisse faire l'application à une agitation primitive quelconque, posons:

$$\Phi.V + \Psi.V = \Sigma.V, \quad \& \quad \Phi.V - \Psi.V = \Theta.V,$$

de sorte que

$\Phi.V = \frac{1}{2}\Sigma.V + \frac{1}{2}\Theta.V$ , &  $\Psi.V = \frac{1}{2}\Sigma.V - \frac{1}{2}\Theta.V$ ,  
& nous aurons pour l'état initial,

$$u = \frac{A}{V^2} \cdot \Sigma.V - \frac{A}{V} \cdot \Sigma'.V, \quad \&$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{\Lambda V 2gh}{VV} \cdot \Theta'.V - \frac{\Lambda V 2gh}{V} \cdot \Theta''.V.$$

Maintenant, posons pour ce même état:

$$u = AP, \quad \& \quad \left(\frac{du}{dt}\right) = \Lambda QV 2gh,$$

de sorte que  $P$  &  $Q$  soient des fonctions données de  $V$  conformément à l'agitation primitive; & il s'agit de trouver les fonctions  $\Sigma$  &  $\Theta$  de ces égalités.

$$\Sigma.V - V.\Sigma'.V = V^2P, \quad \& \quad \Theta'.V - V.\Theta''.V = V^2Q.$$

26. Posons pour cet effet  $\Sigma.V = p$ , &  $\Theta'.V = q$ ,  
pour avoir

$$p - \frac{V dp}{dV} = V^2P, \quad \& \quad q - \frac{V dq}{dV} = V^2Q, \quad \text{ou bien}$$

$$\frac{p dV - V dp}{VV} = P dV, \quad \& \quad \frac{q dV - V dq}{VV} = Q dV.$$

$$\text{d'où l'on tire: } - \frac{p}{V} = \int P dV, \quad \& \quad - \frac{q}{V} = \int Q dV.$$

Donc

Donc connoissant les fonctions P & Q par l'agitation primitive, nous en formerons nos fonctions en sorte.

$$\Sigma.V = - \int V f P dV; \quad \Theta.V = - \int V f Q dV, \quad \text{donc}$$

$$\Theta.V = - \int V dV \int Q dV, \quad \& \text{ ensuite:}$$

$$\Sigma'.V = - \int P dV - VP, \quad \& \quad \Theta''.V = - \int Q dV - VQ,$$

d'où l'on tracera aisément des courbes, dont les appliquées représentent toutes les fonctions dont nous avons besoin dans cette recherche.

27. Après avoir déterminé la nature de ces fonctions par l'agitation imprimée au commencement, on en déterminera pour un tems quelconque  $t$  l'élargissement  $\kappa$  de toutes les couches sphériques, dont le rayon est supposé  $= V$ . On aura pour  $\kappa$  l'expression suivante.

$$\kappa = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{\Lambda}{2VV} \Sigma (V + tV \sqrt{2gh}) + \frac{\Lambda}{2VV} \Theta (V + tV \sqrt{2gh}) \\ + \frac{\Lambda}{2VV} \Sigma (V - tV \sqrt{2gh}) - \frac{\Lambda}{2VV} \Theta (V - tV \sqrt{2gh}) \\ - \frac{\Lambda}{2V} \Sigma' (V + tV \sqrt{2gh}) - \frac{\Lambda}{2V} \Theta' (V + tV \sqrt{2gh}) \\ - \frac{\Lambda}{2V} \Sigma' (V - tV \sqrt{2gh}) + \frac{\Lambda}{2V} \Theta' (V - tV \sqrt{2gh}) \end{array} \right.$$

d'où l'on voit comme auparavant que, pendant une seconde, le son ne fauroit être transmis, que par un espace  $= V \sqrt{2gh}$ : mais pourtant avec cette restriction, que le son soit extrêmement foible: pour les sons plus forts on n'en fauroit rien conclure.

28. Cette propagation par des couches concentriques nous fournit une infinité de solutions particulières des formules générales,

que j'avois trouvées pour des agitations quelconques, dans l'air, voyez le §. 43. du Mémoire précédent.

$$\frac{1}{2gh} \left( \frac{ddx}{dt^2} \right) = \left( \frac{ddx}{dX^2} \right) + \left( \frac{ddy}{dXdY} \right) + \left( \frac{ddz}{dXdZ} \right)$$

$$\frac{1}{2gh} \left( \frac{ddy}{dt^2} \right) = \left( \frac{ddx}{dXdY} \right) + \left( \frac{ddy}{dY^2} \right) + \left( \frac{ddz}{dYdZ} \right)$$

$$\frac{1}{2gh} \left( \frac{ddz}{dt^2} \right) = \left( \frac{ddx}{dXdZ} \right) + \left( \frac{ddy}{dYdZ} \right) + \left( \frac{ddz}{dZ^2} \right).$$

Car, pour avoir une solution particulière quelconque, supposons le centre précédent des agitations dans un point déterminé par les coordonnées  $a, b, c$ , & nous aurons

$$V = ((X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2),$$

& ensuite

$$x = \frac{X - a}{V} \cdot u; \quad y = \frac{Y - b}{V} \cdot u; \quad z = \frac{Z - c}{V} \cdot u.$$

29. Prenant donc pour  $a, b, c$ , trois constantes quelconques, soit pour abrégér

$$\sqrt{((X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2)} = V,$$

& que les caractères  $\Phi$  &  $\Psi$  marquent des fonctions quelconques régulières ou irrégulières, d'où par la différentiation on aura les fonctions dérivées  $\Phi$  &  $\Psi'$ , & qu'on prenne

$$u = \frac{A}{V^2} \Phi(V + t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V} \Phi'(V + t\sqrt{2gh}) \\ + \frac{B}{V^2} \Psi(V - t\sqrt{2gh}) - \frac{B}{V} \Psi'(V - t\sqrt{2gh}).$$

Alors

Alors on aura pour la résolution de nos trois formules les valeurs suivantes des trois variables  $x, y, z$ , cherchées

$$x = \frac{X - a}{V} \cdot u; \quad y = \frac{Y - b}{V} \cdot u; \quad z = \frac{Z - c}{V} \cdot u,$$

& en changeant les constantes  $a, b, c$ , à volonté, on obtiendra une infinité de semblables valeurs pour  $x, y, z$ , qui étant jointes ensemble, donneront une solution assez générale de notre problème.

30. Cette solution sert à nous faire comprendre, que s'il y a plusieurs centres d'agitations, la propagation de chacune se fait de la même manière que si elle se trouvoit toute seule dans l'air. Donc, si plusieurs sons sont excités en différens endroits de l'air, chacun se repand par des couches spheriques & concentriques, de la même manière que s'il existoit tout seul dans l'air, & tous les autres n'en troubleront pas la propagation: & s'il arrive que les mêmes particules de l'air sont ébranlées à la fois par plusieurs sons, leur mouvement sera composé de tous les mouvemens que chaque son y produiroit séparément: ce qui est la cause que la propagation de chacun n'est pas troublée par les autres. L'explication de ce phénomène, que nous devons uniquement à la Théorie, est sans doute bien importante.

31. Avant que de finir cette matière, je proposerai encore une autre méthode de traiter les trois équations principales rapportées dans le §. 28. laquelle consiste dans l'élimination du tems  $t$ . Pour cet effet, qu'on pose

$$x = p \sin(at + \mathcal{E}); \quad y = q \sin(at + \mathcal{E}); \quad z = r \sin(at + \mathcal{E}),$$

où  $p, q, r$ , soient des fonctions des trois variables  $X, Y$ , &  $Z$ , sans renfermer le tems  $t$ . Alors, après avoir fait la substitution, on aura les trois équations suivantes, d'où il faut déterminer les trois inconnues  $p, q, r$ .



$$\frac{\alpha\alpha}{2gh} p + \left(\frac{ddp}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddq}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddr}{dXdZ}\right) = 0,$$

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh} q + \left(\frac{ddp}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddq}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddr}{dYdZ}\right) = 0,$$

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh} r + \left(\frac{ddp}{dXdZ}\right) + \left(\frac{ddq}{dYdZ}\right) + \left(\frac{ddr}{dZ^2}\right) = 0.$$

32. Si nous posons  $\left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right) = v$ , nous aurons :

$$p = -\frac{2gh}{\alpha\alpha} \left(\frac{dv}{dX}\right); \quad q = -\frac{2gh}{\alpha\alpha} \left(\frac{dv}{dY}\right); \quad r = -\frac{2gh}{\alpha\alpha} \left(\frac{dv}{dZ}\right),$$

d'où il est évident, que :

$$\left(\frac{dp}{dY}\right) = \left(\frac{dq}{dX}\right); \quad \left(\frac{dp}{dZ}\right) = \left(\frac{dr}{dX}\right); \quad \left(\frac{dq}{dZ}\right) = \left(\frac{dr}{dY}\right),$$

ou que la formule  $p dX + q dY + r dZ$ , est intégrable, l'intégrale étant  $= -\frac{2gh}{\alpha\alpha} v = -\frac{2gh}{\alpha\alpha} \left(\left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right)\right)$ .

Or de là nous concluons de plus

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh} p + \left(\frac{ddp}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddp}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddp}{dZ^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh} q + \left(\frac{ddq}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddq}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddq}{dZ^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh} r + \left(\frac{ddr}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddr}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddr}{dZ^2}\right) = 0,$$

de sorte que toutes les trois quantités  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , sont déterminées par la même équation, dont il s'agit de trouver la résolution générale.

*Autre*





*Autre maniere de parvenir à la solution.*

33. L'explication de la propagation du son, que je viens de trouver, peut être déduite immédiatement de nos formules principales qui posant

$$\left(\frac{dx}{dX}\right) + \left(\frac{dy}{dY}\right) + \left(\frac{dz}{dZ}\right) = v \text{ font:}$$

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dX}\right); \quad \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dY}\right); \quad \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dZ}\right)$$

d'où l'on tire cette équation pour trouver  $v$ .

$$\frac{1}{2gh} \left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2v}{dX^2}\right) + \left(\frac{d^2v}{dY^2}\right) + \left(\frac{d^2v}{dZ^2}\right),$$

comme je l'ai fait voir dans mon Mémoire précédent. Or, si l'on pose  $(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = VV$ , où l'on peut prendre pour  $a, b, c$ , des quantités constantes quelconques, cette équation est remplie par cette formule:

$$v = \frac{A}{V} \Phi(V \pm t\sqrt{2gh}),$$

comme on peut le voir en faisant la substitution.

34. Car, puisque  $V$  ne dépend point du tems  $t$ , on aura

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \frac{2Agh}{V} \Phi'(V \pm t\sqrt{2gh}): \text{ ensuite, à cause de}$$

$$\left(\frac{dV}{dX}\right) = \frac{X-a}{V}; \quad \left(\frac{dV}{dY}\right) = \frac{Y-b}{V}; \quad \& \quad \left(\frac{dV}{dZ}\right) = \frac{Z-c}{V};$$

on a

$$\left(\frac{dv}{dX}\right) = -\frac{A(X-a)}{V^3} \Phi(V \pm t\sqrt{2gh}) + \frac{A(X-a)}{V^2} \Phi'(V \pm t\sqrt{2gh}),$$



& différentiant encore

$$\left(\frac{ddv}{dX^2}\right) = -\frac{\Lambda}{V^3} \Phi(V \pm t\sqrt{2gh}) - \frac{3\Lambda(X-a)^2}{V^4} \Phi'(V \pm t\sqrt{2gh}) + \frac{\Lambda(X-a)^2}{V^3} \Phi''(V \pm t\sqrt{2gh}) \\ + \frac{3\Lambda(X-a)^2}{V^5} \Phi(V \pm t\sqrt{2gh}) + \frac{\Lambda}{V^2} \Phi'(V \pm t\sqrt{2gh}),$$

d'où l'on formera aisément les valeurs des formules  $\left(\frac{ddv}{dY^2}\right)$ , &  $\left(\frac{ddv}{dZ^2}\right)$ , & partant la somme de ces trois formules, à cause de  $(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = V^2$ , se réduit à  $\frac{\Lambda}{V} \Phi''(V \pm t\sqrt{2gh})$ ; & cette même valeur est aussi celle de  $\frac{1}{2gh} \left(\frac{ddv}{dt^2}\right)$ , d'où l'on voit que la formule

$$v = \frac{\Lambda}{V} \Phi(V \pm t\sqrt{2gh}),$$

satisfait parfaitement à l'équation rapportée ci-dessus.

35. Pour trouver de là les quantités  $x, y, z$ , donnons à la valeur trouvée pour  $v$  cette forme  $v = \frac{\Lambda}{V} \Phi''(V \pm t\sqrt{2gh})$ , d'où nous aurons:

$$\left(\frac{dv}{dX}\right) = -\frac{\Lambda(X-a)}{V^3} \Phi''(V \pm t\sqrt{2gh}) + \frac{\Lambda(X-a)}{V^2} \Phi'''(V \pm t\sqrt{2gh}),$$

ce qui est aussi la valeur de  $\frac{1}{2gh} \left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$ . Prenons donc les intégrales, en supposant le seul tems  $t$  variable, & puisque

$$\int dt \Phi'''(V \pm t\sqrt{2gh}) = \frac{1}{V\sqrt{2gh}} \Phi''(V \pm t\sqrt{2gh}),$$

nous

nous obtiendrons :

$$\frac{1}{V\sqrt{2gh}} \left( \frac{dx}{dt} \right) = -\frac{A(X-a)}{V^3} \Phi'(V+t\sqrt{2gh}) + \frac{A(X-a)}{V^2} \Phi''(V+t\sqrt{2gh}) + P$$

où P est une fonction quelconque de X, Y, & Z, qu'on regarde ici comme constante; & en intégrant encore :

$$x = -\frac{A(X-a)}{V^3} \Phi(V+t\sqrt{2gh}) + \frac{A(X-a)}{V^2} \Phi'(V+t\sqrt{2gh}) + Pt + \mathfrak{P}.$$

où  $\mathfrak{P}$  est aussi une fonction quelconque de X, Y, & Z.

36. De la même manière on trouvera :

$$y = -\frac{A(Y-b)}{V^3} \Phi(V+t\sqrt{2gh}) + \frac{A(Y-b)}{V^2} \Phi'(V+t\sqrt{2gh}) + Qt + \Omega,$$

$$z = -\frac{A(Z-c)}{V^3} \Phi(V+t\sqrt{2gh}) + \frac{A(Z-c)}{V^2} \Phi'(V+t\sqrt{2gh}) + Rt + \mathfrak{R},$$

où Q, R, &  $\Omega$ ,  $\mathfrak{R}$ , sont aussi des fonctions des trois variables X, Y, Z, qui dépendent en sorte des précédentes P &  $\mathfrak{P}$ , que

$$\left( \frac{ddP}{dX^2} \right) + \left( \frac{ddQ}{dY^2} \right) + \left( \frac{ddR}{dZ^2} \right) = 0,$$

$$\& \left( \frac{dd\mathfrak{P}}{dX^2} \right) + \left( \frac{dd\Omega}{dY^2} \right) + \left( \frac{dd\mathfrak{R}}{dZ^2} \right) = 0,$$

Mais pour notre dessein on peut négliger toutes ces fonctions P, Q, R, &  $\mathfrak{P}$ ,  $\Omega$ ,  $\mathfrak{R}$ , ou les supposer égales à 0.

37. Donc si l'on suppose dans l'air autant de points fixes Fig. 3.  
e, e', e'', &c. qu'on voudra déterminées par les coordonnées

$$Aa = a, ab = b, bc = c, \quad Aa' = a', a'b' = b', b'c' = c', \quad \&c.$$

& après y avoir tiré d'un point quelconque Z déterminé par les coordonnées AX = X, XY = Y, & YZ = Z, les droites Zc, Zc', Zc'', qu'on nomme ces distances

$$Zc = V, \quad Zc' = V', \quad Zc'' = V'', \quad \&c.$$

&



& qu'on pose pour abrégé,

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{V}\Phi(V+t\sqrt{2gh})+\Phi'(V+t\sqrt{2gh})-\frac{1}{V}\Sigma(V-t\sqrt{2gh})+\Sigma'(V-t\sqrt{2gh}) &= P \\
 -\frac{1}{V'}\Psi(V'+t\sqrt{2gh})+\Psi'(V'+t\sqrt{2gh})-\frac{1}{V'}\Theta(V'-t\sqrt{2gh})+\Theta'(V'-t\sqrt{2gh}) &= Q \\
 -\frac{1}{V''}\Omega(V''+t\sqrt{2gh})+\Omega'(V''+t\sqrt{2gh})-\frac{1}{V''}\Xi(V''-t\sqrt{2gh})+\Xi'(V''-t\sqrt{2gh}) &= R
 \end{aligned}$$

les dérangemens du point Z seront exprimés par les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{(X-a)P}{VV} + \frac{(X-a')Q}{V'V'} + \frac{(X-a'')R}{V''V''}, \\
 y &= \frac{(Y-b)P}{VV} + \frac{(Y-b')Q}{V'V'} + \frac{(Y-b'')R}{V''V''}, \\
 z &= \frac{(Z-c)P}{VV} + \frac{(Z-c')Q}{V'V'} + \frac{(Z-c'')R}{V''V''}.
 \end{aligned}$$

38. Ces même formules expriment l'état initial, quand on pose  $t = 0$ , & celui-ci étant donné, on en connoitra la nature des fonctions  $\Phi, \Sigma, \Psi, \Theta, \Omega, \Xi$ . Supposons ces fonctions telles, que posant  $t = 0$ , les quantités  $P, Q, R$ , soient toujours égales à zéro, excepté les seuls cas, où les distances  $V, V', V''$ , sont à peu près égales à ces quantités  $D, D', D''$ , & alors le point Z sera en repos à moins qu'il n'y ait

ou  $V-t\sqrt{2gh} = D$ , ou  $V'-t\sqrt{2gh} = D'$ , ou  $V''-t\sqrt{2gh} = D''$ , d'où l'on voit que les agitations primitives excitées autour des points  $c, c', c''$ , sont séparément transmises au point Z, & chacune de la même manière que si les autres n'existoient point. Et partant il est clair que toutes ces agitations ne se troublent pas entr'elles.



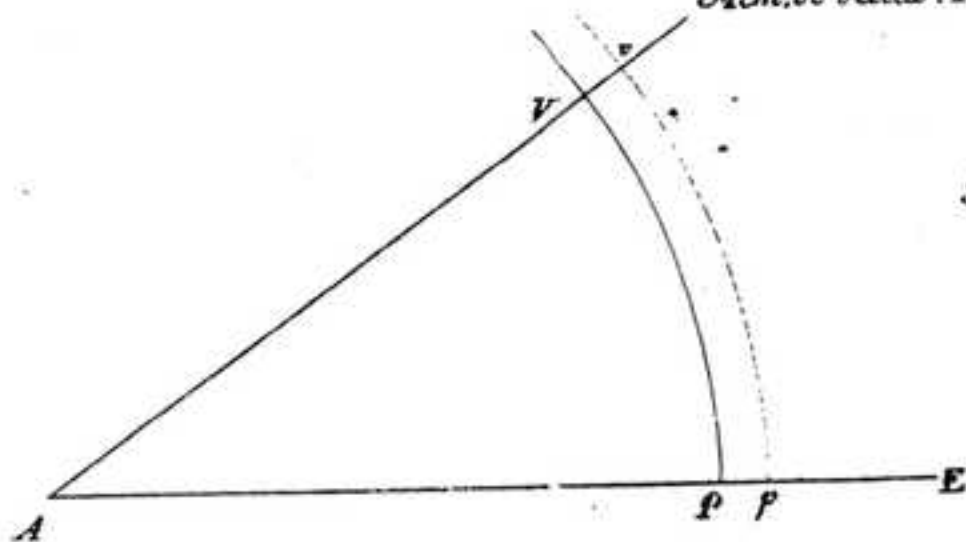


Fig. 1.



Fig. 2.

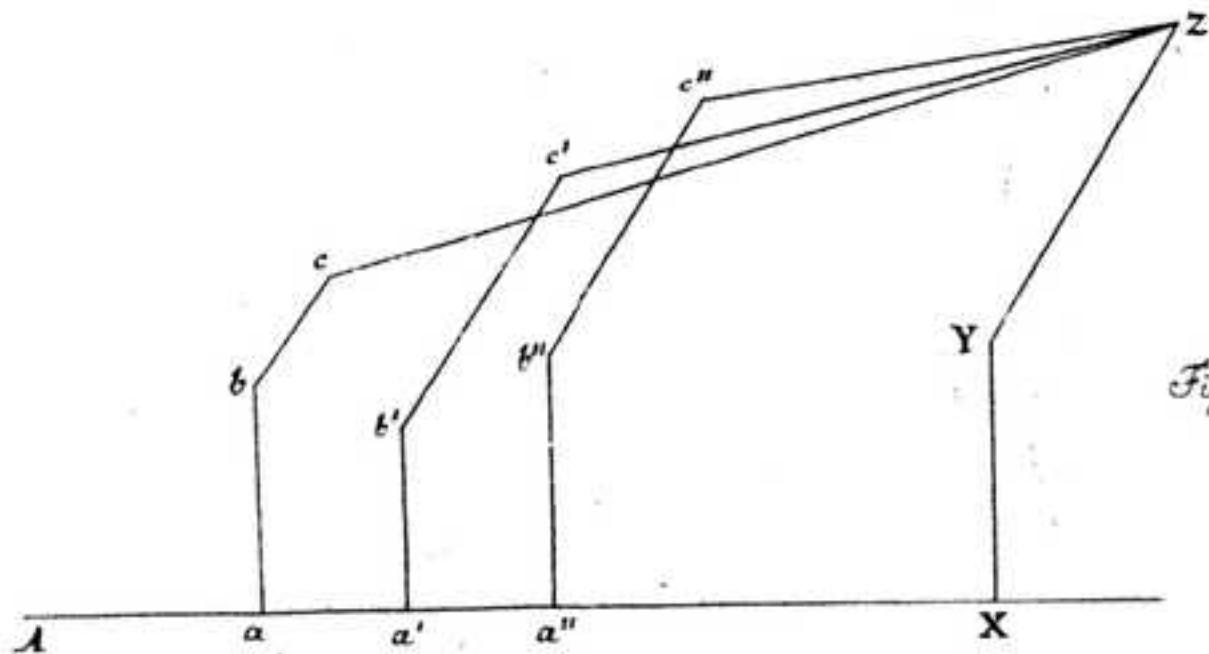


Fig. 3.