DILVCIDATIONES DE TAVTOCHRONIS IN MEDIO RESISTENTE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Difficillima est quaestio de inueniendis curuis tautochronis in medio resistente, quae scilicet hanc habeant proprietatem, vt corpus super iis descendens semper eodem tempore ad punctum infimum perueniat, ex quocunque curuae puncto descensum inceperit. Curua autem hac proprietate praedita vocari solet *tautochrona descensuum*; dum ea curua, quae ad ascensus aequidiurnos est accommodata, *tautochrona ascensuum* appellatur. Neque enim hae duae curuae in medio resistente, vti fit in vacuo, inter se conueniunt; verum vtraque seorsim inuestigari debet, vbi quidem commode vsu venit, vt, si altera fuerit reperta, eadem methodo altera expedite assignari possit; ex quo sufficiet, hanc inquisitionem, vel pro solo descensu, vel ascensu, suscepisse.

2. Pro vacuo quidem *Hugenius* immortalem laudem est assecutus, dum demonstrauit, in motu corporum super cycloide, tam omnes descensus, quam ascensus, aequalibus absolui temporibus. Deinde *Newtonus* ostendit, eandem tautochronismi proprietatem cycloidi etiam nunc conue-

conuenire in medio, quod resistat in ratione simplici celeritatum, ita vt etiam hoc calu tautochrona ascensuum non discrepet a tautochrona descensuum, perinde vti fit in vacuo. Hanc insignem cycloidis proprietatem *Newtonus* geometrice demonstrauit, quo ipse summas difficultates, quae in inuestigatione Analytica occurrunt, feliciter superauit. Neque vero ambo hi summi Viri quaestionem a priori aggressi negotium confecerunt, sed, dum sibi proposuerant, motum corporum super cycloide scrutari, quasi praeter expectationem tautochronismi proprietatem deprehenderunt.

3. In aliis medii resistentis hypothesibus diu frustra tautochronae sunt inuestigatae, donec tandem mihi contigit, pro mediis, quae in duplicata ratione celeritatum resistunt, tautochronas definire, in quo quidem negotio vsus sum methodo directa, quae me ad cognitionem harum curuarum deduxit. Verum haec methodus ita est comparata, quoniam expressionem finitam pro celeritate corporis in quouis curuae loco requirit, vt ad alias resistentiae hypotheses, quibus talem expressionem exhibere non licet, accommodari non possit. Neque etiam ei locus relinquitur in medio, cuius resistentia ipsam celeritatum rationem sequitur, etsi aliunde constet tautochronismi proprietatem in cycloidem competere. Interim tamen, si resistentia sit quam minima, per methodum approximandi in omnibus hypothesibus tautochronas assignaui, quod argumentum fusius pertractaui in Mechanicae meae Tomo secundo. Inde tamen nullum subsidium suppeditabatur ad tautochronas determinandas, si resistentia fuerit maior;

ior; ita vt hoc problema pro aliis hypothesibus praeter eas, quae vel ipsis celeritatibus, vel earum quadratis sint proportionales, adhuc pro insoluto sit habendum.

4 Quoniam autem hae duae hypotheses diuersissimas methodos requirunt, eaque methodus, qua tautochronam in medio, quod resistit in duplicata ratione celeritatum, elicui, nullum vsum praestat in medio, quod in ipsa celeritatum ratione resistit; haud parum is praestitisse erit censendus, qui eiusmodi methodum tradiderit, quae ad ambas has hypotheses pari cum successu adhiberi queat. Talem autem methodum Clar. *Fontainio* acceptam referre debemus, quae vti a summa ingenii sagacitate est profecta, ita etiam omnino digna videtur, quae diligentius perpendatur, eiusque vsus vberius explicetur; praesertim cum eius ope etiam in medio, cuius resistentia partim rationem simplicem, partim rationem duplicatam, celeritatum sequitur, tautochrona inuenire possit, quod mea methodo praestari nequit.

Tab. I. Fig. 4. 5. In curua igitur tautochrona inuestiganda Vir Celeberrimus considerat duos arcus AF et AF′ infinite parum a se inuicem discrepantes, in eamque curuae affectionem inquirit, vt tempora, quibus hi arcus absoluuntur, fiant inter se aequalia. Ponamus ergo arcum $AF = a$, et $AF' = a + da$, vt sit $FF' = da$; et quoniam duos motus per AF et AF′ eodem tempore absoluendos inter se comparari oportet, sit t portio quaecunque indefinita huius temporis, cui in motu per AF respondeat arcus $AM = s$, in altero autem motu per

AF′

AF′ arcus AM′$=s'$; ita vt in motu per AF arcus AM, et in motu per AF′ arcus AM′, eodem tempore t percurratur. Ex quo sequitur, si tempus t euanescat, vtrumque arcum AM$=s$ et AM′$=s'$ in nihilum abire, ideoque eorum differentiam MM′$=s'-s$ euanescere debere; sin autem pro t assumatur tempus totius motus, necesse est, vt tum arcus AM$=s$ abeat in AF$=a$, et arcus AM′$=s'$ in AF′$=a+da$; eorumque ergo differentia MM′ fiat $=da$. Crescente ergo arcu AM crescet particula MM′$=s'-s$, ita, vt sumto $s=0$, fiat $s'-s=0$, et sumto $s=a$, fiat $s'-s=da$.

6. Quodsi autem arcus indefinitus AM$=s$ valorem quemcunque minorem quam AF obtineat, differentia MM′$=s'-s$ minor erit quam FF′$=da$, atque a da ita pendebit, vt quo maius extiterit elementum FF′, in eadem ratione elementum MM′ crescat. Statuatur ergo MM′$=s'-s=Qda$; et quantitas Q pendebit certo quodam modo, tam ab arcu AM$=s$, quam ab arcu toto AF$=a$, ita vt si fiat $s=0$, simul ipsa euanescat, at posito $s=a$ vt euadat $Q=1$. Quare cum Q sit functio quantitatum s et a, posita vtraque variabili, statuatur $dQ=Mds+Nda$. Vnde patet, si arcui AM$=s$ incrementum tribuatur ds, manente puncto F fixo, tum functionem Q abire in $Q+Mds$. Capiatur ergo M$m=ds$, simulque M′$m'=ds'$; et cum sit $\frac{MM'}{da}=Q$, pro statu proximo, quo s abit in $s+ds$, habebitur $\frac{mm'}{da}=Q+Mds$; ideoque $Mds=\frac{mm'-MM'}{da}=\frac{ds'-ds}{da}$. Hinc igitur indoles

doles functionis Q nobis praebet $ds' - ds = M ds da$, cum esset $s' - s = Q da$, existente $dQ = M ds + N da$.

7. Ponamus iam in motu per arcum AF celeritatem corporis in M esse $= v$, et in $m = v + dv$, ita vt curuae elementum Mm conficiatur tempusculo $dt = \frac{ds}{v}$; eodem autem tempusculo necesse est, vt in motu per arcum AF′ conficiatur elementum $M'm' = ds'$: si ergo in hoc motu statuatur celeritas corporis in $M' = v'$, et in $m' = v' + dv'$, erit etiam $dt = \frac{ds'}{v'}$; vnde sequitur, fore $\frac{ds'}{v'} = \frac{ds}{v}$; hincque $v' = \frac{v\,ds'}{ds}$; et $v' - v = \frac{v(ds' - ds)}{ds} = M v da$, ob $ds' - ds = M ds da$. Quam ob rem habebimus $v' = v(1 + M da)$, sicque si functio Q esset cognita, ex celeritate in puncto M pro motu per AF innotesceret celeritas in puncto homologo M′ pro motu per AF′, sumtis arcubus AM et AM′ in vtroque motu isochronis. Verum ex ratione resistentiae et viribus sollicitantibus, per principia motus elicitur aequatio differentialis, qua acceleratio elementaria in vtroque motu per AF et AF′ definitur. Posito ergo $dM = L ds$, dum arcus s incrementum ds capit, celeritasque v abit in $v + dv$, erit $dv' = dv(1 + M da) + L v\,ds\,da$.

8. His pro conditione motis ad tautochronismum obtinendum in genere praemissis, progrediamur ad ipsam motus determinationem, ac tantum quidem consideramus casum grauitatis naturalis, qua corpus perpetuo deorsum vrgetur, quia vires sollicitantes absolutae inuestigationem tautochronarum parum afficiunt; resistentia vero sit functioni cuicunque celeritatis v, quae denotetur per V, proportionalis, designetque V′ simi-

lem

lem functionem ipsius v'. Hunc in finem capiatur axis verticalis AE, super quo sit abscissa arcui $AM = s$ respondens $AP = x$; ac natura curuae certa quadam relatione inter s et x continebitur, quae vbique immunis esse debet a quantitate arcus $AF = a$, quandoquidem vtcunque arcus a varietur, omnes siue ascensus siue descensus toti eodem tempore super eadem curua absolui debent. Si igitur ponamus $dx = p\,ds$, necesse est, vt quantitas p arcum a non inuoluat, sed sit functio ipsius s tantum, et quantitatum vere constantium.

9. Nunc autem, posita littera g pro grauitate deorsum sollicitante, leges motus pro motu per arcum AF praebent hanc aequationem:

$$2v\,dv = -g\,dx \pm V\,ds = -gp\,ds \pm V\,ds$$

vbi signum superius ad descensum, inferius vero ad ascensum refertur. Neglecta ergo hac ambiguitate, quippe quae commode ipsi quantitati V inuoluitur, consideremus hanc aequationem:

$$2v\,dv = -gp\,ds + V\,ds,$$

ex qua pro motu per arcum AF' habebimus hanc:

$$2v'\,dv' = -gp'\,ds' + V'\,ds',$$

quae ex illa nascitur, si pro v scribamus v', et arcui s incrementum tribuamus $s' - s = Q\,da$. Quodsi ergo p eiusmodi sit functio ipsius s, vt fiat $dp = q\,ds$, erit $p' = p + qQ\,da$. Tum vero iam obtinuimus $ds' = ds(1 + M\,da)$ $v' = v(1 + M\,da)$ et $dv' = dv(1 + M\,da) + L\,v\,ds\,da$.

10. Substituamus igitur hos valores in posteriori aequatione, ac prodibit

$$2vdv(1+Mda)^2+2Lvvdsda(1+Mda)=-gpds(1+Mda)$$
$$-gqQdsda(1+mda)+V'ds(1+Mda)$$

quae per $(1+Mda)^2$ diuisa dat

$$2vdv=-\frac{2Lvvdsda-gpds-gqQdsda+V'ds}{1+Mda}.$$

Cum igitur ex priori sit $2vdv=-gpds+Vds$, erit aequatione facta,

$$-2Lvvdsda-gqQdsda+V'ds=-gpMdsda$$
$$+V'ds+Vdsda$$

quae per $dsda$ diuisa praebet

$$2Lvv+gqQ-gpM+MV=\frac{1}{da}(V'-V).$$

Totum ergo hoc negotium huc redit, vt ista aequatio conficiatur, quod quo commodius fieri possit, cum sit V functio ipsius v, ponamus $dV=Udv$, et cum V' oriatur ex V, si pro v ponatur $v'=v+Mvda$, erit $V'=V+MUvda$, nostra aequatio adimplenda erit

$$2Lvv+gqQ-gpM+MV-MUv=0,$$

cui quomodo satisfieri possit, in sequentibus exemplis videamus.

Problema 1.

11. In hypothesi grauitatis vniformis g, si nulla fuerit resistentia, corpusue in vacuo moueatur, inuenire curuam tautochronam.

Solutio.

Quia resistentia est nulla, erit $V=0$, et $U=0$, ideoque habebitur haec aequatio:

$$2Lvv+gqQ-gpm=0$$

vbi

vbi eſt $dp = qds$; tum vero $dQ = Mds$, et $dM = Lds$, ſiquidem a pro conſtante accipiatur; vbi notandum eſt, quantitates Q M et L inuoluere poſſe a, at p et q ab a liberas eſſe debere. Cum igitur v tantum inſit in primo termino, fiat $L = 0$, eritque $M = f$ et $Q = fs + g$; quia vero poſito $s = 0$ fieri oportet $Q = 0$, et caſu $s = a$, $Q = 1$, euidens eſt, poni debere $g = 0$; et $f = \frac{1}{a}$; ita vt ſit $M = \frac{1}{a}$ et $Q = \frac{s}{a}$, quibus valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra abit in $\frac{gqs}{a} - \frac{gp}{a} = 0$, ſeu $p = qs$. At eſt $q = \frac{dp}{ds}$, eritque $pds = sdp$, hincque $p = \frac{s}{c}$, exiſtente c conſtante, ab a non pendente; ex quo pro curua quaeſita reſultat haec aequatio: $dx = pds = \frac{sds}{c}$, ſeu $ss = 2cx$, quae eſt pro cycloide.

Problema 2.

12. In hypotheſi grauitatis vniformis g, ſi reſiſtentia fuerit conſtans, ſeu momentis temporum proportionalis, inuenire curuam tautochronam.

Solutio.

Sit igitur reſiſtentia $V = k$, quae quantitas conſtans vtique non implicat a, eritque $U = 0$, et aequatio adimplenda eſt

$$2Lvv + gqQ - gpM + kM = 0$$

exiſtente $dp = qds$; $dQ = Mds$; et $dM = Lds$. Fiat ergo iterum $L = 0$, eritque vt ante $M = \frac{1}{a}$, et $Q = \frac{s}{a}$; vnde adipiſcimur hanc aequationem:

$$\frac{gqs}{a} - \frac{gp}{a} + \frac{k}{a} = 0, \text{ ſeu } gqs - gp + k = 0,$$

 quae

quae per ds multiplicata ob $qds = dp$ praebet

$$gsdp - gpds + kds = 0, \text{ et integrando } \frac{gp}{s} = \frac{k}{s} + \frac{g}{c}.$$

siue $p = \frac{s}{c} + \frac{k}{g} = \frac{dx}{ds}$, vnde denuo integrando obtinebitur $ss + \frac{2kcs}{g} = 2cx$, quae aequatio iterum est pro cycloide, in qua punctum A ibi est capiendum, vbi tangens cum verticali AE angulum facit, cuius cosinus est $= \frac{k}{g}$; nisi ergo resistentia k minor sit grauitate g, quaestio absurdum implicat, ac si esset $k = g$, punctum A in cuspidem cycloidis incideret, arcusque motui destinatus euanesceret.

Problema 3.

13. In hypothesi grauitatis vniformis g, si resistentia ipsis celeritatibus fuerit proportionalis, inuenire curuam tautochronam.

Solutio.

Sit igitur resistentia $V = mv$, erit $U = m$, et aequatio habebitur

$$2Lvv + gqQ - gpM + mvM - mvM = 0$$

quae ergo ad eam, quam pro vacuo inueuimus, reducitur; ita vt esse debeat: $L = 0$, $M = \frac{1}{a}$ et $Q = \frac{s}{a}$, sicque, vt ibi, prodit $p = qs$, porroque $p = \frac{s}{c}$ et $ss = 2cx$. Hoc ergo casu perinde atque in vacuo cyclois tautochronismi proprietatem conseruat.

Problema 4.

14. In hypothesi grauitatis vniformis g, si resistentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis, inuenire curuam tautachronam.

Solutio.

Solutio.

Statuatur resistentia $V = nv^2$, vt sit $U = 2nv$, habebiturque haec aequatio:

$$2Lvv + gqQ - gpM + nMv^3 - 2nMv^3 = 0$$

seu $2Lvv - nMv^2 + g(qQ - pM) = 0$.

Iam primo vt termini continentes vv tollantur, fiat $2L = nM$, et cum sit $dQ = Mds$ et $dM = Lds$, considerata hic quantitate a vt constante, conficietur $2Lds = 2dM = nMds$, et integrando $M = \alpha e^{\frac{ns}{2}}$, porroque $Q = \frac{2\alpha}{n}(e^{\frac{ns}{2}} - 1)$, vt fiat $Q = 0$, si $s = 0$, at quia sumto $s = a$, fieri debet $Q = 1$, erit $\alpha = \frac{n}{2(e^{\frac{na}{2}} - 1)}$.

His autem valoribus inuentis consequimur

$qQ - pM = 0$, quae per α diuisa dat

$\frac{2q}{n}(e^{\frac{ns}{2}} - 1) = e^{\frac{ns}{2}}p$, et per ds multiplicando, ob $qds = dp$,

$$2dp(e^{\frac{ns}{2}} - 1) = ne^{\frac{ns}{2}}pds \text{ seu } \frac{dp}{p} = \frac{ne^{\frac{ns}{2}}ds}{2(e^{\frac{ns}{2}} - 1)}$$

vnde fit $p = \frac{1}{c}(e^{\frac{ns}{2}} - 1) = \frac{dx}{ds}$.

Quare aequatio pro tautochrona erit

$$cdx = ds(e^{\frac{ns}{2}} - 1) \text{ et } \frac{2}{n}(e^{\frac{ns}{2}} - 1) - s = cx$$

quae est eadem, quam ex diuersissimis principiis olim inueni.

Problema 5.

15. In hypothesi grauitatis vniformi g, si resistentia fuerit partim constans, partim ipsis celeritatibus, partim vero quadratis celeritatum proportionalis, inuenire curuam tautochronam.

Solutio.

Statuatur ergo resistentia $V = k + mv + nvv$; et cum sit $U = m + 2nv$, nostra aequatio erit

$$\left.\begin{array}{r} 2Lvv + g(qQ - pM) + kM + mMv + nMvv \\ - mMv - 2nMvv \end{array}\right\} = 0$$

siue $2Lvv - nMvv + g(qQ - pM) + kM = 0$.

Fiat ergo iterum $2L = nM$, et ob $dQ = Mds$, $dM = Lds$, erit, vt ante,

$$M = \alpha e^{\frac{ns}{2}} \text{ et } Q = \frac{2\alpha}{n}\left(e^{\frac{ns}{2}} - 1\right) \text{ existente } \alpha = \frac{n}{2\left(e^{\frac{na}{2}} - 1\right)},$$

quibus valoribus substitutis, et aequatione per α diuisa, habebimus,

$$\frac{2gq}{n}\left(e^{\frac{ns}{2}} - 1\right) gpe^{\frac{ns}{2}} + ke^{\frac{ns}{2}} = 0$$

quae per ds multiplicata, ob $qds = dp$, dat

$$\frac{2gdp}{n}\left(e^{\frac{ns}{2}} - 1\right) - gpe^{\frac{ns}{2}} ds + ke^{\frac{ns}{2}} = 0 \text{ seu}$$

$$\frac{gdp}{gp - k} = \frac{ne^{\frac{ns}{2}} ds}{2\left(e^{\frac{ns}{2}} - 1\right)}, \text{ cuius integrale est}$$

$gp - k = \frac{g}{c}\left(e^{\frac{ns}{2}} - 1\right)$, hincque $gcdx = ckds + g\left(e^{\frac{ns}{2}} - 1\right)ds$

vnde

vnde tautochrona quaesita hac continebitur aequatione:

$$gcx = cks + \frac{2g}{n}\left(e^{\frac{ns}{2}} - 1\right) - gs$$

seu $x = \frac{(ck-g)}{gc} + \frac{2}{nc}\left(e^{\frac{ns}{2}} - 1\right)$.

16. En ergo methodum a Cel. *Fontanio* excogitatam, cui eo maior debetur laus, quod pari succeſſu tam pro reſiſtentia celeritatibus, quam earum quadratis proportionali, tautochronas exhibeat, dum mea methodus ad reſiſtentiam celeritatibus ipſis proportionalem nullo modo accommodari patitur. Cum igitur caſus poſtremi problematis neque mea methodo, neque vlla alia etiamnunc cognita, expediri poſſit, plurimum profecto Vir Acutiſſimus praeſtitiſſe eſt cenſendus, quod tam eximiam methodum in medium attulerit, quae ad alias non minus arduas inueſtigationes viam parare videtur. Interim tamen non ſine dolore fateri cogimur, hanc ingenioſam methodum non vltra hos quinque caſus, vel ſaltem vltimum, qui reliquos omnes in ſe complectitur, extendi poſſe; ſi enim reſiſtentia alii celeritatum dignitati proportionalis aſſumatur, non amplius celeritatem ex aequatione eliminare, neque idcirco ex ea aequationem pro tautochrona elicere licet. Nihilo vero minus id ipſum, quod haec methodus nobis largitur, grato animo agnoſcere debemus.

17. Curua igitur tautochrona, quam pro reſiſtentia $V = k + mv + nvv$ ſumus adepti, vtique meretur, quae accuratius examinetur, motus ſuper ea, ex quo tautochronismus naſcitur, diligentius perpendatur.

tur. Quod quidem ad ipsam curuam attinet, eius natura hac exprimitur aequatione finita:

$$c(gx-ks)-\tfrac{2g}{n}(e^{\frac{ns}{2}}-1)-gs$$

quam ex hac aequatione differentiali eruimus:

$$c(gdx-kds)=g(e^{\frac{ns}{2}}-1)ds.$$

Hinc igitur, si quantitatem exponentialem eliminemus, obtinebimus hanc aequationem differentialem:

$$gdx-kds=\tfrac{n}{2}ds(gx-ks)+\tfrac{ng}{2c}sds$$

circa quas aequationes imprimis notandum est, quantitatem m in determinationem tautochronae non ingredi, ita vt resistentia ipsis celeritatibus proportionalis naturam tautochronae non immutet.

18. Cognita iam curua videamus, quomodo motus corporis super ea sit comparatus; ac si celeritatem in M ponamus $=v$, erit ex conditione motus

$$2vdv=-gdx+(k+mv+nvv)ds$$

cum autem sit $gdx-kds=\frac{g}{c}(e^{\frac{ns}{2}}-1)ds$, eliminando dx, habebimus

$$2vdv+\tfrac{g}{c}(e^{\frac{ns}{2}}-1)ds-mvds-nvvds=0$$

vnde ad quoduis curuae punctum celeritas corporis determinatur. Phaenomena autem huius motus, quatenus arcus $AF=a$ et $AF'=a+da$ inter se comparantur, ita se habebunt, vt sit, sumtis arcubus AM et AM′ aequidiurnis, in hoc gemino motu

$$MM'=\frac{e^{\frac{ns}{2}}-1}{e^{\frac{na}{2}}-1}.FF';\quad M'm'=Mm+\frac{ne^{\frac{ns}{2}}.MmFF'}{2(e^{\frac{na}{2}}-1)}$$

Cele-

Celeritas vero in puncto M′ pro motu per AF′ erit

$$v' = v + \frac{n e^{\frac{ns}{2}} v . FF'}{2\left(e^{\frac{na}{2}} - 1\right)}.$$

At $\frac{ds}{v}$ dat elementum temporis t, quo arcus AM absoluitur, quod integratum et per totum arcum AM extensum erit constans.

19 Quanquam autem hinc certi sumus, omnes siue descensus, siue ascensus, super hac curua inter se esse aequidiurnos, tamen ipsum tempus difficulter assignatur, multoque minus in promtu est, ex aequatione inter s et v rationem tautochronismi demonstrare, quod tamen facile praestari posset, si pars illa resistentiae, quae ipsis celeritatibus est proportionalis, abesset, seu si esset $m = 0$; atque in hoc ipso causa latet, quod ista resistentiae hypothesis meam methodum respuat. Operae ergo pretium erit, inuestigare, quemadmodum expressio temporis pro motu corporis super hac curua in genere futura sit comparata, et quomodo ea ad tautochronismum perducatur. Hunc in finem integratio huius aequationis:

$$2vdv - mvds - nvvds + \lambda\left(e^{\frac{ns}{2}} - 1\right)ds = 0$$

inuestigari debet, in qua pro $\frac{g}{c}$ posui λ, ita vt λ iam sit constans arbitraria.

20. Primo quidem intuitu haec aequatio tractatu admodum difficilis videtur; verum haec substitutio $v = \left(e^{\frac{ns}{2}} - 1\right)u$, qua fit $dv = \left(e^{\frac{ns}{2}} - 1\right)du + \frac{n}{2}e^{\frac{ns}{2}}uds$, felici cum successu adhibebitur: fiet enim

$$2udu\left(e^{\frac{ns}{2}} - 1\right) - muds + nuuds + \lambda ds = 0$$

quae sponte variabilium separationem offert, cum prodeat

$$\frac{ds}{e^{\frac{ns}{2}}-1}+\frac{2udu}{\lambda-mu+nuu}=0.$$

tum vero ob $dt=\frac{ds}{v}$ et $v=(e^{\frac{ns}{2}}-1)u$ simul pro tempore t determinando obtinebimus

$$dt+\frac{2du}{\lambda-mu+nuu}=0.$$

Hic primum obseruo formulae $\frac{ds}{e^{\frac{ns}{2}}-1}$, quia huic est aequalis $\frac{e^{\frac{-ns}{2}}ds}{1-e^{\frac{-ns}{2}}}$ integrale esse $=\frac{2}{n}l(1-e^{\frac{-ns}{2}})$

quocirca erit

$$-\frac{2}{n}l(1-e^{\frac{-ns}{2}})=\int\frac{2udu}{\lambda-mu+nuu}=\frac{1}{n}l(\lambda-mu+nuu))$$
$$+\frac{m}{n}\int\frac{du}{\lambda-mu+nuu}\quad\text{et}\quad t=-\int\frac{2du}{\lambda-mu+nuu}.$$

21. Quod nunc ad tautochronismum attinet, quia posito $s=0$, fieri debet $v=b$, denotante b celeritatem corporis in ipso puncto A, pro hoc loco fiet $u=\frac{b}{0}=\infty$; deinde, quia in puncto F celeritas v euanescit, fit ibi $u=0$; vnde pro tempore primum per arcum AM indefinite inueniendo formulae $-\int\frac{2du}{\lambda-mu+nuu}$ integrale ita capi debet, vt euanescat, posito $u=\infty$, quo facto totum tempus per arcum AF resultabit, si ponatur $u=0$; his autem operationibus manifestum est, neque quantitatem b, neque quantitatem arcus AF $=a$,

in

in calculum ingredi; ſicque totum tempus euidenter prodit conſtans. Per integrationem autem reperitur

$$t = \frac{4}{\sqrt{(4\lambda n - mm)}}\left(-\mathrm{A\,tang.}\frac{\sqrt{(4\lambda n - mm)}}{m} + \mathrm{A\,tang.}\frac{u\sqrt{(4\lambda n - mm)}}{-2\lambda + mu}\right)$$

poſito ergo $u = 0$, erit totum tempus per AF

$$\frac{4}{\sqrt{(4\lambda n - mm)}}\left(\pi - \mathrm{A\,tang.}\frac{\sqrt{(4\lambda n - mm)}}{m}\right).$$

22. Quo hae formulae quoque ad caſum, quo $n = 0$, accommodari queant, loco conſtantis arbitrariae λ ponamus $\frac{\alpha}{n}$, et cum reſiſtentia fuerit $V = k + mv + nvv$, aequatio pro curua tautochrona, et quidem deſcenſuum, erit

$$gdx - kds = \frac{\alpha}{n}\left(e^{\frac{ns}{2}} - 1\right)ds$$

ſeu $gx - ks = \frac{2\alpha}{nn}\left(e^{\frac{ns}{2}} - 1\right) - \frac{\alpha s}{n}$.

Tum vero tempus vniuſcuiusque deſcenſus, ob $\lambda n = \alpha$, erit

$$\frac{4}{\sqrt{(4\alpha - mm)}}\left(\pi - \mathrm{A\,tang.}\frac{\sqrt{(4\alpha - mm)}}{m}\right).$$

At pro tautochrona aſcenſuum, ſumendis k, m, n negatiue, habebitur haec aequatio:

$$gdx + kds = \frac{\alpha}{n}\left(1 - e^{\frac{-ns}{2}}\right)ds, \text{ et integrando}$$

$$gx + ks = \frac{\alpha s}{n} - \frac{2\alpha}{nn}\left(1 - e^{\frac{-ns}{2}}\right).$$

Tempus autem, quo ſinguli aſcenſus abſoluuntur, erit

$$\frac{4}{\sqrt{(4\alpha - mm)}}\,\mathrm{A\,tang.}\frac{\sqrt{(4\alpha - mm)}}{m}$$

vbi notandum eſt, me hic, loco $-\mathrm{A\,tang.}\frac{\sqrt{(4\alpha - mm)}}{m}$, quia hic angulus maior eſt quadrante, poſuiſſe $\pi - \mathrm{A\,tang.}\frac{\sqrt{(4\alpha - mm)}}{m}$, vt capi queat minimus arcus, cuius tan-

gens est $\frac{\sqrt{(4\alpha - mm)}}{m}$; pro ascensibus autem hac reductione non erat opus.

23. Hic notatu dignum deprehendimus, quod in aequatione pro curua tautochrona littera m, in expressione autem temporis littera n, non reperiatur, neque etiam littera k; ita vt, manente constante α eadem, tempus tantum a parte resistentiae, quae ipsi celeritati est proportionalis, afficiatur. Quodsi haec pars penitus absit, seu $m = 0$ ob A tang. $\infty = \frac{\pi}{2}$, fit tam descensus quam ascensus tempus $= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$, at existente quantitate m quam minima, tempus descensus colligitur $= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{m}{\alpha}$; tempus vero ascensus $= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{m}{\alpha}$. Crescente autem porro quantitate m, donec fiat $m = 2\sqrt{\alpha}$, tempus descensus in infinitum excrescit, quia corpus nunquam vsque ad punctum infimum super curua peruenire potest, ascensus vero tempus hoc casu fit $= \frac{4}{m} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$. Si fieret $m > 2\sqrt{\alpha}$, tum multo magis descensus nunquam finirentur, ascensus autem tempus a logarithmis pendebit, eritque $= \frac{2}{\sqrt{(mm - 4\alpha)}}\, l \frac{m + \sqrt{(mm - 4\alpha)}}{m - \sqrt{(mm - 4\alpha)}}$.

24. Pro descensu autem celeritas in singulis curvae punctis per hanc aequationem integralem determinabitur:

$$l \frac{\frac{\alpha}{n}\left(1 - e^{\frac{-ns}{2}}\right)}{\frac{\alpha}{n}\left(1 - e^{\frac{-ns}{2}}\right)^2 - me^{\frac{-ns}{2}} v\left(1 - e^{\frac{-ns}{2}}\right) + ne^{\frac{-ns}{2}} vv} = \frac{2m}{\sqrt{(4\alpha - mm)}}$$

$$\left(\pi - \text{A tang.} \frac{e^{\frac{-ns}{2}} v\sqrt{(4\alpha - mm)}}{me^{\frac{-ns}{2}} v - \frac{2\alpha}{n}\left(1 - e^{\frac{-ns}{2}}\right)}\right)$$

Pro

Pro aſcenſu vero haec habebitur celeritatis determinatio

$$l\frac{\frac{\alpha}{n}\left(e^{\frac{na}{2}}-1\right)^2}{\frac{\alpha}{n}\left(e^{\frac{ns}{2}}-1\right)^2+me^{\frac{ns}{2}}v\left(e^{\frac{ns}{2}}-1\right)+ne^{ns}vv}=\frac{2m}{\sqrt{(4\alpha-mm)}}$$

$$\text{A tang.}\frac{e^{\frac{ns}{2}}v\sqrt{(4\alpha-mm)}}{me^{\frac{ns}{2}}v+\frac{2\alpha}{n}\left(e^{\frac{ns}{2}}-1\right)}$$

quae formulae, ſi in reſiſtentia $V=k+mv+nvv$ terminus mv euaneſcat, multo fiunt ſimpliciores; nam ob $m=0$, erit pro deſcenſu:

$$\alpha\left(1-e^{\frac{-na}{2}}\right)^2=\alpha\left(1-e^{\frac{-ns}{2}}\right)^2+nne^{-ns}vv$$

et pro aſcenſu:

$$\alpha\left(e^{\frac{na}{2}}-1\right)^2=\alpha\left(e^{\frac{ns}{2}}-1\right)^2+nne^{ns}vv$$

ſin autem ſit $n=0$, erit pro deſcenſu:

$$l\frac{\frac{1}{4}\alpha aa}{\frac{1}{4}\alpha ss-\frac{1}{2}mvs+vv}=\frac{2m}{(\sqrt{4\alpha-mm})}\left(\pi-\text{A tang.}\frac{v\sqrt{(4\alpha-mm)}}{mv-\alpha s}\right)$$

et pro aſcenſu:

$$l\frac{\frac{1}{4}\alpha aa}{\frac{1}{4}\alpha ss+\frac{1}{2}mvs+vv}=\frac{2m}{\sqrt{(4\alpha-mm)}}\text{A tang.}\frac{v\sqrt{(4\alpha-mm)}}{mv+\alpha s}.$$

25. Tum vero ſi tempus per arcum quemcunque $AM=s$ ponatur $=t$, erit pro deſcenſu ſuper tautochrona deſcenſuum:

$$t=\frac{4}{\sqrt{(4\alpha-mm)}}\left(\text{A tang.}\frac{e^{\frac{-ns}{2}}v\sqrt{(4\alpha-mm)}}{me^{\frac{-ns}{2}}v-\frac{2\alpha}{n}\left(1-e^{\frac{-ns}{2}}\right)}\right.$$

$$\left.-\text{A tang.}\frac{\sqrt{(4\alpha-mm)}}{m}\right)$$

et pro ascensu super tautochrona ascensuum

$$t = \frac{4}{\sqrt{(4a - mm)}} \cdot \left(\text{A tang.} \frac{\sqrt{(4a - mm)}}{m} - \text{A tang.} \frac{e^{\frac{ns}{2}} v \sqrt{(4a - mm)}}{m e^{\frac{ns}{2}} v + \frac{2a}{n}(e^{\frac{ns}{2}} - 1)}\right)$$

Vnde si sit $m = 0$, erit pro descensu:

$$t = \frac{2}{\sqrt{a}}\left(\frac{\pi}{2} - \text{A tang.} \frac{n e^{\frac{-ns}{2}} v}{(1 - e^{\frac{-ns}{2}})\sqrt{a}}\right)$$

et pro ascensu:

$$t = \frac{2}{\sqrt{a}}\left(\frac{\pi}{2} - \text{A tang.} \frac{n e^{\frac{ns}{2}} v}{(e^{\frac{ns}{2}} - 1)\sqrt{a}}\right)$$

vbi quidem valores ipsius v ex superioribus aequationibus per arcum s determinari debent.

26. Ex his igitur perspicuum est, quomodo curvae, per methodum Celeb. *Fontanii* inuentae, tautochronismum producant, id quod ex ipsa inuestigationis ratione minus intelligitur. At vero in hoc ipso praestantia huius methodi consistit, quod non indigeat indefinita temporis expressione, ita vt etiamsi, eius ope curuae tautochronae sint inuentae, tamen inde nihil certi, neque de motu corporis super his curuis, neque de ipsa temporis quantitate, innotescat. Has igitur res demum post inuentas curuas tautochronas per calculum peculiarem inuestigare licuit; ac nisi modus se obtulisset hanc aequationem differentialem resoluendi:

$$2vdv - mvds - nvvds + \lambda(e^{\frac{ns}{2}} - 1)ds = 0$$

hanc

hanc illustrationem ne quidem absoluere in potestate fuisset, quod eo magis mirandum videtur, quod etiam sine huius aequationis resolutione conuicti fuerimus, curvas inuentas reuera tautochronismi proprietate esse praeditas, etiamsi ipsa motus determinatio latuisset; quam ob causam haec methodus tautochronas inuestigandi summis laudibus digna est censenda.

27. Si autem attentius examinemus, in quanam re vis huius admirabilis methodi consistat, eam in hoc positam reperiemus, quod non ex ipsa aequatione fundamentali

$$2vdv + gpds - Vds = 0$$

qua motus natura in genere exprimitur, tautochronismi conditio petatur, sed ex ea per indolem tautochronismi alia aequatio, in qua non amplius insit differentiale dv, eliciatur, cui sit satisfaciendum. Introducta scilicet functione indefinita ipsarum s et a, quae erat Q, et quam ita comparatam esse oportet, vt posito $s = 0$, fiat $Q = 0$, posito autem $s = a$, fiat $Q = 1$, posuimus $dQ = Mds$, et $dM = Lds$, tum vero $dp = qds$, et $dV = Udv$; quibus positis satisfieri oportebat huic aequationi:

$$2Luv + g(qQ - pM) + M(V - Uv) = 0$$

ita vt etiamsi quantitates Q, M et L inuoluant quantitatem a, tamen quantitates p et q ab ea immunes resultent.

28. Cum autem haec aequatio adhuc celeritatem v contineat, quae quemadmodum ab s et a pendeat, ex aequatione principali $2vdv + gpds - Vds = 0$

definiri deberet, in quo ipso autem summa difficultas versatur: dispiciendum est, vtrum illa aequatio non sine huius subsidio resolui possit. Quod si in genere praestari posset, haberetur methodus latissime patens, omnes tautochronas in quocunque medio resistenti inueniendi; verum talis resolutis iis tantum casibus succedit, quibus functionem Q cum suis deriuatis ita per s et a determinare licet, vt quantitas v prorsus ex calculo exterminetur; tum enim cuiuscunque ea fuerit naturae, quae quidem aequatione principali determinatur, quoniam non amplius in calculo inest, aequatio residua definiet quantitates p et q, vnde ob $dx = pds$, et $dp = qds$, natura curuae quaesitae determinatur, si modo quantitas a ex ea penitus abierit, vti vsu venit in exemplis supra allatis.

29. Facile autem perspicitur, hoc commodum locum habere non posse, nisi resistentia eiusmodi celeritatis functionem sequatur, vt sit $V = k + mv + nvv$; tum enim ob $U = m + 2nv$, fit $V - Uu = k - nvv$, et aequatio nostra induit hanc formam:

$$2Lvv + g(qQ - pM) + kM - nMvv = 0$$

in qua cum nonnisi eadem potestas ipsius v insit, ea ex calculo tollitur sola positione $2L = nM$, remanetque tum aequatio ab v liberata $g(qQ - pM) + kM = 0$, quae determinat naturam curuae, quomodocunque etiam celeritas v per aequationem principalem determinetur, ita vt eius resolutione his casibus non indigeamus ad curuas tautochronas inueniendas. Nisi autem quantitas

V-Uv

$V-Uv$ ad hanc formam $k-nvv$ rediisset, altera ista aequatio nullam vtilitatem attulisset.

30. Si enim exempli gratia resistentia cubis celeritatum esset proportionalis, vt haberemus $V=nv^3$, ob $U=3nvv$ foret $V-Uv=-2nv^3$, hincque nostra aequatio abiret in

$$2Lvv+g(qQ-pM)-2nMv^3=0$$

in qua iam functio Q nullo modo per s et a ita definiri potest, et termini $2Lvv$ et $2nmv^3$ ex aequatione expellantur. Quamobrem huic aequationi satisfieri nequit, nisi simul aequatio principalis: $2vdv+gpds-Vds=0$ in computum trahatur, quae cum expediri nequaquam possit, hinc etiam nullum lucrum consequimur. Etsi enim ex combinatione harum aequationum conficitur ista:

$$4Mvdv-2Lvvds+3gMpds-gqQds=0$$

cuius integrale est

$$vv=\tfrac{1}{2}gM\int\frac{(qQ-3pM)ds}{MM}$$

quod integrale ita est capiendum, vt, posito $s=a$, fiat $v=0$; tamen si hinc valores pro vv et v^3 in aequatione

$$2Lvv+g(qQ-pM)-2nMv^3=0$$

substituatur, quantitates a et s ita erunt inter se permixtae, vt nulla via pateat, functionem Q ita definiendi, vt quantitas a prorsus ex calculo exstirpetur, litteraeque p et q per solam variabilem s determinari possint.

possint. Per differentiationem quidem etiam celeritas v eliminari potest; nam posito $dL = Kds$ et $dq = rds$ reperitur:

$$3nLv^3 + 4Kvv + 3ng(qQ + pM)v + g(rQ - 3pL) = 0$$

quae cum hac: $2Lvv + g(qQ - pm) - 2nmv^3 = 0$ perducet ad aequationem ab v liberam. Verum haec ita fiet complicata, vt negotium resolutionis frustra suscipiatur.

DEMON-