ANALYTICA EXPLICATIO METHODI MAXIMORVM ET MINIMORVM.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Quae vulgo in elementis de methodo maximorum et minimorum tradi solent, ea in functionibus vnius cuiuspiam quantitatis variabilis potiſſimum conſumuntur, ita vt propoſita functione quacunque V, quae vtcunque ex quantitate variabili z et conſtantibus fuerit compoſita, eas variabilis z determinationes inueſtigari oporteat, quae functioni V maximum minimumue valorem inducant. Interdum etiam functiones duarum plurium ve variabilium z, y, x conſiderantur valoresque iis ſingulis aſſignandi quaeruntur, quibus functio maximum vel minimum valorem conſequatur. Methodus autem, qua huius poſterioris generis quaeſtiones reſoluuntur, prorſus conuenit cum ea, quae in genere priori adhibetur; ſi enim plures implicentur variabiles ſucceſſiue vnica tanquam variabilis ſpectatur, eiusque valor pro maximo minimo ve producendo idoneus indagatur; quae operatio, ſi per ſingulas variabiles fuerit inſtituta, omnium valores innoteſcunt, quibus valor functionis propoſitae vel maximus vel minimus redditur.

II.

Haud aliter res ſe habet, ſi proponatur functio duarum variabilium x et y, quaeraturque valor ipſi y tribuendus, vt, cum pro x data quantitas a fuerit poſita, ipſa functio maximum minimumue valorem impetret: ſtatim enim vbique pro x ſcribatur a, et quaeſtio manifeſto ad primum genus erit reducta. Verum ſi illa functio variabilium x et y non fuerit euoluta, ſed per integrationem determinetur, quaeſtiones ad genus omnino diuerſum erunt referendae, methodumque ſoluendi longe diuerſam requirunt. Veluti ſi Z fuerit functio quaecunque ipſarum x et y, ac proponatur formula integralis $\int Z\,dx$, quaeſtionem ita enunciari conueniet: *Definire relationem inter binas variabiles* x *et* y, *vt valor iſtius formulae, poſtquam poſuerimus* $a = x$, *fiat omnium maximus vel minimus.*

III.

Quantum inter huiusmodi quaeſtiones et eas, quas ad prius genus retuli, interſit, ad ſequentia momenta vel leuiter attendenti mox patebit. Sit enim V functio euoluta ipſarum x et y, pro qua inueſtigari debeat valor ipſius y, vt poſito $x = a$ valor functionis V euadat maximus minimus ve; atque ad hanc quaeſtionem ſoluendam ſtatim poni poteſt $x = a$, quo facto valor ipſius y per methodum priorem ita determinabitur, vt non pendeat a valore indefinito ipſius x. At propoſita formula integrali $\int Z\,dx$, non in formula differentiali $Z\,dx$, ſed demum poſt integrationem ipſi x valorem illum determinatum a tribuere licet; neque vt tum

tum formulae $\int Z\,dx$ valor euadat maximus minimusue. Valor quidam determinatus pro y fumendus negotium conficit, fed relatio quaedam inter x et y affignari debet; propterea quod etiam fi poft integrationem ponatur $x=a$, tamen valor integralis $\int Z\,dx$ a relatione indefinita, quae inter z et y intercedit, pendeat, et per omnes valores medios ipfius y determinetur.

IV.

Verum tales quaeftiones circa formulam $\int Z\,dx$ maximam minimam ve reddendam multo latius patent, neque tantum ad cafus, quibus Z eft functio ipfarum x et y, reftringuntur, fed pro Z affumi poteft expreffio quaecunque, quae relatione quapiam inter x et y affumta determinetur. Hinc Z inuoluere poterit praeter ipfas variabiles x et y etiam relationem differentialium earum, neque folum primi ordinis, fed etiam altiorum ordinum quorumcunque; fcilicet fi hae differentialium rationes ita exprimantur, vt fit $\frac{dy}{dx}=p$; $\frac{dp}{dx}=q$; $\frac{dq}{dx}=r$ etc. quantitas Z fpectari poterit vt functio quaecunque omnium harum x, y, p, q, r etc. Quin etiam quantitas Z praeterea in fe complecti poteft nouas formulas integrales vtcunque in ea inuolutas; vnde plura genera huiusmodi quaeftionum nafcuntur, ad quae methodus foluendi accommodari debet.

V.

Huiusmodi problemata primum occafione famofi illius Problematis Ifoperimetrici, a *Iacobo Bernoullio* olim in fummum Analyfeos incrementum agitati, tractari funt coepta, quod arduum negotium etfi mira fagacitate a Viro illo acutiffimo eft expeditum, tamen methodus ab eo adhibita tantum ad cafus, quibus quantitas Z praeter x et y folum earum differentialia prima feu litteram p inuoluebat, extendebatur, et quouis cafu fingulari quafi ex confiderationibus geometricis repeti debebat. Poftquam autem in vberiori huius argumenti enodatione diu defudaffem, methodum tandem maxime generalem fum adeptus, cuius ope omnia huiusmodi problemata, quibus quantitas Z non folum differentialia cuiusque ordinis fed etiam formulas integrales quascunque in fe contineret, refolui poffunt, quam methodum libro fingulari ample fum perfecutus.

VI.

Etfi autem haec methodus ita eft comparata, vt eius applicatio nullas figuras geometricas requirat, tamen ipfa iftius methodi inueftigatio ex contemplatione linearum curuarum eft petita, quam ob caufam mihi etiam tum non fatis naturalis eft vifa. Cum enim haec quaeftio, qua relatio inter x et y quaeritur, vt formula integralis $\int Z\,dx$, pofito poft integrationem $x=a$, maximum minimum ve valorem obtineat, fine vllo refpectu ad geometriam proponi poffit, folutio etiam adaequata et ex veris principiis deducta ab omni geometrica confideratione immunis effe debere videtur. Quod defiderium cum in meo tractatu non obfcure effem teftatus, Vir quidam Clariffimus et in arte Analytica verfatiffimus, *de la Grange Tournier*, litteris Taurini ad me datis nunciauit, fe huius voti compotem effe factum, fimulque fundamenta fuae Analyfeos lyſeos mecum beneuole communicauit. Quae cum plurimum in receſſu habere videantur, meo more explicanda et vberius excolenda ſtatui.

VII.

Conſideremus igitur in genere formulam integralem $\int Z\,dx$, in qua ſit Z functio vtcunque per x et y compoſita, quae etiam rationem differentialium non ſolum primi ſed etiam ſuperiorum ordinum inuoluat, ac praeterea quoque vnam plures ve formulas integrales complectatur. Pro eius autem determinatione aſſumamus integrale ita capi, vt euaneſcat poſito $x = 0$; tum vero poſt integrationem tribuamus ipſi x valorem quendam datum $x = a$, ſitque A valor, quem formula integralis tum recipit. Iam quaeſtio in hoc verſatur, vt definiri debeat ea relatio inter x et y, ex qua per iſtas operationes maximus vel minimus valor pro A obtineatur. Hanc igitur relationem inter x et y, quae quaeſito ſatisfaciat, aequatione quadam ſiue finita ſiue differentiali cuiuscunque ordinis exprimi oportet, quae ſimulac fuerit inuenta, problema pro ſoluto erit habendum.

VIII.

Ponamus, vti in Analyſi fieri ſolet, hanc relationem inter x et y, quae quaeritur, iam conſtare, ita vt quicunque valor definitus pro x aſſumatur, inde y quoque, ac proinde etiam functio Z, valorem determinatum adipiſcatur. Concipiantur hoc modo ſucceſſiue pro x omnes poſſibiles valores a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = a$ ſubſtitui, qui interuallis infinite paruis dx progrediantur; tum vero valores ipſius Z, qui his ſingulis valoribus ipſius x reſpondent, per dx multiplicari; haecque omnia producta in vnam ſummam collecta eam quantitatem, quam littera A indicauimus, conſtituent, quae maxima vel minima eſſe debet. Quod ita eſt intelligendum, vt, ſi ex alia relatione inter x et y quacunque ſingulis valoribus ipſius x alii valores ipſi y hincque ipſi Z conueniant, ex iis pro A, ſi fuerit maximum, valor certe minor, ſin autem fuerit minimum, certe maior ſit proditurus, quam ſi iuſta relatio inter x et y fuiſſet adhibita.

IX.

Quod ſi autem hae variationes, quae ſingulis valoribus ipſius y inducuntur, infinite paruae concipiantur, tum per indolem maximorum et minimorum inde nulla mutatio in quantitatem A redundare debet; atque ex hoc ipſo fonte determinatio maximorum et minimorum peti ſolet. Cum ſcilicet valoribus ipſius y pro arbitrio variationes infinite paruas tribuerimus, mutatio, quae inde in valoribus omnibus ipſius $Z\,dx$, ac proinde in eorum ſumma tota A oritur, calculo colligi debet, quae deinceps nihilo aequalis poſita praebebit aequationem, in qua natura maximi minimi ve, ideoque quaeſita relatio inter x et y continebitur. Hac igitur operatione methodus huiusmodi maxima vel minima inueſtigandi abſoluitur, quae idcirco iisdem principiis atque vulgaris methodus maximorum ac minimorum innititur; quae, quomodo per ſola Analyſeos praecepta, ſine vllis ex Geometria petitis ſubſidiis, inſtitui poſſit, accuratius

accuratius perpendamus, quandoquidem hoc idem negotium principiis geometricis innixus iam satis prospero successu sum executus.

X.

Cum igitur variationes infinite paruae singulis valoribus ipsius y inductae nullam mutationem in valore quantitatis A producere debeant, hocque fieri oporteat, vtcunque illae variationes accipiantur, dummodo fuerint infinite paruae; sufficiet in vnico tantum quodam valore ipsius y huiusmodi variationem concipere, et mutationem, quae inde in quantitate A oritur, euanescentem reddere, ex quo fonte etiam vniuersa mea methodus maximorum et minimorum est petita. Verum etiamsi pluribus valoribus ipsius y, quin etiam plane omnibus, huiusmodi variationes infinite paruae quaecunque inducantur, nihilominus natura maximorum et minimorum exigit, vt mutatio, quam quantitas A inde adipiscitur, ad nihilum redigatur, atque hoc vsu venire debet, vtcunque illae variationes, quippe quae omnes mere sunt arbitrariae, assumantur.

XI.

Sed quoniam in mea praecedente solutione vnicum quendam valorem ipsius y variationem infinite paruam accipere posui, dum reliqui omnes immutati manerent, in hoc principium continuitatis vim patiebatur, haecque praecipua erat causa, quod tota inuestigatio per sola Analyseos praecepta expediri nequiuerit, sed contemplatio figurae geometricae, in qua valores ipsius y per applicatas lineae curuae repraesentarentur, in

in subsidium vocari debuerit, quo inde variationes, quas ratio differentialium cuiusque ordinis subiret, commodius elici possent. Quam ob rem ne nimis principio continuitatis aduersemur, quo applicatio praeceptorum mere Analyticorum impediebatur, singulis valoribus ipsius y variationes infinite paruas tribuamus, quae tamen ita sint indefinitae, vt singulae deinceps ad libitum determinari, atque adeo omnes praeter vnam ad nihilum redigi possint, quo pacto ad solutiones meas priores deuoluamur necesse est.

XII.

Cum autem nunc non solum vni valori ipsius y, sed innumerabilibus, quin plane omnibus, variationes infinite paruas quidem, sed tamen arbitrarias, tribuimus, dubium est nullum, quin haec methodus multo latius pateat, quam praecedens, atque ad solutionem plurium aliorum problematum manuducat, ad quae prior methodus vel difficilius vel etiam frustra adhiberetur. Si enim illae variationes certo quodam modo determinentur, quaestione ad Geometriam translata huiusmodi problemata resolui poterunt, in quibus non inter omnes plane lineas curuas, sed tantum eas numero quidem infinitas, quae sub certa quadam specie comprehendantur, ea debeat assignari, quae maximi minimi ve cuiuspiam proprietate sit praedita. Tales autem quaestiones plerumque plurimum difficultatis implicare deprehenduntur; verum praeterea hinc adhuc plura incrementa in Analysi merito expectare licet.

XIII.

Cum igitur hic ſingulis valoribus ipſius y variationes infinite paruas tribuamus, duplicem ſtatum formulae $\int Z\,dx$ conſideramus, in quorum altero ſinguli valores ipſius y ſint ii ipſi, quos quaeſita relatio inter x et y requirit, in altero autem iidem valores variati contineantur; priorem ſtatum diſtinctionis cauſa *principalem*, alterum vero *ſtatum variatum* appellabo. Natura ergo maximorum et minimorum poſtulat, vt differentia inter hos duos ſtatus euaneſcat. Quemadmodum igitur in ſtatu principali valor ipſius y quicunque, dum variabilis x differentiali dx creſcere ſumitur, incrementum dy capere cenſetur, ita manente x, dum a ſtatu principali ad ſtatum variatum progredimur, valorem ipſius y elemento δy augeri ſtatuamus; vnde diſcrimen inter has duas expreſſiones differentiales dy et δy probe notetur. Dum autem ſingulis valoribus ipſius y, tranſitu ad ſtatum variatum facto, huiusmodi incrementa δy tribuimus, ea tanquam plane indeterminata, neque vllo modo ab ipſis valoribus ipſius y pendentia, ſunt ſpectanda.

XIV.

His poſitis indagari debet, quantum incrementum quaecunque functio Z pro quolibet valore ipſius x, dum a ſtatu principali ad variatum transfertur, capiat; quod incrementum a ſola variatione ipſius y, quatenus hac translatione elemento δy augetur, proficiſcitur. Indicemus hoc incrementum per δZ, ita vt valor ipſius Z a ſtatu principali ad variatum translatus ſit $= Z + \delta Z$; ac primo ſtatim patet, ſi functio Z a ſola variabili

variabili x penderet, neque alteram y implicaret, fore $\delta Z = 0$; neque igitur variabilis x, vtcunque ea in formationem functionis Z ingrediatur, quicquam ad δZ conferet, ſed eius valor a ſolo elemento δy, quo variabilis y creſcere concipitur, reſultat. Hic autem prout Z vel ſolas quantitates finitas x et y, vel etiam earum differentialium rationem, vel adeo formulas integrales inuoluit, ita diuerſi caſus erunt examinandi.

XV.

Ponamus ergo primo, functionem Z tantum ipſas quantitates finitas x et y inuoluere, ita vt neque ratio differentialium, neque vllae formulae integrales, in eam ingrediantur, atque ad eius variationem δZ definiendam, in functione Z vbique loco y ſcribi oportet $y + \delta y$, relicto x inuariato, ſicque prodibit valor variatus $Z + \delta Z$, a quo ſi principalis Z ſubtrahatur, remanebit variatio δZ. Manifeſtum ergo eſt, hanc variationem obtineri, ſi functio Z more ſolito differentietur, poſita ſola y variabili, dummodo pro dy ſcribatur δy. Quare ſi differentiatione more ſolito inſtituta, ſumta vtraque quantitate x et y variabili, fuerit $dZ = M\,dx + N\,dy$, erit pro translatione a ſtatu principali ad variatum $\delta Z = N\,\delta y$; haec ergo variatio reperitur, ſi in differentiali ordinario pro dx ſcribatur o, pro dy autem δy; hocque modo caſum primum facillime expediuimus.

XVI.

Videamus autem porro, quomodo pro hoc caſu primo, quo Z eſt functio ipſarum x et y tantum, formulae integralis $\int Z\,dx$ valor maximus vel minimus inueniri queat. Cum igitur pro quouis valore ipſius x functio Z creſcat elemento $N\,\delta y$, ideoque $Z\,dx$ particula

ticula $N\,dx\,\delta y$; summa omnium harum particularum a termino $x=0$ vsque ad $x=a$ dabit variationem ipsius A, quae si ponatur δA, erit $\delta A=\int N\,dx\,\delta y$; quae expressio cum debeat euanescere, quamcunque legem variationes δy teneant, necesse est, vt pro singulis valoribus ipsius x sit $N=0$. Haec ergo aequatio exprimit relationem inter x et y quaesitam, ex qua formula $\int Z\,dx$ adipiscitur valorem vel maximum vel minimum: neque haec proprietas tantum locum habebit casu praescripto $x=a$, sed etiam quicunque alius valor ipsi x tribuatur.

XVII.

Complectatur secundo functio Z praeter x et y etiam rationem differentialium primorum, seu posito $\frac{dy}{dx}=p$, sit Z functio quaecunque quantitatum x, y et p, quae more solito differentiata prodeat $dZ=M\,dx+N\,dy+P\,dp$. Hinc igitur quaeri debet variatio ipsius Z, dum a statu principali in statum variatum transfertur, qua translatione quantitas x manet eadem, y vero augetur elemento δy, elementum autem, quo quantitas p crescit, sit δp. Cum autem sit $p=\frac{dy}{dx}$, si in statu principali valorem ipsius y, qui ipsi $x+dx$ respondet, per y' indicemus, erit $p=\frac{y'-y}{dx}$; crescat iam in translatione in situm variatum y elemento δy, et y' elemento $\delta y'$, eritque $\delta p=\frac{\delta y'-\delta y}{dx}$. At $\delta y'-\delta y$ exprimit incrementum ipsius δy, dum x crescit differentiali dx, ita vt sit $\delta y'-\delta y=d\delta y$: tum vero etiam $\delta y'-\delta y$ spectari potest vt variatio ipsius $y'-y=dy$, dum in statum variatum progredimur, sicque erit quoque $\delta y'-\delta y=\delta dy$; vnde perficitur, esse $d\delta y=\delta dy$, ideoque $\delta p=\frac{d\delta y}{dx}=\frac{\delta dy}{dx}$.

XVIII.

Simili autem modo, si Z praeter x et y etiam differentialia superiorum ordinum inuoluat, vt positis $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=r$ etc. sit Z functio quaecunque quantitatum x, y, p, q, r etc. et more solito differentiando $dZ=M\,dx+N\,dy+P\,dp+Q\,dq+R\,dr$ etc. incrementa quantitatum q, r etc. dum a statu principali in variatum transferuntur, determinantur. Nam ob $q=\frac{dp}{dx}$ erit $\delta q=\frac{\delta p'-\delta p}{dx}=\frac{d\delta p}{dx}=\frac{\delta dp}{dx}$; pariterque $\delta r=\frac{d\delta q}{dx}=\frac{\delta dq}{dx}$ etc. Verum ex superioribus est $d\delta p=\frac{dd\delta y}{dx}=\frac{d\delta dy}{dx}$, et $\delta dp=\frac{\delta ddy}{dx}$, ita vt sit:

$$\delta q=\frac{dd\delta y}{dx^2}=\frac{d\delta dy}{dx^2}=\frac{\delta ddy}{dx^2}$$

eodem vero modo perspicitur fore:

$$\delta r=\frac{ddd\delta y}{dx^3}=\frac{dd\delta dy}{dx^3}=\frac{d\delta ddy}{dx^3}=\frac{\delta dddy}{dx^3}$$

quarum formularum specie diuersarum aequalitas probe est tenenda.

XIX.

Dum igitur functio Z ex statu principali in variatum transit, quia quantitas x incrementum nullum capit, y vero incrementum δy, tum quantitas p incrementum $\frac{d\delta y}{dx}$, quantitas q incrementum $\frac{dd\delta y}{dx^2}$, quantitas r incrementum $\frac{ddd\delta y}{dx^3}$ etc. ipsius functionis Z incrementum huic translationi conueniens reperietur per ordinariam differentiationem, ponendo $dx=0$, $dy=\delta y$, $dp=\frac{d\delta y}{dx}$, $dq=\frac{dd\delta y}{dx^2}$, $dr=\frac{ddd\delta y}{dx^3}$ etc. vnde id erit:

$$\delta Z=N\,\delta y+P\frac{d\delta y}{dx}+Q\frac{dd\delta y}{dx^2}+R\frac{ddd\delta y}{dx^3}+\text{etc.}$$

Hincque ergo variatio functionis Z pro quouis ipsius x valore definiri poterit; quae forma adhuc magis illustrabitur, si, quemadmodum est $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr$ etc. obseruetur, esse oportere, ob $\delta x = o$,

$$\delta Z = N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}$$

tum vero esse, ob $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$ etc.

$$\delta p = \frac{\delta dy}{dx} = \frac{d\delta y}{dx};\ \delta q = \frac{\delta dp}{dx} = \frac{d\delta p}{dx} = \frac{dd\delta y}{dx^2};\ \delta r = \frac{ddd\delta y}{dx^3}.$$

XX.

Cum ergo translatione in statum variatum functio Z incrementum capiat δZ, ipsa formula $\int Z\,dx$ incrementum nanciscetur $\int \delta Z.\,dx$, quod itaque erit:

$$\int dx\left(N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + R\frac{ddd\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

in quo, si post integrationem ponatur $x = a$, obtinebitur variatio ipsius A, seu δA, quae nihilo aequalis posita inducet quantitati A valorem maximum seu minimum. In hac autem integratione non amplius ad transitum in statum variatum respicitur, sed ea per omnia incrementa ipsius x extendi debet, cum denotet summam omnium variationum singulis valoribus ipsius x a termino $x = o$ vsque ad $x = a$ conuenientium. Ne igitur ratio differentialium per δ indicatorum turbet, pro δy scribatur ω, ita vt ω exhibeat quantitatem infinite paruam arbitrariam vtcunque ab x pendentem; ac superius incrementum nihilo aequandum erit:

$$\int dx\left(N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{dd\omega}{dx^2} + R\frac{d^3\omega}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

XXI.

Perspicuum est, in his differentialibus superioribus elementum dx assumi constans; quia enim posuimus

mus $\frac{d\delta p}{dx}$, seu $d.\frac{\delta p}{dx} = \frac{dd\delta y}{dx^2}$, ob $\delta p = \frac{d\delta y}{dx}$, aperte dx constans est assumtum. Hoc ergo obseruato, si singulas partes integralis inuenti seorsim integremus, habebimus:

$$\int dx.\,N\omega = \int N\omega\,dx$$

$$\int dx.\,P\frac{d\omega}{dx} = \int P\,d\omega = P\omega - \int \omega\,dP$$

$$\int dx.\,Q\frac{dd\omega}{dx^2} = \int\frac{Q\,dd\omega}{dx} = \frac{Q\,d\omega}{dx} - \frac{\omega\,dQ}{dx} + \int\frac{\omega\,ddQ}{dx}$$

$$\int dx.\,R\frac{d^3\omega}{dx^3} = \int\frac{R\,d^3\omega}{dx^2} = \frac{R\,dd\omega}{dx^2} - \frac{dR\,d\omega}{dx^2} + \frac{\omega\,ddR}{dx^2} - \int\frac{\omega\,d^3R}{dx^2}$$

etc.

Hinc itaque variatio quaesita partim ex membris integralibus, partim ex absolutis constabit, eritque:

$$\int\omega\,dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+\ \omega\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \text{etc.}\right) + \frac{d\omega}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \text{etc.}\right)$$
$$+\ \frac{dd\omega}{dx^2}(R - \text{etc.})$$

XXII.

Restituamus δy pro ω, ac formulae integralis $\int Z\,dx$, existente $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds$ etc. et $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$, $= s\frac{dr}{dx}$ etc. incrementum, dum in statum quemcunque variatum transfertur, quod hoc modo $\delta\int Z\,dx$ exprimere licet, ita se habebit:

$$\int dx\,\delta y\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.}\right)$$
$$+\ \delta y\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+\ \frac{d\delta y}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+\ \frac{dd\delta y}{dx^2}\left(R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.}\right) + \frac{d^3\delta y}{dx^3}(S - \text{etc.})$$

in

in quibus formulis, quatenus differentialia superiorum graduum inuoluunt, differentiale dx constans est assumtum. At δy pro singulis valoribus ipsius x valorem habet arbitrarium.

XXIII.

Si igitur pro valore $x = a$ formula $\int Z dx$ maxima vel minima fieri debeat, incrementum modo inuentum, si in eo statuatur $x = a$, nihilo aequale poni oportet; hocque ita vt semper euanescat, quomodocunque variationes δy assumantur. Quare etiam, si talis variatio vnico cuipiam valori y, qui conuenit valori cuicunque ipsius x, minori quam a, tribuatur, expressio inuenta in nihilum abire debet. Tum autem nulla mutatio inde valoribus vltimis ipsius y, qui ipsi $x = a$ respondent, inducuntur; quare cum, posito $x = a$, pars incrementi absoluta $\delta y (P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3 S}{dx^3} + \text{etc.}) + \frac{d\delta y}{dx}(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.}) + \frac{dd\delta y}{dx^2}(R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.}) + \text{etc.}$ tantum ab vltimorum ipsius y valorum variatione pendeat, pro iis erit $\delta y = 0$, $d\delta y = 0$, $dd\delta y = 0$ etc. sicque haec pars sponte euanescit. Ex quo necesse est, vt sola pars integralis seorsim nihilo aequalis reddatur, indeque fieri debeat:

$$\int dx \delta y (N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \frac{d^4 S}{dx^4} - \text{etc.}) = 0.$$

XXIV.

Haec autem expressio summam omnium variationum, quae ex singulorum ipsius y variationibus nascuntur, complectitur; sed quia talis mutatio in vnico valore fieri concipitur, tota summa ad hanc vnam variationem reducitur, reliquis omnibus euanescentibus; quare necesse est, vt pro hoc casu sit

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \frac{d^4 S}{dx^4} - \text{etc.} = 0.$$

Quoniam vero, in quocunque loco haec variatio fieri concipiatur, natura maximi minimi ve aeque hanc annihilationem postulat, necesse est, vt pro omnibus valoribus ipsius x fit $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \frac{d^4 S}{dx^4} - \text{etc.} = 0$; quae ergo aequatio continet relationem indefinitam inter x et y, qua efficitur, vt inde oriundus valor formulae integralis $\int Z dx$ fiat maximus vel minimus, posito $x = a$, vnde patet, hanc relationem non ab ista quantitate a pendere.

XXV.

Haec iam est eadem aequatio, quam pro solutione eiusdem problematis olim in Tractatu meo de Maximis ac Minimis dedi; nunc autem ex meris principiis analyticis deriuaui; quod negotium ideo commode successit, quod singulis valoribus ipsius y variationes accedere assumsi, quibus in statum variatum transferantur. Deinde vero reductio formularum integralium §. 21. facta negotium penitus confecit, qua illae ita fuerunt in partes resolutae, vt aliae a signo summatorio $\int$ essent liberae, quae autem eo manserunt adstrictae, eae tantum ipsam variationem $\omega = \delta y$, sine eius differentialibus, inuoluerent; quo ipso hoc commodi sumus nacti, vt, cum quaelibet variatio seorsim ad nihilum perduci debeat, formula integralis statim praebuerit aequationem

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \text{etc.} = 0,$$

 qua

qua indefinite relatio inter x et y exprimeretur, reliquae vero incrementi partes absolutae, vtpote ad vltimos tantum ipsius y valores pertinentes, non in computum venirent.

XXVI.

Neque tamen hae partes absolutae frustra sunt inuentae, sed singularem praestant vsum, ad quem methodus mea prior, quae tantum aequationem $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} -$ etc. $= 0$ suppeditauit, minus est accommodata; quam ob causam haec methodus illi longe est anteferenda. Quem vsum quo clarius exponam, sit primo Z functio tantum ipsarum x et y, earum differentialia non inuoluens, ita vt sit $dZ = M dx + N dy$, existentibus $P = 0$, $Q = 0$, etc. ac manifestum est, hoc casu partes absolutas sponte euanescere, atque adeo problema perfecte esse solutum, statim ac fecerimus $N = 0$. Ita si $(bb - nxy + \frac{y^3}{c}) dx$ debeat esse maximum vel minimum, ob $N = -nx + \frac{3yy}{c}$ quaestioni satisfit, statuendo $yy = \frac{1}{3} ncx$, neque hic quicquam vltra determinandum superest.

XXVII.

At si Z praeterea inuoluat $p = \frac{dy}{dx}$, vt fit $dZ = M dx + N dy + P dp$, tum, vt $\int Z dx$ fiat maximum vel minimum, vtique necesse est, sit $N - \frac{dP}{dx} = 0$. Verum quia haec aequatio est differentialis, atque adeo differentio-differentialis, si functio P ipsam quantitatem $p = \frac{dy}{dx}$ inuoluat, integratio eius vnam vel duas constantes arbitrarias accipiet, neque propterea relatio inter x et y penitus determinabitur. Obseruaui igitur iam

iam in meo tractatu, hanc relationem maximo minimo ve conuenientem ita praeterea ad lubitum definiri posse, vt, posito $x = a$, altera variabilis y datum valorem obtineat; ac si illa aequatio $N - \frac{dP}{dx} = 0$ fuerit differentialis secundi gradus, insuper vnam determinationem arbitrio nostro relinqui. His igitur casibus conditioni maximi vel minimi adhuc alia conditio, ad valores extremos ipsius y pertinens, adiungi potest.

XXVIII.

Porro igitur quaeri potest, cum his casibus relatio inter x et y non penitus determinetur, eaque adhuc infinitis modis exhiberi queat, quinam prae omnibus reliquis maximum minimum ve producat. Hoc vero colligere poterimus ex parte incrementi absoluta ante neglecta, quae hoc casu est $P \delta y$; cuius igitur valor, quem induit posito $x = a$, etiam euanescere debet. Atque hinc in genere intelligimus, si $\int Z dx$ debeat esse maximum vel minimum, existente $dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds$ etc. aequationem $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \frac{d^4 S}{dx^4} -$ etc. $= 0$, ita vlterius determinari debere, vt, posito $x = a$, sequentibus satisfiat aequationibus:

$$P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3 S}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

$$Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.} = 0$$

$$R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.} = 0; \; S = 0 \text{ etc.}$$

XXIX.

XXIX.

Quia exemplo haec clariora euadent, quaeratur relatio inter x et y, vt posito $x=a$ haec formula $\int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}}$, existente $p=\frac{dy}{dx}$, maximum minimum ve obtineat valorem. Cum ergo sit $Z=\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}}$, erit $M=0$, $N=-\frac{\sqrt{(1+pp)}}{2y\sqrt{y}}$ et $P=\frac{p}{\sqrt{y(1+pp)}}$, sicque primo adimplenda est haec aequatio $N-\frac{dP}{dx}=0$, seu $Ndx-dP=0$, quae per p multiplicata dat $Ndy=pdP$. At ob $M=0$ est $dZ=Ndy+Pdp$, ideoque $dZ=pdP+Pdp$, quae integrata praebet $Z=Pp+C$, seu $\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}}=\frac{pp}{\sqrt{y(1+pp)}}+C$ hoc est $\frac{1}{\sqrt{y(1+pp)}}=C=\frac{1}{\sqrt{b}}$. Hinc porro nanciscimur $b=y(1+pp)$ et $p=\sqrt{\frac{b-y}{y}}=\frac{dy}{dx}$, ita vt sit $dx=\frac{ydy}{\sqrt{(by-yy)}}$ et integrando $x=c-\sqrt{(by-yy)}+b\,\mathrm{A\,sin.}\frac{2\sqrt{(by-yy)}}{b}$. Verum ad pleniorem determinationem debet esse $P=0$, posito $x=a$, hoc est $p=0$, et $y=b$; vnde positis $x=a$, et $y=b$, constans c ita definitur, vt sit $c=a-\pi b$. Ac si velimus, vt posito $x=0$ fiat et $y=0$, debet esse $b=\frac{a}{\pi}$.

XXX.

Antequam hanc inuestigationem analyticam ad casus, quibus functio Z etiam formulas integrales in se complectitur, accommodemus, ipsam analysin, qua hactenus sumus vsi, diligentius examinemus, ac momenta, quibus innititur, accuratius perpendamus. Versatur autem haec Analysis circa duas variabiles x et y, quae partim ad statum, quem vocaui principalem, partim ad statum variatum referuntur, ita vt earum altera x ad vtrumque statum aeque pertineat, altera vero y, dum a statu principali ad variatum transfertur, incrementum capiat δy, dum autem in eodem statu ad valorem $x+dx$ promouetur, augmentum differentiale consuetum dy accipiat; hinc si variabilis y simul a statu principali in variatum et locum ipsi $x+dx$ respondentem promoueatur, augmentum eius erit $dy+\delta y$. Cum autem x ad vtrumque statum aeque referatur, erit $\delta x=0$.

XXXI.

Si iam habeatur alia quaecunque functio V ad locum x in statu principali relata, eaque in eodem statu ad locum $x+dx$ promoueatur, eius incrementum, quod ei accedet, more solito per dV exprimamus. Sin autem ea, manente valore ipsius x eodem, e statu principali in variatum proferatur, eius augmentum nouo more per δV exponamus. Quodsi iam functio illa V sit ex quantitatibus x, y, p, q, r etc. vtcunque composita, litterae autem p, q, r etc eiusmodi quantitates designent, quarum vtraque incrementa dp, dq, dr etc. et δp, δq, δr etc. exhiberi queant; hinc consueto differentiandi modo etiam ambo incrementa functionis V assignari poterunt. Si enim fuerit, pro translatione a loco x ad locum $x+dx$, in eodem statu, ex differentiatione consueta

$$dV=Mdx+Ndy+Pdp+Qdq+Rdr+\text{etc.}$$

erit, pro translatione a statu principali in variatum, eodem vero loco x, existente, vti notauimus, $\delta x=0$,

$$\delta V=M\delta x+N\delta y+P\delta p+Q\delta q+R\delta r\ \text{etc.}$$

 XXXII.

XXXII.

Deinde si haec duplicis generis differentialia inter se permisceantur, ex superioribus iam constat esse

$$\delta\, d\, V = d\, \delta\, V.$$

Hinc si V iam sit differentiale formae dV, erit

$$\delta\, dd U = d \delta\, d U = dd \delta\, U, \text{ ob } \delta\, dU = d \delta\, V$$

atque in genere, quocunque ordine bina differentiationis signa d et δ fuerint constituta, eorum ordo pro lubitu permutari potest salua significatione: sic erit

$$\delta\, d^3 V = d \delta\, d^2 V = d^2 \delta\, dV = d^3 \delta\, V.$$

Quia autem hic vnicum statum variatum consideramus, ad quem transitus signo δ indicatur, hoc signum nunquam plus quam semel in huiusmodi compositionibus inesse potest; semper autem e re est signum δ in talibus formulis in vltimum locum promouere.

XXXIII.

Eadem permutatio quoque ad signa integralia extenditur; si enim proponatur formula integralis $\int V$, denotante $\int$ summam omnium valorum in eodem statu, qui omnibus valoribus ipsius x respondent, sumtorum, erit etiam

$$\delta \int V = \int \delta\, V$$

id quod per se est perspicuum, cum incrementum translatitium totius summae aequale sit summae omnium incrementorum elementarium in eadem translatione existentium. Atque ex hoc ipso fonte superior Analysis est deducta; nam cum proposita esset formula integralis $\int Z\, dx$, cuius variatio in statum variatum erat definienda, assumsimus esse $\delta \int Z\, dx = \int \delta (Z\, dx) = \int \delta Z . dx$, quia $\delta (Z dx) = \delta Z\, dx + Z \delta\, dx$, est vero $\delta\, dx = 0$, vti $\delta\, x = 0$. Quin etiam si occurreret integratio geminata $\int\int V$, foret eodem modo

$$\delta \int\int V = \int \delta \int V = \int\int \delta\, V.$$

XXXIV.

Alterum artificium in transformatione integralium, quando post signum integrale signa d et δ inuicem coniunguntur, vt saltem in integratione signum δ solitarium relinquatur. Ita proposita formula integrali $\int V \delta\, d v$, ob $\delta\, d\, v = d\, \delta\, v$, considerando $\delta\, v$ vti quantitatem simplicem, erit

$$\int V\, \delta\, d\, v = \int V\, d\, \delta\, v = V\, \delta\, v - \int \delta\, v\, d\, V.$$

Eodemque porro modo perspicitur fore:

$$\int V dd\delta v = V d\delta v - \delta v dV + \int \delta v ddV$$

$$\int V d^3\delta v = V dd\delta v - d\delta v dV + \delta v ddV - \int \delta v d^3 V$$

$$\int V d^4\delta v = V d^3\delta v - d^2\delta v dV + d\delta v ddV - \delta v d^3 V + \int \delta v d^4 V$$

etc.

est enim $\int V dd\delta v = V d\delta v - \int d\delta v dV$, at est

$$\int d\, \delta\, v\, d\, V = \delta\, v\, d\, V - \int \delta\, v\, d\, d\, V$$

vnde ratio harum transformationum perspicitur.

XXXV.

His regulis analyticis praemissis non erit difficile, omnes quaestiones huiusmodi circa maxima et minima resoluere, etiamsi in formula $\int Z dx$ functio Z formulas integrales quascunque in se contineat. Totum negotium, scilicet, huc redit, vt incrementum $\delta \int Z dx$, quod formula proposita $\int Z dx$, dum a statu principali

in

in variatum transfertur, accipit, definiatur; quippe quod nihilo aequale poſitum ſolutionem maximi minimi ve continebit. Vocabo autem hoc incrementum variationem differentialem formulae $\int Z dx$, quae oriri intelligenda eſt, ſi ſinguli valores ipſius y particulis infinite paruis δy iisque arbitrariis augeantur. Tum vero hanc variationem per omnes valores ipſius x, a termino $x=0$ vsque ad terminum $x=a$, extendi debere perſpicuum eſt; pro cuius completa determinatione obſeruandum eſt, eam ita ſumi oportere, vt poſito $x=0$ ea euaneſcat. Hinc igitur ſequentia problemata ope huius methodi reſoluamus; circa quae tenendum eſt, litteras p, q, r, s etc. rationem differentialium binarum variabilium x et y ita inuoluere, vt ſit

$$p=\frac{dy}{dx};\ q=\frac{dp}{dx};\ r=\frac{dq}{dx};\ s=\frac{dr}{dx} \text{ etc.}$$

Problema I.

Si Z ſit functio quaecunque variabilium x et y, quantitatumque earum differentialia inuoluentium, p, q, r, s etc. ita vt eius differentiale ſit huiusmodi:

$$dZ=M dx+N dy+P dp+Q dq+R dr+S ds \text{ etc.}$$

inuenire variationem differentialem formulae integralis $\int Z dx$ a termino $x=0$ vsque ad $x=a$ extenſam.

Solutio.

Quaeri ergo debet $\delta\int Z dx$, et cum ſit $\delta\int Z dx=\int\delta Z dx$, habebimus ſtatim, ob $\delta x=0$,

$$\delta Z=N\delta y+P\delta p+Q\delta q+R\delta r+S\delta s \text{ etc.}$$

Eſt

Eſt vero, ſumto differentiali dx conſtante,

$$\delta p=\frac{\delta dy}{dx}=\frac{d\delta y}{dx}$$
$$\delta q=\frac{\delta dp}{dx}=\frac{d\delta p}{dx}=\frac{dd\delta y}{dx^2}$$
$$\delta r=\frac{\delta dq}{dx}=\frac{d\delta q}{dx}=\frac{d^3\delta y}{dx^3}$$
$$\delta s=\frac{\delta dr}{dx}=\frac{d\delta r}{dx}=\frac{d^4\delta y}{dx^4};$$

vnde obtinebimus:

$$\delta Z=N\delta y+P\frac{d\delta y}{dx}+Q\frac{d^2\delta y}{dx^2}+R\frac{d^3\delta y}{dx^3}+S\frac{d^4\delta y}{dx^4} \text{ etc.}$$

Iam pro integratione formulae $\int\delta Z dx$, per partes inſtituenda, vidimus eſſe

$$\int N\delta y\,dx=\int\delta y\,dx.\,N$$
$$\int P\,d\delta y=P\delta y-\int\delta y\,dP$$
$$\int Q\frac{dd\delta y}{dx}=Q\frac{d\delta y}{dx}-\frac{\delta y}{dx}dQ+\int\frac{\delta y}{dx}ddQ$$
$$\int R\frac{d^3\delta y}{dx^2}=R\frac{dd\delta y}{dx^2}-\frac{d\delta y}{dx^2}dR+\frac{\delta y}{dx^2}ddR-\int\frac{\delta y}{dx^2}d^3R$$
$$\int S\frac{d^4\delta y}{dx^3}=S\frac{d^3\delta y}{dx^3}-\frac{dd\delta y}{dx^3}dS+\frac{d\delta y}{dx^3}ddS-\frac{\delta y}{dx^3}d^3S-\int\frac{\delta y}{dx^3}d^4S$$
$$\text{etc.}$$

Ex his ergo colligitur variatio differentialis quaeſita:

$$\begin{aligned}\delta\int Z dx=\int\delta y\,dx\Big(N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\frac{d^4S}{dx^4}-\text{etc.}\Big)\\ +\delta y\Big(P-\frac{dQ}{dx}+\frac{ddR}{dx^2}-\frac{d^3S}{dx^3}+\text{etc.}\Big)\\ +\frac{d\delta y}{dx}\Big(Q-\frac{dR}{dx}+\frac{ddS}{dx^2}-\text{etc.}\Big)\\ +\frac{dd\delta y}{dx^2}\Big(R-\frac{dS}{dx}+\text{etc.}\Big)\\ +\frac{d^3\delta y}{dx^3}(S-\text{etc.})\end{aligned}$$

vbi pars prima integralis a termino $x=0$ vsque ad $x=a$ extendi debet, quae ergo omnes variationes intermedias complectitur: in reliquis autem partibus abſolutis ſtatim ponere licet $x=a$, et δy denotabit incremencrementum extremi valoris ipſius y; at $d\delta y$, $dd\delta y$ etc. pendebunt inſuper ab incrementis valorum contiguorum.

Coroll. 1.

Si ergo formula integralis $\int Z dx$ debeat eſſe maximum vel minimum pro termino $x = a$, neceſſe eſt, vt eius variatio differentialis euaneſcat, quomodocunque variationes δy accipiantur. Primum ergo oportet ſit, pro omnibus valoribus intermediis ipſius x,

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} = 0$$

qua aequatione relatio requiſita inter x et y continetur.

Coroll. 2.

Hinc autem, ſi termini P, Q, R etc. adſint, ob integrationes inſtituendas relatio inter x et y non penitus determinatur, quia in eam per ſingulas integrationes conſtantes quantitates arbitrariae ingrediuntur. His igitur caſibus ad quaeſtionem maximi vel minimi aliae nonnullae conditiones adiungi poſſunt, veluti vt pro datis quibusdam valoribus ipſius x, altera variabilis y datos valores obtineat.

Coroll. 3.

Omiſſis autem huiusmodi conditionibus, noua quaeſtio formari poteſt, quemadmodum conſtantes illae per integrationem introductae definiri debeant, vt vel maximum maximorum vel minimum minimorum obtineatur:

tineatur: pro hoc autem neceſſe eſt, vt, poſito $x = a$, his aequationibus ſatisfiat:

$$P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} = 0$$

$$Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} = 0$$

$$R - \frac{dS}{dx} = 0$$

$$S = 0.$$

Coroll. 4.

Deinde vero ob easdem rationes opus eſt, vt pro altero termino $x = 0$, iisdem hiſce aequationibus ſatisfiat. Nam cum variatio differentialis euaneſcere debeat poſito $x = 0$, pars integralis eiusmodi conſtantem inuoluit, quae hanc conditionem adimpleat; haec autem conſtans terminos abſolutos, ſi in iis ponatur $x = 0$, ad nihilum redigere debet. Quare formulae illae $P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} -$ etc. $Q - \frac{dR}{dx} +$ etc. $R - \frac{dS}{dx}$ etc. aeque euaneſcere debent caſu $x = 0$, atque caſu $x = a$.

Problema 2.

Si functio Z praeter quantitates x, y, p, q, r etc. etiam formulam quandam integralem $\Phi = \int \mathfrak{Z} dx$ vtcunque implicet, vt ſit

$$dZ = L d\Phi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds \text{ etc.}$$

in formula autem Φ ſit $\mathfrak{Z}$ functio quaecunque ipſarum x, y, p, q, r etc. exiſtente

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \mathfrak{S} ds \text{ etc.}$$

atque his ita ſe habentibus, oporteat definiri variationem differentialem huius formulae integralis $\int Z dx$, a termino $x = 0$ ad terminum $x = a$ extenſam.

Solutio.

Solutio.

Cum sit $\delta\int Z dx = \int \delta Z dx$, quaeramus ante omnia δZ, ac primo quidem statim patet esse

$$\delta Z = L\delta\Phi + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r \text{ etc.}$$

vbi, vt ante, habebitur

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx};\ \delta q = \frac{dd\delta y}{dx^2};\ \delta r = \frac{d^3\delta y}{dx^3};\ \delta s = \frac{d^4\delta y}{dx^4} \text{ etc.}$$

verum ob $\delta\Phi = \delta\int \mathfrak{Z} dx = \int\delta\mathfrak{Z} dx$, erit simili modo

$$\delta\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.}$$

hincque

$$\delta\Phi = \int dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.})$$

Cum igitur primum membrum formulae $\delta Z dx$ sit $L dx \delta\Phi$ erit

$$\int L dx\delta\Phi = \int L dx \int(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.}) dx$$

Ponatur nunc $\int L dx = V$, ac habebitur

$$\int L dx\delta\Phi = V\int dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.})$$
$$- \int V dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.})$$

Perinde hic est, qua lege integrale $\int L dx = V$ capiatur, quamcunque enim constantem adiiceremus, ea in hac expressione iterum tolleretur. Ponamus ergo istud integrale ita capi, vt euanescat, posito $x = a$, et quia variatio differentialis ad terminum $x = a$ accommodari debet, erit

$$\int L dx\delta\Phi = -\int V dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.})$$

ad quod si addantur reliquae partes, colligimus fore

$$\delta\int Z dx = \int dx(N - V\mathfrak{N})\delta y + (P - V\mathfrak{P})\delta p + (Q - V\mathfrak{Q})\delta q \text{ etc.}$$

vbi, si reductiones supra indicatas adhibeamus, prodibit ista variatio differentialis iam ad terminum $x = a$ adstricta:

$$\int\delta y dx\left((N - V\mathfrak{N}) - \frac{d(P - V\mathfrak{P})}{dx} + \frac{dd(Q - V\mathfrak{Q})}{dx^2} - \frac{d^3(R - V\mathfrak{R})}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \delta y\left((P - V\mathfrak{P}) - \frac{d(Q - V\mathfrak{Q})}{dx} + \frac{dd(R - V\mathfrak{R})}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx}\left((Q - V\mathfrak{Q}) - \frac{d(R - V\mathfrak{R})}{dx} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2}\left((R - V\mathfrak{R}) - \text{etc.}\right)$$

cuius expressionis constitutio per se est manifesta.

Coroll. 1.

Haec ergo solutio ex praecedente oritur, si loco quantitatum simplicium N, P, Q, R, etc. substituantur hae compositae:

$$N - V\mathfrak{N},\ P - V\mathfrak{P},\ Q - V\mathfrak{Q},\ R - V\mathfrak{R} \text{ etc.}$$

vbi est $V = \int L dx$, integrali hoc ita sumto, vt euanescat, posito $x = a$.

Coroll. 2.

Si igitur formula integralis $\int Z dx$ debeat reddi maximum vel minimum pro termino $x = a$, efficiendum est, vt ex variatione omnium valorum intermediorum ipsius y nulla variatio differentialis resultet, vnde relatio inter x et y ita definitur, vt sit:

$$(N - V\mathfrak{N}) - \frac{d(P - V\mathfrak{P})}{dx} + \frac{dd(Q - V\mathfrak{Q})}{dx^2} - \frac{d^3(R - V\mathfrak{R})}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

quae ergo relatio iam terminum praescriptum $x = a$ inuoluit, ita vt, si alius terminus praescribatur, alia quoque relatio indefinita inter x et y esset resultatura, propterea quod quantitas V hunc valorem $x = a$ in se complectitur.

Coroll. 3.

Hoc modo eiusmodi relatio inter x et y inuenitur, ex qua formula $\int Z dx$ ita maximum minimum ve valorem adipiſcatur, vt manentibus valoribus ipſius y extremis iisdem, quomodocunque valores intermedii immutentur, formulae $\int Z dx$ valor proditurus ſit ſemper vel minor caſu maximi, vel maior caſu minimi, quam ſi iuſta relatio adhiberetur.

Coroll. 4.

Si vero etiam valores extremi determinationi noſtrae permittantur, ex variatione differentiali inuenta etiam hos definire licet. Relatio ſcilicet inuenta per integrationes ita determinari debet, vt poſito $x=a$ etiam pars abſoluta euaneſcat. Hinc itaque efficiendum eſt, vt poſito $x=a$, ſit

$$(P-V\mathfrak{P})-\frac{d(Q-V\mathfrak{Q})}{dx}+\frac{dd(R-V\mathfrak{R})}{dx^2}-\text{etc.}=0$$
$$(Q-V\mathfrak{Q})-\frac{d(R-V\mathfrak{R})}{dx}+\frac{dd(S-V\mathfrak{S})}{dx^2}-\text{etc.}=0$$
$$(R-V\mathfrak{R})-\frac{d(S-V\mathfrak{S})}{dx}+\text{etc.}=0 \text{ etc.}$$

Coroll. 5.

Hoc quidem caſu ſit $V=0$, verumtamen hinc nonniſi eos terminos, qui ipſam quantitatem V inuoluunt, eiicere licet. Vbi enim eius differentialia occurrunt, quia eſt $\frac{dV}{dx}=L$, pro L ſcribi debet valor, quem induit poſito $x=a$, qui forte hoc caſu non euaneſcit, quod idem tenendum eſt de differentialibus ſequentibus: $\frac{ddV}{dx^2}=\frac{dL}{dx}$, $\frac{d^3V}{dx^3}=\frac{ddL}{dx^2}$, etc. qui valores prius in genere ſunt capiendi, antequam in iis ponatur $x=a$.

Coroll.

Coroll. 6.

Sin autem quoque valores primi ipſius y noſtrae determinationi relinquantur, tum iisdem aequationibus ſatisfieri debet ponendo $x=0$, vbi eadem ſunt obſeruanda, quae modo notauimus. Aequationes ſcilicet has ante penitus euolui oportet, quam in iis ſtatuatur $x=0$. His autem conditionibus quantitates tantum conſtantes in relationem indefinitam inter x et y ingreſſae determinantur.

Problema 3.

Si functio Z praeter quantitates x, y, p, q, r etc. etiam duas formulas integrales $\Phi=\int \mathfrak{Z} dx$ et $\Phi'=\int \mathfrak{Z}' dx$ vtcunque inuoluat, vt ſit

$$dZ=L d\Phi+L'd\Phi'+M dx+N dy+P dp+Q dq+R dr \text{ etc.}$$

in iis autem formulis Φ et Φ' functiones $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{Z}'$ tantum per quantitates x, y, p, q, r etc. determinentur, vt ſit

$$d\mathfrak{Z}=\mathfrak{M}\,dx+\mathfrak{N}\,dy+\mathfrak{P}\,dp+\mathfrak{Q}\,dq+\mathfrak{R}\,dr \text{ etc.}$$
$$d\mathfrak{Z}'=\mathfrak{M}'dx+\mathfrak{N}'dy+\mathfrak{P}'dp+\mathfrak{Q}'dq+\mathfrak{R}'dr \text{ etc.}$$

definire relationem inter x et y, vt haec formula integralis $\int Z dx$, quatenus a termino $x=0$ vsque ad $x=a$ extenditur, maximum minimum ve valorem conſequatur.

Solutio.

Oportet igitur variationem differentialem formulae $\int Z dx$ definiri, quae cum ſit $\delta\int Z dx=\int\delta Z dx$, habemus primo:

$$\delta Z=L\delta\Phi+L'\delta\Phi'+N\delta y+P\delta p+Q\delta q+R\delta r \text{ etc.}$$

Q 2 deinde

deinde vero eſt $\delta\Phi = \delta\int\mathfrak{Z}\,dx = \int\delta\mathfrak{Z}\,dx$ et $\delta\Phi' = \int\delta\mathfrak{Z}'dx$, hincque propterea:

$$\delta\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.}$$
$$\delta\mathfrak{Z}' = \mathfrak{N}'\delta y + \mathfrak{P}'\delta p + \mathfrak{Q}'\delta q + \mathfrak{R}'\delta r \text{ etc.}$$

ex quibus colligimus:

$$\delta\Phi = \int dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.})$$
$$\delta\Phi' = \int dx(\mathfrak{N}'\delta y + \mathfrak{P}'\delta p + \mathfrak{Q}'\delta q + \mathfrak{R}'\delta r \text{ etc.})$$

Cum igitur ſit variatio differentialis quaeſita

$$\delta\int Z\,dx = \int L\,dx\,\delta\Phi + \int L'dx\,\delta\Phi' + \int N\,dx\,\delta y + \int P\,dx\,\delta p \text{ etc.}$$

ponamus $\int L\,dx = V$ et $\int L'dx = V'$, eritque vt ſupra,

$$\int L\,dx\,\delta\Phi = V\int dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.})$$
$$- \int V\,dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.})$$
$$\int L'dx\,d\Phi = V'\int dx(\mathfrak{N}'\delta y + \mathfrak{P}'\delta p + \mathfrak{Q}'\delta q + \mathfrak{R}'\delta r \text{ etc.})$$
$$- \int V'dx(\mathfrak{N}'\delta y + \mathfrak{P}'\delta p + \mathfrak{Q}'\delta q + \mathfrak{R}'\delta r \text{ etc.})$$

Ponamus autem, haec integralia $V = \int L\,dx$ et $V' = \int L'dx$ ita capi, vt euaneſcant, poſito $x = a$, ac praecedentium formularum partes priores ſponte in nihilum abibunt, ſiquidem earum valores pro termino $x = a$ capi debent. Omnibus igitur partibus coniungendis obtinebimus

$$\delta\int Z\,dx = \int dx\,\delta y(N - V\mathfrak{N} - V'\mathfrak{N}')$$
$$+ \int dx\,\delta p(P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}')$$
$$+ \int dx\,\delta q(Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}')$$
$$+ \int dx\,\delta r(R - V\mathfrak{R} - V'\mathfrak{R}')$$
$$\text{etc.}$$

Cum

Cum vero ſit

$$\int P\,dx\,\delta p = P\delta y - \int\delta y\,dP$$
$$\int Q\,dx\,\delta q = Q\tfrac{d\delta y}{dx} - \tfrac{\delta y}{dx}dQ + \int\tfrac{\delta y}{dx}ddQ$$
$$\int R\,dx\,\delta r = R\tfrac{dd\delta y}{dx^2} - \tfrac{d\delta y}{dx^2}dR + \tfrac{\delta y}{dx^2}ddR - \int\tfrac{\delta y}{dx^2}d^3R$$
$$\text{etc.}$$

eliciemus variationem differentialem quaeſitam

$$\delta\int Z\,dx = \int dx\,\delta y\Big((N - V\mathfrak{N} - V'\mathfrak{N}') - \tfrac{d(P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}')}{dx} + \tfrac{dd(Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}')}{dx^2} - \text{etc.}\Big)$$
$$+ \delta y\Big((P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}') - \tfrac{d(Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}')}{dx} + \text{etc.}\Big)$$
$$+ \tfrac{d\delta y}{dx}\Big((Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}') - \tfrac{d(R - V\mathfrak{R} - V'\mathfrak{R}')}{dx} + \text{etc.}\Big)$$
$$+ \tfrac{dd\delta y}{dx^2}\Big((R - V\mathfrak{R} - V'\mathfrak{R}') - \text{etc.}\Big) \text{ etc.}$$

Coroll. 1.

Ponamus breuitatis gratia:

$$N - V\mathfrak{N} - V'\mathfrak{N}' = (N);\quad P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}' = (P);$$
$$Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}' = (Q) \text{ etc.}$$

ac relatio indefinita inter x et y exprimetur hac aequatione:

$$(N) - \tfrac{d(P)}{dx} + \tfrac{dd(Q)}{dx^2} - \tfrac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

quae tamen iam inuoluit terminum praeſcriptum $x = a$, quia formulae integrales $V = \int L\,dx$, et $V' = \int L'dx$, ita ſunt captae, vt euaneſcant, poſito $x = a$.

Coroll. 2.

Cum autem integratio huius aequationis, ſi fuerit differentialis, conſtantes arbitrarias inuoluat, ſi et hae determinationi noſtrae relinquantur, vt formula

$\int Z\,dx$

$\int Z dx$ valorem omnium maximum vel minimum adipiscatur, eas ita definiri conuenit, vt tam posito $x=0$ quam $x=a$, etiam his aequationibus satisfiat:

$(P)-\frac{d(Q)}{dx}+\frac{d\,d(R)}{dx^2}$ etc. $=0$; $(Q)-\frac{d(R)}{dx}$ etc. $=0$; $(R)-$ etc. $=0$.

Coroll. 3.

Si functio Z non solum duas huiusmodi formulas integrales $\Phi=\int\mathfrak{Z}dx$, $\Phi'=\int\mathfrak{Z}'dx$, sed etiam plures $\Phi''=\int\mathfrak{Z}''dx$, $\Phi'''=\int\mathfrak{Z}'''dx$ etc. inuoluat, ita tamen, vt litterae $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}', \mathfrak{Z}''$ etc. denotent tantum functiones quantitatum x, y, p, q, r etc. neque vltra villas formulas integrales inuoluant; ex solutione problematis etiam huiusmodi formularum variationes differentiales facile assignantur.

Problema 4.

Si functio Z praeter quantitates x, y, p, q, r etc. etiam formulam integralem $\Phi=\int\mathfrak{Z}dx$ vtcunque implicet, vt sit

$dZ=Ld\Phi+Mdx+Ndy+Pdp+Qdq+Rdr$ etc.

functio autem $\mathfrak{Z}$ etiam praeter $x, y, p, q, r,$ etc. aliam denuo formulam integralem $\phi=\int\mathfrak{z}dx$ inuoluat vt sit

$d\mathfrak{Z}=\mathfrak{L}d\phi+\mathfrak{M}dx+\mathfrak{N}dy+\mathfrak{P}dp+\mathfrak{Q}dq+\mathfrak{R}dr+$ etc.

functio vero $\mathfrak{z}$ tantum ex quantitatibus x, y, p, q, r etc. sit composita, existente

$$d\mathfrak{z}=\mathfrak{m}dx+\mathfrak{n}dy+\mathfrak{p}dp+\mathfrak{q}dq+\mathfrak{r}dr \text{ etc.}$$

definire relationem inter x et y, vt haec formula integralis $\int Zdx$, quatenus a termino $x=0$ vsque ad terminum $x=a$ extenditur, maximum minimum ve valorem consequatur.

Solutio.

In hunc igitur finem variationem differentialem formulae $\int Zdx$ exquiri conuenit; quae cum sit $\delta\int Zdx=\int\delta Zdx$, habemus primo:

$$\delta Z=L\delta\Phi+N\delta y+P\delta p+Q\delta q+R\delta r \text{ etc.}$$

ideoque variatio differentialis erit

$$\delta\int Zdx=\int Ldx\delta\Phi+\int Ndx\delta y+\int Pdx\delta p+\int Qdx\delta q$$
$$+\int Rdx\delta r \text{ etc.}$$

Nunc autem, ob $\delta\Phi=\delta\int\mathfrak{Z}dx=\int\delta\mathfrak{Z}dx$, et

$$\delta\mathfrak{Z}=\mathfrak{L}\delta\phi+\mathfrak{N}\delta y+\mathfrak{P}\delta p+\mathfrak{Q}\delta q+\mathfrak{R}\delta r \text{ etc.}$$

habebimus simili modo

$$\delta\Phi=\int\mathfrak{L}dx\delta\phi+\int\mathfrak{N}dx\delta y+\int\mathfrak{P}dx\delta p+\int\mathfrak{Q}dx\delta q$$
$$+\int\mathfrak{R}dx\delta r \text{ etc.}$$

Denique vero est $d\phi=\delta\int\mathfrak{z}dx=\int\delta\mathfrak{z}dx$, ideoque ob

$$\delta\mathfrak{z}=\mathfrak{n}\delta y+\mathfrak{p}\delta p+\mathfrak{q}\delta q+\mathfrak{r}\delta r \text{ etc.}$$

erit

$$\delta\phi=\int\mathfrak{n}dx\delta y+\int\mathfrak{p}dx\delta p+\int\mathfrak{q}\delta q+\int\mathfrak{r}dx\delta r \text{ etc.}$$

Sit iam $\int\mathfrak{L}dx=v$, ac fiet

$$\int\mathfrak{L}dx\delta\phi=v\int dx(\mathfrak{n}\delta y+\mathfrak{p}\delta p+\mathfrak{q}\delta q+\mathfrak{r}\delta r \text{ etc.})$$
$$-\int vdx(\mathfrak{n}\delta y+\mathfrak{p}\delta p+\mathfrak{q}\delta q+\mathfrak{r}\delta r \text{ etc.})$$

vnde acquirimus

$$\delta\Phi=v\int dx(\mathfrak{n}\delta y+\mathfrak{p}\delta p+\mathfrak{q}\delta q+\mathfrak{r}\delta r \text{ etc.})$$
$$+\int dx\delta y(\mathfrak{N}-v\mathfrak{n})+\int dx\delta p(\mathfrak{P}-v\mathfrak{p})+\int dx\delta q(\mathfrak{Q}-v\mathfrak{q}) \text{ etc.}$$

Pona-

Ponamus ergo porro $\int L\,dx = V$ et $\int L v\,dx = T$, eritque

$$\int L\,dx\,\delta\Phi = T\int dx(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.})$$
$$-\int T\,dx(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.})$$
$$+V\int dx\delta y(\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) + V\int dx\delta p(\mathfrak{P} - v\mathfrak{p}) + V\int dx\delta q(\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q})\text{ etc.}$$
$$-\int V dx\delta y(\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) - \int V dx\delta p(\mathfrak{P} - v\mathfrak{p}) - \int V dx\delta q(\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q})\text{ etc.}$$

His igitur omnibus colligendis prodibit variatio differentialis quaesita

$$\delta\int Z dx = T\int dx(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \delta\mathfrak{q}q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.})$$
$$+V\int dx\delta y(\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) + V\int dx\delta p(\mathfrak{P} - v\mathfrak{p})$$
$$+V\int dx\delta q(\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q})\text{ etc.}$$
$$+V\int dx\delta y(N - V\mathfrak{N} + Vv\mathfrak{n} - T\mathfrak{n})$$
$$+\int dx\delta p(P - V\mathfrak{P} + Vv\mathfrak{p} - T\mathfrak{p})$$
$$+\int dx\delta q(Q - V\mathfrak{Q} + Vv\mathfrak{q} - T\mathfrak{q})$$
$$\text{etc.}$$

quae cum ad terminum vsque $x = a$ extendi debeat, ponamus integralia $\int L dx = V$, et $\int L dx \int \mathfrak{L} dx = T$, quandoquidem determinatio integrationis nostro arbitrio relinquitur, ita capi, vt euanescant, posito $x = a$; quo nostra expressio facilior reddatur. Deinde vero ponamus breuitatis gratia:

$$N - V\mathfrak{N} + (Vv - T)\mathfrak{n} = (N)$$
$$P - V\mathfrak{P} + (Vv - T)\mathfrak{p} = (P)$$
$$Q - V\mathfrak{Q} + (Vv - T)\mathfrak{q} = (Q)$$
$$R - V\mathfrak{R} + (Vv - T)\mathfrak{r} = (R)$$
$$\text{etc.}$$

existente

existente, vt assumsimus, $v = \int \mathfrak{L} dx$, atque variatio differentialis quaesita reducetur ad hanc formam:

$$\delta\int Z dx = \int dx\delta y((N) - \tfrac{d(P)}{dx} + \tfrac{dd(Q)}{dx^2} - \tfrac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.})$$
$$+\delta y((P) - \tfrac{d(Q)}{dx} + \tfrac{dd(R)}{dx^2} - \text{etc.})$$
$$+\tfrac{d\delta y}{dx}((Q) - \tfrac{d(R)}{dx} + \text{etc.}$$
$$+\tfrac{dd\delta y}{dx^2}((R) - \text{etc.})\text{ etc.}$$

Coroll. 1.

Cum sit $v = \int \mathfrak{L} dx$, erit $Vv = \int L dz . \int \mathfrak{L} dx$ et $Vv - T = \int L dx . \int \mathfrak{L} dx - \int L dx \int \mathfrak{L} dx = \int \mathfrak{L} dx \int L dx$. Quia autem per determinationes assumtas expressio $Vv - T$ euanescit, posito $x = a$, si ponamus $\int L dx = V$ et $\int \mathfrak{L} V dx = \mathfrak{V}$, ambo haec integralia ita capi oportet, vt euanescant, posito $x = a$.

Coroll. 2.

His igitur formulis $\int L dx = V$, et $\int \mathfrak{L} V dx = \mathfrak{V}$, in computum introductis, ponendum erit:

$$N - V\mathfrak{N} + \mathfrak{V}\mathfrak{n} = (N)$$
$$P - V\mathfrak{P} + \mathfrak{V}\mathfrak{p} = (P)$$
$$Q - V\mathfrak{Q} + \mathfrak{V}\mathfrak{q} = (Q)$$
$$R - V\mathfrak{R} + \mathfrak{V}\mathfrak{r} = (R)$$
$$\text{etc.}$$

et variatio differentialis per litteras (N), (P), (Q) etc. perinde exprimetur, ac supra casu primo per litteras N, P, Q etc. erat definita.

 Coroll.

Coroll. 3.

Ex his iam facile colligere licet, si etiam functio $\mathfrak{z}$ nouam formulam integralem inuoluat; quemadmodum tum variatio differentialis exprimatur; si scilicet fuerit $d\mathfrak{z} = \int d\Phi' + \mathfrak{M}\,dx + \text{etc.}$ tum ad formulas $V = \int L\,dx$ et $\mathfrak{V} = \int \mathfrak{L}\,V\,dx$ insuper tertia $\mathfrak{v} = \int \mathfrak{V}\,dx$ accederet; reliqua attendenti facile se offerent.

Problema 5.

Si functio Z, praeter quantitates x, y, p, q, r etc. etiam formulam integralem $\Phi = \int \mathfrak{Z}\,dx$ vtcunque implicet, vt sit

$$dZ = L\,d\Phi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr \text{ etc.}$$

functio vero $\mathfrak{Z}$ praeter quantitates x, y, p, q, r etc. eandem denuo formulam integralem $\Phi = \int \mathfrak{Z}\,dx$ inuoluat, vt sit

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\,d\Phi + \mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy + \mathfrak{P}\,dp + \mathfrak{Q}\,dq + \mathfrak{R}\,dr \text{ etc.}$$

definire relationem inter x et y, vt haec formula integralis $\int Z\,dx$, quatenus a termino $x = 0$ ad terminum datum $x = a$ extenditur, maximum minimumve valorem adipiscatur.

Solutio.

Variatio differentialis est, vt hactenus,

$$\delta \int Z\,dx = \int L\,dx\,\delta\Phi + \int N\,dx\,\delta y + \int P\,dx\,\delta p + \int Q\,dx\,\delta q + \int R\,dx\,\delta r \text{ etc.}$$

deinde vero habemus $\delta\Phi = \delta \int \mathfrak{Z}\,dx = \int \delta\mathfrak{Z}\,dx$ et

$$\delta\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\,\delta\Phi + \mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r \text{ etc.}$$

Cum

Cum autem sit $\Phi = \int \mathfrak{Z}\,dx$, erit $\mathfrak{Z} = \frac{d\Phi}{dx}$, et $\delta\mathfrak{Z} = \frac{\delta\,d\Phi}{dx} = \frac{d\,\delta\Phi}{dx}$; ponamus tantisper $\delta\Phi = u$, et $\mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r \text{ etc.} = \omega$, vt obtineatur haec aequatio $\frac{du}{dx} = \mathfrak{L}u + \omega$, cuius integrale sumto e pro numero, cuius logarithmus $= 1$, est

$$e^{-\int \mathfrak{L}\,dx}\, u = \int e^{-\int \mathfrak{L}\,dx}\,\omega\,dx \text{, ideoque}$$

$$\delta\Phi = e^{\int \mathfrak{L}\,dx} \int e^{-\int \mathfrak{L}\,dx}\,dx\,(\mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r \text{ etc.})$$

vnde deducitur

$$\int L\,dx\,\delta\Phi = \int e^{\int \mathfrak{L}\,dx} L\,dx \int e^{-\int \mathfrak{L}\,dx}\,dx\,(\mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r + \text{etc.})$$

Ponatur iam $\int e^{\int \mathfrak{L}\,dx} L\,dx = V$, quod integrale ita capiatur, vt euanescat, posito $x = a$, sitque $e^{-\int \mathfrak{L}\,dx} V = U$, erit

$$\int L\,dx\,\delta\Phi = -\int U\,dx\,(\mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r + \text{etc.})$$

cui parti si reliquae partes addantur, reductionesque superiores fiant, prodibit variatio differentialis quaesita $\delta \int Z\,dx =$

$$\begin{aligned}\int dx\,\delta y\,\Big((N - U\mathfrak{N}) &- \frac{d(P - U\mathfrak{P})}{dx} + \frac{dd(Q - U\mathfrak{Q})}{dx^2} - \frac{d^3(R - U\mathfrak{R})}{dx^3} + \text{etc.}\Big)\\ &+ \delta y\,\Big((P - U\mathfrak{P}) - \frac{d(Q - U\mathfrak{Q})}{dx} + \frac{dd(R - U\mathfrak{R})}{dx^2} - \text{etc.}\Big)\\ &+ \frac{d\delta y}{dx}\Big((Q - U\mathfrak{Q}) - \frac{d(R - U\mathfrak{R})}{dx} + \text{etc.}\Big)\\ &+ \frac{d\,d\delta y}{dx^2}\big((R - U\mathfrak{R}) - \text{etc.}\big)\end{aligned}$$

ex qua, vt supra, ea relatio inter x et y elicitur, qua formulae integrali $\int Z\,dx$ pro termino $x = a$ valor maximus vel minimus conciliatur; haec enim relatio exprimetur ista aequatione:

$$(N - U\mathfrak{N}) - \frac{d(P - U\mathfrak{P})}{dx} + \frac{dd(Q - U\mathfrak{Q})}{dx^2} - \frac{d^3(R - U\mathfrak{R})}{dx^3} + \text{etc.}) = 0.$$

Tum vero pro constantium per integrationem inuectarum determinatione singulae partes absolutae tam pro

casu

casu $x=a$, quam pro casu $x=0$, nihilo aequales effici poterunt.

Corollarium.

Quia posuimus $e^{-\int \mathfrak{L} dx} V = U$, erit $V = e^{\int \mathfrak{L} dx} U$, vnde differentiando fiet $dV = e^{\int \mathfrak{L} dx}(dU + U \mathfrak{L} dx)$. Cum autem sit $dV = e^{\int \mathfrak{L} dx} L dx$, habebitur ista aequatio differentialis:

$$dU + U \mathfrak{L} dx = L dx$$

ex qua quantitatem U ita definiri oportet, vt ea euanescat, posito $x = a$.

Problema 6.

Si functio Z praeter quantitates x, y, p, q, r etc. etiam formulam integralem $\Phi = \int Z dx$ inuoluat, ita vt sit

$$dZ = L d\Phi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}$$

definire relationem inter x et y, vt haec formula $\int Z dx$ maximum minimumue valorem induat, quatenus quidem a termino $x=0$ vsque ad terminum $x=a$ extenditur.

Solutio.

Cum variatio differentialis sit

$$\delta \int Z dx = \int L dx \delta\Phi + \int N dx \delta y + \int P dx \delta p + \int Q dx \delta q + \int R dx \delta r \text{ etc.}$$

habebitur etiam $\delta\Phi = \delta \int Z dx$, vnde fit differentiando:

$$d\delta\Phi = L dx \delta\Phi + N dx \delta y + P dx \delta p + Q dx \delta q + R dx \delta r \text{ etc.}$$

hincque inuenitur, vt ante,

$$\delta\Phi = e^{\int L dx} \int e^{-\int L dx} dx (N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.})$$

ex

ex quo adipiscimur, ob $\int e^{\int L dx} L dx = e^{\int L dx}$,

$$\int L dx \delta\Phi = e^{\int L dx} \int e^{-\int L dx} dx (N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.})$$

$$- \int dx (N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc})$$

quod postremum membrum a reliquis partibus tollitur. Quare, si ponamus $e^{-\int L dx} = T$, erit tota variatio differentialis

$$\delta \int Z dx = \frac{1}{T} \int dx \delta y \Big(TN - \frac{d.TP}{dx} + \frac{dd.TQ}{dx^2} - \frac{d^3.TR}{dx^3} + \text{etc.}$$
$$+ \delta y \Big(TP - \frac{d.TQ}{dx} + \frac{ddTR}{dx^2} - \text{etc.}\Big)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx}\Big(TQ - \frac{d.TR}{dx} + \text{etc.}\Big)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2}(TR - \text{etc.}) \text{ etc.}$$

Quo igitur formula $\int Z dx$ euadat maxima vel minima, relatio indefinita inter x et y hac aequatione exprimetur:

$$TN - \frac{d.TP}{dx} + \frac{dd.TQ}{dx^2} - \frac{d^3TR}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

partes vero absolutae singulae inseruient constantibus per integrationem ingressis determinandis.

Scholion.

Hac igitur Analysi nullas considerationes geometricas inuoluente non solum omnium problematum ad hanc maximorum et minimorum methodum pertinentium easdem adepti sumus solutiones, quas iam in libro meo de maximis et minimis dedi, sed etiam haec methodus peculiarem suppeditauit determinationem constantium, quae priori methodo indeterminatae relinquuntur; vnde innumera problemata singularia expedite resolui possunt, ad quae prior methodus minus con-

grue

grue accommodatur. Veluti ſi inter omnes lineas, a dato, puncto non ad aliud punctum, ſed ad lineam quandam datam, ſiue rectam, ſiue curuam, ducendas, ea requiratur, ſuper qua corpus ab illo puncto deſcendens tempore breuiſſimo ad hanc lineam perueniat, per conſiderationem illarum partium abſolutarum hoc problema facile reſoluitur, dum iis iſta conditio praeſcribitur, vt curua quaeſita ad datam ſit normalis. Antequam autem finiam, examini Analyſtarum egregium Theorema ſubiiciam, cuius veritas ex principiis hactenus poſitis haud difficulter perſpicitur, et quod in calculo integrali eximium vſum praeſtare videtur.

Theorema.

Propoſita formula differentiali Zdx, in qua Z ſit functio quaecunque quantitatum x, y, $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dq}{dx}$ etc. eaque differentiata prodeat:

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{etc.}$$

ita vt haec formula differentialis Zdx differentialia non ſolum prima, ſed etiam altiora cuiusque ordinis, compleċtatur; tum facile diiudicari poterit, vtrum iſta formula integrationem admittat, ſiue ſit differentiale completum, nec ne? Conſideretur enim iſta expreſſio, ſumto dx conſtante,

$$V = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}$$

quae ſi reperiatur nihilo aequalis, formula Zdx erit integrabilis; verum ſi non fuerit $V = 0$, ea non erit integrabilis.

DE

DE INSIGNI PROMOTIONE METHODI TANGENTIVM INVERSAE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Ad methodum tangentium inuerſam referri ſolent ea problemata, quibus eiusmodi lineae curuae quaeruntur, quae certa quadam praeſcripta proprietate ratione tangentium ſint praeditae; et cum per tangentes directio tractus curuarum determinetur, ac mutua relatione differentialium coordinatarum contineatur, iſta methodus latiſſime patet, atque omnia problemata, quibus praeſcripta proprietas differentialia inuoluit, in ſe complectitur. Hac methodo plurima paſſim exiſtunt problemata ſoluta, e quibus Analyſis infinitorum maxima cepit incrementa; verum problemata eo pertinentia ad diuerſa genera reuocanda videntur, prout proprietas praeſcripta, vel ad ſingula tantum curuae puncta, vel ad bina plura ve, immo infinita, reſpicit. Atque adhuc quidem alia problemata vix reperiuntur tractata, niſi in quibus proprietas praeſcripta, vel ad ſingula curuae puncta, vel ad bina, refertur, quae igitur primo vel ſecundo generi eſſent annumeranda.

2. Quae diſtinctio, cum minus ſit vſitata, quo clarius percipiatur, eam exemplis ad ſingula genera perti-