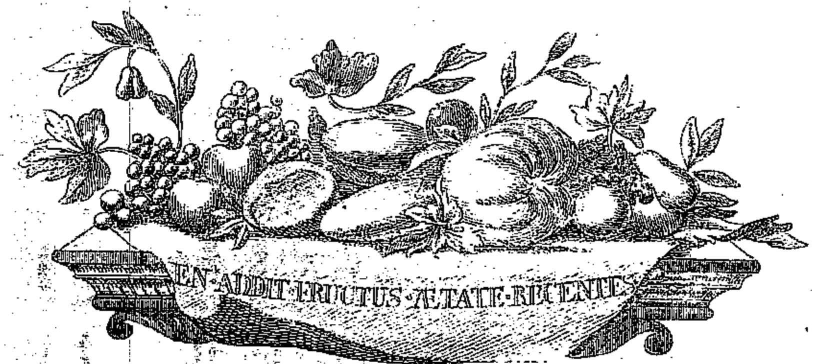
# NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. X.

pro Anno MDCCLXIV.




PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLXVI.

# MATHEMATICA.

## I.

## De Reductione formularum integralium ad rectificationem ellipsis et hyperbolae.

### Auctore Leon. Eulero pag. 3.

Quae quantitates numeris neque integris neque fractis, neque etiam surdis vel irrationalibus exhiberi possunt, transcendentes vocari solent, quarum ergo valores non aliter nisi proxime per numeros exprimere licet. Dari autem huiusmodi quantitates certissimum est, etiamsi ratio ob infinitudinem, quae eas excludere videtur, a plerisque minus distincte perspiciatur; id quod exemplo notissimo peripheriae circuli, cuius diameter vnitate indicetur, euidenter declarari potest. Nullum enim est dubium, quin quantitas huius peripheriae valorem habeat omnino determinatum, quem adeo primo intuitu constat intra limites 3 et 4 contineri. Verum intra hos limites innumerabiles constitui possunt fractiones ratione denominatorum discrepantes, cuiusmodi simpliciores sunt:

$$3\tfrac{1}{2},\ 3\tfrac{1}{3},\ 3\tfrac{2}{3},\ 3\tfrac{1}{4},\ 3\tfrac{3}{4},\ 3\tfrac{1}{5},\ 3\tfrac{2}{5},\ 3\tfrac{3}{5},\ 3\tfrac{4}{5},\ \text{etc.}$$

et generatim in hac forma $3\frac{m}{m+n}$ comprehenduntur: vbi cum tam pro $m$ quam pro $n$ omnes plane numeros substitui liceat, nulla tamen huiusmodi formula veram peripheriae quantitatem praebet; sed quaecunque assumatur, semper a veritate recedit, etiamsi error continuo minor reddi possit. Deinde quantitates etiam surdas introducendo multitudo numerorum intra limites 3 et 4 contentorum vlterius in infinitum augetur, qui adeo omnes ab iis, qui in formula $3\frac{m}{m+n}$ continentur discrepant, neque tamen etiam in his vllus reperitur, qui circuli peripheriam exacte dimetiatur: quamobrem eius quantitas merito pro transcendente habetur. Quod idem multo magis de omnibus circuli arcubus est intelligendum, ita vt quicunque capiatur sinus in circulo, arcus ipsi respondens semper sit quantitas transcendens; sicque solus circulus infinitam quantitatum transcendentium multitudinem suppeditet. Deinde vero etiam logarithmi ad classem numerorum transcendentium sunt referendi, qui adeo ab illis, qui ex circulo nascuntur, prorsus sunt diversi. Iam nemo non videt, si praeter fractiones et quantitates transcendentes ex circulo et logarithmis ortae in subsidium vocentur, tum inter binos quosuis numeros multitudinem numerorum mediorum multo magis in immensum augeri; ex quo maxime mirum videbitur, ne hoc quidem modo interualla inter binos numeros integros ita numeris mediis expleri, vt iis omnes plane quantitates intra eosdem terminos contentae exprimi queant. Quin potius praeterea innumerabilia alia quantitatum transcendentium genera, tam inter se quam ab illis ex circulo et logarithmis natis maxime discrepantia, agnosci oportet; inter quae potissimum notari merentur ea, quae ex rectificatione ellipsium et hyperbolarum originem ducunt, propterea quod hae curuae post circulum sunt notissimae et facillime describuntur. Quomodocunque autem tam in ellipsi; quam hyperbola arcus rescindantur, eorum quantitas non solum nullis formulis irrationalibus exprimi, sed etiam nullo modo neque ad arcus circulares neque ad logarithmos reuocari possunt: quin etiam singuli arcus tam elliptici quam hyperbolici peculiares quantitates transcendentes exhibent, quoniam ne inter se quidem, nisi paucissimis casibus exceptis, comparari possunt. Ad innumerabilia alia autem quantitatum transcendentium genera calculus integralis perducit, dum omnibus formulis integralibus, quarum integratio algebraice expediri nequit, certae quantitates transcendentes designantur, in quarum natura euoluenda industria et sagacitas analystarum maxime cernitur. Cum igitur nunc quidem sit compertum omnes huiusmodi formulas integrales $\int V dx$, si $V$ fuerit functio rationalis ipsius $x$, semper per logarithmos et arcus circulares exprimi posse, nisi forte algebraicam integrationem admittant: artificia integrandi pro iis casibus, quibus $V$ est functio irrationalis ipsius $x$ adhuc potissimum desiderantur, vbi quidem id imprimis esset optandum, vt eae formulae, quibus $V$ est quantitas irrationalis, accuratius

ratius euoluerentur, quarum integratio per arcus siue ellipticos siue hyperbolicos expediri queat. Atque in hac inuestigatione Auctor istius dissertationis imprimis est occupatus, summumque studium contulit ad hanc formulam integralem $\int dx \sqrt{\frac{f+gxx}{h+kxx}}$ explicandam, atque adeo ad arcus siue ellipticos siue hyperbolicos reducendam: quod negotium multo difficilius est, quam initio videatur. Prout enim quantitatum constantium $f$, $g$, $h$ et $k$, aliae fuerint vel positiuae vel negatiuae, casus oriuntur natura sua maxime inter se discrepantes. Primo enim relatio inter has quatuor quantitates ita potest esse comparata, vt formula integralis arcum quendam siue ellipticum siue hyperbolicum simpliciter exprimat. Deinde fieri potest, vt integrale binis constet partibus, altera algebraica, altera arcum siue ellipticum siue hyperbolicum exprimente. Praeterea vero etiam eiusmodi dantur casus quibus integrale neutro modo exhiberi potest, sed praeter partem algebraicam duos arcus alterum ellipticum, alterum hyperbolicum requirit. In tractatione igitur formulae $\int dx \sqrt{\frac{f+gxx}{h+kxx}}$ ob istam varietatem Auctor coactus est duodecim casus constituere, quos singulos operoso calculo ita feliciter expediuit, vt iam facile sit, quaecunque quantitates litteris $f$, $g$, $h$, $k$ designentur, integrale concessa ellipsium et hyperbolarum rectificatione assignare. Saepenumero autem euenire potest, vt formulae integrales multo magis complicatae ope substitutionum idonearum ad talem formam perduci queant, quibus ergo



go omnibus casibus integratio expedita est censenda; ex quo haec inuestigatio calculo integrali haud leue incrementum attulisse est aestimanda.

## II.

## Elementa Calculi variationum

### et III.

## Analytica explicatio methodi Maximorum et Minimorum.

### Auctore Leon. Eulero pag. 51. et 94.

Iam ante celeberrimum problema isoperimetricum insignia quaedam specimina huc pertinentia a Geometris sunt edita, cum antiquissimis iam fuerit exploratum, circulum inter omnes alias figuras pari perimetro inclusas maximam aream complecti; quam quidem proprietatem ex circuli natura concluserunt, minime vero ipsam quaestionem directe aggredi sunt ausi, vt inter omnes figuras aequali perimetro terminatas eam inuestigarent, quae maximam aream includeret. Haec scilicet quaestio nimis est ardua, quam vt ante insignem calculi infinitorum promotionem de ea saltem cogitare licuisset. Mox vero primis quasi iactis huius calculi fundamentis ab acutissimo *Iohanne Bernoulli* quaestio de brachystochronis felicissimo successu est resoluta: quippe qua inter

inter omnes lineas a puncto sublimiori ad humilius ductas ea quaerebatur, super qua graue tempore breuissimo descendat, quam egregiam proprietatem cycloidi competere inuenerat. Methodus autem, qua Vir celeberrimus erat vsus, fratri ipsius natu maiori *Iacobo Bernoulli* manifesto occasionem praebuisse videtur solutionem magni problematis isoperimetrici, quod deinceps tractauit, meditandi. Latissimo scilicet ambitu omnes huius generis quaestiones in hoc problemate est complexus, vt inter omnes lineas intra data duo puncta ducendas, siue debeant esse eiusdem longitudinis, (vnde quidem nomen isoperimetrici est natum) siue alia quadam indole communi praeditae, eam inuestigaret, quae vel maximam aream, vel circa datum axem rotata maximum solidum, vel in genere quamcumque maximi minimiue proprietatem contineret. Methodum autem, qua summus illius temporis Geometra est vsus, perpendentes ancipites haeremus, vtrum magis eius incredibilem patientiam in prolixissimis et taediosissimis calculis expediendis, an summam sagacitatem in conclusionibus satis concinnis inde deducendis admirari debeamus. Ob hanc ipsam autem causam, quod conclusiones prodierint satis concinnae, mox suspicari licebat, viam planiorem ac breuiorem dari eodem perducentem; quam etiam eius frater iunior *Iohannes* satis feliciter est ingressus; etiamsi statim pro quibusdam casibus nimis absconditis negotium minus successerit, quem tamen defectum deinceps, toto hoc argumento profundius retractato, largiter



giter compensauit. Longo postea interiecto tempore Auctor harum dissertationum in eodem problemate euoluendo summum studium collocauit, et cum perspexisset, omnes huius generis quaestiones eo redire, vt eiusmodi linea curua aequatione inter coordinatas $x$ et $y$ exprimenda inuestigetur, in qua talis formula integralis $\int V\,dx$ quomodocunque quantitas V per $x$ et $y$ fuerit data, maximum minimumue valorem obtineat. Nunc autem euidens est in ista quantitate V infinitam varietatem locum habere posse, prout in eam praeter ipsas variabiles $x$ et $y$ tam earum differentialia cuiuscunque ordinis, quam nouae insuper formulae integrales ingrediuntur. Quodsi iam solutiones *Bernoullianae* ad hanc normam examinentur, eae tantum ad eos casus, quibus quantitas V sola differentialia primi gradus inuoluit, restrictae reperiuntur, ac praeterea casus, quibus in quantitate V nouae formulae integrales insunt, inde penitus excluduntur, paucissimis exceptis, quos facile pro indole quaestionis ab hoc incommodo liberare licet. Hunc igitur defectum noster Auctor felicissime cum in his Commentariis, tum in opere singulari de hoc argumento edito, suppleuit, vt vix quicquam quod amplius desiderari queat, reperiatur. Interim tamen ipsa methodus, etiamsi totum negotium satis expedite conficiat, tamen ipsi non satis naturalis est visa, propterea quod vis solutionis tota in consideratione elementorum curuae inuestigandae erat posita, ipsa vero quaestio facile ita adornari possit, vt ex Geometria penitus ad solam Analysin puram reuocetur.

cetur. Quaestio enim ita proposita, vt data quantitate V vtcunque ex binis variabilibus $x$, $y$, earumque differentialibus cuiuscunque ordinis, quin etiam ex formulis integralibus vtcunque conflata, ea inter $x$ et $y$ relatio inuestigari debeat, qua formulae integrali $\int V\,dx$ maximus minimusue valor concilietur? hoc inquam modo quaestio proposita prorsus a Geometria segregatur; ex quo etiam methodus genuina eam resoluendi a Geometria immunis esse debebat: et quo difficilius Analysis ad hunc scopum accommodari poterat, eo maiora incrementa huius scientiae, si res successerit, merito sperare licebat. Tametsi autem Auctor de hoc diu multumque esset meditatus, atque amicis hoc desiderium aperuisset, tamen gloriae primae inuentionis acutissimo Geometrae Taurinensi la Grange erat reseruata, qui sola Analysi vsus eandem plane solutionem est adeptus, quam Auctor ex considerationibus geometricis elicuerat. Verum ipsa illa solutio ita erat comparata, vt nouam plane Analyseos speciem constituere, eiusque fines non mediocriter promouere, videretur; ex quo Auctori occasio est oblata hanc scientiam nouo Calculi genere locupletandi, quem *Calculum variationum* appellat, et cuius elementa hic tradere ac dilucide explicare constituit. Hic quidem calculus perinde ac differentialis in incrementis infinite paruis inter se comparandis versatur, verum in ratione tractationis ab eo maxime discrepat. Cum enim in calculo differentiali ex data quantitatum variabilium relatione, relatio inter earum differentialia cuiusque ordinis inuestigetur; in



in calculo variationum ipsa relatio inter variabiles infinite parum immutari concipitur: ita vt dum secundum relationem datam pro quouis alterius variabilis $x$ valore, altera $y$ certum valorem sortitur, calculo variationum huic ipsi valori $y$ incrementum quoddam infinite paruum adiiciatur, ex quo deinceps, quemadmodum formulae tam differentiales quam integrales varientur, definiri oportet. Incrementum illud cuicunque valori $y$ adiectum ab Auctore eius variatio vocatur, ac ne cum differentialibus confundatur hoc charactere $\delta y$ designatur: cum igitur hinc omnes formulae tam differentiales quam integrales, quatenus quantitatem $y$ inuoluunt, certas variationes nanciscantur, auctor in priore dissertatione principia ac praecepta stabilit, quorum ope omnium huiusmodi formularum variationes definiri possunt: ita si W denotet huiusmodi formulam quamcunque; eius variationem $\delta W$ per regulas peculiares assignare docet. Quo singulari calculo constituto deinceps in sequente dissertatione eius applicationem ad omnia problemata, quae circa maxima et minima excogitari possunt, clarissime ostendit, inque negotio hoc imprimis obseruari meretur, quod ita noua methodus mere analytica multo pleniores ac perfectiores solutiones suppeditet, quam prior illa ex Geometria petita.

 IV.

## IV.

# De insigni Promotione Methodi Tangentium Inuersae.

## Auctore Leon. Eulero pag. 135.

Notum est Analysin infinitorum primam originem ex eo Geometrarum studio traxisse, quo omnium linearum curuarum tangentes ducere sunt conati. Cum enim iam pridem ante Geometrae maxime fuissent solliciti, vt methodum certam cuiusque lineae curuae tangentes inueniendi scrutarentur, atque ad hunc scopum continuo propius accessissent, sagacitate tandem summorum ingeniorum *Newtoni* et *Leibnizii* calculus differentialis est inuentus, quo mox felicissime successu sunt vsi ad tangentes omnium linearum curuarum, cunctaque phaenomena ab situ tangentium pendentia definienda. Quoniam vero iam ante certa quaedam artificia ita etsi multo imperfectius praestandi erant explorata, tamen hinc nouae istius inuentionis gloria haud mediocriter imminui est visa, nisi ea ad eiusmodi inuestigationes accommodaretur, quae illorum artificiorum vim penitus superarent. Hinc primis inuentoribus statim in mentem venit statum quaestionis, quae praecipue circa tangentes versabatur, inuertere, iisque qui minus splendide de nouo isto calculi genere sentiebant, eiusmodi quaestiones proponere, quibus ex data quadam tangen-



tangentium proprietate ipsarum linearum curuarum natura esset inuestiganda. Cum igitur methodus huiusmodi quaestiones resoluendi etiam esset inuertenda, hinc methodus tangentium inuersa est nata, quae quoniam a differentialibus ad ipsas quantitates reverti oportebat, hinc calculus integralis mox insignia accepit incrementa, ita vt incredibilis promotio, ad quam hic calculus deinceps est perductus, potissimum methodo tangentium inuersa accepta sit referenda. Primum quidem in hoc genere eiusmodi tantum quaestiones sunt tractatae, in quibus conditio quaedam tangentium in singulis curuae quaerendae punctis proponebatur, ita vt in iis soluendis ad vnicum curuae punctum, quod autem indefinite sumtum ad omnia plane puncta transferri queat, respexisse sufficiat. Cuiusmodi quaestio erat, quo quaerebatur curua, cuius tangens ad resectam, seu differentiam inter abscissam et subtangentem, vbique datam teneret rationem: vocata enim pro curuae puncto quocunque abscissa $= x$, et applicata $= y$, quia tangens est $= \frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}$ et subtangens $= \frac{ydx}{dy}$, hac quaestione postulabatur, vt esset $\frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}$ ad $x - \frac{ydx}{dy}$ in data ratione: quae ratio si ponatur $= m:n$, ad hanc aequationem peruenitur:

$$m(xdy - ydx) = ny\sqrt{(dx^2+dy^2)}$$

quae integrata naturam curuae quaesitae declarabit. Deinde vero etiam eiusmodi quaestiones sunt agitatae, quibus tangentium conditio praescripta simul ad bina curuae puncta pertineret, cuiusmodi fuerat problema tra-

traiectoriarum reciprocarum, cuius ſolutiones a variis Auctoribus prolatae Analyſin infinitorum clariſſimis inuentis locupletarunt. Eodem quoque referenda eſt quaeſtio catoptrica ab ipſo Auctore huius diſſertationis olim euoluta, qua circa punctum lucidum eiusmodi linea curua deſcribenda proponitur, vt omnes radii ab iſta curua bis reflexi in ipſum punctum lucidum reuertantur: in qua quaeſtione reſoluenda omnino neceſſe eſt, vt bina ſimul curuae puncta, in quibus quilibet radius reflectitur, in calculum introducantur; quae bina puncta ita inter ſe eſſe relata manifeſtum eſt, vt inter ſe permutationem admittant. Cum igitur huiusmodi quaeſtiones longe aliam ſoluendi methodum requirant, ac quaeſtiones prioris generis, vbi vnicum curuae punctum conſideraſſe ſufficit, Auctor hinc duas claſſes quaeſtionum ad methodum tangentium inuerſam pertinentium conſtituit: iisque adeo in hac diſſertatione tertiam claſſem adiungit, quae eiusmodi quaeſtiones complectitur, in quibus ſimul ad innumerabilia curuae puncta, quae certo quodam modo inter ſe cohaereant, reſpici oportet. Quoniam igitur huiusmodi quaeſtiones methodum prorſus peculiarem poſtulant, quam Auctor in hac diſſertatione dilucide exponit, eiusque eximium vſum in variis problematibus ſoluendis oſtendit, nullum plane eſt dubium, quin haec ſpeculatio Analyſi inſignem promotionem ſit allatura.

V.



V.

## Dilucidationes de Tautochronis in medio reſiſtente.

### Auctore Leon. Eulero pag. 156.

Cum primum pendula ad tempus dimetiendum motumque horologiorum temperandum adhiberi ſunt caepta, oſcillationes non prorſus aequalibus temporibus abſolui, ſed maiores excurſiones aliquanto plus temporis inſumere ſunt deprehenſa. Cuius inaequalitatis cauſa mox in eo poſita eſſe reperiebatur, quod corpus ſuper arcu circuli deſcendens aliquanto tardius ad punctum infimum pertingat, quo altius deſcenſum inceperit, etiamſi diſcrimen ſit tam exiguum, vt nonniſi accuratioribus obſeruationibus animaduerti queat. Cum igitur aequabile curuamen, quale in arcubus circularibus ineſt, non ſit aptum ad omnes deſcenſus iſochronos efficiendos, facile colligere licebat, ſi loco circuli alia curua adhibeatur, cuius curuatura aſcendendo continuo fieret maior, fieri poſſe, vt tum omnes deſcenſus ad temporis aequalitatem perducerentur. Verum tam ob Analyſeos quam Mechanicae defectum natura huius curuae definiri non poterat, donec Vir ſummo ingenii acumine praeditus oſtendiſſet, hanc proprietatem in cycloidem competere: et quoniam commodiſſime euenit, vt huius curuae euoluta iterum ſit cyclois, inuenti iſtius ap-

 pli-

plicatio ad praxim eo facilior euaserat, quod tantum pendulum intra binas cycloides suspendi opus erat, siquidem tum imum penduli ponduseulum iterum cycloidem esset descripturum. Verum tamen ne hoc quidem artificio omnis inaequalitas tolli videbatur, nisi motus fieret in vacuo, cum ob aëris resistentiam motus non mediocriter ab ea lege, cui Theoria innitebatur, recederet, quare quamdiu natura huius resistentiae minus erat perspecta, vera curua quae omnes oscillationes paribus temporis interuallis ederet, ne inuestigari quidem poterat. Interim tamen summus *Neutonus* demonstrauerat, siue aëris resistentia fuerit constans, vel, eius loquendi more, momentis temporis proportionalis, siue ipsam celeritatum rationem sequatur, nihilominus omnes oscillationes in cycloide factas inter se isochronas esse futuras, ita vt his casibus resistentia non impediret, quo minus cyclois pari successu in vsum vocari posset, atque in vacuo. Deinde vero resistentiae natura tam experimentis quam ratione accuratius explorata, ea neutiquam celeritatibus, sed potius celeritatis quadratis proportionalis est deprehensa; quae proportio nullo amplius modo cum cycloidis natura consistere poterat, atque adeo iam non erat difficile per calculum accurate definire, quantum oscillationes in cycloide factae ob aëris resistentiam ab isochronismi ratione recederent. Quantumuis autem tum temporis Geometrae in eo elaborauerint, vt veram curuam, quae in medio resistente omnes oscillationes isochronas produceret, inuestigarent; tamen in ipsa Analysi tantas offen-



offenderunt difficultates, quae vix superari posse viderentur. At postquam etiam Auctor huius dissertationis diu multumque in hac inuestigatione desudauisset, voti tandem compos est factus, veramque curuam tautochronam in medio, quod secundum rationem celeritatum duplicatam resistit, felici successu elicuit. Interim tamen methodus, qua in hac inuestigatione erat vsus, nullo modo ad alias resistentiae hypotheses transferri poterat; tametsi enim certum videbatur in natura aliam resistentiae legem praeter duplicatam celeritatum rationem locum habere non posse, tamen eadem quaestio de tautochronis in aliis resistentiae hypothesibus non tam in Mechanica quam in ipsa Analysi merito maximi momenti iudicabatur, propterea quod tantae difficultates, quae hanc inuestigationem impedirent, superari non possunt, quin simul Analysis eximia inde accipiat incrementa. Verum quod in hoc negotio haud parum mirum videbitur, quod methodus Auctoris ne ad eam quidem hypothesin, qua resistentia ipsi celeritati proportionalis fingitur, extendatur, cum tamen hic casus iam pridem fuisset exploratus. At hic quidem imprimis notari conuenit, a *Newtono* tautochronam in hac resistentiae hypothesi non a priori esse inuentam, sed potius cum forte in motum super cycloide inquireret, quasi inopinato deprehendisse, tautochronismi proprietatem ab hac resistentia non turbari; quamobrem hactenus methodus directa merito desiderabatur, qua simul tam in ratione celeritatum simplici, quam duplicata curuae tauto-

tautochronae inueniri queant. Quo in negotio quidem Auctor sibi nihil laudis vindicat, cum talis methodus a Celeb. *Fontaino* sit excogitata, neque tamen ideo abs re fore est *arbitratus*, si idem argumentum suo more pertractauerit, hancque aeque nouam ac maxime ingeniosam methodum luculenter exposuerit, quo eius amplissimus vsus in Analysi magis in apricum collocaretur. Interim tamen maxime est dolendum, ne hanc quidem methodum vltra eas hypotheses resistentiae, quibus tautochronae iam erant cognitae, patere.

## VI.

## Demonstratio Theorematis Bernoulliani.

### Auctore Leon. Eulero pag. 179.

A *Hugenio* primum curuarum euolutio est inuestigata, qua filum curuae cuique circumplicatum paulatim euolui eiusque termino nouam curvam describi assumsit: hancque nouam curuam ex euolutione prioris *natam*, *istam* vero *illius euolutam* vocauit. Consideratio autem tautochronismi Virum summum ad hanc meditationem impulerat, qua inuenit curuae cycloidis euolutam iterum esse cycloidem illi similem at situ inuerso positam: vnde viciſſim sequebatur, si semissis cycloidis, a cuspide vsque





ad locum, vbi eius curuamen est minimum, sumta, ita vt tangentes in his terminis ductae sint inter se normales, ex loco minimi curuaminis euoluatur, curuam inde natam iterum esse cycloidem, hancque adeo simili modo euolutam denuo cycloidem producere, sicque porro in infinitum innumerabiles nasci cycloides: quae speculatio cum Geometris maxime placuisset, vir sagacissimi ingenii *Ioh. Bernoulli* obseruauit, si loco cycloidis initio alia quaecunque linea curua constituatur, cuius tangentes extremae inter se sint normales, atque euolutio simili modo, vt in cycloide est factum, continuo repetatur, curuas hinc natas continuo propius ad cycloidis naturam accedere, ac tandem euolutione infinities repitita in perfectas cycloides abire. Insigne igitur hoc Theorema soli quasi obseruationi innixum, Auctor huius dissertationis ideo demonstrare suscepit, quoniam ipsa demonstratio ad plurimas alias pulcherrimas speculationes manuducit, cuiusmodi nonnullas euoluit, quae haud exigui momenti esse videntur. Ac certe cum hoc modo omnes curuae ad cycloidem tandem perducantur, haecque curua rectificationem admittat, hinc eximias approximationes petere licet. Veluti si prima curua sit quadrans circuli, ac posito radio $= 1$, eius arcus vocetur $= q$, qui est semissis numeri $\pi = 3,14159265$ etc. longitudo curuarum sequentium ex continua euolutione natarum ita se habere deprehenditur:

Longitudo curuae primae $= q$

- - - - - secundae $= \frac{1}{1 \cdot 2} q^2$

- - - - - tertiae $= \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} q^3$

- - - - - quartae $= \frac{5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} q^4$

- - - - - quintae $= \frac{16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} q^5$

- - - - - sextae $= \frac{61}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} q^6$

- - - - - septimae $= \frac{274}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} q^7$

- - - - - octauae $= \frac{1385}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} q^8$

- - - - - nonae $= \frac{7936}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} q^9$

etc.

quae ergo longitudines continuo propius ad rationem aequalitatis accedere est necesse, et cum infinitesima sit cyclois, eiusque longitudo $= \frac{2}{q}$, si hinc illae aequentur, continuo propius ad veritatem accedetur his scilicet formulis:

$$q^2 = 2;\ q^3 = 2 \cdot \frac{1 \cdot 2}{1};\ q^4 = 2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2};\ q^5 = 2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{5};$$
$$q^6 = 2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{16}$$

hic imprimis notandi sunt numeratores illarum formularum quorum, qui sunt ordine pares 1, 5, 61, 1385, etc. ita quisque per praecedentes definitur, vt sit:

$$5 - \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 1 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 0$$
$$61 - \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 5 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\, 1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 0$$
$$1385 - \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot 61 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\, 5 - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\, 1 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 0$$

ac



ac si totae formulae pro locis paribus inuentae ponantur:

$1 q^0;\ A q^2;\ B q^4;\ C q^6;\ D q^8;\ E q^{10};\ F q^{12};\ G q^{14}$ etc. habebimus vt sequitur:

$$A - \frac{1}{1 \cdot 2} = 0$$
$$B - \frac{A}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdots 4} = 0$$
$$C - \frac{B}{1 \cdot 2} + \frac{A}{1 \cdots 4} - \frac{1}{1 \cdots 6} = 0$$
$$D - \frac{C}{1 \cdot 2} + \frac{B}{1 \cdots 4} - \frac{A}{1 \cdots 6} + \frac{1}{1 \cdots 8} = 0$$

vnde concludimus fore hanc seriem.

$$1 q^0 + A q^2 + B q^4 + C q^6 + D q^8 + \text{etc.} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 \cdot 2} q^2 + \frac{1}{1 \cdots 4} q^4 - \frac{1}{1 \cdots 6} q^6 + \text{etc.}} = \frac{1}{\cos. q}.$$

Haecque consideratio ad plurimas alias speculationes non spernandas perducere poterit.

## VII.

# Demonstratio seriei

$$\frac{2.\ 6.\ 10.\ 14.\ 18.\ \ldots\ (4n - 10)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ \ldots\ (n-1)}$$

## Auctore S. Kotelnikow pag. 199.

Cum Auctor in subsidium artis agrimensoriae occupatus fuisset in constructione polygonorum ex tot datis siue lateribus, siue angulis, siue diagonalibus, quot ad figurae determinationem requiquiruntur, euoluenda, casus quo praeter omnia latera totidem, demtis tribus, dantur diagonales, (tot scilicet quaestiones determinatio postulat) hic inquam casus ipsum perduxerat ad eandem speculationem, qua in Vol. VII. Celeber. *Segner* ostendit, quot variis modis quodque Polygonum per diagonales in triangula resolui possit. Arctissime ~~scilicet hae~~ duae inuestigationes inter se sunt connexae, etiamsi conuenientia primo intuitu minus appareat. Incidit ergo Auctor in numeros 1, 2, 5, 14, 42, quorum autem progressionis legem, vtpote satis absconditam ex sola figurarum contemplatione perspicere non poterat. At ex consideratione horum ipsorum numerorum, quos iam elicuerat, satis ingeniose in ipsam progressionis legem inquirit, ad eamque feliciter pertingit, coniectura maxime probabili adiutus, quod hi numeri secundum factores egregio ordine progredi debeant. In vberiorem quidem confirmationem ipsarum quoque polygonorum vnde hi numeri sunt orti, rationem habet, sed ea etiam praetermissa eiusdem coniecturae adminiculo totum negotium hoc modo confici posse videtur; Diuidatur istorum numerorum quilibet per praecedentem, vt obtineantur hi quoti:

$$\tfrac{2}{1}=2;\ \tfrac{5}{2}=\tfrac{5}{2};\ \tfrac{14}{5}=\tfrac{14}{5};\ \tfrac{42}{14}=3,$$

qui cum non sint integri omnes per eiusmodi fractiones exhibeantur, quarum denominatores sint 3, 4, 5, 6, quandoquidem in tertio denominator quinario minor esse nequit: sicque habebitur:

$$\tfrac{2}{1}=\tfrac{6}{3};\ \tfrac{5}{2}=\tfrac{10}{4};\ \tfrac{14}{5}=\tfrac{14}{5};\ \tfrac{42}{14}=\tfrac{18}{6},$$

vbi



vbi cum etiam numeratores progressionem arithmeticam teneant, vix vllum dubium superesse posset, quo minus statuamus omnes hos quotos sequenti ordine progredi, in primo loco ob analogiam $\frac{2}{2}$ praefixo:

$$\tfrac{2}{2}.\ \tfrac{6}{3}.\ \tfrac{10}{4}.\ \tfrac{14}{5}.\ \tfrac{18}{6}.\ \tfrac{22}{7}.\ \tfrac{26}{8}.\ \tfrac{30}{9}\ \text{etc.}$$

Cum in VII volumine veritas huius formulae rigorosissime sit demonstrata, aliaeque formae ipsi aequiualentes sint exhibitae, vsu non carebit obseruasse hos numeros 1, 2, 5, 14, 42 etiam hoc modo per factores repraesentari posse:

$$\tfrac{2}{2};\ \tfrac{3\cdot4}{2\cdot3};\ \tfrac{4\cdot5\cdot6}{2\cdot3\cdot4};\ \tfrac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{2\cdot3\cdot4\cdot5};\ \tfrac{6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6};\ \tfrac{7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7},$$

quae formulae porro in has transformantur:

$$1;\ \tfrac{4}{2};\ \tfrac{5\cdot6}{2\cdot3};\ \tfrac{6\cdot7\cdot8}{2\cdot3\cdot4};\ \tfrac{7\cdot8\cdot9\cdot10}{2\cdot3\cdot4\cdot5};\ \tfrac{8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6},\ \text{etc,}$$

tum vero succinctius adhuc in has:

$$1;\ 2\cdot1;\ 2\cdot\tfrac{5}{2};\ 2\cdot\tfrac{6\cdot7}{2\cdot3};\ 2\cdot\tfrac{7\cdot8\cdot9}{2\cdot3\cdot4};\ 2\cdot\tfrac{8\cdot9\cdot10\cdot11}{2\cdot3\cdot4\cdot5},$$

quarum prima pro triangulo, secunda quadrilatero, tertia pentagono etc. valet: vnde in genere pro polygono $n$ laterum valebit haec forma:

$$2\cdot\tfrac{n}{2}\cdot\tfrac{n+1}{3}\cdot\tfrac{n+2}{4}\cdot\ \ldots\ \cdot\tfrac{2n-5}{n-3},$$

Verum nullum est dubium, quin forma ab Auctore considerata ad vsum multo magis sit accommodata.

---

# PHYSICO-MATHEMATICA.

## I.

## De motu corporis ad duo virium centra attracti.

### Auctore Leon. Eulero pag. 207.

Argumentum huius dissertationis Auctor in eius praefatione tam dilucide et copiose explicauit, vt superfluum foret de eius eximio vsu, cum in Astronomia tum vero in Analysi, hic quicquam commemorare. Priorem ergo huius dissertationis partem vberiori istius quaestionis explicatione destinatam hic transcriptam putemus, cum cuique a calculis etiam abhorrenti eam ante huius recensionis lectionem euoluere liceat. In quaestione igitur, quam Auctor hic tractat, duo puncta fixa assumuntur. Ad quae corpus quodpiam attrahatur in ratione reciproca duplicata distantiarum, et postquam huic corpori motus quicunque fuerit impressus, qua lege deinceps sit progressurum, quaeritur. Neutiquam vero Auctor in solutione imperfecta et ad veritatem tantum appropinquante, qua ratione huiusmodi quaestiones adhuc tractari sunt solitae, acquiescit, sed potius omnes cum ingenii tam calculi vires eo intendit, vt motum illius corporis ad duo virium centra fixa attracti omni rigore geometrico definiat,

atque



atque adeo aequationem pro curua descripta eliciat, ex qua eius constructio confici queat. Postquam autem aequationes differentiales secundi gradus, quas principia motus statim suppeditant, felici successu ad primum gradum perduxisset, aequationem tantopere complicatam est assecutus, vt inde vix plus subsidii quam ex primis formulis differentio-differentialibus expectandum videretur: propterea quod binae variabiles maxime inter se erant permixtae. Cum igitur quasi de vlteriori successu desperaret, eum casum quo alterutra vis centripeta euanescit, euoluendum suscepit; quoniam aliunde constabat, curvam hoc casu descriptam sectionem conicam esse debere: in qua inuestigatione, quae adhuc maximis difficultatibus erat implicata, Auctori vsu venit, vt in enormem errorem illaberetur. Quem lapsum, tantum abest, vt occultandum et reticendum putaret, vt eum potius ingenue confiteatur, cum huic ipsi errori, perfecta huius quaestionis solutio vnice accepta, sit referenda. Postquam enim omni studio in originem huius erroris inquisiuisset, molestissimosque calculos expediuisset praeter omnem expectationem in eiusmodi methodum incedit, cuius beneficio ipsa quaestio latissimo sensu accepta ita ad exoptatum finem perduci posset, vt in solutione nihil amplius esset desiderandum, ad quod eximium inuentum, quod non solum in Astronomia, sed etiam in Analysi maximi certe est momenti, nunquam pertigisset, nisi felicissimo euentu in errorem illum incidisset. Totam autem huius problematis solutionem

nem perduxit ad hanc aequationem differentialem primi gradus, in qua binae variabiles adeo a se inuicem sunt separatae.

$$\frac{dr}{\sqrt{r(A+B+D+2Er-(A+B-D)rr)}}=\frac{ds}{\sqrt{s(-A+B-D+2Es+(A-B-D)ss)}}$$

vbi litterae A et B intensiones vtriusque centri virium denotant. D vero et E sunt constantes a prima motus impressione pendentes, at variabiles $r$ et $s$ per angulos $BAM=\zeta$ et $ABM=\eta$ ita definiuntur vt sit $r=\text{tang.}\tfrac{1}{2}\zeta.\text{tang.}\tfrac{1}{2}\eta$ et $s=\dfrac{\text{tang.}\frac{1}{2}\zeta}{\text{tang.}\frac{1}{2}\eta}$, ex quo, ope aequationis inuentae, curua a corpore descripta facile construi potest. Alio loco autem Auctor ostendet, hanc aequationem infinitis casibus algebraice integrari posse, ita vt infinitis modis fieri queat, vt corpus circa duo haec centra virium A et B curuam adeo algebraicam describat. Manifesto scilicet haec sequuntur ex iis, quae Auctor est commentatus de aequatione hac:

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3+\varepsilon x^4)}}=\frac{n\,dy}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma yy+\delta y^3+\varepsilon y^4)}}$$

cuius integrale ostendit semper algebraice assignari posse, quoties numeri $m$ et $n$ sunt inter se commensurabiles. Verum praeter hos casus innumerabiles dantur alii duo maxime simplices, quos immediate ex aequatione differentiali inuenta deriuare licet. Ostendit enim Auctor alibi, quoties habeatur aequatio differentialis separata inter binas variabiles $r$ et $s$, ei semper duobus modis satisfieri posse, altero quo ipsi $r$ altero vero ipsi $s$ certus tribuitur valor constans. Secundum praecepta autem, quae in

hac



hac inuestigatione obseruari oportet, si fiat $r=\alpha$, necesse est vt $\alpha-r$ sit factor quantitatis $\sqrt{r(A+B+D+2Er-(A+B-D)rr)}$ ideoque ipsa quantitas $A+B+D+2Er-(A+B-D)rr$ factorem habeat $(\alpha-r)^2$ hinc diuisa illa forma per $D-A-B$ statuatur $\frac{A+B+D}{D-A-B}=\alpha\alpha$ et $\frac{E}{D-A-B}=-\alpha$, et constantes ambae D et E a motus initio pendentes ita definiuntur, vt sit $D=\frac{(\alpha\alpha+1)(A+B)}{\alpha\alpha-1}$ et $E=\frac{-2\alpha(A+B)}{\alpha\alpha-1}$. Quare si motus corpori initio impressus his valoribus fuerit conformis, curua deinceps descripta hac exprimetur aequatione: $\text{tang.}\tfrac{1}{2}\zeta.\text{tang.}\tfrac{1}{2}\eta=\alpha$: vnde cum positis $AP=x$, $BP=a-x=t$, $AM=v$, et $BM=u$ sit $\text{tang.}\tfrac{1}{2}\zeta=\frac{v-x}{y}=\frac{y}{v+x}$ et $\text{tang.}\tfrac{1}{2}\eta=\frac{u-t}{y}=\frac{y}{u+t}$, fiet $\alpha=\frac{v-x}{u+t}$. Hinc cum sit $x=\frac{aa+vv-uu}{2a}$ et $t=\frac{aa-vv+uu}{2a}$, erit

$$v-x=(u+v-a)(a+u-v) \text{ et } u+t=(u+v+a)(a+u-v)$$

ita vt iam sit $\alpha=\frac{u+v-a}{u+v+a}$ et $u+v=\frac{(\alpha+1)a}{1-\alpha}$ seu AM+BM constans. Ex quo manifestum est hoc casu curuam a corpore descriptam fore ellipsin, cuius ambo foci in ipsis binis centris virium A et B sint constituti.

En ergo obseruationem notatu maxime dignam, qua nunc quidem constat fieri posse, vt corpus ad duo virium centra attractum etiam in conica sectione reuoluatur, cuius adeo foci in illa centra virium incidant: ad hoc quippe requiritur vt corpus initio certa quadam ratione proiiciatur, quam insignem proprietatem haud memini a quoquam esse animaduersam.

 Quem-

Quemadmodum autem hic ponendo $r=a$ omnis generis ellipses sumus adepti, ita si pro altera aequationis parte statuamus $s=\beta$ simili modo ad hyperbolas perueniemus, quarum foci itidem in centris virium reperiuntur.

Ceterum Auctor hic assumsit motum fieri in eodem plano cum ambobus virium centris, verum etiamsi motus non absoluatur in eodem plano, tamen methodus qua hic Auctor est vsus, pari successu adhibetur, quemadmodum alia occasione ab ipso ostendetur, quo simul spes Astronomorum non mediocriter confirmari videtur, fore aliquando, vt omnes perturbationes motuum coelestium ab actione plurium virium oriundae per calculum accurate queant definiri.

## II.

# De Motu vibratorio Tympanorum

item III.

# Tentamen de Sono Campanarum.

Auctore Leon. Eulero pag. 243 et 261.

Duae inuestigationes ad Acusticam pertinentes atque in se tantopere difficiles suscipiuntur, vt is iam plurimum praestitisse sit censendus, qui saltem quodammodo hos sonos ad calculum reuocare valuerit. Abunde nunc quidem constat, quantis difficultatibus



tatibus quaestio de motu vibratorio cordarum fuerit inuoluta, cum ante eam perfecte expedire non licuerit, quam noua quasi calculi integralis pars tractari atque excoli sit coepta. Cum igitur in his quaestionibus quae de sono seu motu vibratorio tympanorum et campanarum instituuntur, non fili cuiusdam veluti cordae, sed totius superficiei atque adeo corporis agitationes inuestigentur, facile intelligitur, ad hoc multo profundiora calculi mysteria requiri. Praecipuum autem negotium in eo consistit, vt hi motus eorumque variationes debite ad calculum reuocentur; id quod sine certis hypothesibus pro structura horum corporum stabilitis, nullo modo fieri potest. Hinc Auctor harum dissertationum in priori rationem constituit, qua vibrationes membranae extensae dum pulsatur, euenire concipi oportet; in posteriori vero similem rationem pro campanis definit, vnde deinceps formulas analyticas secundum motus principia deriuat, quarum euolutio tandem ad veram motus vtriusque cognitionem perducere debet. Formulae autem hae, quae pro tympanis sunt differentiales secundi, pro campanis autem adeo quarti gradus, multo magis sunt complexae quam eae, quibus cordarum motus exprimitur; neque etiam in genere, vti illae, inuestigationem admittunt. Quamobrem Auctor etiam vtramque solutionem ad eum casum restringit, quo oscillationes regulares certis temporum interuallis distinctae oriuntur, quandoquidem hae maxime in sensus incurrunt, sonosque certi tenoris repraesentant. Deinde autem hic idem

idem quoque vſu venit, quod in cordis eſt obſeruatum, vt tam tympana quam campanae pro varia impulſionis ratione diuerſos ſonos ſimplices edere queant, tum vero etiam hoc potiſſimum, vt quos ſonos haec inſtrumenta ſeorſim edere valent eosdem quoque coniunctim producere poſſint, quemadmodum idem in cordis contingit. Verum cum diuerſi ſoni, quibus edendis eadem corda eſt apta, ſint inter ſe maxime harmonici, in ratione quippe numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5 etc. procedentes, hic in tympanis et campanis maximum cernitur diſcrimen, dum ſoni ſimul editi adeo inter ſe incommenſurabiles, ideoque maxime ab harmonia abhorrentes. Ex quo facile intelligitur, quid de illa inſignis Muſici Gallici de Rameau opinione ſit ſentiendum, qui memorata illa cordarum proprietate deceptus, verum omnis harmoniae principium in natura corporum ſonorum ſitum eſſe putauit, exiſtimans omnes ſonos ab eodem corpore ſimul editos natura ſua inter ſe eſſe conſonos. Ratione campanarum prouocat adeo ad experientiam, et affirmat campana pulſa ſe ſemper ſimul ſonum acutiorem, qui ad principalem eſſet *decima maior* ſeu in ratione 5 ad 2, exaudire. At Auctor noſter dilucide oſtendit hunc ſonum non rationem 5:2 ſed potius hanc irrationalem $\sqrt{6}:1$ illa tantillo minorem tenere, ita vt vel hoc experimento opinio illa funditus euertatur.

IV.



## IV.

## Obſeruationes quaedam ad Opticam pertinentes.

### Auctore F. V. T. Aepino pag. 282.

In Commentariis Academiae Scientiarum Pariſinae anni 1743. proſtat Cel. *Buffoni* diſſertatio, titulo de Coloribus accidentalibus inſignita, quae praeter colores accidentales tractat etiam de morbo, vbi maculae nigrae tanquam muſcae oculo obuolitare videntur, nec non de coloribus vmbrarum a corporibus ſole oriente aut occidente proiectarum. Auctori huius Diſſertationis circa haec tria nonnullae Cel. *Buffono* ignotae ſeſe obtulerunt obſeruationes, atque idcirco eas hic perſequitur.

Diſſertatio haec continet tres obſeruationes: Prima ſpectat ſenſationem diuerſorum colorum in organo viſus ſuccedentium, ſi Sol, dum eſt horizonti propinquus, vel raris obtectus nubibus, vt ſplendor ipſius oculum laedere nequeat, per quartam partem minuti primi conſpiciatur. Auerſis enim tunc a Sole oculis ſenſationem durare per tria aut quatuor minuta prima expertus eſt Auctor, ſiue illi aperti, ſiue clauſi teneantur. Singulares et a nemine hucusque obſeruatas circumſtantias, quae ſenſationem hanc concomitantur, longum foret hic recenſere; idcirco qui illas concluſionesque inde deductas cognoſcere cupiunt, ad ipſam diſſertationem ablegandos eſſe cenſemus.

 Secun-

Secunda obſeruatio ſpectat morbum oculorum, quo ante oculum obiectum quoddam album aut lucidum contemplantem, maculae nigrae, tanquam muſcae, obuolitare videntur. Multi equidem hoc morbi genere laborant, aſt nemo maiori cura quam Auctor in ſedem morbi inquiſiuit. Plerique medicorum quaeſiuerunt infirmitatis huius cauſam in particulis opacis humori aqueo innatantibus, alii opacitati partium lentis cryſtallinae, et alii denique partibus tunicae retinae ſenſatione priuatis, ſiue paralyſi affectis, quae opinio Cel. *Buffono* quoque arridet, attribuerunt. Vltima ſententia, licet magis legibus dioptricis conſentiat, propria tamen experientia conuictus eſt Auctor, dari caſus, vbi hic morbus ſedem in tunica retina non habet, et in hanc ſententiam deſcendit, vt ſedem morbi non alibi quam in humore vitreo quaerendam eſſe, atque oriri a dilatatione ſubtiliſſimorum vaſorum lympham diaphanam vehentium, et introitum partibus craſſioribus et opacis praebentium, aliterque lumen ac lympha refringentium, exiſtemet. Obſeruationes et experientiae Auctoris ita comparatae eſſe videntur, vt nullum dubium relinquant, quin veram ſedem morbi ſaltem ſui ipſius, aſſignaſſe ſit cenſendus.

In obſeruatione tertia, quae de vmbrarum coloribus agit, refert primum Auctor obſeruationem, *Buffonianae* ſimilem aſt nouam, quod vmbrae a candela accenſa proiectae, tempore crepuſculi matutini aut veſpertini, non prout exſpectare fas videtur, nigrae, ſed nunquam non eleganter coeruleae inueniantur, ſi plano albo excipiantur; virides vero appareant, ſi in planum flaueſcens proiiciantur. Orta hinc erat ſuſpicio Auctori, qui inter innumeros caſus, nunquam viderat vmbras a Sole occidente productas, niſi coeruleas, irrepſiſſe in *Buffoni* obſeruata inaduertentiam aliquam, dum celeber. Vir ſaepe virides apparere vmbras has perhibuerat, quod quidem Auctori non niſi huic circumſtantiae attribuendum fuiſſe videbatur, quod in obſeruationibus *Buffoni* vmbrae in planum flauum inciderint. Aſt propriis poſt haec obſeruationibus edoctus fuit, apparere poſſe vmbras a Sole occidente productas, etiamſi plano albo excipiantur, virides, dum nempe aër ſparſis nubibus rubicundo aut aureo colore tinctis repletus eſt.

Tentat quoque Auctor rationem reddere horum phaenomenorum, non tamen illam pro vera proponere audet.



## V.

## Similitudinis effectuum vis Magneticae et Electricae nouum ſpecimen.

### Auctore F. V. T. Aepino pag. 296.

Varia ab Auctore in lucem edita ſunt ſcripta, ſimilitudinem effectuum et analogiam vis magneticae atque electricae demonſtrantia. Prima huius rei fundamenta iecit in ſermone anno 1758. publice prae-

praelecto, et vberius eandem Theoriam exposuit in egregio opere, cui titulus est: *Tentamen Theoriae Electricitatis et Magnetismi.* Quanquam itaque hac ex parte Auctor in scriptis suis nihil desiderandum reliquerit, phaenomenon tamen, quod hic describit, vtriusque vis tantam sistit similitudinem, vt obseruator omnino distinguere nequeat, vtrum id pro operatione vis Electricae, an vero Magneticae habendum sit. Haec est praecipua caussa, ob quam experimentum hoc describendum esse existimavit. Simplex quidem illud est, sed similitudinem vtriusque vis luculentissime probat.

## VI.

## Descriptio duplicis Microscopii Solaris apparatus obiectis opacis adaptati.

### Auctore I. E. Zeihero pag. 299.

Microscopium Solare ad inuenta recentiora pertinere satis constat. Tribuitur illius inuentio *Liberkühnio*, Academico celebri quondam Berolinensi, quamuis non desint, qui hoc inuentum antiquius esse volunt, et *Liberkühnium* tantum illud perfecisse contendunt.

Microscopium solare variarum adhuc perfectionum est capax, vti solent recentiora inuenta, quae non statim ab initio summo perfectionis gradu gaudere



gaudere solent, vti vel antlia pneumatica exemplo esse potest perspicuo, a variis, aucta variis perfectionibus. Microscopia solaria prima et ordinaria adcommodata tantum sunt ad obiecta pellucida obseruanda. Duplex perfectio est ab Auctore excogitata pro obiectis opacis Microscopio solari adplicandis. Altera inseruire debet obiectis minimis, valde amplificandis, quae alias commode in lentis foco collocari nequeunt; altera vero obiectis maioribus integris mediocriter augendis, vt monetis, gemmis et aliis. Hunc duplicem scopum Auctor sibi in dissertatione sua repropofuit, ad quem obtinendum duas capsulas reperit cum adparatu coniungendas cum microscopio solari. Sed quum hic adparatus duplex sine figuris distincte intelligi et repraesentari nequeat; lectorem ad ipsam dissertationem remissum volumus.

## VII.

## Methodus expedita Velocitatem venti absolutam determinandi.

### Auctore I. E. Zeihero pag. 302.

Extant quidem iam multae methodi celeritatem ventorum determinandi, a variis auctoribus excogitatae, inter quas praecipue notatu digna est, ingeniosissima illa viri quondam celeberrimi *Onsen-Bray*, quam descripsit in Memoriis Academiae Pari-

Parisiensis anno 1734. Tamen in omnibus his methodis iure adhuc desiderari potest, quod non satis sint expeditae et commodae quauis occasione celeritatem ventorum determinandi. Scopus igitur dissertationis est methodum commodiorem et expeditiorem exhibere. Ad hunc scopum obtinendum coniunxit duo instrumenta satis iam nota, alterum est viri celeberrimi quondam *Bougueri*, alterum celeberrimi Smeatonii angli. Instrumentum *Bougueri* est descriptum in eius tractatu de naui, et est anemometrum ingeniosissime excogitatum, et simplicissime confectum. Consistit illud generatim in elatere spirali tubo incluso, qui a vento, maiore et minore, magis minusqus intrudi solet, si scilicet planum ex charta confectum elateri adfixum, vento obuertatur. Sed quum sine figuris structura huius anemometri distincte intelligi et repraesentari nequeat: lectorem ad inspiciendam figuram remittere cogimur. Si igitur anemometrum hoc *Bouguerianum* celeritatis absolutae ventorum gradus monstrare debet; opus est, vt celeritate aequali et vniformi contra aërem quietum moueatur et hac ratione velocitatis gradus simul in eo signari queant.

Motus circularis Auctori hic videtur aptissimus, quem ope machinae Smeatonii facillime perficere existimat. Descripta est haec machina Vol. LI, Transact. angl. Vsus est ea Smeaton occasione experimentorum circa aquae et venti vires institutorum. Ipsa machina distincte per figuram est repraesentata, ita vt vlteriore eius descriptione hic supersedere



sedere possimus, quae igitur est ipsa inspicienda. Haec machina Smeatoniana ad scopum suum ab Auctore est accommodata. Tota igitur machina ex instrumento *Bougueriano*, et Smeatoniano ita est composita, vt mediante consibula anemometrum *Bouguerianum* parti superiori machinae Smeatonii sit affixum, vbi figura ipsa est inspicienda. Vnicae eiusmodi machinae auxilio innumerabilia anemometra velocitatem ventorum absolutam indicantia, confici et vbiuis mitti posse facile intelligitur.

Potest post tempus aliquod praeterlapsum elater spiralis fieri imperfectior. Verificandum igitur hoc instrumentum erit, et explorandum, an elater spiralis ab elasticitate sua aliquid amiserit.

Quod quomodo sit faciendum, vltimo loco exponitur.

PHYSI-

# PHYSICA.

## I.

## Caloris diminuti et aucti Phaenomena noua paradoxa et Confiderationes.

### Auctore I. A. Braunio pag. 309.

In rerum natura multa euenire folent, quae paradoxa videntur, dum contrarium eius, quod fecundum leges ordinarias fieri debet, confpiciendum praebent. Deteguntur eiusmodi phaenomena paradoxa partim adcuratis obferuationibus, in quantum fcilicet illa a folis naturae viribus funt perducta eoque folius naturae funt effectus; partim et praecipue Experimentis, quatenus fcilicet phaenomena eiusmodi accedente arte oriuntur, eoque effectus et naturae et artis fimul funt, ita vt fine arte, fine difpofitione artificiali nunquam fe confpicienda praebuiffent. Eiusmodi quaedam paradoxa phaenomena Auctor multis iisque adcuratiffimis experimentis pro fua, vt in arte obferuandi, fic in arte experimentandi peritia fatis nota, detexit, quae in hac differtatione propofuit, non nude, fed explicare quoque pro fuo acumine ftuduit. Experimenta pertinent ad caloris diminutionem et auctionem paradoxam, h. e. quae legibus phyficis ftabilitis repugnare videtur, dum calor diminuitur, quum tamen augeri, faltim non variari, et e contrario augetur, quum diminui, certe idem manere debeat.



Pro diuerfitate fluidorum, quae ad haec experimenta funt electa, caloris diminutio maior et minor adparebat, quin in quibusdam fluidis nulla plane confpiciebatur. Experimenta in conclaui funt inftituta, quod vel eiusdem temperiei cum fluidis, vel calidius illis erat.

In cafu igitur priori thermometrum mercuriale quod eft adhibitum, eundem caloris gradum monftrare debebat, ex fluido extractum, quem habebat, fluido adhuc immerfum, et in cafu pofteriori calor augeri eoque thermometrum adfcendere debebat. Sed in vtroque cafu fecus accidit. Calor enim eft diminutus femper in plerisque fluidis tentatis, cum exceptione tamen quorundam, quae vel plane nullam caloris mutationem, vel parum aut nihil mutationis monftrarunt. Ad ea fluida, quae frigoris nihil fub dictis circumftantiis producere folent, pertinent omnia olea expreffa et deftillata. Spiritus acidi quidam, vt fpiritus nitri et falis, parum aut nihil mutationis oftenderunt, excepto oleo vitrioli, quod loco frigoris 5. 6 et plures gradus caloris fub dictis circumftantiis produxit. Ceterum fpiritus fulphuris, aceti, acidum citri, acetum vini, fpiritus falis ammoniaci frigoris gradus aliquot produxere.

In omnibus aliis fluidis tentatis, productio frigoris fine omni exceptione cernebatur, vt in fpiritu vini rectificatiffimo, fpiritu vini francico, in vinis omnibus tentatis, in cereuifiis, in folutionibus falium, um, et aliis, de aqua iam ante constitit hoc phaenomenum extraordinarium. Sed haec hactenus de phaenomenis, quae hic sufficere possunt. De explicatione horum phaenomenorum et experimentorum adhuc dicendum restat. Primum A. demonstrat, neque frigus, neque calorem in recensitis phaenomenis esse adparentem, ita scilicet, vt potius haec caloris diminuti et aucti phaenomena a contractione et dilatatione vitri, quam a contractione et dilatatione mercurii ipsius pendeat, sed realem, revera enim in productione frigoris, mercurius in thermometro contrahitur, et in productione caloris dilatatur. Sed quaenam caussa physica producti frigoris paradoxi in plerisque fluidis, et quaenam ratio producti caloris paradoxi in oleo potissimum vitrioli? Phaenomenum frigoris paradoxi explicare A. studet per solutionem frigidam, dum scilicet fluidum bulbo thermometri adhaerens in vapores resoluitur, quemadmodum alias frigus augeri animaduertimus, dum madida corpora lintea etc. exsiccari solent. Eiusmodi frigoris productio durat, quamdiu resolutio *fluidi* in vapores, durare solet. Hinc cur olea parum aut nihil mutationis caloris producere soleant intelligi potest, quia scilicet exsiccatio bulbi thermometri, eoque resolutio in vapores, parum aut nihil omnino in oleis fieri solet. Contra caloris paradoxi caussam in vitrioli oleo non dubitat Auctor deducere ex attracta ab oleo vitrioli aqua, quae cum oleo vitrioli mixta calorem ad tempus producere solent, quod multis experimentis ostendi potest et est ostensum.

Tandem



Tandem adhuc notandum est, occasione horum experimentorum errorem quorundam Physicorum magni nominis esse detectum, qui statuerunt frigus quoque produci solere, si spiritus vini oleis essentialibus misceatur. Sed hi sine dubio ignari phaenomenorum paradoxorum recensitorum mistioni olei essentialis cum spiritu vini tribuerunt, quod effectus solius spiritus vini, (per antecedentia) esse solet, dum thermometrum extrahitur, et in aëre etiam calidiore suspenditur. Multis experimentis hoc quoque egregie confirmatum est.

## II.

## Piscium rariorum e Museo Petrop. exceptorum descriptiones continuae.

### Auctore I. T. Koehlreutero pag. 329.

Tredecim a Clariss. Koehlreutero piscium descriptiones nobis restare Tom. VIII. diximus. Harum descriptionum tres dicto Tomo inseruimus. Sex in praecedente reperiuntur. Sequuntur in praesenti quatuor reliquae. Prima earum, Lophium officulo frontis tentaculis carnosis, centralibus, terminato, depingit. Secunda Molam aculeatam, limbo abdominis producto, attenuato, carnoso, monstrat. Percis pinnae dorsualis radiis vndecim spinosis, quatuordecim mollibus; fasciis duabus latis, albicantibus,

bus, tertiae dissertationis est obiectum. Hunc piscem Clar. Auctor vnum eundemque cum Sciaena lineis obliquis lacteis in vtroque latere, Gronou. Mus. *Ichthiol.* esse *opinatur*. Sequitur, in Dissertatione quarta, Percis fasciis tribus albicantibus, osse malae vtrinque in duas spinas, vnam longam alteram breuem, producto. In describendis his piscibus eadem methodo eademque solertia vsus est, quam lectores in antecedentibus forsitan obseruarunt. Suo tempore et reliqui, Ichthiophylacii nostri pisces rariores, eodem modo describentur; hoc etenim modo historiae piscium naturali maius tutiusque lumen forsitan accendetur, quam vsque adhuc multis naeuis subiectam nouimus.

## III.

# Dentalii Americani ingentis magnitudinis descriptio.

## Auctore I. T. Koehlreutero pag. 352.

Dentalios, qui non raro ex continente nunc soli nunc inter alia conchylia et petrefacta eruuntur, merito ad domicilium vermium marinorum quorundam pertinere, nemo est qui sibi non persuadeat, quamuis ipsos vermes videre nemini adhuc contigerit. Variae indolis, structurae et magnitudinis reperiri, diuersa exemplaria in Lithophylaciis Curiosorum



sorum asseruata docent. Clariss. Auctor igitur duos Dentalios ingentis magnitudinis describit, eosque Dentalios arcuatos, spongiosos, fuscos, superficie tuberculis contiguis exasperata, nominat. Ambo hi Dentalii magnitudine sua insigni se commendant. Maximum eorum secundum lineam rectam 4. pedes Parisinos cum duobus pollicibus, secundum arcum curuaturae 4. pedes et 5. pollices aequat. Latitudo extremitatis inferioris vnius est pollicis, superioris trium pollicum quinque linearum. Extremitas inferior frusto Madreporae insidet. Substantia ipsa corneae est duritiei. Corpus ipsum tuberculis subrotundis obsitum, interius ruso-fusci exterius vero plane fusci coloris est. Inprimis vero notata dignum est, ex basi maximi huius dentalii, alium pusillum 1. pollicem cum 8. lineis longum excreuisse. Reliquum hoc frustum rarissimum a nauta quodam olim Archangelopolin aduectum, et a PETRI MAGNI Archiatro D. *Areskin* Petropolin missum fuit. Alterum frustum quod Clariss. Auctor describit, tres pollices cum 8. lineis longum non aeque elegans ac antecedens, magis irregulare, non vbique tuberculosum et pallidiore gaudens colore cernitur. Adhaerent diuersis in locis testae parasiticae, scyphiformes, quadri - vel quinque laterae, inuerso - conicae, cuius indolis et in antecedente conspiciuntur. Reliquum haec frusta propter insignem et fere inconsuetam magnitudinem rarissimis omnino sunt annumeranda.

# IV.

# Obſeruationes Meteorologicae potiores Anni MDCCLIX. Petroburgi factae; et in eas Conſiderationes.

## Auctore I. A. Braun p. 357 et ſeqq.

Satis iam conſtat adcuratio et methodus Auctoris, qua in obſeruationibus Meteorologicis concinnandis, vti ſolet. Nimirum adcuratiſſime notantur primum Altitudines Barometricae maximae et minimae in Barometro ſimplici ſecundum pollices pariſienſes, eorumque partes centeſimas per ſingulos menſes totius anni cum differentiis. 2. Calor maximus et minimus, ſiue frigus maximum per ſingulos quoque anni menſes cum differentiis adnotatur. 3. Meteora recenſentur potiora, additis vbique, vbi ſcilicet e re videtur, conſiderationibus et conſectariis, potiſſimum ex comparationibus deductis. Cuilibet regioni propria eſſe meteora, non ſolum, ſed cuilibet quoque anno eiusdem loci, ſatis conſtat.

Nos igitur notatu digniora enotabimus, quae hoc anno Petroburgi ſunt obſeruata. Denuo monendum eſt, obſeruationes has meteorologicas omnes ſecundum ſtilum Veterem eſſe confectas, quoniam hic, vti conſtat, eſt adhuc vſitatus.

Obſeruationes Barometricae primum occurrunt. Summa Barometri altitudo huic anno et huic loco propria, erat $=28.\ 82.$ Nou. 9. obſeruata; infima $=27.\ 00$ Ianuarii 24 et 26 notata. Ergo ſumma altitudo huius anni minor eſt, maxima alias hic obſeruata, ſcilicet 1757 $=29.\ 12$, et quidem $\frac{70}{100}$ ſiue fere $3\frac{1}{2}$ lineae duodec. pollicis pariſienſis. Altitudo Barometri infima $27.\ 00$, ſi comparetur cum infima alias hic obſeruata, nempe $26.\ 41$. deprehenditur maior $\frac{59}{100}$ ſiue fere 7 lin. ſeu partibus duodecimis pollicis pariſienſis.

Ceterum variationes Barometricae primis et vltimis menſibus, quam mediis, maiores et hoc anno deprehenduntur, ita vt vix aut rariſſime ab hac lege exceptio occurrere ſoleat.

Minima variatio Barometrica fuit $=\frac{59}{100}$ ſiue fere 7 lin. menſe Nouembri. Minores differentiae et variationes hoc anno deprehenſae ſunt Menſe Aprili, Maio, Iunio, Iulio et Auguſto, eoque per 5 menſes, nonnunquam per 4 menſes tantum reperiuntur. Ceterum nec maxima neque minima variatio ſemper iisdem menſibus occurrunt; quod per antecedentes obſeruationes iam conſtat.

Quod ad obſeruationes thermometricas attinet, ſingulare et plane extraordinarium fuit frigus Dec. 26 obſeruatum $=212$, quo Auctor huius diſſertationis ſuum egregium inuentum de congelando mercurio perficiendi, occaſionem arripuit et perfecit. Tantum frigus antea nunquam hic eſt obſeruatum, maximus enim frigoris gradus vltra 202 et 203 nunquam adhuc fuit notatus.

Calor

Calor maximus huius anni = 104, Maii 26 et Iulii 18 et 19 obseruatus, solet esse fere ordinarius. A maximo calore igitur 97°. 1757 et 1758. hic obseruato, differt 7°. Septem scilicet gradibus minor est.

Haec hiems potest igitur iure pro frigidissima haberi, quae vnquam hic contigit, quae notata est, id quod et frigoris gradus reliqui insigniores quoque recensiti satis demonstrare possunt.

Penetratio insignioris huius frigoris in terram extra vrbem, tanta quoque est deprehensa, quanta forsitan antea nunquam, sc. 30 pollicum Londinensium, quum *Kraftius* vltra 12 pollices eam mitiore hieme non deprehenderit. Vid. ipsius Physicam p. 265. P. I.

Interim glacies Neuae frigore hoc saeuo crassior non multum est reperta, quam ordinarie solet, scilicet 29 Poll. pedis Lond. Ordinaria esse solet 1 Arschin = 28 Poll. Lond. Altitudo aquae pluuiae fuit mediocris, nimirum per sex menses aestiuos, a Maio ad Octobrem 11 pollicum paris: Aestas igitur non humida, et annus sat fertilis fuit.

Primum tonitru hoc anno quoque catenus extraordinarium fuit, quod solito citius contigit, scilicet iam Martii 25. Ceterum 12 diebus tonitrua sunt audita. Congelatio vltima fuit Apr. 22.

Prima rursus Sept. 22.

Declinatio acus magneticae et hic loci quoque per dies variabilis in acu praestanti est deprehensa, sed parum, ita vt differentia inter maximam et minimam



fit vix aliquot minutorum. Denique notatu dignus est motus vibratorius acus magneticae tempestate inprimis fulminea imminente obseruatus, qui sine dubio est effectus electricitatis aëris.

V.

# Obseruationes Meteorologicae, Anni MDCCLX. factae Petroburgi, et Consectaria.

## Auctore I. A. Braunio pag. 369.

Quae generatim de obseruationibus meteorologicis anni praecedentis praemonuimus, de huius anni quoque obseruationibus valent. Statim igitur ad ea enotanda progredimur, quae huic anno propria fuerunt, et notatu sunt digniora.

1) Quod ad obseruationes Barometricas attinet, notamus primum altitudinem huius anni summam et infimam. Summa hoc anno fuit = 28. 58. et infima 26. 74. Summa hoc anno mediocris fuit, et ab altitudine omnium adhuc obseruatarum summa, scilicet 29. 12 differt $\frac{64}{100}$ pollicis Parisiensis quibus minor est. Minor quoque est altitudine anni praecedentis summa scilicet 28. 82. Nouemb. 9. obseruata, $\frac{24}{100}$. Summa huius anni altitudo mense Septembri, anni praecedentis contra, mense Nouembri est obseruata, et iam ex antecedentibus obseruationi-

 bus