RECHERCHES
SUR LA CONNOISSANCE MÉCANIQUE DES CORPS.
PAR M. EULER.

I.

On peut établir une triple connoiſſance des corps, la géométrique, la mécanique, & la phyſique. La connoiſſance géométrique ne regarde que l'étendue & la figure des corps: c'eſt la partie de la Géométrie, qui eſt nommée la *Stéréometrie*, qui renferme cette connoiſſance. La connoiſſance mécanique conſidere les corps entant qu'ils ſont matiere, ſans avoir égard aux qualités dont la matiere eſt douée; & il s'agit ici de connoitre, non ſeulement la quantité de matiere dont chaque corps eſt composé, qu'on nomme ſa maſſe; mais auſſi la maniere dont la matiere eſt diſtribuée par toute l'étendue des corps. Cette connoiſſance eſt abſolument néceſſaire lorsqu'il eſt queſtion du mouvement des corps; & c'eſt par cette raiſon, qu'elle eſt nommée mécanique. En fin la connoiſſance phyſique des corps renferme toutes les autres propriétés & qualités des corps, qui ſont le propre objet de la Phyſique. Table I.

II. La connoiſſance mécanique des corps eſt le fondement de la Mécanique, puisqu'on ne ſauroit déterminer le mouvement des corps ſans connoitre leur maſſe, & comment la matiere eſt diſtribuée par toute leur étendue. C'eſt de là qu'on a tiré l'idée du centre de gravité, dont la connoiſſance eſt, comme on ſait, de la derniere importance par toute la Mécanique. L'idée du centre d'oscillation y doit auſſi être rapportée, au lieu de laquelle on peut ſubſtituer celle des *momens d'inertie*, dont je me ſuis ſervi jusqu'ici avec bien du ſuccès dans mes recherches mécaniques. Mais je viens de découvrir encore d'autres idées ſur cette matiere, qui ſemblent porter notre connoiſſance mécanique à un beaucoup plus haut degré de perfection: du moins m'ont elles ſervi à reſoudre des problemes mécaniques, qui m'avoient paru intraitables ſans leur ſecours. Toutes ces idées jointes enſemble fourniroient un ſyſteme aſſès complet de la connoiſſance mécanique des corps.

La maſſe des corps.

III. La premiere idée que la connoiſſance mécanique des corps nous préſente, eſt celle de leur maſſe, qui eſt l'aſſemblage de toute la matiere, dont le corps eſt compoſé. Or la matiere n'entre en conſidération, qu'entant qu'elle eſt douée de l'inertie; de ſorte que la maſſe eſt la meſure de l'inertie, ou de cette qualité des corps, par laquelle ils s'efforcent de demeurer dans le même état, ou de repos, ou de mouvement uniforme rectiligne. En examinant les phénomenes de la gravité, on a trouvé que le poids de chaque corps eſt proportionnel à ſa maſſe, du moins dans la même région de la terre; & partant il eſt permis de regarder le poids de chaque corps comme la meſure de ſa maſſe. S'il eſt queſtion des corps qui ſe trouvent loin de la terre, leur maſſe ſera exprimée par le poids que ces corps auroient, s'ils étoient placés à la ſurface de la terre, & même dans la région qu'on aura choiſie pour y fixer cette meſure. Ou bien, il ſuffit de connoitre le rapport de la maſſe d'un tel corps à celle d'un corps ſur la terre, dont le poids eſt connu. On comprend, ſans que j'aye beſoin d'en avertir, que je parle ici du poids que les corps auroient dans le vuide.

Le centre de gravité.

IV. Si la matiere dont un corps eſt compoſé, étoit également diſtribuée par toute ſon étendue, la connoiſſance de ſa maſſe ſeroit ſuffiſante pour en connoitre toutes les rélations au mouvement; & la connoiſſance géométrique de ſa figure fourniroit toutes les autres idées, qui entrent dans la conſidération du mouvement: de tels corps ſont apellés homogenes. Mais, ſi la matiere eſt inégalement diſtribuée par l'étendue du corps, il en faut tenir compte dans la Mécanique; & de là réſultent pluſieurs idées, qui dépendent de la diſtribution de la matiere

tiere

tiere par l'étendue du corps, dont la plus connue est celle du centre de gravité. Tout le monde sait, qu'il se trouve dans chaque corps un certain point, autour du quel la pesanteur est quasi également distribuée, & dans lequel on se puisse imaginer, comme si toute la masse du corps y seroit réunie. Mais cette idée est trop vague, & demande bien des éclaircissemens & des rectifications.

V. D'abord qu'est-ce que cette égale distribution de la matiere ou de la pesanteur autour du centre de gravité? S'imagine-t-on que, si l'on coupe un corps par un plan, qui passe par son centre de gravité, les deux parties seront également pesantes? Cela seroit bien vrai dans un globe ou dans un cylindre homogene, mais un cone, quoiqu'il soit homogene, détruit cette explication; car le centre de gravité d'un tel cone se trouvant dans son axe, à une distance de la base, qui est le quart de sa hauteur, si l'on coupe le cone par un plan parallele à sa base, & qui passe par son centre de gravité, le cone retranché sera au cone entier comme 27 à 64. donc il sera plus petit que la moitié. Or, si le corps n'est pas homogene, il n'arrive presque jamais, que les sections faites par son centre de gravité le partagent en deux parties égales, ou également pesantes.

VI. Il en est de même de l'autre propriété alléguée du centre de gravité, qui supose qu'on puisse toujours concevoir la masse ou le poids entier du corps comme réuni dans son centre de gravité. Cela n'est vrai, que lorsqu'il s'agit de l'état d'equilibre, ou d'un mouvement purement progressif des corps, où toutes les parties se meuvent à chaque instant avec des vitesses égales suivant la même direction. Or, dès que le mouvement est gyratoire, ou se fait autour d'un axe fixe, cette suposition n'a plus lieu: & l'on sait que le mouvement d'un pendule est bien différent de celui qu'il auroit, si toute sa masse étoit réunie dans son centre de gravité. C'est alors à un autre point qu'il faut faire attention, & qu'on nomme le centre d'oscillation du pendule.

VII. De là il est évident qu'il faut mieux fixer l'idée du centre de gravité. Et d'abord, il est constant, qu'il y a dans chaque corps un certain

certain point, qui tient un certain milieu entre la matiere qui compose le corps, dont la connoissance est de la derniere importance dans toute la Mécanique. Quand le corps se trouve à la surface de la terre, ce point est bien le même qu'on nomme son centre de gravité; mais, quand même le corps ne se trouveroit dans aucune liaison avec la terre, ou qu'il ne seroit pas assujetti à l'action de la gravité, ce point ne lui seroit pas moins essentiel, & entreroit également dans la détermination de ses mouvemens. Donc, puisque ce point est absolument indépendant de la gravité, & qu'il est déterminé uniquement par la distribution de la matiere dont le corps est composé, je le nommerai plutôt le *centre de masse*, ou le *centre d'inertie* de chaque corps.

VIII. Il faut aussi considérer, que ce centre d'inertie ne convient avec le centre de gravité du corps, que lorsque les directions de la gravité sur tous les élémens du corps sont paralleles entr'elles, & que le poids de chaque élément est proportionnel à sa masse, comme on peut le supposer, quand le corps se trouve à la surface de la terre, & que son étendue est quasi infiniment petite par rapport à la distance au centre de la terre. Mais, si le corps étoit extrêmement grand, de sorte que, ni les directions de la gravité ne seroient plus paralleles entr'elles, ni les forces dont les parties du corps sont sollicitées, proportionnelles à leurs masses; l'idée même du centre de gravité n'auroit plus lieu, quoique celle du centre d'inertie lui fût également essentielle.

Le centre d'inertie.

IX. Par ces raisons il convient de séparer tout à fait l'idée du centre d'inertie de l'action de la gravité. Il s'agit donc de donner une juste définition de ce point, que je nomme le centre d'inertie de chaque corps. Si nous regardons à l'origine de cette idée, que fournit la Mécanique, on considere des forces appliquées à chaque élément du corps, qui soient proportionnelles chacune à l'inertie, ou la masse de l'élément, auquel elles sont appliquées, & que leurs directions soient paralleles entr'elles. Alors on cherche la direction moyenne de toutes ces forces élémentaires; & l'on observe que cette direction moyenne ne paſſe toujours par un certain point du corps, quelque direction qu'on donne aux forces élémentaires. C'eſt donc ce point, que je nomme le centre d'inertie de chaque corps, & qui eſt le même que ſon centre de gravité, lorſque le corps ſe trouve aux environs de la Terre, & qu'il n'eſt pas trop grand, pour qu'on puiſſe conſidérer les forces élémentaires de la gravité comme proportionnelles aux maſſes des élémens, & leurs directions comme paralleles entr'elles.

X. Mais, pour dégager cette définition de la conſidération des forces, qu'on rapporte le corps à un plan quelconque, en multipliant la maſſe de chaque élément par ſa diſtance à ce plan; & la ſomme de tous ces produits ſera toujours égale au produit de la maſſe entiere du corps par la diſtance de ſon centre d'inertie au même plan. C'eſt en cela que conſiſte la nature du centre d'inertie. Mais on a raiſon de douter ſi cette définition eſt poſſible, puiſqu'elle ſemble plus que déterminée. Car, prenant à volonté trois plans, auxquels on rapporte le corps de la maniere preſcrite, il eſt clair que de là le centre d'inertie ſera déjà déterminé. Il eſt donc encore douteux, ſi ce point aura la même propriété à l'égard de tous les autres plans: au moins n'eſt-il pas permis de le ſuppoſer; mais cela demande une démonſtration particuliere, ſans laquelle la définition donnée ſeroit abſurde.

Le moment d'un corps par rapport à un plan.

XI. Pour rendre cette definition plus intelligible, je nommerai le moment d'un corps par rapport à un plan donné, la ſomme de tous les produits, qui réſultent en multipliant la maſſe de chaque élément du corps par ſa diſtance au-dit plan. Cela poſé, je dis, qu'il ſe trouve dans chaque corps un certain point de cette nature, que le moment du corps par rapport à un plan quelconque eſt toujours égal à la maſſe entiere du corps multipliée par la diſtance du dit point au même plan. Enſuite, ayant démontré l'exiſtence de ce point, la définition n'aura plus de difficulté en diſant, que c'eſt ce point qu'on nomme le centre d'inertie d'un corps. Il faut remarquer ici, que, ſi le plan coupe le corps, de ſorte qu'une partie du corps ſe trouve d'un côté & l'autre de l'autre côté du plan, le moment d'une partie par rapport au

plan

plan doit être pris négativement à l'égard de l'autre; tout comme la nature du calcul exige, où les diſtances, qui tombent à l'autre côté du plan, doivent être cenſées négatives.

XII. Voilà donc un Théoreme, dont la démonſtration doit précéder notre définition. Pour cet effet, je remarque d'abord que, s'il y a un point dans le corps, qui a la propriété décrite par rapport à un certain plan, il aura la même propriété par rapport à tout autre
Fig. 1. plan parallele à celui là. Car, ſoit LMN un corps, dont la maſſe $= M$, & I le point en queſtion, dont la diſtance au plan propoſé ſoit $= f$. Qu'on conſidere un élément quelconque du corps en Z, dont la maſſe ſoit $= dM$, & la diſtance au même plan $= x$. Le moment du corps par rapport à ce plan ſera donc $= \int x\, dM$, & par l'hypotheſe $\int x\, dM = Mf$. Qu'on prenne maintenant un autre plan parallele au précédent à la diſtance $= e$, & puiſque l'élément dM en Z ſe trouve à la diſtance $e + x$, le moment du corps par rapport à ce plan ſera $= \int (e + x)\, dM = Me + \int x\, dM = M\,(e + f)$ à cauſe de $\int x\, dM = Mf$. Or $e + f$ étant la diſtance du point I à ce nouveau plan, le moment du corps eſt égal au produit de la maſſe M par cette diſtance du point I à ce plan.

Fig. 2. XIII. Rapportons maintenant le corps à trois plans AOB, AOC, & BOC, perpendiculaires entr'eux, les trois droites AO, BO, & CO, ſe croiſans perpendiculairement à ce point O, & l'on pourra marquer le point I dans le corps, qui ait la propriété preſcrite par rapport à ces trois plans propoſés. Que IH ſoit perpendiculaire au plan AOB, & HG à la droite OA; & nommant les ligges OG $= g$, & $HI = h$, la droite f ſera la diſtance du point I au plan BOC, g celle au plan AOC, & h celle au plan AOB. Qu'on conſidere un élément quelconque du corps en Z, dont la maſſe ſoit $= dM$, la maſſe entiere étant $= M$, & tirant pareillement la droite ZY perpendiculaire au plan AOB, & YX à la droite OA, ſoient $OX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$. De là le moment du corps par rapport au plan BOC ſera $\int x\, dM = Mf$, par rapport au plan

plan AOC $= \int y\,dM = Mg$, & par rapport au plan AOB $= \int z\,dM = Mh$: d'où trouvant les trois lignes f, g, h, le lieu du point T sera déterminé.

XIV. Il y a donc certainement dans chaque corps un point I, qui a la propriété prescrite par rapport aux trois plans perpendiculaires entr'eux; & partant il faut prouver, que la même propriété convient au point I par rapport à tout autre plan. Or il suffit de le prouver à l'égard d'un plan quelconque, qui passe par le point O. Car, après avoir démontré cette propriété à l'égard de tous les plans qui passent par le point O, puisqu'elle a lieu aussi pour tous les plans qui leur sont paralleles, elle sera vraye pour tous les plans possibles.

XV. Considérons donc un plan quelconque qui passe par le point O, & qui coupe le plan AOB par la droite OS, faisant avec OA l'angle AOS $= \zeta$, & que ce plan soit incliné au plan AOB vers B de l'angle $= \eta$. Il s'agit donc de trouver la distance du point Z à ce nouveau plan. Pour cet effet, ayant tiré YP à OS, perpendiculaire, on aura $OP = x \cos\zeta + y \sin\zeta$ & $YP = y \cos\zeta - x \sin\zeta$. Que ce nouveau plan coupe la droite YZ au point Q, & QP étant perpendiculaire à OP, l'angle YPQ sera la mesure de l'inclinaison, & partant $YPQ = \eta$. Donc $YQ = (y \cos\zeta - x \sin\zeta) \tang \eta$, & de là $QZ = z - (y \cos\zeta - x \sin\zeta) \tang \eta$. Maintenant, tirant ZR perpendiculaire à PQR, elle sera perpendiculaire au plan proposé; & à cause de l'angle $ZQR = 90° - \eta$, on aura $ZR = QZ.$ $\sin ZQR = z \cos\eta - y \cos\zeta \sin\eta + x \sin\zeta \sin\eta$.

XVI. Or cette ligne ZR exprimant la distance du point Z au plan proposé, le moment du corps par rapport à ce plan, à cause des angles ζ & η constans, sera

$$\cos\eta . \int z\,dM - \cos\zeta \sin\eta \int y\,dM + \sin\zeta \sin\eta \int x\,dM$$

& puisque $\int x\,dM = Mf$, $\int y\,dM = Mg$, $\int z\,dM = Mh$, ce moment s'exprimera en sorte

$$Mh \cos\eta - Mg \cos\zeta \sin\eta + Mf \sin\zeta \sin\eta.$$

 Mais,

Mais, ſi nous menons du point I une perpendiculaire au plan propoſé OPQ, nous la trouverons par un ſemblable raiſonnement en employant les lettres f, g, h, au lieu de x, y, z, exprimée en ſorte

$$h \operatorname{cof} \eta - g \operatorname{cof} \zeta \sin \eta + f \sin \zeta \sin \eta$$

laquelle étant multipliée par la maſſe du corps M, donne un produit égal au moment du corps par rapport au plan propoſé OPQ.

XVII. Voilà donc cette vérité rigoureuſement démontrée; qu'il y a dans chaque corps un point de telle nature, que le moment du corps par rapport à un plan quelconque eſt toujours égal au produit de la maſſe du corps par la diſtance dudit point au même plan. Donc, pour trouver un tel moment, on peut toujours conſidérer toute la maſſe du corps comme réunie dans le centre d'inertie, puisqu' alors la maſſe multipliée par la diſtance de ce point au plan donne le moment du corps par rapport à ce plan. Comme la connoiſſance de ces momens eſt d'un très grand uſage dans la Mécanique, il eſt de la derniere importance de connoitre ce centre d'inertie de tous les corps, dont on veut rechercher les mouvemens; & c'eſt un article très eſſentiel qui appartient à la connoiſſance mécanique des corps.

XVIII. Si le plan auquel on veut rapporter le corps, paſſe par ſon centre d'inertie, le moment du corps par rapport à ce plan eſt $= o$. Ou bien le corps en eſt partagé en deux parties, dont les momens par rapport à ce plan ſont égaux. Donc, ſi l'on fait paſſer les trois plans AOB, AOC, BOC, que j'ai employés ci-deſſus pour cette recherche, par le centre d'inertie même du corps, de ſorte que ce centre ſe trouve au point O, les trois coordonnées $OX = x$. $XY = y$, $YZ = z$, qui déterminent le lieu de chaque élément du corps dM ſuppoſé en Z, ont cette propriété très remarquable, que

$$\int x\,dM = o; \qquad \int y\,dM = o, \qquad \int z\,dM = o.$$

C'eſt à dire, la ſomme de tous les produits de chaque élément du corps par chacune de ſes trois coordonnées ſe réduit à rien; ou bien, chacu-

chacune de ces trois ſommes contient autant de produits négatifs que d'affirmatifs. D'où l'on voit que le centre d'inertie ſe trouve au dedans du corps, qu'on peut nommer *le milieu mécanique du corps.*

XIX. C'eſt une verité auſſi importante que remarquable, qu'il y a dans chaque corps un tel point, que je nomme ſon centre d'inertie, & qui eſt d'ailleurs connu ſous le nom de ſon centre de gravité. Mais, puiſqu'il lui eſt également eſſentiel, quand même il n'y auroit point de gravité, & qu'il dépend uniquement de ſon inertie, cette raiſon étoit ſuffiſante pour en changer le nom. L'idée des momens auxquels le centre d'inertie ſe rapporte, a auſſi quelque choſe de ſingulier; puiſqu'en conſidérant les maſſes mêmes, il n'eſt pas poſſible d'aſſigner dans tous les corps un tel point, par lequel tous les plans tirés les partageroient en deux parties égales. Car, quoique trois plans, dont chacun diviſe le corps en deux parties égales, ſe croiſent dans un point, il ne s'enſuit pas que d'autres plans, qu'on feroit paſſer par le même point, diviſeroient auſſi le corps en deux parties égales, comme nous avons vu que cela arrive à l'égard des moments.

Le moment d'inertie d'un corps par rapport à une ligne.

XX. Tant que le mouvement d'un corps eſt progreſſif, ou que tous ſes élémens ſe meuvent à chaque inſtant avec des viteſſes égales ſelon la même direction, il n'y a que le centre d'inertie avec la maſſe du corps, qui entre dans la détermination de ſon mouvement, de quelque façon que la matiere ſoit diſtribuée par l'étendue du corps. Mais, quand le corps ſe meut en tournant autour d'un certain axe, il ne ſuffit pas qu'on ſache ſon centre d'inertie; il y a encore une rélation tout à fait particuliere dont la détermination du mouvement dépend. C'eſt ce que je nomme *le moment d'inertie du corps*, par rapport à l'axe, autour duquel le corps tourne, & qui eſt la ſomme de tous les produits qui réſultent en multipliant la maſſe de chaque élément du corps par le quarré de ſa diſtance à cet axe, ou bien à une ligne droite quelconque, qu'on regarde comme l'axe autour duquel le corps tourne.

XXI. Puisque chacun de ces produits élémentaires renferme le quarré d'une ligne, aucun ne sauroit jamais devenir négatif : & partant le moment d'inertie d'un corps par rapport à une ligne est toujours positif, & d'autant plus grand que la masse du corps est grande, & que ses parties sont éloignées de cette ligne. Il est donc nécessaire de connoitre tous les momens d'inertie d'un corps par rapport à toutes les lignes droites, autour desquelles il pourroit tourner: & partant on demande une méthode, par laquelle on puisse aisément trouver tous ces momens. Or, quoique le nombre de ces lignes soit infini, je ferai premierement voir, qu'il suffit d'avoir trouvé ces momens d'inertie par rapport aux lignes droites qui passent par le centre d'inertie du corps; ensuite, je montrerai qu'il suffit de connoitre seulement trois momens d'inertie par rapport à trois certaines lignes qui passent par son centre d'inertie, & que de ceux-ci il est ensuite fort aisé de conclure les momens d'inertie par rapport à toutes les lignes possibles, quelque position qu'elles ayent à l'égard du corps.

Fig. 3. XXII. Je dis donc premierement, que connoissant le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe ID, qui passe par son centre d'inertie I, il est aisé d'en trouver le moment d'inertie du même corps par rapport à une autre ligne droite OT, parallele à l'axe ID. Car, soit un élément du corps, dont la masse $= dM$ en Z, d'où l'on tire au plan IDOT la perpendiculaire ZY; & de Y la droite YXV, perpendiculaire aux lignes ID & OT. Qu'on nomme $IX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$, & puisque I est le centre d'inertie du corps, on aura, par ce que je viens de démontrer, $\int x\,dM = 0$, $\int y\,dM = 0$, & $\int z\,dM = 0$. Or la droite $XZ = \sqrt{(yy + zz)}$ marquant la distance de l'élément du corps dM en Z à l'axe ID, le moment d'inertie du corps par rapport à cet axe sera $= \int dM\,(yy + zz)$, en étendant cette intégrale par toute la masse du corps. Donc, la valeur de cette intégrale $\int dM\,(yy + zz)$ est supposée être connue.

XXIII. Soit maintenant la distance entre les deux lignes paralleles ID & OD, savoir l'intervalle $IO = XV = e$, & on aura la distance de l'élément du corps dM en Z à la ligne droite OT, qui sera ZV $= \sqrt{((e+y)^2 + zz)}$, à cause de VY $= e+y$. Donc, le moment d'inertie du corps par rapport à la ligne OT devient $= \int dM((e+y)^2 + zz) = \int dM(ee + 2ey + yy + zz) = \int ee\,dM + 2e\int y\,dM + \int dM(yy+zz)$. Or, posant la masse entiere du corps $= M$, on aura $\int ee\,dM = Mee$, & à cause de $\int y\,dM = 0$, le moment d'inertie du corps par rapport à la ligne OT étant $= Mee + \int dM(yy+zz)$, surpasse toujours le moment d'inertie par rapport à l'axe ID; & l'excès est égal au produit de la masse du corps M par le quarré ee de la distance entre les lignes ID & OT.

XXIV. De là on voit que si l'on considere les momens d'inertie d'un corps par rapport à une infinité de lignes, qui sont toutes paralleles entr'elles, le plus petit de tous ces momens sera toujours celui, qui répond à la ligne qui passe par le centre d'inertie du corps: ce qui est une proprieté bien remarquable de ce point. La recherche des momens d'inertie d'un corps se reduit donc aux seules lignes qui passent par son centre d'inertie, de sorte qu'ayant trouvé tous ces momens d'inertie, on en peut déduire aisément les momens d'inertie par rapport à toutes les lignes possibles. Car, quelque ligne qui puisse être proposée, on n'a qu'à lui tirer une parallele par le centre d'inertie, dont l'intervalle soit $= e$. Qu'on prenne ensuite le moment d'inertie par rapport à cette ligne tirée par le centre d'inertie, & qu'on y ajoute le produit Mee, pour avoir le moment d'inertie par rapport à la ligne proposée.

XXV. Mais la recherche des momens d'inertie par rapport à toutes les droites qui passent par le centre d'inertie du corps, demanderoit encore un travail infini, s'il n'y avoit point quelque rapport entr'eux, de sorte qu'en connoissant quelques uns, on en puisse déterminer les autres. Pour découvrir un tel rapport, considérons la chose en général, & supposons que nous connoissons les momens d'inertie d'un corps par rapport à trois axes IA, IB, IC, qui se croisent perpendiculairement entr'eux au centre d'inertie du corps I. Ensuite, Fig. 4.

voyons

voyons ce qu'il faudroit connoitre au delà pour déterminer le moment d'inertie du même corps par rapport à tout autre axe IF, qui passe aussi par le centre l'inertie I. Pour cet effet, soit un élément quelconque du corps, dont la masse $= dM$ en Z, d'où l'on tire au plan AIB la perpendiculaire ZY, & de Y à l'axe IA la perpendiculaire YX. Alors, nommant les coordonnées $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, je suppose qu'on connoisse à chaque point déterminé par ces coordonnées l'élément de masse dM qui s'y trouve.

XXVI. De là il est évident, que le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe IA sera $= \int dM(yy + zz)$ par rapport à l'axe $IB = \int dM(xx + zz)$, & par rapport à l'axe $IC = \int dM(xx + yy)$. Donc, posant les intégrales suivantes étendues par toute la substance du corps,

$$\int xx\,dM = A, \quad \int yy\,dM = B, \quad \int zz\,dM = C$$

les momens d'inertie seront déterminés ensorte :

Mom. d'inertie par rapport à l'axe $IA = B + C$

Mom. d'inertie par rapport à l'axe $IB = A + C$

Mom. d'inertie par rapport à l'axe $IC = A + B$

d'où nous connoissons d'abord cette belle propriété, que chacun de ces trois momens d'inertie est plus petit que la somme des deux autres, puisque les quantités A, B, C, sont nécessairement positives.

XXVII. Pour la position d'un autre axe quelconque IF, qui passe aussi par le centre d'inertie I, qu'on conçoive un plan perpendiculaire au plan ABC, dans lequel se trouve cet axe IF, l'intersection avec le plan ABC étant la droite IE, & soient les angles $AIE = \eta$, $EIF = \theta$. Qu'on mene de Y à la droite IE la perpendiculaire YP, & on aura $IP = x\cos\eta + y\sin\eta$, & $PY = y\cos\eta - x\sin\eta$. Qu'on tire de P la droite PK parallele & égale à $YZ = z$, laquelle se trouvera dans le plan EIF, & coupera la droite IF quelquepart en Q, de sorte que

PQ

$$PQ = IP.\ \mathrm{tang}\,\theta = (x\cos\eta + y\sin\eta)\,\mathrm{tang}\,\theta \quad \&$$
$$IQ = IP : \cos\theta = (x\cos\eta + y\sin\eta) : \cos\theta$$

donc $QR = z - (x\cos\eta + y\sin\eta)\,\mathrm{tang}\,\theta$.

Baiſſons enfin de R ſur IF la perpendiculaire RS, & puiſque l'angle $QRS = FIE = \theta$, nous aurons,

$$RS = QR\,\cos\theta = z\cos\theta - (x\cos\eta + y\sin\eta)\sin\theta, \quad \&$$
$$QS = QR\,\sin\theta = z\sin\theta - (x\cos\eta + y\sin\eta)\sin\theta^2 : \cos\theta.$$

Ajoûtons y $IQ = (x\cos\eta + y\sin\eta) : \cos\theta$, & à cauſe de $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta^2}{\cos\theta} = \cos\theta$, nous obtiendrons :

$$IS = z\sin\theta + (x\cos\eta - y\sin\eta)\cos\theta.$$

XXVIII. Maintenant ces trois lignes

$$IS = z\sin\theta + (x\cos\eta + y\sin\eta)\cos\theta$$
$$SR = z\cos\theta - (x\cos\eta + y\sin\eta)\sin\theta$$
$$RZ = PY = y\cos\eta - x\sin\eta$$

étant perpendiculaires entr'elles, & paralleles à des directions fixes, dont l'une eſt le nouvel axe IF, une autre perpendiculaire à IE dans le plan AIB, & la troiſième perpendiculaire aux deux autres, & partant auſſi donnée; on les peut regarder comme trois autres coordonnées paralleles à trois autres axes perpendiculaires entr'eux. De là la droite ZS exprimant la diſtance du point Z à l'axe IF, le moment d'inertie du corps par rapport à cet axe ſera

$$\int dM(RZ^2 + SR^2) = \int dM((y\cos\eta - x\sin\eta)^2 + (z\cos\theta - (x\cos\eta + y\sin\eta)\sin\theta)^2)$$

qui ſe reduit à cette forme

$$\int dM \left\{ \begin{array}{l} + xx\sin\eta^2 + yy\cos\eta^2 + zz\cos\theta^2 - 2xy\sin\eta\cos\eta - 2xz\cos\eta\sin\theta\cos\theta - 2yz\sin\eta\sin\theta\cos\theta \\ + xx\cos\eta^2\sin\theta^2 + yy\sin\eta^2\sin\theta^2 \quad + 2xy\sin\eta\cos\eta\sin\theta^2 \end{array} \right\}$$

XXIX.

XXIX. Ayant supposé $\int xx\,dM = A$, $\int yy\,dM = B$, $\int zz\,dM = C$, si nous supposons de plus les intégrales suivantes prises par toute l'étendue du corps: $\int yz\,dM = D$; $\int xz\,dM = E$; $\int xy\,dM = F$ le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe IF sera

$$A(\sin\eta^2 + \cos\eta^2 \sin\theta^2) + B(\cos\eta^2 + \sin\eta^2 \sin\theta^2) - C\cos\theta^2 - 2D\sin\eta\sin\theta\cos\theta - 2E\cos\eta\sin\theta\cos\theta - 2F\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2$$

Donc, si nous savions, outre les moments d'inertie par rapport aux axes IA, IB, IC, encore les valeurs des intégrales D, E, F, nous serions en état d'assigner le moment d'inertie du corps par rapport à tout autre axe IF tiré par le centre d'inertie, & partant aussi par rapport à toutes les lignes droites.

XXX. Mais, pour rendre cette méthode encore plus simple, & pour éclaircir mieux la théorie des momens d'inertie, il est bon de considérer plus en détail les momens d'inertie par rapport à tous les axes tirés par le centre d'inertie. Et d'abord, je remarque, puisqu' aucun de ces momens ne sauroit devenir infini, ni évanouir, qu'il doit y avoir parmi eux tant un plus grand qu'un plus petit; & il est important de connoitre parmi cette infinité d'axes celui auquel répond le moment le plus grand, de même que le plus petit. Ensuite, en réfléchissant sur l'usage dans la Mécanique, on sait que le corps ne sauroit tourner librement, qu'autour d'un tel axe, par rapport auquel toutes les forces centrifuges des élémens du corps se détruisent mutuellement. Or l'une & l'autre de ces deux conditions reviennent au même; ce qui est encore une très remarquable proprieté dans la théorie des momens d'inertie.

XXXI. Pour prouver cette belle harmonie, cherchons premierement quelle position doit avoir l'axe IF, afin que le moment d'inertie qui lui répond soit, ou le plus grand, ou le plus petit. Pour cet effet, on n'a qu'à différentier la formule trouvée pour le moment d'inertie par rapport à l'axe IF, en supposant les angles η & θ variables, & à egaler les différentiels à zero: Or la variabilité de l'angle η nous fournit cette équation:

$$2A(\sin\eta\cos\eta - \sin\eta\cos\eta\sin\theta^2) + 2B(\sin\eta\cos\eta\sin\theta^2 - \sin\eta\cos\eta)$$
$$-2D\cos\eta\sin\theta\cos\theta + 2E\sin\eta\sin\theta\cos\theta - 2F(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)\cos\theta^2 = 0$$

qui se réduit à cette forme:

$$A\sin\eta c\eta c\theta^2 - B\sin\eta c\eta c\theta^2 - D c\eta\sin\theta c\theta + E\sin\eta\sin\theta c\theta - F(c\eta^2 - \sin\eta^2)c\theta^2 = 0$$

Mais la variabilité de l'angle θ donne cette équation

$$2A\cos\eta^2\sin\theta\cos\theta + 2B\sin\eta^2\sin\theta\cos\theta - 2C\sin\theta\cos\theta - 2D\sin\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2)$$
$$-2E\cos\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) + 4F\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta = 0$$

ou bien celle-ci:

$$A\cos\eta^2\sin\theta\cos\theta + B\sin\eta^2\sin\theta\cos\theta - C\sin\theta\cos\theta - D\sin\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2)$$
$$-E\cos\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) + 2F\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta = 0$$

De ces deux équations on déterminera les deux angles η & θ, & partant la position de l'axe IF, par rapport auquel le moment d'inertie est, ou le plus grand, ou le plus petit.

XXXII. Voyons maintenant, aussi quelle doit être la position de l'axe IF, afin que le corps puisse tourner librement autour de lui, ou que les forces centrifuges des élémens du corps se détruisent mutuellement. On sait que la force centrifuge de l'élément dM en Z est proportionnelle au produit de sa masse dM par la distance ZS de l'axe IF, ou bien à $ZS.\,dM$, & qu'elle agit selon la direction SZ. Décomposons cette force selon les directions SR, & RZ. & nous aurons la force selon $SR = SR.\,dM$, & selon $RZ = RZ.\,dM$. Ces deux forces étant en deux plans fixes, il faut que les unes & les autres se détruisent séparément, & non seulement les forces mêmes, mais aussi leurs moments. Or, puisque $SR = z\cos\theta - (x\cos\eta + y\sin\eta)\sin\theta$ & $RZ = PY = y\cos\eta - x\sin\eta$, il est évident qu'il y aura, tant $\int SR.\,dM = 0$, que $\int RZ.\,dM = 0$ puisque nous avons déjà, par la condition du centre d'inertie I, $\int x\,dM = 0$, $\int y\,dM = 0$, $\int z\,dM = 0$.

XXXIII. Il reſte donc que les momens auſſi de ces doubles forces ſe détruiſent mutuellement. Rapportons ces momens au point fixe I, ou multiplions les forces trouvées & appliquées au point S par la diſtance $IS = z \sin\theta + (x \cos\eta + y \sin\eta) \cos\theta$, & il faudra qu'il provienne tant $\int SR.\,IS.\,dM = 0$ que $\int RZ.\,IS.\,dM = 0$. Voilà donc deux équations pour la détermination de l'axe IF, qui, en ſubſtituant les valeurs aſſignées, ſeront

$$d\left\{\begin{array}{r} zz\,\mathrm{sn}\theta\,\mathrm{cs}\theta - xx\,\mathrm{cs}\eta^2\,\mathrm{sn}\theta\,\mathrm{cs}\theta - yy\,\mathrm{sn}\eta^2\,\mathrm{sn}\theta\,\mathrm{cs}\theta + xz\,\mathrm{cs}\eta\,\mathrm{cs}\theta^2 + yz\,\mathrm{sn}\eta\,\mathrm{cs}\theta^2 - 2xy\,\mathrm{sn}\eta\,\mathrm{cs}\eta\,\mathrm{sn}\theta\,\mathrm{cs}\theta \\ - xz\,\mathrm{cs}\eta\,\mathrm{sn}\theta^2 - yz\,\mathrm{sn}\eta\,\mathrm{sn}\theta^2 \end{array}\right\} = 0$$

&

$$dM\left\{\begin{array}{r} -xx\,\mathrm{sn}\eta\,\mathrm{cs}\eta\,\mathrm{cs}\theta + yy\,\mathrm{sn}\eta\,\mathrm{cs}\eta\,\mathrm{cs}\theta - xz\,\mathrm{sn}\eta\,\mathrm{sn}\theta + yz\,\mathrm{cs}\eta\,\sin\theta + xy\cos\eta^2\cos\theta \\ -xy\sin\eta^2\cos\theta \end{array}\right\} = 0$$

Il faut étendre ces deux intégrales par toute la ſubſtance du corps pour avoir deux équations finies, d'où l'on puiſſe déterminer les deux angles η & θ.

XXXIV. Puiſque les angles η & θ ſont conſtans, nous n'avons qu'à mettre pour les formules intégrales $\int xx\,dM$, $\int yy\,dM$, &c. les valeurs ſuppoſés, & nous obtiendrons ces deux équations finies:

$$-A\cos\eta^2 \sin\theta \cos\theta - B \sin\eta^2 \sin\theta \cos\theta + C \sin\theta \cos\theta$$
$$+D\sin\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) + E\cos\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) - 2F\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta = 0$$
$$-A\,\mathrm{sn}\eta\,\mathrm{cs}\eta\,\mathrm{cs}\theta + B\,\mathrm{sn}\eta\,\mathrm{cs}\eta\,\mathrm{cs}\theta + D\,\mathrm{cs}\eta\,\mathrm{sn}\theta - E\,\mathrm{sn}\eta\,\mathrm{sn}\theta + F(\mathrm{cs}\eta^2 - \mathrm{sn}\eta^2)\,\mathrm{cs}\theta = 0,$$

lesquelles conviennent parfaitement avec les deux équations trouvées ci-deſſus. Donc les axes, autour deſquels un corps peut tourner librement, ont en même tems cette belle propriété que, par rapport à eux, le moment d'inertie du corps eſt, ou un plus grand, ou un plus petit. Il eſt donc de la derniere importance de connoitre ces axes dans chaque corps; & je les diſtinguerai des autres par le titre d'*axes principaux du corps.*

Les axes principaux des corps.

XXXV. Les axes principaux d'un corps ſont donc de certaines lignes droites, qui paſſent par le centre d'inertie du corps, autour desquelles le corps peut tourner librement, de ſorte que les forces centrifuges des élémens du corps ſe détruiſent mutuellement; & qui ont encore en même tems cette belle propriété, que les momens d'inertie par rapport à ces axes ſont, ou un *maximum*, ou un *minimum*. Par cette derniere propriété on comprend qu'il y a dans chaque corps au moins deux axes principaux; car, puisque de tous les momens d'inertie rapportés à des axes qui paſſent par le centre d'inertie, aucun ne ſauroit devenir, ni infini, ni évanouiſſant; il faut bien, que parmi eux il y en ait un, qui ſoit le plus grand, & un qui ſoit le plus petit. Mais on verra dans la ſuite, qu'il y a effectivement dans chaque corps trois axes principaux, qui ſe croiſent au centre d'inertie à angles droits; ce qui eſt une propriété auſſi remarquable, que celle que nous venons d'obſerver.

XXXVI. Donc, pour trouver les axes principaux d'un corps, nous n'avons qu'à réſoudre les deux équations, auxquelles nous avons été conduits par l'une & l'autre conſidération, & à en déterminer les deux angles $AIE = \eta$ & $EIF = \theta$, en regardant les ſix intégrales comme connues:

$$\int xx\,dM = A;\ \int yy\,dM = B,\ \int zz\,dM = C;\ \int yz\,dM = D,\ \int xz\,dM = E,\ \int xy\,dM = F$$

Or nos deux équations à réſoudre ſont:

$$\text{I.}\quad (A-B)\sin\eta\cos\eta\cos\theta - (D\cos\eta - E\sin\eta)\sin\theta - F(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)\cos\theta = 0$$

$$\text{II.}\quad (A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2)\sin\theta\cos\theta - C\sin\theta\cos\theta - (D\sin\eta + E\cos\eta)(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) + 2F\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta = 0.$$

dont celle-ci, à cauſe de $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ & $\cos\theta^2 - \sin\theta^2 = \cos 2\theta$, ſe réduit à cette forme:

$$\text{II.}\quad (A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2)\sin 2\theta - C\sin 2\theta - 2(D\sin + E\cos\eta)\cos 2\theta + 2F\sin\eta\cos\eta\sin 2\theta = 0$$

La premiere donne d'abord la tangente de l'angle θ

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{(A-B)\sin\eta\cos\eta - F(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)}{D\cos\eta - E\sin\eta}$$

 &

& la seconde la tangente du double angle:

$$\operatorname{tang} 2\,\theta = \frac{2\,D \sin\eta + 2\,E \cos\eta}{A \cos\eta^2 + B \sin\eta^2 - C + 2\,F \sin\eta \cos\eta}.$$

XXXVII. Or, puisque $\operatorname{tang}\theta - \cot\theta + 2\cot 2\,\theta = 0$, nous en tirons cette équation:

$$\frac{(A-B)\sin\eta\cos\eta - F(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)}{D\cos\eta - E\sin\eta} - \frac{D\cos\eta + E\sin\eta}{(A-B)\sin\eta\cos\eta - F(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)}$$

$$+ \frac{A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2 - C + 2\,F\sin\eta\cos\eta}{D\sin\eta + \cos\eta} = 0$$

& joignant le premier & dernier membre ensemble, on trouve

$$\frac{(AD-CD-EF)\cos\eta + (DF-BE+CE)\sin\eta}{(D\cos\eta - E\sin\eta)(D\sin\eta + E\cos\eta)} - \frac{D\cos\eta + E\sin\eta}{(A-B)\sin\eta\cos\eta - F\cos\eta^2 + F\sin\eta^2} = 0$$

& posant $\operatorname{tang}\eta = t$ il en résulte cette équation cubique:

$$t^3(DFF-DEE+(C-B)EF) - tt(E^3-2DDE+EFF+(B+C-2A)DF+(A-B)(B-C)E)$$
$$-t(D^3-2DEE+DFF+(A+C-2B)EF+(A-B)(C-A)D) + EFF-DDE+(C-A)DF = 0$$

dont la racine donne la tangente de l'angle η. De là on trouvera aussi l'angle θ, & partant la position de l'axe IF sera déterminée.

XXXVIII. Puisque cette équation cubique:

$$\begin{aligned}
&+ (DFF - DEE + (C-B)EF)\,t^3 \\
&- (EFF + E^3 - 2DDE + (B+C-2A)DF + (B-A)(C-B)E)\,tt \\
&- (DFF + D^3 - 2DEE + (A+C-2B)EF + (A-B)(C-A)D)\,t \\
&+ EFF - DDE + (C-A)DF = 0
\end{aligned}$$

a certainement une racine réelle, on en trouve un axe principal: pour les deux autres racines, il ne paroit pas de l'équation, si elles sont réelles, ou imaginaires. Mais, puisque nous savons déjà qu'il doit y avoir au moins deux axes principaux, cette équation aura nécessairement

ment plus qu'une racine réelle. D'où il eſt certain que toutes les racines ſont réelles ; & puisque chacune indique un axe principal, il s'enſuit, qu'il ſe trouve dans tout corps trois axes principaux.

XXXIX. Mais, ayant trouvé un axe principal par la méthode précédente, il ſera fort aiſé de trouver les deux autres par la méthode ſuivante. Soit IA cet axe principal, qu'on aura déjà trouvé, & qu'on en prenne à volonté deux autres IB & IC, qui ſoient tant entr'eux qu'au premier IA perpendiculaires, pour y rapporter les élémens du corps par les trois coordonnées $IX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$. Soit encore $\int xx\,dM = A$, $\int yy\,dM = B$ & $\int zz\,dM = C$, où il ne faut pas confondre ces lettres avec celles, que nous avons employées dans la recherche précédente. Maintenant, puisque IA eſt un axe principal, & que les forces centrifuges ſe détruiſent mutuellement, lorsque le corps tourne autour de cet axe, il faut que les intégrales $\int yx\,dM$ & $\int xz\,dM$ évanouiſſent. Donc, dans les intégrations précédentes, nous aurons $E = 0$ & $F = 0$; mais la formule $\int yz\,dM = D$ pourra encore avoir une valeur finie. Fig. 4.

XL. Suppoſant donc que IA eſt un axe principal du corps, ſoit IF un autre axe principal; & poſant, pour en trouver la poſition, les angles $AIE = \eta$ & $EIF = \theta$, nous aurons par le même calcul dont nous nous ſommes ſervi ci-deſſus, à cauſe de $E = 0$ & $F = 0$, ces équations :

I. $(A - B)\sin\eta\cos\eta\cos\theta - D\cos\eta\sin\theta = 0$

II. $(A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2)\sin\theta\cos\theta - C\sin\theta\cos\theta - D\sin\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) = 0$

dont la premiere donne, ou $\cos\eta = 0$, ou $\tang\theta = \frac{(A - B)\sin\eta}{D}$.

Or cette derniere valeur étant ſubſtituée dans l'autre équation, en produit une, qui étant diviſible par $D\sin\eta$ donne $(A-B)(A-C)-DD = 0$ qui ne détermine rien. Il faut donc qu'il ſoit, ou $\sin\eta = 0$ ou $\cos\eta = 0$. Mais la valeur $\sin\eta = 0$ donne auſſi $\tang\theta = 0$;

ce qui conduit au même axe IA déjà connue. Il ne reſte donc que la valeur $\cos\eta = 0$, d'où l'angle AIE devient droit.

XLI. Il eſt donc clair que, pour que l'axe IF ſoit auſſi principal, l'angle AIE doit être droit, ou $\eta = 90°$; ce qui montre, que l'autre axe principal IF eſt perpendiculaire à l'axe connu IA. Or, poſant $\eta = 90°$, l'autre équation qui devient $(B-C)\,\mathrm{ſn}\,\theta\,\mathrm{cſ}\,\theta - D(\mathrm{cſ}\,\theta - \mathrm{ſn}\,\theta^2) = 0$ donne $\operatorname{tang} 2\,\theta = \frac{2D}{B - C}$. Cette équation fournit une double valeur pour l'angle θ; car, ſi l'une eſt $\theta = \zeta$, l'autre ſera $\theta = \zeta + 90°$: de ſorte que voilà en tout trois axes principaux qui ſont perpendiculaires entr'eux. C'eſt bien un paradoxe, puisque la condition du plus grand & plus petit ſemble ne devoir donner que deux axes principaux, à l'un desquels réponde le plus grand, & à l'autre le plus petit moment d'inertie. Mais on ſait que la méthode des plus grands & plus petits donne ſouvent auſſi des cas, qui ne ſont, ni l'un, ni l'autre; pourvu que les changemens élémentaires y évanouiſſent; & c'eſt ici préciſément le cas.

XLII. Voilà donc une vérité bien importante, qui eſt, que dans chaque corps il y a trois axes principaux, qui ſe croiſent à angles droits dans le centre d'inertie. Ces axes principaux ont une double propriété fort remarquable; l'une, que le corps peut tourner librement autour de chacun d'eux; l'autre, que des momens d'inertie par rapport à ces trois axes, un eſt le plus grand, un autre le plus petit de tous les poſſibles, & le troiſième tient un tel milieu entre les deux autres, que, quoiqu'on change l'axe infiniment peu, le changement qui en réſulte dans le moment d'inertie, évanouïſſe. Cependant il peut arriver que deux axes deviennent indefinis, auquel cas tous les axes ſitués dans leur plan peuvent être également cenſés principaux; comme ii dans la formule $\operatorname{tang} 2\,\theta = \frac{2D}{B - C}$, devenoit & $D = 0$ & $B = C$. Car alors l'angle θ pourroit être pris à volonté. Il peut même auſſi arriver que toutes les lignes tirées par le centre d'inertie

acquier-

acquierrent la propriété des axes principaux, comme dans un globe homogene.

Les trois momens d'inertie principaux.

XLIII. Ayant expliqué la méthode de déterminer les trois axes principaux de chaque corps, on les peut regarder comme connus dans la Mécanique, de même que les momens d'inertie par rapport à ces axes, que je nommerai *les trois momens principaux d'un corps.* Et alors on ſera en état d'entreprendre les plus profondes recherches, dont on ne ſauroit ſurmonter les obſtacles ſans ce ſecours. Puisque les trois axes principaux ſont perpendiculaires entr'eux, il ſera bon de les employer au lieu des trois directrices, auxquelles on rapporte les élémens du corps par le moyen de trois coordonnées qui leur ſont paralleles. Soient donc pour un corps quelconque les droites IA, IB & IC, ſes trois axes principaux, auxquels ſoient paralleles les coordonnées $IX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$, qui déterminent la poſition de l'élément dM ſitué en Z; & on pourra regarder cet élément comme connu à l'égard des trois coordonnées x, y, z, auxquelles il eſt rapporté.

XLIV. Puisque les lignes IA, IB, IC, ſont les axes principaux du corps, les intégrales $\int yz\,dM$, $\int xz\,dM$, $\int xy\,dM$ évanouïſſent, ou l'on aura dans les formules ſupérieures $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$, de ſorte que les trois autres $\int xx\,dM = A$, $\int yy\,dM = B$, & $\int zz\,dM = C$ demeurent ſeulement dans le calcul. Or, poſant la maſſe du corps $= M$, ſoient ſes momens d'inertie principaux par rapport à l'axe $IA = Maa$, à l'axe $IB = Mbb$, & à l'axe $IC = Mcc$; & on aura par les intégrales

$$Maa = B + C; \quad Mbb = A + C; \quad Mcc = A - B$$

& partant réciproquement :

$$A = \tfrac{1}{2}M(bb + cc - aa),\ B = \tfrac{1}{2}M(aa + cc - bb);\ C = \tfrac{1}{2}M(aa + bb - cc)$$

De

De là le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque IF déterminé par les angles $AIS = \eta$ & $EIF = \theta$ sera par le §. 29.

$$\tfrac{1}{2}M(bb + cc - aa)(\sin\eta^2 + \cos\eta^2 \sin\theta^2) + \tfrac{1}{2}M(aa + cc - bb)(\cos\eta^2 + \sin\eta^2 \sin\theta^2)$$
$$+ \tfrac{1}{2}M(aa + bb - cc)\cos\theta^2$$

qui se réduit à cette forme plus simple,

$$Maa \cos\eta^2 \cos\theta^2 + Mbb \sin\eta^2 \cos\theta^2 + Mcc \sin\theta^2$$

XLV. Ayant donc trouvé les trois momens d'inertie principaux Maa, Mbb, & Mcc, d'un corps, il est fort aisé d'en déterminer le moment d'inertie par rapport à tout autre axe quelconque IF, tiré par le centre d'inertie. Et pour rendre cette détermination plus évidente, j'observe que $\cos\eta \cos\theta$ exprime le cosinus de l'angle, que fait l'axe IF avec le principal IA. De même $\sin\eta \cos\theta$ exprime le cosinus de l'angle, que fait l'axe IF avec le principal IB; & $\sin\theta$ le cosinus de l'angle que fait l'axe IF avec le principal IC. Donc, si nous posons les angles $AIF = \alpha$; $BIF = \beta$: $CIF = \gamma$, que fait l'axe IF avec les trois axes principaux IA, IB, IC par rapport auxquels les momens d'inertie sont supposés Maa, Mbb, Mcc, le moment d'inertie par rapport à l'axe IF est $= Maa\cos\alpha^2 + Mbb\cos\beta^2 + Mcc\cos\gamma^2$. Où il faut remarquer que $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$, puisque $\cos\alpha = \cos\eta \cos\theta$, $\cos\beta = \sin\eta \cos\theta$ & $\cos\gamma = \sin\theta$. Donc, si Maa est le plus grand, Mcc le plus petit, & Mbb le moyen moment principal; le moment d'inertie par rapport à l'axe IF sera $= Maa - M(aa - bb)\cos\beta^2 - M(aa - cc)\cos\gamma^2$, & partant moindre que Maa, ou $= Mcc + M(aa - cc)\cos\alpha^2 + M(aa - bb)\cos\beta^2$, & partant plus grand que Mcc.

XLVI. Ensuite, on peut aussi voir combien il s'en faut, qu'un axe quelconque IF n'ait la propriété d'un axe principal. Car, pour qu'il fût tel, il faudroit qu'il fût tant $\int SR.\ IS.\ dM = 0$, que $\int RZ.\ IS.\ dM = 0$. Or, à cause de $D = 0$. $E = 0$. $F = 0$, nous avons par le §. XXXIV.

$\int SR.$

$$\int SR.\ IS.\ dM = (C - A\cos\eta^2 - B\sin\eta^2)\sin\theta\cos\theta \ \&$$

$$\int RZ.\ IS.\ dM = (B - A)\sin\eta\cos\eta\cos\theta,$$

& substituant pour A, B, C, les valeurs des momens principaux,

$$\int SR.IS.\,dM = M(aa\cos\eta^2 + bb\sin\eta^2 - cc)\sin\theta\cos\theta = M((aa-cc)\cos\alpha^2 + (bb-cc)\cos\beta^2)\cdot\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

$$\int RZ.\ IS.\ dM = M(aa - bb)\sin\eta\cos\eta\cos\theta = M(aa - bb)\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\gamma}$$

D'où l'on voit, que, si les trois momens principaux sont égaux entr'eux, ou $aa = bb = cc$, toutes les lignes IF auront la propriété des axes principaux. Mais, s'ils sont inégaux entr'eux, il n'y a que les trois axes principaux IA, IB & IC.

XLVII. Si deux momens principaux sont égaux entr'eux, savoir $M\,bb = M\,aa$, l'axe IF aura la propriété d'un axe principal, pourvu qu'il y ait $\cos\gamma = 0$ ou $\theta = 0$. Dans le cas donc que les momens d'inertie des deux axes principaux IA & IB sont égaux entr'eux, toute ligne IE tirée du centre d'inertie I dans le plan AIB aura la propriété d'un axe principal; & à cause de $\cos\gamma = 0$ & $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 = 1$, le moment d'inertie par rapport à toutes les lignes IE sera $= M\,aa = M\,bb$. Il en est de même si deux autres momens d'inertie principaux sont égaux entr'eux; & toute autre ligne tirée de I dans le plan de ces deux axes principaux aura le même moment d'inertie, & la propriété d'un axe principal. Il y a donc dans ces cas une infinité d'axes principaux. Or, dans le cas où tous les trois moments d'inertie principaux sont égaux entr'eux, toutes les lignes tirées du centre d'inertie seront des axes principaux.