

THEOKIA MOTVS

CORPORVM

SOLIDORVM SEV RIGIDORVM

PRIMIS NOSTRAE COGNITIONIS PRINCIPIS

STABILITA

ET AD OMNES MOTVS;
QVI IN HVIVSMODI CORPORA CADERE POSSVNT,
ACCOMMODATA.

MISSING
PAGES
ARE
BLANK

LEONH. EVLERO

ACADEMIAE REGIAE SCIENT. BORVSSICAE DIRECTORE
ACADEMIAE IMPER. PETROPOL. SOCIO HONORARIO
ET ACADEMIARVM SCIENT. REGIARVM PARISINAE
ET LONDINENSIS MEMBRO.

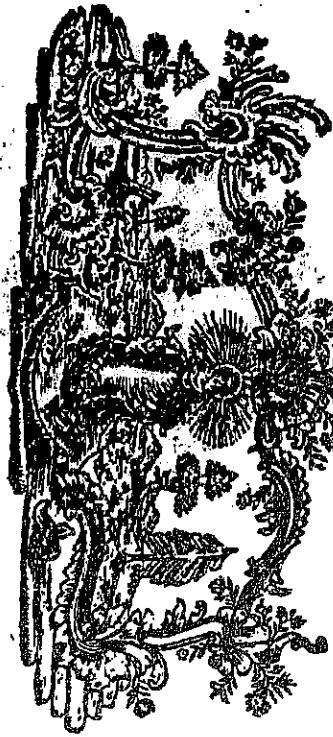
AVCTORE



ROSTOCHII ET GYRPHUS VMLDIE
LITTERIS ET IMPENSIS A. F. KUSE, MDCLXV

Reproduced from poor original
No better copy available

PRAEFATIO.



Q[uod] uae fuit virr PERITVSTRIS, LEON-
HARDI EVERETT in univerſam Matheſin
merita, longa hic enumeraſe oiaſione, ac
imprimis eum, in quo edendo curam &
operam posui, de nouo corporum rigidorum tractatum,
multis commendare verbiſ, licet haud incongruum nec a
lupo prologi alienum esse videatur; ſuperfedere tamen hoc
negotio me poſſe arbitror, cum tanta & tot eximia PERILL.
AVCTORIS inventa, quibus omnes fere Matheſeos partes ad
ſumnum extulit perfectionis fastigium, per univerſum orbem
eruditum celebratilima omnem exſuperent laudem. In eo
itaque solo occupatus ero, ut brevibus integri hujus operis
ſumma reſenſeam, ac ea præcipue capta ſuccinctius ex-
ponam,

Col.

PRAEFATIO.

ponam, quae lectori in evolvendo hoc scripto ac ratiocinio-
rum filo detergendo utilia esse ac operam sublevare posse mi-
hi visa sunt.

Corporis finitiae extensionis motus non impotescit, nisi
causa est, cur principia motus corporum, ut puncta confi-
deratorum, abstrahendo ab eorundem extensione, prius
fint stabilenda, quam negotium debet in corpus corporum finitiae
magnitudinis evolvendi suscipi queat. Explicata jam est
theoria de motu punctorum a cer. Eulerio in *Mechanica*
sive motus Scientiae analytice expositae Tomo I. & II. quod opus
abolutissimum A. 1736 Petropoli ex typographia Acad-
emiae Scientiarum prodit. Promiserat hinc CLAR. AVCTOR,
operi huic subjungere tractatum de motu corporum finitorum
& primo quidem rigidorum, pari methodo contorribendum.
Ac licet hoc argumentum tam arduum & antehac tam parum

tractatum maximis implicatum invenire difficultibus; fe-

lici tamen successu tandem omnia vicit impedimenta ac pror-
sus novam fere elaboravit scientiam, cuius principia, qualia-
cunque licet antea fuerint cognita, ad tantam ab ipso pro-
mota sunt universalitatem, ut nihil amplius in hac Mechanices
parte desiderandum reliquerit. Quin quod vix expfan-
dum erat, abstrusissima haec inventa mira exposuit evidencia
non tantum sed & perspicuitate, ita ut Artis peritis non tan-
tum adhuc ad mystera in hoc libro recordita pateat, sed &
idem opus iis erudiendis inservire queat, qui in analysi jam
fatis

PRAEFATIO.

fatis exercitati Mechanics studio primam admovent manu.
In horum praecipue gratiam hic tractatus non tantum instar
Tomi III. Mechanics duobus iam tomis comprehensa con-
scriptus est; sed simul praemissa est a celest. AVCTOR E *In-
troduc^{tio}*, universae Mechanics fundamenta, prima nimurum
de motu punctorum principia, methodo plane nova, priore
faciliori concinniori & evidentiori sistens evoluta. Integrum
itaque opus perlustrari potest sine ullo subsidio principiorum
in prioribus de Mechanica libris expositorum, quorum tameu
lectio ideo non negligenda, sed potius omnibus commendan-
da est, qui principiorum de motu punctorum generalium ap-
plicationem ad solutiones problematum specialium fibi red-
dere cupiunt familiarem. Sed operae pretium esse arbitror,
ut sic cinctius exponam, quae sit methodi in Introduc^{tio}
huic operi praemissa usurpatae a methodo priorum de Mech-
anica librorum differentia.

Effectus potentiarum, quibus mobile sollicitatur, alias
duobus principiis comprehendendi solet, quorum altero defini-
tur, quantum celeritas mobilis immutetur. altero autem,
quantum eius directio infleatur. Eandem methodum effe-
ctus virium exprimenti secutus est cel. AVCTOR in prioribus
libris de Mechanica, sique omnes quaestiones de motu pun-
ctorum felici successu dedit solutas. Quando autem corpo-
rum finitorum motus perpenditur; binorum istorum princi-
piorum applicatio plurimis subiecta est difficultibus, atque
haec causa fuit, cur loco binorum istorum principiorum jam

PRAEFATIO.

non nisi unico, aequatione $\frac{dc}{dt} = \eta p dt$ comprehenso, utatur in hoc de motu corporum rigidorum tractatu, admissum simul hoc artificio, ut motus securidum datas directiones reficiatur, ad easdemque directiones resolutio virium sollicitantium insituatur, ubi cognitio celeritatum lateraliū simul motus directionem atque inflexionem in se complectiuntur. Methodus haec nititur more in Geometria usitato naturam linearum curvarum per binas vel ternas coordinatas exprimendi. Verum cum in Geometria etiam saepe linea curvae ad punctum aliquod fixum referuntur non sine egregio calculi compendio; eodem quoque modo motus evolutio explicatur, idque non solum, cum motus in eodem absolvitur plane, sed etiam, si mobile extra planum vagatur. Hoc modo uti fident Astronomi, dum motus planetarum respectu aliquius puncti per angulos circa id descriptos distantiasque ab eodem definiti, ubi si motus non fiat in eodem plane, inituper lineam nodorum cum inclinatione orbite ad certum planum contemplantur. Quare cum hoc quoque in prioribus libris desiderari possit, quod ea methodus, qua nunc quidem corporum coelestium motus ad calculum revocari solet, ibi non sit exposita, ea in hoc opere accuratius explicata legitur. Quod denique admodum, aequationes motuum corporum definites ad mensuras absolutas revocandi, hic quoque commodiore usus est C.R. AVCTOR, quam in praecedentibus libris, ubi quidem celeritates per radicem quadratam ex altitudinibus, per quas grave cadendo pares accquireret

PRAEFATIO.

quareret celeritates, exprimebatur, quo nimurum efficitur, ut in formula generali $\frac{dc}{dt} = \eta p dt$ constanti η valor \pm tributus sit. Verum ex altitudine celeritati debita ipsa celeritas tam perpicue cognoscitur, sed calculo quodam opus est, ut ad mensuras solitas reducatur. Deinde etiam temporis ratio peculiari calculo egit, quo nova quaedam unitas in calculum introduci debet, ut tempus in minutis secundis eliciatur. Quod si vero, uti alias commodissime fieri solet, celeritates per spatium uno minuto secundo uniformiter percutiunt, & tempora in minutis secundis exprimantur, eadem experimenta, quibus superior modus consonante η definiendi innititur, ostendunt, esse hunc numerum η aequalem duplae altitudini, ex qua gravitate primo minuto secundo libere delabitur. Quare relata priore methodo haud paucas ambagies evitavit PERRILL. AVCTOR, hoc ultimo modo multo facilior & simpliciore in Introduktionē exposto, & in toto frequente opere retepto.

Expositis hisce principiis generalibus transt CLAR. AVCTOR ad motus corporum finitae extensis considerandos, & quidem eiusmodi corporum, quorum structura partium quæ nexus a viribus sollicitantibus non mutari potest, quae rigidorum nomine ab aliis distinguuntur, quorum structura tot roboris non habet, ut virium sollicitantium actioni resistere valeat. Partes itaque taliusmodi corporis easdem permanent durante motu a se invicem distantias servant, nec corpus rigidum alium motum recipere potest, nisi quo haec con-

PRAEFATIO.

PRAEFATIO.

conditio salva manet: alias ad alia corporum classem est referendum, quorum motus hic non definitur. Niilo tamen minus ejusmodi corpus infinitorum motuum est capax. Inter omnes hos motus is est simplicissimus, quo singula corporis puncta secundum directiones inter se parallelas paribus celeritatibus quovis temporis momento promoventur, qui motus *progressivus purus* dici solet. Hic motus tanquam simplicissimus, cuius omnia corpora sunt capacia, primus erat considerandus. Servat corpus, cui semel ejusmodi motus est imprefitus, eundem non tantum ob inertiam, ita motus quoque progressivus purus non turbatur, si corporis tali motu lati singula elementa viribus, quae massis eorum fiat proportionales, secundum directiones inter se parallelas follicentur. Tum vero si corpus sit rigidum assignari potest unica vis omnibus illis aequivalens, cuius directio per centrum gravitatis seu inertiae transit. Unde vicissim, si corpori rigido in centro inertiae applicata fuerit vis quaecunque, ea quasi per omnia corporis elementa massis proportionaliter distributa considerari poterit, atque ob aequivalentiam effectus in motu turbando erunt aequales. Haec sunt, quae Capite I fisius demonstrantur. Ubi imprimitur notari mereatur, quod per principia hic stabilita, omnia, quae de motu punctorum in prioribus de Mechanica libris sunt tradita, proximo progressivo corporum rigidorum valent. Quae itaque cum in se nimis sterilia multis videi possent, nunc amplissimum usum habebunt, cum eo universum genus motum pro-

progressivorum sit referendum. Praeterea cum corpora rigida ejusmodi viribus follicitata moventur, eorum compages satis firma esse oportet, ne in figura sua mutationem patiantur. Ideo, quantum vim compages corporis a viribus follicitantibus sustineat, simul erat definendum.

Corporum rigidorum finitae magnitudinis perinde ac corpuculorum infinite parvorum motus dupliciti modo est trahandus, prout fuerit vel liber, vel ob externa impedimenta restrictus. Neque vero hanc investigationem ita sufficiere licet, ut sepositis omnibus motus obstaculis omnia motus liberi genera, quorum corpora rigida capacia sunt, ad calculum revocentur. Corpus enim libere motum praeter motum progressivum purum infinitis modis motus gyroriorum recipere potest, ejusmodi motus complicati ante evolvi profici nequeunt, quam motus gyroriorum circa axes fixos sunt definiti: tum enim demum ad motus gyroriorum circa axes mobiles, ac porro ad motus liberos in genere prugrediri licet. Expedio itaque motu progressivo puro corpora rigida extrinsecus ita restricta contemplatur PERILL. AVCTOR, ut certum tantum motus genus recipere possint, quod fit dum ab aliqua causa externa duo corporis puncta fixa retinentur. Hoc casu corpus rigidum circa lineam rectam per haec puncta transeuntem, cum ipso simiter connexum, motu gyroriorum fatur, quare ipsa haec recta axis gyrationis vocatur. Sex Capitibus a II do ad VII num hos motus gyrorios contemplatus est CLAR. AVCTOR. Stabilita nomine

PRAEFATIO.

& mensura celeritatis angularis primo definitivit motus gyrationis, & nullis viribus turbati continuationem, investigat vires, non tantum quas axis sustinet, seu quae adhiberi debent, ut axis in situ suo conservetur, sed & quas corporis compages sustinet, & quibus mutuus partium nexus resistere debet. Posthaec CLAR. AVCTOR transit ad effectus virium quarumcunque in motu circa axem fixum generando. Ac quidem primo motus tantum initium contemplatur, qui corpori rigido circa axem fixum mobiliter viribus quibuscumque imprimitur, quo facilius solus virium effectus a motu jam infinito separatus peripiceretur, atque hinc ad sequentes investigationes subienda peti queant, quando, duplo corpus circa quempiam axem gyratur, vires adiunt, id circa alium axem convertere conantes: tum enim ex effectu momentaneo circa hunc axem productio judicare licet, quomodo motus praecedens turbetur. Pollea quoque corpus rigidum immotu circa axem fixum considerat & scrutatur, quomodo ista viribus quibuscumque immutari debeat. Utraque investigationemui conjuncta est cum determinatione virium, quas ipsa corporis compages, & practerea earum praecipue, quas axis sustinet, quibus itaque sustentari debet, ne de situ suo deturbeatur. Haec ultima quaestio de viribus, quas axis sustinet, adhuc minus studiole est tractata. Quare cum ea maximi sit momenti, hocque non solum ut intelligatur, quantis viribus opus sit, ad axem in situ suo retinendum, ied praeferim ut in motu corporum rigidorum libero dijudicari

dicari posse, quibusnam casibus axis nullas plane vires sustinet; CEL. AVCTOR omni cura hoc argumentum luculentius & distincte evoluntum dedit.

Universæ hujus theorieæ de motu corporum rigidorum circa axem fixum summam, quod ad variationem hujus motus a viribus productam adtinet, complectitur aequatio $d\vartheta = \frac{2\pi f M}{J_{\text{total}}}$; in qua denotat ϑ celeritatem angulariem, f momentum vis folliciantis, g altitudinem ex qua grave primo minuto secundo libere delabitur, J_{total} summa omnium productorum, quae oriuntur, si singula corporis elementa per quadrata distantiarum suarum ab axe multiplicentur. Formula haec similata est ei, quae variatio motus progressivæ exprimitur, nimirum isti alias dudam cognitæ $d\vartheta = \frac{2\pi g k}{M}$. Quemadmodum enim secundum hanc formulam est incrementum celeritatis angularis proportionale momento vis folliciantis diviso per quantitatem J_{total} , seu per summam omnium productorum ex quovis elemento mafiae in quadratum distantiae suae ab axe gyrationis. Quare cum loco vis folliciantis pro motu gyrorio ejus momentum considerari debat, & quantitas J_{total} loco mafiae seu inertiae specienda, ipsa haec quantitas J_{total} nomine *momentum inertiae* commode insinuitur, ita ut incrementum celeritatis angularis proportionale fiat momento vis folliciantis diviso per momentum

PRAEFATIO.

inertiae. Similitudo utriusque formulae eo est perfectior, quod utrinque per elementum temporis dt & duplam altitudinem $2g$ multiplicari oporteat, ut ipsum celeritatis incrementum exprimatur. Ad motum igitur gyroriorum definitum prae omnibus nolle oportet momentum inertiae respectu axis gyrationis. Patet autem, cum positio axis gyrationis respectu corporis in infinitum variari possit, ejusdem corporis infinita diversa dari momenta inertiae, prout ad aliam atque alium axem referatur, ut ideo hujus momenti inertiae investigatio opus maxime laboriosum esse videatur. Astero CLAR. AVCTOR peculiari uititur artificio, cuius ope fatus concinna methodo pro quovis corpore & pro dato in eodem axe momentum inertiae respectu illius axis indagari posset. Fusus haec omnia explicantur in Cap. V. ubi ita maxime notata digna proprietas corporum demonstratur: dari in quovis corpore tres axes, quorum respectu momentum inertiae sit vel maximum vel minimum, hisque axes se se invicem in centro inertiae ad angulos rectos fecare, ita ut quivis piano duorum reliquorum sit perpendicularis. Ob infigrem hanc proprietatem tres illos axes *principales* vocat CLAR. AVCTOR, atque tum explicat modum, quomodo ex momento inertiae respectu trium axium principalium: absque prolixo calculo momentum inertiae ejusdem corporis respectu aliis cuiuscunq; axis per eius centrum inertiae transfertis, hincque porro quoque respectu aliorum omnium illi parallelorum assignari possit. Hocque modo inventio momenti

inertiae,

inertiae, quae initio pro quovis corpore quasi infinita videri posset, mirifice in compendium redigitur. Secundum hanc methodum sequenti Cap. VI. CEL. AVCTOR momenta inertiae pro praecipuis corporum & quidem homogeneorum speciebus evoluta dedit, ut quoties usus postulat inde defundi queant. Praecipius casus, ad quem theoria de motu corporum rigidorum circa axem fixum accommodari solet, est motus oscillatoriis corporum gravium, quare omnia, quae huc spectant, problema de centro oscillationis in pendulis conditum Cap. VII. resoluta sunt, hisque tractatio de motu circa axem fixum gyrorio finitur.

Restat vero jam praecipuum totius operis argumentum, theoria scilicet de motu libero corporis rigidi a viribus qui buscumque sollicitati, in qua enodanda Summus EVLERVS tanta practicit, quanta in re tam ardua expectari vix poterant. Quomodounque motus corporis fuerit perturbatus, is semper pro quovis temporis momento resolvi potest in binos motus, quorum alter sit progressivus, ex motu centri inertiae dijudicandus, alter gyrorius circa quempiam axem. Per centrum inertiae duftum: effectus vero virium momentaneus duabus hisce rebus continetur: primo variatione motus centri inertiae tam ratione celeritatis, quam ratione directionis: secundo variatione motus gyroriorum & quidem tam ratione celeritatis angularis, quam ratione positionis ipsius axis gyrationis. Ex his dijudicari quodammodo licet, generalem problematis, de motu libero corporis rigidi a viribus

PRAEFATIO.

bus quibuscumque sollicitati determinando, solutionem hanc exiguis premi difficultatibus. Ut itaque lector eo clariorem omnium elementorum solutionem problematis ingredientium cognitionem consequatur, per gradus quasi a casibus specialibus ad generaliora, ab his demum ad univeralem problematis generalissimo sensu concepti solutionem adscendit ACTOR. Casus motus gyrorum liberi simplicissimus est, qui Cap. VIII. evolvitur, quo nimicum corpus circa ejusmodi axem gyvari concipiatur, qui nullas ob motum vires sustinet. Vocantur axes corporis *libri*, qui ita proprietate sunt praediti. In quolibet corpore libero tres sicutem dantur axes gyrationis liberi, suntque isti axes idem cum illis axisbus principalibus, quorum respectu momentum inertiae corporis est vel maximum vel minimum. Licet alias jam considerati sint a Mechanicae Scriptoribus ejusmodi axes per centrum inertiae transeentes, circa quos corpus libere gyvari possit, si nimimum momenta virium centrifugarum ex motu gyrorum natarum sese mitto defruant; valde tamen dubito, an ante EULERVM, hanc proprietatem corporum universaliter esse, quod in quolibet corpore *tres* certe dentur axes gyrationis liberi, quis unquam invenierit, si PERILL. DR. DE SEGNER excipiam, qui eandem proprietatem omnibus corporibus competentem demonstravit in Programmate sub titulo: *Specimen Theorie turbinum*, Halae A. 1755. promulgato. Quemadmodum vero in quovis corpore rigido centrum inertiae est punctum maxime memorable, cuius

ratio

PRAEFATIO.

ratio per universem Mechanicam latissime patet; ita axes principales, qui simul sunt axes gyrationis liberi, in quovis corpore non minus sunt notatu digni, cum iis univera doctrina de motu corporum libero innatur. Trium momentorum inertiae corporis, quae sunt maxima vel minima, duae esse possunt aequalia, quod accidit in omnibus solidis rotatis homogeneis, quin fieri potest, ut omnia sunt aequalia, veluti in sphaera. Si momenta inertiae respectu duorum axisum principalium sunt aequalia, respectu reliquorum omnium in piano eorundem axium aequalium fitorum momenta inertiae sunt aequalia. Ac in corpore cujus tria momenta inertiae principalia sunt aequalia, reliqua omnia aequantur. Prout igitur duobus vel tribus axisbus principalibus paribus praedita sunt corpora, vel tribus axisbus principalibus dilatibus gaudeant; quoad cognitionem mechanicam maxime notatu digna inter eadem intercedit differentia. Cum vero quodvis corpus tribus ad minimum axisbus principalibus seu liberis sit praeditum; omne corpus quoque ejusmodi morus est capax, vi cuius circa talen axem liberum uniformiter gyratur, & quidem vel circa axem quietescientem, si centrum inertiae corporis quietcat, vel circa axem motu sibi semper parallelo uniformiter in directum progradientem, qui motus tum *nixtus* est ex progressivo & simplici gyrorio. Ac si praeterea corpus ab ejusmodi viribus sollicitetur, quae vel ipsi centro inertiae sunt applicatae, vel quarum directiones cadunt in planum ad axem normale per centrum inertiae

ducunt,

PRAEFATIO.

duelsum, iste vires vel solum motum progressivum vel si nul-
lum perpetuo servet. Reliquae vires omnes axeos situm si-
mul turbabunt, atque hic est casus, quo principia Mechanici
ae hoc usque cognita haud erant sufficientia ad continuatio-
nem motus determinandam. Jam itaque CLAR. AVCTOR.
Cap. IX. & X. problema de corporis rigidi a viribus quibus-
cunque sollicitati motu generativi determinando adgreditur,
ubi quidem primo Cap. IX. corpus rigidum in quiete confi-
derat, & dum a viribus quibuscumque sollicitatur, primam
motus generationem investigare conatur: deinde vero Cap.
X. eum considerat casum omnium difficultum, quo corpus
jam in motu versatur, ac circa axem per centrum inertiae
transfusum gyratur, qui vero a viribus sollicitantibus con-
tinuo variatur. Ratiociniorum nexus, quibus CLAR. AV-
CTOR in evolverdis hisce questionibus usus est, brevibus
recensabo.

Quocunque fuerint vires corpus rigidum sollicitantes,
& quomodo cumque fuerint applicatae, eae semper ad duas
revocari possunt, quarum altera per ipsum centrum inertiae
corporis translat. At vero si cognitus fuerit effectus dua-
rum virium junctim agentium in motu generando, quarum
altera ipse centro inertiae est applicata, iterius etiam seor-
sum agentis effectus immotescit. Quodsi itaque quaestio est
de prima motus generatione determinando, quando corpus
rigidum quietens & liberum a viribus quibuscumque sollici-
tatur,

PRAEFATIO.

tatur, hae vires ad binas revocentur, quarum altera ipsi cer-
tro inertiae sit applicata, tuncque cum hujus effectus sit de-
terminatu facilissimus, totum negotium eo reddit, ut effectus
ab unica quacunque vi productus definitur. Quod si minus
succederit, cum ea vi, alia quaecumque centro inertiae appli-
cata, combineatur, ac si effectus inde junctim productus affi-
guari poterit, totum negotium erit confectum. His positis
primo investigatur, quonodo duae hujusmodi vires compa-
ratae esse debeant, ut ab his corpori motus circa datum axem
per eius centrum inertiae transfusum imprimatur; tum vero
exinde vicinum colligitur positio axis, circa quem corpus ri-
gidum quiescens primus gyrari incipit, respectu trium axium
principalium corporis, una cum angulo elementari primo
tempulo prodotto, si a vi quacunque sollicitetur, eique
similis in centro inertiae vis aequalis & contraria fuerit appli-
cata. Effectus quidem idem produceretur a viribus sollici-
tantibus, etiam si corpus in motu versetur: verum ob hujus
motus admixtionem difficilis cognosci poterit. Si enim
corpus jam circa alium axem gyratur, ac nunc iniciatur,
non solum celeritas angularis, sed etiam ipse axis gyrationis
mutabitur, ita ut nunc circa alium axem per centrum iner-
tiae transfusum gyrari incipiat. Quare jam in id incumben-
tium erat, ut ista axis gyrationis variatio & quidem momen-
tanea a viribus producta formulis analyticis expressa que-
ratur, ubi demum ex cognita mutatione elementari ad
ipsum motus determinationem per calculum integralem

PRAEFATIO.

transendum erit. Resolvenda igitur erat quaestio: si data sit positio axis gyrationis corporis moti respectu trium axium principalium corporis, isque a viribus sollicitantibus varietur, ut corpus elatio tempore elementari circa alium axem gyretur, quomodo definita sit positio hujus axis variati respectu axium principalium. Cognitis iam viribus, quibus corpus dum circa quempiam axem gyratur, sollicitatur, is axis, circa quem quiescens gyvari inciperet definitum vero variatio in axe gyrationis ob motum facta explorari poterit. Verum nisi corpus primo circa axem quenam principalem gyretur, praeter vires externas, quibus corpus forte sollicitatur, imprimis eae vires, quae ex ipso motu gyrorio ejusque vi centrifuga nascuntur, perpendi, & in calculum introduci debent, ideo itae vires ex ipso motu gyrorio natae sollicitate erant investigandae. Si enim axis gyrationis non sit principalis, etiam si nullae vires extrinsecus urgerent, tamen axis parallelismus conservari non posset, quoniam vires centrifugae ad axem deflexendum tendunt. Inventis his viribus ex motu gyrorio ipso ad eum turbandum natis, cum his combinatis viribus extensis corporis sollicitantibus supra descripta definiri poterat variatio momentanea tam in ipso axe quam in celeritate angulari inde orta. Ipsum modum procedendi & calculum dirigidendi explicat *Problema 67*. Licit itaque fictionum negotium absolutum esse censeri posset; tamen refutat aliud argumentum prius non negligendum. Cogita enim variationem tam

cele-

PRAEFATIO.

celeritatis angularis, quam axis gyrationis positione respectu trium axium principalium corporis ad quodvis temporis momentum; nondum tamen liquet, quem situm corpus respectu spatii absoluti teneat. Cum enim iste situs corporis labente tempore continuo varietur, etiam haec quæstio prioribus adjungenda erat: Si ad datum tempus cognitus sit situs corporis rigidi circa quempiam axem per ejus centrum inertiae transuentem gyranis, atque tam axis gyrationis, quam celeritas angularis utcumque varietur, quomodo inviendia sit mutatio momentanea in corporis situ orta. Hoc denum problemate resoluto, universa theoria de motu corporum rigidorum absoluta est confusa, tuncque quodvis problema mechanicum, utcumque complicatum sit, aequationibus fundamentalibus, ex ipsis conditionibus secundum statibilia principia deductis, calculi integralis ope complete erit resolvendum.

Exposita sic theoria generali de modo singulas motus corporum rigidorum variationes aequationibus analyticis expressum, CEL. AVCTOR adgreditur applicationem principiorum ab ipso stabilitorum ad causas speciales in mundo observios, ita quidem, ut primo, a viribus extensis sollicitantibus abstrahendo, corpora sibi relicta tantum contempletur, ac constitutis tribus corporum generibus, ex inde axium principialium petitis, tribus quoque *Capitulus XI. XII. XIII.* motum evolvar corporum rigidorum, primo terminis axibus principiis paribus, deinde diobus tantum paribus, ac denique

PRAEFATIO.

que tertio terminis axibus principalibus disparibus praeditorum, & a nullis viribus follicitorum. Statim ab initio hujus tractationis demonstrat CLAR. AVCTOR illud, quod per univerfam mechanicam maximi est momenti, principium: quod docunq[ue] corpus rigidum moveatur, ejus motum quovis momento compositum seu mixtum concipi posse ex motione progresivo centri inertiae & ex gyrorio circa axem aliquem per ejus centrum inertiae transversum. Remotis jam viribus follicitribus externis, determinatio motus corporum primi generis nulla laborat difficultate, cum circa nullum axem gyvari queant, qui non axis principalis proprietate gaudeat, unde nullas omnino vires ex ipso motu gyrorio ad motum turbandum ortum trahere possunt. Quaelatio de motu corporum secundi generis continuatione determinanda calculum quidem requirit quodammodo complicatiorem; nihil tamen minus ejusmodi corporum motus in genere determinare atque ad quosvis casus accommodare docet CEL. AVCTOR, ita ut perfecta & omnibus numeris absoluta sit hujus problematis solutio. Explicat finul CLAR. AVCTOR, quoniam motus hujusmodi corporum reduci queat ad duplum gyroriorum, unum numerum circa axem *mobilem* (a motu circa axem *variabiliem* follicite distinguendum) qua corpus circa ipsum axem principalem singularem aequabiliter gyrat, dum secundo ipse hic axis circa polos extra corpus fixos circumferitur pariter ratio uniformi. Tertiae classis corporum motus longe complicior est, ac aequationum differentia-

tium

PRAEFATIO.

tialium, variationem momentaneam hujus motus definitum, integratio maxima premitur difficultate, Aequatio differentialis celeritatis angularis variationem exprimens licet ad separationem variabilium reduci queat, paucissimis tamen casibus exceptis, receptas expressiones arcum circulium vel logarithmorum respuit. Huic quidem incommodo aliqua ratione medelam affert CEL. AVCTOR, loco celeritatis angularis introducendo aliam variabilem, a qua celeritas angularis pendeat: nihil tamen secius nova aequatio differentialis inde orta ita est comparata, ut non nisi per arcus sectionum conicarum ejus integratio expediatur queat, unde nec ullum commodum ad calculum prosequendu[m] redundat, nec ad datum tempus celeritas angularis colligi potest. Quare cum formulae fitum axis gyrationis respectu axium principalium definientes a celeritate angulari pendant, universalis problematis solutio a subdiliis analyticis expedita nequit. Explicatis itaque casibus quibusdam specieibus perfectam solutionem admittentibus, ut quodammodo a estimare liceat, quales hic motus fit futurus, ad subdilium quoddam mechanicum configit CEL. AVCTOR, motum scilicet penduli per circulum; ac concessa motus determinatione, quo corpus grave in peripheria circuli vel oscillando vel revolvendo movetur, ad quodvis tempus determinare docet positionem axis gyrationis respectu axium principium. Ait vero jam refabat alterum problematis resolventis momentum, determinatio scilicet fitus axium principalium respectu

c 3

PRAEFATIO.

respeſtu ſpatii abſoluti. Non niiores in hoc negotio expediendo, ac ante, occurruunt difficultates, cum reſ ad ejusmodi aequationes differentiales reducatur, quae non ſolum non integrari, fed ne ad separabilitatem quidem variabilium revoſari poſſe, ipſo E. V. E. R. O ab initio viſa fiunt, unde huius problematis ſolutionem in §. 761. ad finem perducere non potuit. Poſtea vero artificia invenit ingeniosiflma, quorum ope harum ſequacionum integratio abſoluta poterat; eaque in Supplémento ad fine adjecto explicata leguntur.

Expoſitis ſic, quae ad abiotum corporum rigidorum librum, remotis viribus externis, pertinent, ordo poſtulabat, ut principia ſupra ſtabilita ad eos quoque calculus applicarentur, quibus vires externe corporis ſolicitantes ejus motum perturbant. Primo itaque traſtantam elegit C. E. L. AVCTOR theoriam turbinum, cuius explicatio ob continuam axis gyrationis variationem adhuc maximis tenebris fuit involuta. Quod argumentum ut initio a gravioribus difficultatibus liberetur, axis turbinis ſuper plano-horizontali politiflmo indeſere affunitur, ne frictioni ullus locus relinquaret, tum ve-ro axis infra in cūpidem definiens ſtatuitur, qua ſuper plano horizontali ingrediatur. Cumque duo genera turbinum conſtituenda ſint, prout vel omnia ejus momenta inertiae principalia fuerint inter ſe aequalia, vel duo diuinaſat; illud genus primo loco Cap. XIV. calculo ſubjicitur. Inventa ita que primo via a centro inertiae turbinis defiſta, determinata in ſuper ſecundum principia ſupra ſtabilita variatione momentanea

PRAEFATIO.

mentanea non tantum in axe gyrationis & celeritate angulari producta, fed & in ſitu turbinis reſpeſtu ſpatii abſoluti orta, generalis ſolutio problematis de motu & ſitu turbinis ad quodvis tempus alignando tentatur, ubi vero iterum adeo complicatae prodeunt aequationes differentiales, ut earum integratio nec algebraice nec per logarithmos vel arcus circulares expediti poſſit. Longe maiores Praevideſe poterat difficultates C. E. L. AVCTOR, si in turbine non omnia momenta inter ſe aequalia ſtaturentur, quare id argumentum nondum attingit, fed potius ipam theoriam generali de motu corporum rigidorum a viribus quibuscumque foliſſitorum denuo traſtantam fuſcipit, & quidem methodo proſrus nova, priorē longe perfectiore & ad uifim magis accommodata. Methodum Cap. IX. & X. expoſitam nimis effe operofam compertus eft C. E. L. AVCTOR, fi inde effeſt virium quarumcunque ſit definiendus, dum primo axis, circa quem vires corpus, fi quietceret, convertere inciperent, definiri, tum vero hinc variatio axis, circa quem corpus aſtu gyratur, & celeritas angularis determinari oporteat. Negari quoque non poſteſt, nec ipſe C. E. L. AVCTOR difficitur, methodum, qua Cap. X. momentaneae axis mutations eliciuntur, ea non gaudere evidentia, ut ab omnibus dubiis ſat expedire liberari queat, quam Artis periti contra eandem moveare poſtent. His adeo praegnatisbus rationibus communis ingeniosimus AVCTOR idem problema in Cap. XV. quod in integrō opere eft maxime notatu dignum, de novo pertraſfare voluit,

PRAEFATIO.

voluit, ita ut ex hac tenuis allatis nihil in subdium vocaverit, sed non nisi primis mechanicae principiis utatur, quo effect, it: omnia hic evadant maxime perficua. Statim quidem hoc facilito modo uti potuisset CLAR. AVCTOR, sicque non leves difficultates in superiori tractatione occurrentes evitaret: verum in argumento adhuc tam parum tractato haud incongruum erat, methodum operosorem & prolixiorum praemittere, quo singulae notiones in re pene nova animo firmius imprimantur, ipsaque difficultates, quibus haec pars Mechanicae involuta videbatur, luculentius perficiantur. Insuper haud parum intercessit, nosse viam, qua incedentes Autores novis Artibus contendis aut insigniter promovendis operam navarunt, licet postea praefontiores methodi vel ab ipsis vel ab aliis detegantur. Mirae facilitate ac evidenter hanc novam methodum ex primis & ab omni bus concessis motus principiis derivavit' CLAR. AVCTOR, atque ob summam solutionis universalitatem, in eadem jam omnia continentur, que Cap. IX. & X. per multis ambages magno labore erant evoluta. Supra, dum corpus quiescit, axis, circa quem ipsi vires primum motum gyrationis imprimit, vehementer operore determinabatur; ista vero determinatio inter Corollarii ex nova hac problematis solutione sponte fluit. Deinde etiam hic planissima sunt, quae de variatione momentanea motus gyroriorum, dum corpus a nullis viribus sollicitatum circa axem non principalem gyratur, per nimis intricata ratiocinia tandem in-

venta

PRAEFATIO.

venta erant. Quae autem supra vix attingi poterant, cum corpus insuper a viribus quibuscunque sollicitatur, hic pari facilitate eodemque labore feliciter expediuntur, ita ut hac nova methodo a primis motus principiis derivata universalis theoriam motus corporum rigidorum perfecte condidiscendens sit CLAR. AVCTOR. Accedit, quod ipsa haec nova & universalis hujus problematis solutio formulae jam ex universali solutione corollario periori methodo quodammodo dubia, sicutem non profus evidenti, nitebantur, veritate. Plenissime confirmet, cum omnes istae formulae jam ex universalis solutione corollario juxtar nullo negotio deriventur. Cum denique haec praecepta pro motu corporum rigidorum determinando latime patcent, ea non ad motum liberum solum adstricunt. Quomodounque enim corporum rigidorum motus compescitur, sive super piano quadam, sive juxta alia corpora incedere cogantur, sive quodpiam eorum punctum fixum retinetur, quaestio semper ad tradita praecepta reduci potest.

Ad utriusque igitur generis motus, tam liberos, quam retriges in sequentibus Capitibus ab AVCTORE nostro facta est applicatio. Gravissima ejus generis quaestio, qua corpus motu libero, tam progressivo, quam gyrorio, circa axem variabilem latum a viribus externis sollicitatur, circa motum vertiginis corporum coelestium veratur. Eam ob causam hoc argumentum in Cap. XVI. generatim ita pertractatur, ut in Astronomiam inde haud contemnda increments re-

dudent;

ducent;

PRAEFATIO.

dundent; cum motus lunae libratorius, praecessio aequinotiorum, & nutatio axeos terrae principalia sint huius Capituli objecta. Excipit hanc tractationem plenior explicatio motus turbinum super planohorizontali, semota fricione. Et cum supra tantum ejusmodi turbines sint considerati, in quibus omnia momenta inertiae inter se sunt aequalia, quae conditio nimium erat limitata, nunc motus turbinum in genere exploratur, positis tantum duobus momentis inertiae principalibus inter se aequalibus, quae conditio cum indebetur turbinum necessario conjuncta videtur. Cum turbo sit corpus cuiusdebet super piano horizontali incedens, ita ut cuspis sit quasi basis ipsius censenda, hinc ad alia corporum genera ducitur 'CEL. AVCTOR, quae basi quacunque super piano incedant. Nimirum autem ambages, quae in calcidet inextricabiles perducereunt, evitaturus, die tantum corporum generarum, cylindrica scilicet ac sphaerica potissimum evoluti, quorum numerum figura externa, qua piano applicantur, sit vel cylindrica vel sphaerica, quonodocunque materia intrinsecus fuerit distributa. Ad genus itaque cylindricum referuntur ea pendula, quae non ab axe linearis sunt suspensa, sed axiculis cylindricis utrinque piano horizontali incumbunt. Huc quoque referuntur, ac ideo summi investigatur motus oscillatorius, motu circuarum reciprocosimilis. Ad genus sphaericum pertinet turbines, quorum axes infra non in cuspide, sed quasi in haemisphaerium desinunt. Ab omnibus ejusmodi notibus, quibus corpus in superficie alterius incedit,

PRAEFATIO.

incedit, frictio est inseparabilis. Quare ut tractatio de ejusmodi motibus eo maiorem in praxi habere possit usum, ultimo loco peculiaris tractatus de motu corporum rigidorum a fricione perturbato adnexus est. Explicata itaque frictio, natura in genere, & modo frictionem in calculum introducendi generatim evoluto, perpendiculariter cel. avctor motus gravium progressivos a fricione impeditos, motus gyrotorios corporum gravium circa axem fixum a fricione retardatos, quorum pertinent motus pendulorum ab axiculis cylindricis superponitorum, motus praeterea turbiorum in cuspide definitum super piano horizontali, frictionis habitatione, ac demique motus globorum centrum inertiae in ipsum centro situm habentium super piano horizontali.

Haec erant, quae de praefatissimi hujus operis argumento praefati loco praemittenda esse putavi. De eo quidem persuasus sum, L. Petiani absque hac præliminari ratione ab Evertro hanc vulgares expectasse investigationes. Nihilo tamen secus haud incongruum mihi visum est, de his fätem in autecellum aliquid in medium proferre, quae in hoc opere vel prorsus nova sunt, vel nova saltē methodo exposta, & quibus scientia mechanica maximi ponderis augmenta adiecta est censenda. Mechanicam corporum rigidorum ad tantum perfectionis gradum in hoc tractatu perdurabit III. Avctor, ut plura expectari non possint, nec debeant. Quomodocunque enim problema de motu corporis rigidi designando fuerit complicatum, secundum principia stabilita sem-

PRAEFATIO.

Per erui poslunt aequationes fundamentales, motus variaciones elementares definientes. Quod si itaque accidat, ut aequationes differentiales, ex conditionibus problematis deducatur, integrari nequeant; tum non Mechanicae, sed potius Analyticos defecuti tribuendui est, quod plena problematis foliatio dari nequeat. Una cum EULERO nostro Magnus Galiae Geometra, ILL. D'ALEMBERT, in enodandum generale de motu corporum rigidorum problema parem operam contulit. In praefantillino *de praeuisione aquinoctiorum & nutationis axis terrae* tractatu, A. 1749. Parisii gallico idiomate edito, exposita leguntur omnia, quae ad problematis nostri solutionem generalem inveniendam conducere poslunt principia. Ac EULERVS noster, postquam ejusdem de praecellente aequinoctiorum & nutatione axes terrae problematis foliationem suo more evolutam dederat in Historiae Academiae Regiae Berolinensis Tom. V. pro A. 1749. qui Tomus A. 1751 prodit, in Tomo VI. sequente PÆRILLUSTRI D'ALEMBERT credit gloriam debitam, qui arduam hauc de aequinoctiorum præcessione & axes terrae nutatione quaestione prius dedit resolutam. Postea vero EULERVS noster problematis de motu corporum rigidorum generalissime concepti resolutionem investigavit in Historiae Academiae Berolinensis Tomo VI. ad A. 1750. edito denum A. 1752. Sed methodus, qua tunc temporis usus est CEL. AVCTOR, ad multo majorum ab ipso perducta est perfectionem, post insiguum de tribus axibus corporum principalibus proprietatem a SEGNERO

dete-

PRAEFATIO.

detectam, ab ipso vero Auctore nostro ad usus mechanicos sellissimo succelū ulterius applicatam. Quod in applicatione ad problema de motu vertiginis terrae jam investigaverat, id in Opusculis Mathematicis Parisijs A. 1761. gall. id. editis denuo in generalissimo sensu conceperum problema enodavit CEL. D'ALEMBERT, & quidem in prioris Tomi *Commentatione secunda: de motu corporis cuiuscunque figuræ a viribus quibuscunque sollicitati*. Hanc commentationem CEL. D'ALEMBERT Auctori nostro, cum in elaborando hoc opere occupatus esset, cognitam non suisse, ideo pro certo evincere possum, quia opus EULERI nostri jam A. 1760. consummatum & a CEL. AVCTORE initio A. 1761. ad me transmissum erat, prout de eo testatur schedula jam A. 1761. impressa, qua institutum Dai. Roese de excidendo hoc opere indicetur. Ipsa etiam methodus, qua CEL. D'ALEMBERT usus est, adeo differt ab EULERIANA, ut ne minima suspicio orihi queat, unum Auctorem alterius opus in libiduum vocasse. Sic iterum Germania denovae scientiae inventore certare potest cum Gallia, prout alias de Calculi differentialis inventore cum Anglia certavit. Quivis horum primae magnitudinis Geometrarum peculiarius est methodo ac propriis inventandi artificiis, quae vero methodus alteri palmarum praeripiatur, quaestio est, quam sublimiorum hujusmodi scientiarum maxime peritis decidendam relinquor.

Si interest reipublicae litterariae, ut posteris conserventur scripta Auctorum, qui novis Artibus condendis aut insiguerunt am-

PRAEFATIO.

amplificandis scientias, promeritam adfecuti sunt gloriam; nonne sine laudem meretur Illustr. Acad. Gryph. bibliopola & typograph. a. F. RÖSE, quod operam & impellas excudendo huic praebere voluit operi, prae multis immortalitate digno. Verendum est, ne posteri incuriam nostri seculi indigentur, cum & alia scriptis manaverit doctrinae sua monimenta. Summus noster EVLERVS, ob suatum ad ea typis mandanda necessariorum defesum hactenus inedita, inter quae eminet de calculo integrali opus absolutissimum. Non possum non exscribere hic verba, quibus rei hujus mentionem fecerunt Aufpres diarii litter. Gryphisw. A. 1763. p. 98. *Wir wissen, daß Herr Euler Integralrechnung zum Druck bereit lieget, und wir auf einius Verleger warten. Wenn auf sie Nachkommna wiffen könnten, daß bei uns jährlich eine solche Menge schlechter Schriften gedruckt und verkauft werden können, so würde er ihnen keine große Idee von der Aufklärung unserer Zeiten und der Unterhaltung, welche den Wissenschaften widerfährt, machen, wenn sie legen, daß ein Werk, das für die Welt und alle Zeiten geschrieben ist, aus Max. gut ihres Verlags angebracht liegt.*

Caeterum, ut emendate prodiret opus, omni qua potui providi diligentia. Quae interim oculorum aciem fuderunt, vel operariorum culpa adnulla sunt menda, ad calcem libri, ea faltem, quae sensum turbare possint, sunt adnotata, quae igitur B. L. operis lectionem inchoaturus tollat, officiosissime rogo. Scrib. Bitzovii merite Martio MDCCCLXV.

WENCESL. JOH. GUSTAVUS KARSTEN.

Phil. D. et Math. P. P. O.

INDEX

INDEX CAPITVM.

INTRODVCTIO

CONTINENS ILLUSTRATIONES ET ADDITIONES NECESSARIAS

DE MOTU PUNCTORVM.

CAP. I. Consideratio motus in genere	Pa. 2
CAP. II. De internis motus principiis	29
CAP. III. De cauiss motus externis seu viribus	44
CAP. IV. De mensuris absolute ex lapij gravium petitis	68
CAP. V. De motu absoluto corporiculorum a viribus quibusunque astorum	76
CAP. VI. De motu respectivo corporiculorum, a viribus quibusunque follicitatorum	93

TRACTATVS

DE MOTU CORPORA RIGIDA ORVM

CAP. I. De motu progressivo corporum rigidorum.	105
CAP. II. De motu gyrorio circa axem fixam a nullis viribus turbato	122
CAP. III. De motus gyrorii generatione	137
CAP. IV. De perturbatione motus gyrorii a viibus quibusunque ora	157
CAP. V. De momento inertiae.	166
CAP. VI. Investigatio momentinertiae in corporibus homogeneis	184
CAP. VII. Demonstratio oscillatorio corporum gravium	204
CAP. VIII. De axe gyrationis libero motuque corporum rigidorum circa tales axes	224
CAP. IX. De prima motus generatione in corporibus rigidis.	238
CAP. X. De variatione momentanea axis gyrationis a viribus producta	255

C. P.

CAP. XI. De motu libero corporum rigidorum tenuis axibus principiis & cipalibus paribus praeditorum & nullis viribus solicitatorum	275
CAP. XII. De motu libero corporum rigidorum duobus axibus principiis paribus praeditorum & nullis viribus solicitat.	283
CAP. XIII. De motu libero corporum rigidorum tenuis axibus principiis disparibus praeditorum & nullis viribus solicitat.	298
CAP. XIV. De motu turbinum super plao horizontali, in quibus omnia momenta inertiae sunt inter se aequalia	311 ^r
CAP. XV. De motu liberi corporum rigidorum a viribus quibus- cunque solicitatorum	333
CAP. XVI. De motu gyrorio seu vertiginis corpor. coelestium	352
CAP. XVII. Plenior explicatio motus turbinum super plao hor- izontali, secunda frictione	375
CAP. XVIII. De motu corporum basi sphaerica praeditorum super plano horizontali	395
CAP. XIX. De motu corporum cylindicorum super plao hor- izontali.	415

INTRODUCTIO

CONTINENS

ILLUSTRATIONES ET ADDITIONES

NECESSARIAS

DE

DE MOTU CORPORA RIGIDORVM A FRICCTIONE PERTINENTIBVS.	449
CAP. I. De frictione in genere	449
CAP. II. De motu progreſſivo corporum gravium a frictione im- pedito	457
CAP. III. De motu gyrorio corporum gravium circa axem fixum a frictione reſardato	464
CAP. IV. De motu turbinum in cuiusdem definientium super pla- no horizontali, frictionis habita ratione	482
CAP. V. De motu globorum centrum inertiae in ipso runc centro titum habentium super plano horizontali.	489

INTRO.
