quae integrata dat:

$$\frac{\varepsilon\varepsilon aa}{2\cos\alpha^2} + 2fg\sin\theta + \frac{ff\,d\theta^2\cos\theta^2}{2\,dt^2} = \tfrac{1}{2}C$$

seu $f\,d\theta\cos\theta = dt\sqrt{\left(C - 4fg\sin\theta - \frac{\varepsilon\varepsilon aa}{\cos\alpha^2}\right)}$.

Quare cum ex aequatione V fit

$$d\theta = \varepsilon dt\,\mathrm{tang}\,\alpha\sin\varphi,$$

habemus novam aequationem finitam

$$\tfrac{1}{2}C = \frac{\varepsilon\varepsilon aa}{2\cos\alpha^2} + 2fg\sin\theta + \frac{\varepsilon\varepsilon ff\,\mathrm{tang}\,\alpha^2\cos\theta^2\sin\varphi^2}{2}$$

ubi esse debet $\tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon aa + 2fg\sin\delta$, unde oritur

$$2fg(\sin\delta - \sin\theta) = \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon aa\,\mathrm{tang}\,\alpha^2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon ff\,\mathrm{tang}\,\alpha^2\cos\theta^2\sin\varphi^2,$$

quae ob $\sin\varphi^2 = 1 - \frac{(\sin\delta-\sin\theta)^2}{\mathrm{tang}\,\alpha^2\cos\theta^2}$ abit in

$$4fg(\sin\delta - \sin\theta) = \varepsilon\varepsilon aa\,\mathrm{tang}\,\alpha^2 + \varepsilon\varepsilon ff\,\mathrm{tang}\,\alpha^2\cos\theta^2 - \varepsilon\varepsilon ff(\sin\delta-\sin\theta)^2$$

unde elicimus

$$\mathrm{tang}\,\alpha = \frac{\sqrt{(\sin\delta-\sin\theta)(4fg+\varepsilon\varepsilon ff(\sin\delta-\sin\theta))}}{\varepsilon\sqrt{(aa+ff\cos\theta^2)}},$$

hincque porro

$$\cos\varphi = \cos(\zeta+\eta) = \frac{\varepsilon\sqrt{(\sin\delta-\sin\theta)(aa+ff\cos\theta^2)}}{\cos\theta\sqrt{(4fg+\varepsilon\varepsilon ff(\sin\delta-\sin\theta))}}$$

$$\sin\varphi = \sin(\zeta+\eta) = \frac{\sqrt{(4fg\cos\theta^2-\varepsilon\varepsilon aa(\sin\delta-\sin\theta))}}{\cos\theta\sqrt{(4fg+\varepsilon\varepsilon ff(\sin\delta-\sin\theta))}},$$

sicque jam per solam inclinationem θ definivimus arcum α et angulum $\varphi = \zeta + \eta$, quin etiam relationem inter θ et tempus t adipiscimur ex aequatione, $d\theta = \varepsilon dt\,\mathrm{tang}\,\alpha\sin\varphi$, quae induit hanc formam

$$d\theta = \frac{dt\sqrt{(\sin\delta-\sin\theta)(4fg\cos\theta^2-\varepsilon\varepsilon aa(\sin\delta-\sin\theta))}}{\cos\theta\sqrt{(aa+ff\cos\theta^2)}}$$

seu

$$dt = \frac{d\theta\cos\theta\sqrt{(aa+ff\cos\theta^2)}}{\sqrt{(\sin\delta-\sin\theta)(4fg\cos\theta^2-\varepsilon\varepsilon aa(\sin\delta-\sin\theta))}}.$$

Deinde cum sit $\frac{d\zeta}{d\theta} = \frac{1}{\mathrm{tang}\,\alpha\sin\varphi} - \frac{\mathrm{tang}\,\theta\cos\varphi}{\sin\varphi}$ erit

$d\zeta$

$$d\zeta = \varepsilon dt - \frac{\varepsilon d\theta\,\mathrm{tang}\,\theta\sqrt{(\sin\delta-\sin\theta)(aa+ff\cos\theta^2)}}{\sqrt{(4fg\cos\theta^2-\varepsilon\varepsilon aa(\sin\delta-\sin\theta))}}$$

seu

$$d\zeta = \frac{\varepsilon d\theta(1-\sin\delta\sin\theta)\sqrt{(aa+ff\cos\theta^2)}}{\cos\theta\sqrt{(\sin\delta-\sin\theta)(4fg\cos\theta^2-\varepsilon\varepsilon aa(\sin\delta-\sin\theta))}}$$

unde angulus ZAB $= \zeta$ per integrationem est eliciendus. Denique cum sit $d\lambda = -\frac{\varepsilon dt\,\mathrm{tang}\,\alpha\cos\varphi}{\cos\theta}$, habebimus

$$d\lambda = \frac{-\varepsilon dt(\sin\delta-\sin\theta)}{\cos\theta^2}\ \text{seu}$$

$$d\lambda = \frac{-\varepsilon d\theta\sqrt{(\sin\delta-\sin\theta)(aa+ff\cos\theta^2)}}{\cos\theta\sqrt{(4fg\cos\theta^2-\varepsilon\varepsilon aa(\sin\delta-\sin\theta))}}.$$

Quodsi etiam pressionem turbinis in planum horizontale nosse velimus, ea ex aequatione III colligatur, unde est:

$$\varepsilon a\,d.\,\mathrm{tang}\,\alpha = -\frac{2P}{M}\cdot fg\,dt\cos\theta\sin\varphi,$$

hincque concluditur

$$\frac{2P}{M} = \frac{aa(2fg+\varepsilon\varepsilon ff(\sin\delta-\sin\theta))}{fg(aa+ff\cos\theta^2)} - \frac{aaff\sin\theta(\sin\delta-\sin\theta)(4fg+\varepsilon\varepsilon ff(\sin\delta-\sin\theta))}{fg(aa+ff\cos\theta^2)^2}.$$

COROLL. 1.

778. Si initio axis turbinis AD fuerit verticalis, seu $\delta = 90°$, turbo perpetuo hunc situm servabit, et uniformiter circa eundem axem AD gyrabitur celeritate angulari ε. Quod etiam declarat aequatio $dt = \frac{d\theta\cos\theta\sqrt{(aa+ff\cos\theta^2)}}{(1-\sin\theta)\sqrt{(4fg(1+\sin\theta)-\varepsilon\varepsilon aa)}}$: unde patet nonnisi post tempus infinitum hoc est nunquam fieri posse $\sin\theta < 1$.

COROLL. 2.

779. At si fuerit $\delta < 90°$, seu $\sin\delta < 1$, phaenomena motus ex aequatione $dt = \frac{d\theta\cos\theta\sqrt{(aa+ff\cos\theta^2)}}{\sqrt{(\sin\delta-\sin\theta)(4fg\cos\theta^2-\varepsilon\varepsilon aa(\sin\delta-\sin\theta))}}$ cognosci possunt: ex qua primum patet, nunquam fieri posse $\sin\theta > \sin\delta$, nempe inclinatio ad horizontem θ nunquam superabit initialem δ.

 CO-

COROLL. 3.

780. Inclinatio autem θ evanescere nequit, nisi sit $\epsilon\epsilon aa \sin\delta < 4fg$: quare si celeritas angularis initio impressa ϵ minor fuerit, quam $\frac{2\Upsilon fg}{a\Upsilon \sin\delta}$ turbo tandem procidet; quemadmodum evenit, si turbini inclinato nullus impressus fuerit motus gyratorius.

COROLL. 4.

782. At si celeritas angularis initio impressa major fuerit, quam $\frac{2\Upsilon fg}{a\Upsilon \sin\delta}$, inclinatio θ non ultra certum limitem imminui poterit, quem simul atque attigerit, turbo se iterum ad initialem inclinationem δ eriget. At minima inclinatio θ ex aequatione $4fg\cos\theta^2 - \epsilon\epsilon aa(\sin\delta - \sin\theta) = 0$ colligitur, $\sin\theta = \frac{\epsilon\epsilon aa - \Upsilon(\epsilon^4 a^4 - 16\epsilon\epsilon aafg\sin\delta + 64ffgg)}{8fg}$.

COROLL. 5.

783. Quare si celeritas angularis ϵ initio impressa fuerit quasi infinita, limes minimi fit $\sin\theta = \sin\delta$, seu turbo perpetuo eandem inclinationem servabit: sin autem sit valde magna, minima inclinatio ita proxime definitur: $\sin\theta = \sin\delta - \frac{2fg\cos\delta^2}{\epsilon\epsilon aa}$; ut sit $\theta = \delta - \frac{2fg\cos\delta}{\epsilon\epsilon aa}$.

SCHOLION.

784. Cum turbo tardius in gyrum actus mox procumbat, ea celeritas angularis notari meretur, quam si turbo superaverit, iterum erigatur. Esset quidem haec celeritas $= \frac{2\Upsilon fg}{a\Upsilon \sin\delta}$, quippe cui maxima inclinatio convenit, nempe $\theta = 0$: sed quia ob motem turbinis axis non ad horizontem usque inclinari potest, ea pro maxima inclinatione erit reputanda, ubi turbo quasi corpore suo horizontem attingit; quae si vocetur $= i$, ne turbo eousque inclinetur, celeritas angularis initio impressa ϵ major esse debet, quam $\frac{2\cos i \Upsilon fg}{a\Upsilon(\sin\delta - \sin i)}$, et quamdiu ea major manserit, turbo a lapsu erit immunis. Haecque est causa, quod turbo, tum ob frictionem aliaque obstacula ejus motus sensim imminuatur, tandem prolabatur. Ceterum cum hic ad ejusmodi obstacula non respexerim, mirum non est, si etiam reliqua phaenomena experientiae non satis respondeant: etiamsi certus velocitatis gradus, ad perennitatem gyrationis requisitus, experientiae maxime sit consentaneus. Verum ingens sine dubio discrimen deprehenderetur, si formulas differentiales inventas integraremus; atque ob hanc ipsam causam istum laborem suscipere haud operae esset pretium, cum eae tam sint complicatae, ut per logarithmos et arcus circulares expediri nequeant. Eae autem adhuc magis proditurae essent intricatae, si in turbine non omnia momenta inertiae inter se aequalia statuerentur, quocirca etiam hoc argumentum non attingam, quoniam principia stabilita his allatis exemplis satis sunt illustrata: sed potius uberiorem ipsius Theoriae de motu corporum rigidorum explicationem in medium afferre studebo. Etsi enim, quae hactenus sunt tradita, totum opus absolvere videntur, tamen si inde effectum virium quarumcunque definire velimus, methodus ante praescripta nimis est operosa; dum primo axem, circa quem vires corpus, si quiesceret, convertere inciperent definiri, tum vero hinc variationem axis, circa quem corpus actu gyratur, et celeritatis angularis determinari oportet: ex quo methodum perfectiorem magisque ad usum accommodatam proponam, qua deinceps ad investigationes magis arduas uti liceat.

CAPUT XV.

DE MOTU LIBERO CORPORUM RIGIDORUM A VIRIBUS QUIBUSCUNQUE SOLLICITATORUM.

THEOREMA. 10.

785. Quomodocunque corpus rigidum a viribus sollicitetur, effectus momentaneus his quatuor rebus continetur: primo variatione celeritatis centri inertiae: secundo variatione directionis centri inertiae: tertio variatione celeritatis angularis circa axem gyrationis per centrum inertiae transeuntis, et quarto variatione ipsius axis gyrationi

DEMONSTRATIO.

Quomodocunque corpus rigidum moveatur, ejus motus quovis tempore temporis puncto resolvitur in motum progressivum, quo centrum inertiae movetur, et motum gyratorium circa axem quempiam per centrum inertiae transeuntem: unde cognitio hujus motus haec quatuor elementa involvit: 1°. celeritatem centri inertiae; 2°. directionem, secundum quam movetur; 3°. axem per centrum inertiae transeuntem, circa quem corpus jam gyratur, et 4°. celeritatem angularem hujus motus: quas quatuor res qui cognoverit, motum corporis hoc instanti perfecte habet perspectum. Ob vires autem sollicitantes fieri potest, ut hae quatuor res immutentur, ideoque ad earum effectum cognoscendum necesse est, ut quantum singulae tempusculo infinite parvo varientur, definire valeamus. Effectus ergo virium non tam in his quatuor rebus, quam in earum variatione momentanea consistit, quam si assignare potuerimus, effectum perfecte cognoverimus; unde veritas Theorematis est manifesta.

COROLL. 1.

786. Quemadmodum ergo in motu punctorum effectus virium ex variatione celeritatis et directionis perfecte cognoscitur; ita in motu corporum rigidorum, praeter has binas variationes, ad centrum inertiae relatas, nosse oportet variationes, quas cum ipse axis gyrationis tum celeritas angularis subit.

COROLL. 2.

787. Sicut ergo vires definivimus, quibus motui gyratorio circa axem fixum data acceleratio inducatur, ita etiam vires definire licebit, quibus insuper ipse axis gyrationis datam variationem adipiscatur.

COROLL. 3.

788. Fundamentum ergo universae Theoriae de motu corporum rigidorum in hoc consistit, ut quomodocunque vires sollicitantes fuerint comparatae, quaternas illas variationes temporis elemento productas assignare valeamus.

SCHOLION. 1.

789. Principia ad hunc finem ducentia in praecedentibus jam satis sunt exposita, ubi ostendimus, quomodo variationem tam in motu centri inertiae, quam in axe gyrationis ejusque motu determinari oportet. Verum quia hoc posterius opus, in quo summa hujus Theoriae continetur, pluribus investigationibus innititur, quae saepe plurimum molestiae implicare solent, hic eas quasi in unum contrahens hanc Theoriam ita proponam, ut unico principio absolvi possit. Statim quidem hoc faciliori modo uti potuissem, sicque non leves difficultates in superiori tractatione occurrentes evitavissem; verum in argumento adhuc tam parum tractato haud incongruum visum est, methodum operosiorem et prolixiorem praemittere, quo singulae notiones in re pene nova animo firmius imprimantur, ipsaeque difficultates, quibus haec pars Mechanicae adhuc involuta videbatur, luculentius perspiciantur. Nihilo vero minus hoc argumentum hic quasi de novo pertractabo, neque ex hactenus allatis quicquam in subsidium vocabo.

SCHOLION. 2.

790. Cum igitur totum negotium huc reducatur, ut quantae variationes in quaternis memoratis rebus a datis viribus producantur, definiatur; quoniam methodus directa hoc praestandi non patet, vice versa primum in vires inquiram, quae ad datas variationes momentaneas producendas sint necessariae, ut hinc vicissim ad id, quod quaerimus, reverti queamus. Et cum variatio in motu centri inertiae producta nihil habeat difficultatis, id tanquam in quiete spectabo; et cujusmodi vires requirantur, investigabo, ut tam axis gyrationis, circa quem corpus jam gyratur, quam celeritas angularis, tempusculo infinite parvo datas variationes accipiant. Quoniam enim axis gyrationis cum celeritate angulari dari assumitur, motus singulorum elementorum corporis erit datus, qui si secundum ternas directiones fixas resolvatur, quantum hae ternae celeritates, tam ob variatam axis gyrationis positionem, quam ob celeritatis angularis variationem immutentur, colligere, simulque vires hanc mutationem in singulis elementis corporis producentes assignare valebimus: atque iis denique viribus elementaribus colligendis ipsas vires finitas quaesitas impetrabimus. Cum igitur primum motum singulorum corporis elementorum, dum corpus circa axem quemcunque per centrum inertiae transeuntem data celeritate angulari gyratur, nosse a beamus, ejus resolutionem secundum ternas directiones fixas, pro quibus ternos corporis axes principales assumam, in sequente problemate docebo.

PROBLEMA 85.

791. Si corpus rigidum circa axem quemcunque per ejus centrum inertiae transeuntem gyretur data celeritate, singulorum ejus elementorum

torum motum definire, cumque secundum directiones axium principalium resolvere.

SOLUTIO.

Circa centrum inertiae corporis I, quod in figura non est expressum, concipiatur descripta superficies sphaerica, in qua sint A, B, C poli axium principalium, ita ut arcus AB, AC et BC sint quadrantes. Fig. 102.
Gyretur jam corpus circa axem quemcunque IO celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ABC, sintque pro gyrationis polo O arcus OA $= \alpha$, OB $= \beta$, et OC $= \gamma$. Consideretur nunc corporis elementum quodcunque, a quo recta, ad centrum inertiae I ducta, superficiem sphaericam secet in Z; ejus autem distantia a centro I sit $= r$, dum radius sphaerae unitate exponitur: atque manifestum est, motum ejus elementi similem fore motui puncti Z, dum nempe hujus celeritas in ratione 1 ad r augetur. Quare sufficiet motum puncti Z definivisse, pro quo si ad arcum OZ constituatur arcus ZzT normalis, erit Zz directio motus, et celeritas $= \varepsilon \sin$ OZ, quoniam $\sin$ OZ distantiam puncti Z ab axe gyrationis IO exprimit. Constituatur autem arcus ZT quadrans, ut radius IT fiat directioni motus Zz parallelus, ac jam celeritatem $\varepsilon \sin$ OZ secundum hanc directionem IT latam resolvi oportet secundum directiones axium principalium IA, IB, IC. Quem in finem ductis arcubus AT, BT, CT, qui illius rectae IT inclinationes ad hos axes metiuntur, obtinebitur

$$\text{cel. sec. IA} = \varepsilon \sin \text{OZ}. \cos \text{AT}; \text{ cel. sec. IB} = \varepsilon \sin \text{OZ}. \cos \text{BT}$$
$$\text{et cel. sec. IC} = \varepsilon \sin \text{OZ}. \cos \text{CT}.$$

Iam quia arcus OT est pariter quadrans, ex triangulo AOT fit $\cos \text{AT} = \cos \text{AOT}. \sin \text{AO} = -\sin \text{AOZ}. \sin \text{AO}$ ob TOZ $= 90^\circ$. Simili modo est

$$\cos \text{BT} = \cos \text{BOT}. \sin \text{BO} = \sin \text{BOZ}. \sin \text{BO}$$
$$\cos \text{CT} = \cos \text{COT}. \sin \text{CO} = \sin \text{COZ}. \sin \text{CO}.$$

At ob $\sin$ AZ : $\sin$ AOZ $= \sin$ OZ : $\sin$ OAZ erit

$$\sin \text{AOZ}. \sin \text{OZ} = \sin \text{AZ}. \sin \text{OAZ} \text{ similique modo}$$
$$\sin \text{BOZ}. \sin \text{OZ} = \sin \text{BZ}. \sin \text{OBZ} \text{ et}$$
$$\sin \text{COZ}. \sin \text{OZ} = \sin \text{CZ}. \sin \text{OCZ}: \text{ unde fit}$$
$$\text{cel. sec. IA} = -\varepsilon \sin \text{AO}. \sin \text{AZ}. \sin \text{OAZ}$$
$$\text{cel. sec. IB} = \varepsilon \sin \text{BO}. \sin \text{BZ}. \sin \text{OBZ}$$
$$\text{cel. sec. IC} = \varepsilon \sin \text{CO}. \sin \text{CZ}. \sin \text{OCZ}.$$

Tum vero est

$$\sin \text{BAO} = \frac{\cos \text{CO}}{\sin \text{AO}}; \quad \cos \text{BAO} = \frac{\cos \text{BO}}{\sin \text{AO}};$$

$\sin$ BAZ

$$\sin \text{BAZ} = \frac{\cos \text{CZ}}{\sin \text{AZ}}; \quad \cos \text{BAZ} = \frac{\cos \text{BZ}}{\sin \text{AZ}}$$

$$\text{ergo } \sin \text{OAZ} = \frac{\cos \text{CO}. \cos \text{BZ} - \cos \text{BO}. \cos \text{CZ}}{\sin \text{AO}. \sin \text{AZ}}$$

ideoque celeritas secundum IA $= \varepsilon (\cos \text{BO}. \cos \text{CZ} - \cos \text{CO}. \cos \text{BZ})$ similique modo reperitur

$$\text{celeritas secundum IB} = \varepsilon (\cos \text{CO}. \cos \text{AZ} - \cos \text{AO}. \cos \text{CZ})$$
$$\text{celeritas secundum IC} = \varepsilon (\cos \text{AO}. \cos \text{BZ} - \cos \text{BO}. \cos \text{AZ})$$

quae per r multiplicatae dabunt celeritates elementi propositi: pro quo si coordinatae axibus principalibus parallelae ponantur x, y, z, erit $r \cos \text{AZ} = x$: $r \cos \text{BZ} = y$ et $r \cos \text{CZ} = z$: quare ob AO $= \alpha$, BO $= \beta$, CO $= \gamma$, erunt elementi propositi celeritates

$$\text{cel. sec. IA} = \varepsilon (z \cos \beta - y \cos \gamma)$$
$$\text{cel. sec. IB} = \varepsilon (x \cos \gamma - z \cos \alpha)$$
$$\text{cel. sec. IC} = \varepsilon (y \cos \alpha - x \cos \beta)$$

PROBLEMA. 86.

792. Si corpus rigidum gyretur circa axem quemcunque per ejus centrum inertiae transeuntem data celeritate angulari, invenire vires elementares, quibus singula elementa sollicitari debent, ut elemento temporis dt tam ipse axis gyrationis quam celeritas angularis datas subeant variationes.

SOLUTIO.

Sit I centrum inertiae corporis, ejusque axes principales IA, IB, IC, gyreturque corpus circa axem quemcunque IO, cujus ad quemlibet axem sit inclinatio AIO $= \alpha$; BIO $= \beta$, CIO $= \gamma$, celeritas autem angularis sit $= \varepsilon$ in sensum ABC directa; quae quantitates tempusculo dt crescere debeant suis differentialibus $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ et $d\varepsilon$, ad quem effectum producendum vires elementares necessarias quaeri oportet. Consideretur elementum corporis quodcunque dM in Z situm, pro quo sint coordinatae axibus principalibus parallelae IX $= x$, XY $= y$, YZ $= z$: vocenturque vires ad ejus motum praescriptum efficiendum requisitae et secundum axes principales resolutae Z$a = p$, Z$b = q$ et Z$c = r$. Secundum easdem directiones ejus motus resolvatur, ponaturque celeritas secundum Z$a = u$; secundum Z$b = v$ et secundum Z$c = w$, atque cum ex primis motus principiis sit Fig. 103.

$$du = \frac{2gp\,dt}{dM}, \quad dv = \frac{2gq\,dt}{dM}, \quad dw = \frac{2gr\,dt}{dM};$$

vires

vires quaesitae erunt:

$$p = \frac{du\,dM}{2g\,dt};\quad q = \frac{dv\,dM}{2g\,dt};\quad r = \frac{dw\,dM}{2g\,dt}.$$

Verum in praecedente problemate celeritates ternas u, v, w, ita invenimus expressas, ut sit:

$$u = \varepsilon(z\cos\beta - y\cos\gamma);\quad v = \varepsilon(x\cos\gamma - z\cos\alpha);\quad w = \varepsilon(y\cos\alpha - x\cos\beta);$$

quae quantum augeantur tempusculo dt cum ex variabilitate litterarum ε, α, β, γ, quae ut data spectatur, tum vero coordinatarum x, y, z judicari oportet. At harum differentialia dx, dy, dz exhibent spatiola, per quae elementum dM tempusculo dt transferetur, ita ut sit

$$dx = u\,dt = \varepsilon dt(z\cos\beta - y\cos\gamma)$$
$$dy = v\,dt = \varepsilon dt(x\cos\gamma - z\cos\alpha)$$
$$dz = w\,dt = \varepsilon dt(y\cos\alpha - x\cos\beta).$$

Unde differentiatione rite instituta adipiscimur:

$$du = d\varepsilon(z\cos\beta - y\cos\gamma) - \varepsilon(z\,d\beta\sin\beta - y\,d\gamma\sin\gamma) + \varepsilon dt(w\cos\beta - v\cos\gamma)$$
$$dv = d\varepsilon(x\cos\gamma - z\cos\alpha) - \varepsilon(x\,d\gamma\sin\gamma - z\,d\alpha\sin\alpha) + \varepsilon dt(u\cos\gamma - w\cos\alpha)$$
$$dw = d\varepsilon(y\cos\alpha - x\cos\beta) - \varepsilon(y\,d\alpha\sin\alpha - x\,d\beta\sin\beta) + \varepsilon dt(v\cos\alpha - u\cos\beta).$$

Cum vero sit $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ ideoque $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 = \sin\gamma^2$, $\cos\alpha^2 + \cos\gamma^2 = \sin\beta^2$ et $\cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = \sin\alpha^2$, hae formulae abeunt in istas:

$$du = d\varepsilon(z\cos\beta - y\cos\gamma) - \varepsilon z\,d\beta\sin\beta + \varepsilon y\,d\gamma\sin\gamma + \varepsilon\varepsilon dt(y\cos\alpha\cos\beta + z\cos\alpha\cos\gamma - x\sin\alpha^2)$$
$$dv = d\varepsilon(x\cos\gamma - z\cos\alpha) - \varepsilon x\,d\gamma\sin\gamma + \varepsilon z\,d\alpha\sin\alpha + \varepsilon\varepsilon dt(z\cos\beta\cos\gamma + x\cos\alpha\cos\beta - y\sin\beta^2)$$
$$dw = d\varepsilon(y\cos\alpha - x\cos\beta) - \varepsilon y\,d\alpha\sin\alpha + \varepsilon x\,d\beta\sin\beta + \varepsilon\varepsilon dt(x\cos\alpha\cos\gamma + y\cos\beta\cos\gamma - z\sin\gamma^2)$$

ex quibus vires quaesitae elementares p, q, r innotescunt, has scilicet formulas per $\frac{dM}{2g\,dt}$ multiplicando.

COROLL. 1.

793. Si igitur singula corporis elementa a talibus ternis viribus sollicitentur, dum corpus circa axem IO celeritate angulari ε gyratur, elapso tempusculo dt, celeritas angularis ε augmentum accipiet $= d\varepsilon$, simulque axis gyrationis respectu axium principalium IA, IB, IC ita variabitur, ut anguli α, β, γ suis differentialibus $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ augeantur.

COROLL. 2.

794. Quatenus vires contemplamur idem corporis elementum dM sollicitantes, quantitates x, y, z in his formulis insunt, tanquam constantes, quoniam iis situs elementi respectu axium principalium designatur, qui semper manet idem.

COROLL. 3.

795. Sin autem ab hoc elemento ad alia transire velimus, vires ea sollicitantes investigaturi, eaedem quantitates x, y, z erunt variabiles, et reliquae α, β, γ, ε cum suis differentialibus tanquam constantes spectandae: quoniam hae pro omnibus corporis elementis eodem instanti manent eaedem.

COROLL. 4.

796. Quare si vires omnia elementa sollicitantes in unam summam colligere velimus, hae tantum formulae $\int x\,dM$, $\int y\,dM$, et $\int z\,dM$ integrandae occurrunt; quarum differentialia cum evanescant, ob I centrum inertiae corporis, patet summas omnium virium p, item q et r seorsim evanescere.

SCHOLION.

797. Quia summae omnium virium p, q, et r evanescunt; quod semper evenire debet, quamdiu centrum inertiae in quiete persistit, earum effectus tantum ex earum momentis est dijudicandus; atque aliae quaeque vires eadem momenta habentes eundem effectum producent, dummodo illis aequales et contrariae in centro inertiae applicentur. Verum hic non sufficit, ut vires idem habeant momentum respectu unius cujuspiam axis, sed necesse est, ut respectu omnium plane axium eadem momenta producant, alioquin non pro aequivalentibus essent habendae. Hoc autem evenit, dummodo pro tribus axibus principalibus eadem momenta suppeditent, id quod sequente propositione extra dubium collocabitur.

PROBLEMA. 87.

798. Dum corpus rigidum circa axem quemcunque per centrum inertiae transeuntem data celeritate angulari gyratur, definire virium momenta

momenta respectu trium axium principalium, quibus tam ipsi axi gyrationis quam celeritati angulari data immutatio inducatur.

SOLUTIO.

Fig. 103. Manentibus pro axe gyrationis IO angulis AIO $= \alpha$, BIO $= \beta$, CIO $= \gamma$, circa quem corpus jam gyretur celeritate angulari ε in sensum ABC; haeque quantitates tempusculo dt differentialibus suis crescere debeant; considerentur pro elemento corporis quocunque dM in Z coordinatis IX $= x$, XY $= y$ et YZ $= z$ determinato vires elementares ante definitae

$$Za = p = \frac{du\,dM}{2g\,dt};\quad Zb = q = \frac{dv\,dM}{2g\,dt};\quad Zc = r = \frac{dw\,dM}{2g\,dt},$$

ex quibus respectu axis IA oritur momentum in sensum BC

$$= ry - qz = \frac{dM}{2g\,dt}(y\,dw - z\,dv)$$

at respectu axis IB momentum in sensum CA

$$= pz - rx = \frac{dM}{2g\,dt}(z\,du - x\,dw)$$

ac denique respectu axis IC momentum in sensum AB

$$= qx - py = \frac{dM}{2g\,dt}(x\,dv - y\,du).$$

Quodsi hic pro du, dv, dw formulas ante inventas substituamus, reperiemus:

$$\begin{aligned} y\,dw - z\,dv = {} & d\varepsilon((yy+zz)\cos\alpha - xy\cos\beta - xz\cos\gamma) - \varepsilon(yy+zz) \\ & d\alpha \sin\alpha + \varepsilon xy\, d\beta \sin\beta + \varepsilon xz\, d\gamma \sin\gamma \\ & + \varepsilon\varepsilon dt((yy - zz)\cos\beta\cos\gamma + xy\cos\alpha\cos\gamma - \\ & xz\cos\alpha\cos\beta - yz(\sin\gamma^2 - \sin\beta^2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z\,du - x\,dw = {} & d\varepsilon((xx+zz)\cos\beta - yz\cos\gamma - xy\cos\alpha) - \varepsilon(xx+zz) \\ & d\beta \sin\beta + \varepsilon yz\, d\gamma \sin\gamma + \varepsilon xy\, d\alpha \sin\alpha \\ & + \varepsilon\varepsilon dt((zz - xx)\cos\alpha\cos\gamma + yz\cos\alpha\cos\beta - \\ & xy\cos\beta\cos\gamma - xz(\sin\alpha^2 - \sin\gamma^2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\,dv - y\,du = {} & d\varepsilon((xx+yy)\cos\gamma - xz\cos\alpha - yz\cos\beta) - \varepsilon(xx+yy) \\ & d\gamma \sin\gamma + \varepsilon xz\, d\alpha \sin\alpha + \varepsilon yz\, d\beta \sin\beta \\ & + \varepsilon\varepsilon dt((xx - yy)\cos\alpha\cos\beta + xz\cos\beta\cos\gamma - \\ & yz\cos\alpha\cos\gamma - xy(\sin\beta^2 - \sin\alpha^2)). \end{aligned}$$

Multiplicentur jam hae formulae per $\frac{dM}{2g\,dt}$, et per totam corporis molem integrentur: quem in finem sint Maa, Mbb, Mcc, momenta inertiae respectu axium principalium IA, IB, IC, et cum sit

$$\int xx\,dM = \tfrac{1}{2}M(bb + cc - aa);\quad \int yz\,dM = 0$$
$$\int yy\,dM = \tfrac{1}{2}M(aa + cc - bb);\quad \int xz\,dM = 0$$
$$\int zz\,dM = \tfrac{1}{2}M(aa + bb - cc);\quad \int xy\,dM = 0$$

obtinebimus terna virium momenta respectu axium principalium, quibus effectus praescriptus producitur, ita expressa:

I. Momentum virium respectu axis IA in sensum BC

$$\frac{M}{2g\,dt}(aa\,d\varepsilon\cos\alpha - \varepsilon aa\,d\alpha\sin\alpha + \varepsilon\varepsilon(cc - bb)\,dt\cos\beta\cos\gamma)$$

II. Momentum virium respectu axis IB in sensum CA

$$\frac{M}{2g\,dt}(bb\,d\varepsilon\cos\beta - \varepsilon bb\,d\beta\sin\beta + \varepsilon\varepsilon(aa - cc)\,dt\cos\alpha\cos\gamma)$$

III. Momentum virium respectu axis IC in sensum AB

$$\frac{M}{2g\,dt}(cc\,d\varepsilon\cos\gamma - \varepsilon cc\,d\gamma\sin\gamma + \varepsilon\varepsilon(bb - aa)\,dt\cos\alpha\cos\beta)$$

COROLL. 1.

799. Ut ergo corpus circa eundem axem uniformiter gyretur, terna momenta virium, ob $d\varepsilon = 0$, $d\alpha = 0$, $d\beta = 0$, $d\gamma = 0$, erunt

$$\text{I.} = \frac{M\varepsilon\varepsilon(cc-bb)\cos\beta\cos\gamma}{2g};\quad \text{II.} = \frac{M\varepsilon\varepsilon(aa-cc)\cos\alpha\cos\gamma}{2g}$$

$$\text{et III.} = \frac{M\varepsilon\varepsilon(bb-aa)\cos\alpha\cos\beta}{2g}$$

quae, nisi axis gyrationis in aliquem axium principalium incidat, non evanescunt.

COROLL. 2.

800. Simili modo intelligitur, quibusnam viribus sit opus, ut vel sola celeritas angularis mutetur, vel sola axis gyrationis positio varietur: scilicet vires, quarum momenta cum ante definitis conveniant, hoc praestabunt; si modo illis aequales et contrariae in centro inertiae applicentur, ut ipsae vires pro evanescentibus haberi queant, totusque effectus solis earum momentis debeatur.

COROLL. 3.

801. Si corpus circa ipsum axem principalem IA celeritate angulari ε gyretur, quae suo differentiali $d\varepsilon$ augeri debeat, ob $\alpha = 0$, et β

$\beta = \gamma = 90^\circ$, ad hoc tantum respectu axis IA requiritur momentum virium $= \frac{Maadu}{2gdt}$, uti jam supra invenimus.

SCHOLION.

802. Problema hoc haud difficilius solutu fuisset, si corpori praeter motum gyratorium insuper motum progressivum quemcunque tribuissemus, qui tempusculo dt etiam praescripto modo variari deberet: si enim centrum inertiae motum habeat quemcunque, qui secundum axes principales resolutus praebeat celeritates l, m, n, tempusculo dt suis quoque differentialibus augendas, celeritates u, v, w supra valores ex motu gyratorio natos his progressivis l, m, n augeri deberent, atque ex harum incrementis nascerentur vires, quarum aequivalens per centrum inertiae transiret, pariterque se haberet, ac si corpus sine ullo motu gyratorio hunc solum motum progressivum prosequi deberet. Quo id confirmatur, quod jam supra ostendimus, in tali motu mixto semper motum progressivum et gyratorium separari, et utrumque seorsim, quasi alter non adesset, considerari ac determinari licere.

PROBLEMA. 88.

803. Si corpus rigidum, dum circa datum axem IO data celeritate angulari $= u$ gyratur, a viribus quibuscunque sollicitetur, quibus simul aequales et contrariae ipsi centro inertiae sint applicatae, determinare tam variationem axis, quam mutationem celeritatis angularis elemento temporis dt productum.

SOLUTIO.

Colligantur virium sollicitantium momenta respectu ternorum axium principalium corporis, sitque

momentum virium respectu axis IA in sensum $BC = P$
momentum virium respectu axis IB in sensum $CA = Q$
momentum virium respectu axis IC in sensum $AB = R$.

Momenta autem inertiae corporis respectu eorundem axium sint, ut hactenus Maa, Mbb, Mcc. Quod si jam corpus gyretur in sensum ABC celeritate angulari $= u$ circa axem IO, cujus inclinationes ad eosdem axes principales nunc sint $AIO = \alpha$, $BIO = \beta$, $CIO = \gamma$, hae quantitates tempusculo dt sequentes mutationes subibunt,

$\frac{2gPdt}{Maa}$

$$\frac{2gPdt}{Maa} = du\, cos\,\alpha - ud\alpha\, sin\,\alpha + \frac{cc-bb}{aa} uudt\, cos\,\beta\, cos\,\gamma$$
$$\frac{2gQdt}{Mbb} = du\, cos\,\beta - ud\beta\, sin\,\beta + \frac{aa-cc}{bb} uudt\, cos\,\alpha\, cos\,\gamma$$
$$\frac{2gRdt}{Mcc} = du\, cos\,\gamma - ud\gamma\, sin\,\gamma + \frac{bb-aa}{cc} uudt\, cos\,\alpha\, cos\,\beta$$

ex quibus aequationibus quaternae incognitae α, β, γ, et u determinantur, quoniam tantum pro tribus sunt habendae ob $cos\,\alpha^2 + cos\,\beta^2 + cos\,\gamma^2 = 1$. Cum igitur sit $d\alpha\, sin\,\alpha\, cos\,\alpha + d\beta\, sin\,\beta\, cos\,\beta + d\gamma\, sin\,\gamma\, cos\,\gamma = 0$, si prima per $cos\,\alpha$, secunda per $cos\,\beta$, tertia per $cos\,\gamma$ multiplicetur, productis addendis prodibit:

$$du + \left(\frac{cc-bb}{aa} + \frac{aa-cc}{bb} + \frac{bb-aa}{cc}\right) uudt\, cos\,\alpha\, cos\,\beta\, cos\,\gamma = \frac{2gdt}{M}\left(\frac{P cos\,\alpha}{aa} + \frac{Q cos\,\beta}{bb} + \frac{R cos\,\gamma}{cc}\right)$$

seu

$$du = \frac{(cc-bb)(aa-cc)(bb-aa)}{aabbcc} uudt\, cos\,\alpha\, cos\,\beta\, cos\,\gamma + \frac{2gdt}{M}\left(\frac{P cos\,\alpha}{aa} + \frac{Q cos\,\beta}{bb} + \frac{R cos\,\gamma}{cc}\right)$$

quo valore substituto obtinebuntur hae aequationes:

$$ud\alpha\, sin\,\alpha = \frac{cc-bb}{aa} uudt\, cos\,\beta\, cos\,\gamma\left(1 + \frac{(aa-cc)(bb-aa)}{bbcc} cos\,\alpha^2\right) + \frac{2gdt}{M}\left(\frac{Q cos\,\alpha\, cos\,\beta}{bb} + \frac{R cos\,\alpha\, cos\,\gamma}{cc} - \frac{P sin\,\alpha^2}{aa}\right)$$

$$ud\beta\, sin\,\beta = \frac{aa-cc}{bb} uudt\, cos\,\alpha\, cos\,\gamma\left(1 + \frac{(bb-aa)(cc-bb)}{aacc} cos\,\beta^2\right) + \frac{2gdt}{M}\left(\frac{R cos\,\beta\, cos\,\gamma}{cc} + \frac{P cos\,\beta\, cos\,\alpha}{aa} - \frac{Q sin\,\beta^2}{bb}\right)$$

$$ud\gamma\, sin\,\gamma = \frac{bb-aa}{cc} uudt\, cos\,\alpha\, cos\,\beta\left(1 + \frac{(cc-bb)(aa-cc)}{aabb} cos\,\gamma^2\right) + \frac{2gdt}{M}\left(\frac{P cos\,\gamma\, cos\,\alpha}{aa} + \frac{Q cos\,\gamma\, cos\,\beta}{bb} - \frac{R sin\,\gamma^2}{cc}\right).$$

At si prima illarum aequationum per $aa\, cos\,\alpha$, secunda per $bb\, cos\,\beta$, tertia per $cc\, cos\,\gamma$ multiplicetur, eas addendo orietur

$$\frac{2g\,dt}{M}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) = du\,(aa\cos\alpha^2 + bb\cos\beta^2 + cc\cos\gamma^2)$$
$$- u\,(aa\,d\alpha\sin\alpha\cos\alpha + bb\,d\beta\sin\beta\cos\beta + cc\,d\gamma\sin\gamma\cos\gamma)$$

quae per 2Mu multiplicata et ex altera parte integrata dat

$$Muu\,(aa\cos\alpha^2 + bb\cos\beta^2 + cc\cos\gamma^2) = 4g\int u\,dt\,(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)$$

quae quantitas exprimit corporis vim vivam.

C O R O L L. 1.

804. Si igitur, dum circa axem quemcunque per centrum inertiae transeuntem gyratur, a viribus quibuscunque sollicitetur, hinc variationes momentaneae tam in situ axis gyrationis respectu axium principalium, quam in celeritate angulari determinantur.

C O R O L L. 2.

805. Si corpus a nullis plane viribus externis sollicitetur, axis gyrationis cum celeritate angulari ita variantur, ut fit:

$$\text{I. } du = \frac{(cc-bb)(aa-cc)(bb-aa)}{aabbcc}\,uu\,dt\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

$$\text{II. } d\alpha\sin\alpha = \frac{cc-bb}{aa}\,u\,dt\cos\beta\cos\gamma\left(1+\frac{(aa-cc)(bb-aa)}{bbcc}\cos\alpha^2\right)$$

$$\text{III. } d\beta\sin\beta = \frac{aa-cc}{bb}\,u\,dt\cos\alpha\cos\gamma\left(1+\frac{(bb-aa)(cc-bb)}{aacc}\cos\beta^2\right)$$

$$\text{IV. } d\gamma\sin\gamma = \frac{bb-aa}{cc}\,u\,dt\cos\alpha\cos\beta\left(1+\frac{(cc-bb)(aa-cc)}{aabb}\cos\gamma^2\right)$$

et vis viva $Muu\,(aa\cos\alpha^2 + bb\cos\beta^2 + cc\cos\gamma^2)$ perpetuo manet constans.

C O R O L L. 3.

806. Si corpus quiescat, ut sit $u = 0$, ex momentis virium P, Q, R respectu axium principalium sumtis, axis, circa quem corpus primum gyrari incipiet, ex his aequationibus definietur:

$$\frac{Q\cos\alpha\cos\beta}{bb} + \frac{R\cos\alpha\cos\gamma}{cc} - \frac{P\sin\alpha^2}{aa} = 0 \text{ seu } \frac{P}{aa} = \cos\alpha\left(\frac{P\cos\alpha}{aa} + \frac{Q\cos\beta}{bb} + \frac{R\cos\gamma}{cc}\right)$$

$$\frac{R\cos\beta\cos\gamma}{cc} + \frac{P\cos\beta\cos\alpha}{aa} - \frac{Q\sin\beta^2}{bb} = 0 \text{ seu } \frac{Q}{bb} = \cos\beta\left(\frac{P\cos\alpha}{aa} + \frac{Q\cos\beta}{bb} + \frac{R\cos\gamma}{cc}\right)$$

$$\frac{P\cos\gamma\cos\alpha}{aa} + \frac{Q\cos\gamma\cos\beta}{bb} - \frac{R\sin\gamma^2}{cc} = 0 \text{ seu } \frac{R}{cc} = \cos\gamma\left(\frac{P\cos\alpha}{aa} + \frac{Q\cos\beta}{bb} + \frac{R\cos\gamma}{cc}\right)$$

unde cum sit $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{P}{aa} : \frac{Q}{bb} : \frac{R}{cc}$, erit

$$\cos\alpha = \frac{P}{aa} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$$

$$\cos\beta = \frac{Q}{bb} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$$

$$\cos\gamma = \frac{R}{cc} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$$

ac tempusculo dt fiet:

$$du = \frac{2g\,dt}{M}\sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}.$$

S C H O L I O N. 1.

807. In hoc ergo solo problemate omnia continentur, quae supra per multas ambages magno labore eliciumus, cum tamen hic [illegible] nisi primis motus principiis simus usi, omniaque sint maxime [illegible]. Itaque cum supra, dum corpus quiescit, axem, circa quem ipsi [illegible] primum motum gyratorium imprimunt, vehementer operose deter[illegible] vissemus, hic ista determinatio instar corollarii ex praesente probl[illegible] sponte fluxit: cujus consensus cum superiori quo facilius perspi[illegible], ac ne ambiguitas signi radicalis moram facessat, sit iterum pro [illegible] rationis IF angulus AIE $= \eta$ et angulus EIF $= \theta$, erit $\cos\alpha$ [illegible] $\cos\theta$; $\cos\beta = -\sin\eta\cos\theta$ et $\cos\gamma = \sin\theta$, unde ob $\tan\eta$ [illegible] erit $\tan\eta = \frac{-Qaa}{Pbb}$ et $\tan\theta = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\cos\eta = \frac{Raa}{Pcc}\cos\eta$. Cum autem vires sollicitantes ibi sint VP $=$ P, VQ $=$ Q; VR $=$ R existente angulo AIV $= \vartheta$ et IV $= h$: erit harum virium momentum resp[illegible]

axis IA in sensum BC $= Rh \sin \delta$, quod hic nobis est P, tum earum momentum respectu axis IB in sensum CA $= - Rh \cos \delta$, quod hic nobis est Q, et momentum respectu axis IC in sensum AB $= Qb \cos \delta - Pb \sin \delta$, quod hic nobis est R. Quibus valoribus pro P, Q et R positis, habebimus prorsus ut supra $\tang \eta = \frac{ha \cos \delta}{kh \sin \delta}$ et $\tang \theta = \frac{aa(Q \cos \delta - P \sin \delta)}{cc R \sin \delta} \cos \eta$.

Deinde, etiam quae supra de variatione momentanea motus gyratorii, dum corpus a nullis viribus sollicitatum circa axem non principalem gyratur, per nimis intricata ratiocinia tandem eruimus, hic positis virium momentis $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ fiunt planissima, uti in coroll. 2. ostendimus. Quae autem supra vix attingere ausi fueramus, cum corpus insuper a viribus quibuscunque sollicitatur, hic pari facilitate eodemque labore feliciter expedivimus, ita ut in hoc tantum capite a primis motus principiis profecti universam Theoriam motus corporum rigidorum perfecte condidisse videamur.

SCHOLION. 2.

808. Cum autem propositis viribus sollicitantibus quibuscunque, quarum momenta respectu axium principalium in sensum ABC sunta sint P, Q, R, totum negotium in determinatione ternorum angulorum α, β; γ et celeritatis ε versetur, ad quo ternas invenimus aequationes; quandoquidem anguli illi relationem inter se tenent; aequationes illae levi substitutione multo commodiores reddi possunt. Quodsi enim, quia litteris x, y, z ad indolem corporis indicandam non amplius indigemus, ponamus

$$\varepsilon \cos \alpha = x;\quad \varepsilon \cos \beta = y;\quad \varepsilon \cos \gamma = z;$$

omnes anguli ex calculo elidentur, summaque totius Theoriae motus corporum rigidorum his tribus formulis satis simplicibus continebitur:

$$dx + \frac{cc - bb}{aa} yz\, dt = \frac{2gP\,dt}{Maa}$$

$$dy + \frac{aa - cc}{bb} xz\, dt = \frac{2gQ\,dt}{Mbb}$$

$$dz + \frac{bb - aa}{cc} xy\, dt = \frac{2gR\,dt}{Mcc}.$$

Quare si corpus a nullis viribus sollicitetur, statim colligimus $aa\,xdx + bb\,ydy + cc\,zdz = 0$ seu $aa\,xx + bb\,yy + cc\,zz = \text{Const.}$ Tum vero ex

ex binis dt elidendo erit $\frac{aa\,dx}{bb\,dy} = \frac{(cc - bb)y}{(aa - cc)x}$ ideoque integrando $\frac{aa}{cc - bb}xx = \frac{bb}{aa - cc} yy + \text{Const.}$ Quare si initio fuerit $x = \mathfrak{A}$; $y = \mathfrak{B}$; $z = \mathfrak{C}$, ponamusque $\frac{aa}{cc - bb} = A$; $\frac{bb}{aa - cc} = B$ et $\frac{cc}{bb - aa} = C$, habebitur

$$Axx - Byy = A\mathfrak{A}^2 - B\mathfrak{B}^2 \text{ et } Axx - Czz = A\mathfrak{A}^2 - C\mathfrak{C}^2$$

ideoque $y = \frac{\sqrt{(Axx - A\mathfrak{A}^2 + B\mathfrak{B}^2)}}{\sqrt{B}}$ et $z = \frac{\sqrt{(Axx - A\mathfrak{A}^2 + C\mathfrak{C}^2)}}{\sqrt{C}}$.
Quare cum sit $A\,dx + yz\,dt = 0$, fiet

$$dt = \frac{-A\,dx\sqrt{BC}}{\sqrt{(Axx - A\mathfrak{A}^2 + B\mathfrak{B}^2)(Axx - A\mathfrak{A}^2 + C\mathfrak{C}^2)}}$$

sicque etiam hoc problema, quod supra non parum molestiae creaverat, satis expedite est solutum.

PROBLEMA 89.

809. Si ad quodvis tempus noverimus axem gyrationis respectu axium principalium, una cum celeritate angulari corporis circa hunc axem; definire ad quodvis tempus situm axium principalium respectu spatii absoluti.

SOLUTIO.

In spatio absoluto concipiatur sphaera immobilis, in cujus centro versetur corporis centrum inertiae I, in eaque assumatur circulus fixus maximus VXVY, in eoque punctum fixum Z, quo situs axium principalium quovis tempore referatur. Nunc quidem elapso tempore t respondeant corporis axes principales in sphaera immobili punctis A, B, C, a quibus si ad Z ducantur arcus circulorum maximorum, vocentur ii ZA $= l$, ZB $= m$ et ZC $= n$, tum vero sint anguli XZA $= \lambda$, XZB $= \mu$ et XZC $= \nu$. Nunc autem reperiatur axis gyrationis in O, ut sit AO $= \alpha$, BO $= \beta$ et CO $= \gamma$, circa quem corpus gyretur in sensum ABC celeritate angulari $= \varepsilon$: tempusculo ergo dt polus A vertetur per arculum Aa $= \varepsilon dt \sin \alpha$, existente A$a$ ad arcum OA normali, ita ut sit Fig. 89.

$$\sin \text{BA}a = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} \text{ et } \cos \text{BA}a = \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha}.$$

At est $\sin \text{ZAB} = -\frac{\cos n}{\sin l}$ et $\cos \text{ZAB} = \frac{\cos m}{\sin l}$,
unde colligitur

si

$$\sin Z\Lambda a = \frac{\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n}{\sin a \sin l};\ \cos Z\Lambda a = \frac{\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n}{\sin a\sin l}.$$

Ducto jam ex a ad arcum ZΛ perpendiculo $a\alpha$, erit

$$\Lambda\alpha = \frac{u\,dt}{\sin l}(\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n)\ \text{et}\ a\alpha = \frac{u\,dt}{\sin l}\ (\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n).$$

Verum eſt $\Lambda\alpha = -dl$ et $a\alpha = -d\lambda \sin l$ ideoque, hinc et ob analogiam ſequentes concluduntur differentialium valores:

$$dl \sin l = u\,dt\,(\cos\beta\cos n - \cos\gamma\cos m);\ d\lambda \sin l^2 = -u\,dt\,(\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n)$$

$$dm \sin m = u\,dt\,(\cos\gamma\cos l - \cos\alpha\cos n);\ d\mu \sin m^2 = -u\,dt\,(\cos\gamma\cos n + \cos\alpha\cos l)$$

$$dn \sin n = u\,dt\,(\cos\alpha\cos m - \cos\beta\cos l);\ d\nu \sin n^2 = -u\,dt\,(\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m).$$

Harum autem ternarum priorum binas reſolviſſe ſufficit, cum ſit $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$, iisque reſolutis unica reliquarum totum negotium abſolvit.

COROLL. 1.

810. Si ponamus $u \cos\alpha = x$; $u\cos\beta = y$ et $u\cos\gamma = z$, ut ſit ex momentis virium ſollicitantium P, Q, R,

$$dx + \frac{cc-bb}{aa}yz\,dt = \frac{2gP\,dt}{Maa};\ dy + \frac{aa-cc}{bb}xz\,dt = \frac{2gQ\,dt}{Mbb};$$

$$dz + \frac{bb-aa}{cc}xy\,dt = \frac{2gR\,dt}{Mcc};$$

nunc ſequentes aequationes adjungi oportet,

$$dl \sin l = dt\,(y\cos n - z\cos m);\ dm \sin m = dt\,(z\cos l - x\cos n);$$
$$dn \sin n = dt\,(x\cos m - y\cos l)$$
$$d\lambda \sin l^2 = -dt\,(y\cos m + z\cos n);\ d\mu \sin m^2 = -dt\,(z\cos n + x\cos l);\ d\nu \sin n^2 = -dt\,(x\cos l + y\cos m).$$

COROLL. 2.

811. Si porro ponamus $\cos l = p$; $\cos m = q$, $\cos n = r$, poſteriores aequationes has induent formas ob $pp + qq + rr = 1$:

$$dp + dt\,(yr - zq) = 0;\ dq + dt\,(zp - xr) = 0;\ dr + dt\,(xq - yp) = 0$$

$$d\lambda + \frac{dt\,(yq+zr)}{qq+rr} = 0;\ d\mu + \frac{dt\,(zr+xp)}{pp+rr} = 0;\ d\nu + \frac{dt\,(xp+yq)}{pp+qq} = 0;$$

unde etiam fit $x\,dp + y\,dq + z\,dr = 0$, quemadmodum eſt $p\,dp + q\,dq + r\,dr = 0$.

SCHOLION.

812. Etſi hic problema praecedens, quaſi jam eſſet ſolutum, ſpectavi, tamen plerumque ambo problemata conjungi eorumque reſolutionem ſimul inſtitui oportet, quemadmodum in praecedente capite de motu turbinum uſu venit. Haec ſcilicet amborum problematum conjunctio neceſſaria eſt, quando vires ſollicitantes a ſitu corporis abſoluto pendent, quod quidem, ſi vires externae affuerint, ſemper contingere ſolet. His igitur caſibus, momenta virium P, Q, R arcus l, m, n ac fortaſſe etiam angulos λ, μ, ν involvent; ita ut omnes aequationes coroll. 1. exhibitae ſimul perpendi debeant, antequam ſolutio ſuſcipi queat. Quodſi corpus inſuper motu progreſſivo feratur, fieri ſolet, ut vires etiam ab eo pendeant, ex quo formulas motum progreſſivum involventes ſimul ad reliquas adjici oportebit, quibus caſibus ſolutio maxime complicata reddetur. Nunc igitur his problematibus expeditis problema generale de motu libero corporum rigidorum a viribus quibuscunque ſollicitatorum aggredi poterimus.

PROBLEMA. 90.

813. Si corpus rigidum initio quomodocunque projectum deinceps a viribus quibuscunque ſollicitetur, quarum actioni libere obſequi queat, ejus motum determinare.

SOLUTIO.

Quod primo ad ejus motum progreſſivum, ſeu motum, quo centrum inertiae promovetur, attinet, is per eadem praecepta, quae pro motu punctorum ſunt tradita, definietur. Scilicet tota corporis maſſa, quae ſit = M, in ejus centro inertiae collecta concipiatur, ac ſingulis momentis omnes vires, quibus corpus ſollicitatur, ſecundum ſuam quaeque directionem ipſi centro inertiae applicentur; ut habeatur caſus puncti, cujus autem maſſa finita eſt cenſenda = M, a viribus ſollicitati, cujus propterea motus per praecepta ſupra tradita determinari vel ſaltem formulis analyticis exprimi poterit, nulla habita ratione

 motus

motus gyratorii, quo interea forte corpus circa centrum inertiae agitetur. Tum vero ad hunc motum investigandum, priori motu progressivo penitus seposito, centrum inertiae jam ut quiescens consideretur; ac primo quidem corporis terni axes principales explorentur, qui ex centro inertiae I educti sint IA, IB, IB, eorumque respectu momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc; quibus cognitis sphaera concipiatur immobilis circa centrum inertiae descripta, in qua tam circulus maximus ZXVY quam in eo punctum Z fixum assumatur, quo situs corporis quovis tempore referatur. Nunc igitur elapso tempore $= t$ teneat corpus ob motum gyratorium situm in figura repraesentatum, in quo axes principales respondeant in superficie sphaerica punctis A, B, C quadrantis intervallo a se invicem distantibus: pro quorum situ praesente ponatur;

arcus $ZA = l$, $ZB = m$ et $ZC = n$ item

anguli $XZA = \lambda$; $XZB = \mu$, $XZC = \nu$,

qui quomodo a se invicem pendeant, ex sphaericis est manifestum. Porro gyretur nunc corpus circa axem IO celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ABC, ac pro situ hujus axis ponantur arcus $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$; atque hae sunt quantitates per sua differentialia ita determinanda, ut posito $t = 0$, statui corporis initiali conveniant. Ad hoc considerentur vires corpus nunc sollicitantes, quarum colligantur momenta inertiae respectu axium principalium corporis; sitque

mom. virium respectu axis IA in sensum $BC = P$

mom. virium respectu axis IB in sensum $CA = Q$

mom. virium respectu axis IC in sensum $AB = R$.

atque ponendo brevitatis gratia $\varepsilon \cos \alpha = x$, $\varepsilon \cos \beta = y$, et $\varepsilon \cos \gamma = z$, ut sit $\varepsilon = \sqrt{(xx + yy + zz)}$, supra invenimus fore:

$$dx + \frac{cc - bb}{aa}\, yzdt = \frac{2gPdt}{Maa}$$

$$dy + \frac{aa - cc}{bb}\, xzdt = \frac{2gQdt}{Mbb}$$

$$dz + \frac{bb - aa}{cc}\, xydt = \frac{2gRdt}{Mcc},$$

quibuscum, posito $\cos l = p$, $\cos m = q$ et $\cos n = r$, conjungantur hae aequationes:

$$dp + dt\,(yr - zq) = 0;\quad dq + dt\,(zp - xr) = 0,\quad dr + dt\,(xq - yp) = 0$$

$$d\lambda + \frac{dt(yq + zr)}{qq + rr} = 0;\quad d\mu + \frac{dt(zr + xp)}{rr + pp} = 0;\quad d\nu + \frac{dt(xp + yq)}{pp + qq} = 0,$$

quae si ita resolvi et integrari queant, ut ad quodvis tempus t assignari possint quantitates x, y, z, p, q, r, λ, μ, ν, problema erit perfecte solutum. In his postremis autem aequationibus notandum est, esse $pp + qq + rr = 1$, unde $pdp + qdq + rdr = 0$, tum vero etiam $xdp + ydq + zdr = 0$. Denique $\sin(\mu - \lambda) = \frac{-\cos n}{\sin l \sin m}$ et $\cos(\mu - \lambda) = \frac{-\cos l \cos m}{\sin l \sin m}$, ideoque $\tang(\mu - \lambda) = \frac{r}{pq}$; et $\tang(\nu - \mu) = \frac{p}{qr}$, tum $\tang(\lambda - \nu) = \frac{q}{pr}$ seu $\tang(\nu - \lambda) = \frac{-q}{pr}$; ita ut sufficiat angulorum λ, μ, ν unicum invenisse.

SCHOLION.

814. Haec praecepta pro motu corporum rigidorum determinando latissime patent, neque tantum ad motum liberum sunt adstricta: quomodocunque enim eorum motus compescitur, sive super plano quodam, sive juxta alia corpora incedere cogantur, sive quodpiam eorum punctum fixum retineatur, quaestio semper ad tradita praecepta reduci potest. Scilicet qua parte aliud corpus contingunt, ibi dabitur pressio, quae primo indefinite in calculum introducta, deinceps ita determinari debet, ut motus propositis conditionibus consentaneus reddatur: atque etiam hoc modo conflictus corporum explorabitur. Cujusmodi investigationes antequam suscipiamus, casum quendam motus liberi expendi conveniet, in quo motus gyratorius circa axem variabilem locum inveniat, dum corpus a viribus externis sollicitatur; cujusmodi motus a vi gravitatis, quippe cujus directio per centrum inertiae cujusque corporis transit, non producitur. Gravissima autem hujus generis quaestio sine dubio in motu vertiginis corporum coelestium versatur, quae autem nonnisi positis Astronomiae Theoreticae principiis suscipi potest. Consensu autem omnium observationum, quas adhuc instituere licuit, compertum est, corpora coelestia perinde moveri, ac si se mutuo attraherent, vel ad se invicem pellerentur viribus, quae sint in ratione reciproca duplicata distantiarum atque insuper massis proportionales. Scilicet quemadmodum quaevis corpora terram versus gravia sunt, ita etiam nisum quendam habent versus omnia corpora coelestia, cui

qui eo major evadat, quo magis quadratum diſtantiae diminuatur. Atque ex his viribus Aſtronomi motus progreſſivos corporum coeleſtium ſcrutari ſolent, quae inveſtigatio cum ad motus punctorum ſit referenda, hic tantum in motus gyratorios corporum coeleſtium inquiramus; quod argumentum in ſequente capite generatim ita pertractare ſtudebo, ut Aſtronomia inde haud contemnenda incrementa ſit conſecutura.

CAPUT XVI.

DE MOTU GYRATORIO SEU VERTIGINIS CORPORUM COELESTIUM.

PROBLEMA. 91.

815. Si corporis rigidi ſingula elementa ſollicitentur verſus aliquod punctum F viribus, quae ſint ut eorum maſſae per quadrata diſtantiarum ab eo puncto diviſae, determinare harum virium momenta reſpectu axium principalium corporis.

SOLUTIO.

Fig. 104. Sint IA, IB, IC axes principales corporis, eorumque reſpectu ejus momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc: Puncti autem F a centro virium a centro inertiae corporis I diſtantia ponatur $IF = s$: quae ita ad ternos axes principales corporis ſit inclinata, ut ſint anguli $AIF = \zeta$; $BIF = \eta$ et $CIF = \theta$, hinc demiſſo ex F ad planum AIB perpendiculo FF, et ex E ad axem IA normali EA, erit $IA = s\,coſ\,\zeta$, $AE = s\,coſ\,\eta$ et $EF = s\,coſ\,\theta$. Vis porro ſingula corpora ad punctum F pellens tanta ſit, ut in diſtantia $= e$ aequetur gravitati: in aliis autem diſtantiis ſecundum quadrata earum diminuatur. Conſideretur nunc corporis elementum quodcunque dM in Z, pro quo ſint coordinatae axibus principalibus congruae $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, atque vis, qua hoc elementum dM ad punctum F urgetur, erit $= \frac{ee}{ZF^2}\,dM$. Iam haec vis reſolvatur ſecundum directiones axium Zp, Zq, Zr, eritque

$$\text{vis ſecundum } Zp = \frac{ee(s\,coſ\,\zeta - x)\,dM}{ZF^3}$$

vis

$$\text{vis ſecundum } Zq = \frac{ee(s\,coſ\,\eta - y)\,dM}{ZF^3}$$

$$\text{vis ſecundum } Zr = \frac{ee(s\,coſ\,\theta - z)\,dM}{ZF^3}$$

atque hinc erunt momenta iſtarum virium reſpectu axium principalium:

$$\text{mom. axis IA in ſenſum BC} = \frac{ees(y\,coſ\,\theta - z\,coſ\,\eta)\,dM}{ZF^3}$$

$$\text{mom. axis IB in ſenſum CA} = \frac{ees(z\,coſ\,\zeta - x\,coſ\,\theta)\,dM}{ZF^3}$$

$$\text{mom. axis IC in ſenſum AB} = \frac{ees(x\,coſ\,\eta - y\,coſ\,\zeta)\,dM}{ZF^3}.$$

His igitur momentis per totum corpus colligendis obtinebimus momenta, quae ſupra litteris P, Q, R indicavimus, ita ut ſit ob s quantitatem conſtantem:

$$P = ees \int \frac{(y\,coſ\,\theta - z\,coſ\,\eta)\,dM}{ZF^3}$$

$$Q = ees \int \frac{(z\,coſ\,\zeta - x\,coſ\,\theta)\,dM}{ZF^3}$$

$$R = ees \int \frac{(x\,coſ\,\eta - y\,coſ\,\zeta)\,dM}{ZF^3}.$$

Eſt autem

$$ZF = \sqrt{((s\,coſ\,\zeta - x)^2 + (s\,coſ\,\eta - y)^2 + (s\,coſ\,\theta - z)^2)}$$

ſeu ob $coſ\,\zeta^2 + coſ\,\eta^2 + coſ\,\theta^2 = 1$:

$$ZF = \sqrt{(ss - 2sx\,coſ\,\zeta - 2sy\,coſ\,\eta - 2sz\,coſ\,\theta + xx + yy + zz)}.$$

Cum autem in corporibus coeleſtibus diſtantia $IF = s$ ſit ſemper vehementer magna prae ipſo corpore ſeu quantitatibus x, y, z, erit ſatis exacte ad noſtrum inſtitutum

$$\frac{1}{ZF^3} = \frac{1}{s^3} + \frac{3x\,coſ\,\zeta + 3y\,coſ\,\eta + 3z\,coſ\,\theta}{s^4}.$$

Quoniam vero ob I centrum corporis inertiae, et IA, IB, IC eius axes principales habemus $\int x\,dM = 0$, $\int y\,dM = 0$, $\int z\,dM = 0$, atque $\int xy\,dM = 0$, $\int xz\,dM = 0$; $\int yz\,dM = 0$, prodibit his factis ſubſtitutionibus:

P

$$P = ees \int \frac{(3yy \cos\eta \cos\theta - 3zz \cos\eta \cos\theta)\, dM}{s^4} = \frac{3ee \cos\eta \cos\theta}{s^3} \int (yy - zz)\, dM$$

$$Q = \frac{3ee \cos\zeta \cos\theta}{s^3} \int (zz - xx)\, dM; \quad R = \frac{3ee \cos\zeta \cos\eta}{s^3} \int (xx - yy)\, dM.$$

Verum ob data momenta inertiae eſt

$\int xx dM = \frac{1}{2} M(bb + cc - aa)$; $\int yy dM = \frac{1}{2} M(aa + cc - bb)$
et $\int zz dM = \frac{1}{2} M(aa + bb - cc)$: quocirca erit

$$P = \frac{3Mee(cc - bb)\cos\eta \cos\theta}{s^3}$$

$$Q = \frac{3Mee(aa - cc)\cos\zeta \cos\theta}{s^3}$$

$$R = \frac{3Mee(bb - aa)\cos\zeta \cos\eta}{s^3}.$$

COROLL. 1.

816. Haec igitur momenta virium non rigore geometrico ſunt definita, ſed tantum valent, quando diſtantia puncti attrahentis magnitudinem corporis attracti longe ſuperat. Atque ſic commode evenit, ut ea per momenta inertiae tam concinne exprimi potuerint.

COROLL. 2.

817. Si corpus attractum omnia momenta inertiae habeat inter ſe aequalia, etiam haec virium momenta evaneſcunt: eatenus ergo tantum motus gyratorius corporum coeleſtium ab hujusmodi viribus afficitur, quatenus ea non ſunt ſphaerica, ſeu ſaltem momentis inertiae aequalibus praedita.

SCHOLION. 1.

818. Si quantum hae vires ad motum progreſſivum conferant, definire velimus, ſingulas vires elementares ipſi centro inertiae applicare debemus: quas ſi pro quolibet axe in unam ſummam colligamus, habebimus totam vim corpus ad motum progreſſivum ſollicitantem. Ut autem ad binas dimenſiones variabilium x, y, z aſcendamus, accuratius valorem ZF exprimere debemus, ut ſit:

$\frac{1}{ZF^3}$

$$\frac{1}{ZF^3} = \frac{1}{s^3} + \frac{3(x\cos\zeta + y\cos\eta + z\cos\theta)}{s^4} + \frac{15(x\cos\zeta + y\cos\eta + z\cos\theta)^2}{2s^5} - \frac{3(xx + yy + zz)}{2s^5}.$$

Haec formula per $(s\cos\zeta - x)\, dM$ multiplicata, et ſecundum praecepta ſuperiora integrata dabit $\int \frac{(s\cos\zeta - x)\, dM}{ZF^3} =$

$$\frac{M\cos\zeta}{ss} + \frac{15\cos\zeta}{2s^4} \int dM\, (xx \cos\zeta^2 + yy \cos\eta^2 + zz \cos\theta^2) - \frac{3\cos\zeta}{2s^4} \int dM\, (xx + yy + zz) - \frac{3\cos\zeta}{s^4} \int xx dM$$

quae in hanc formam transmutatur:

$$\frac{M\cos\zeta}{ss} + \frac{3M\cos\zeta}{2s^4} (aa(3 - 5\cos\zeta^2) + bb(1 - 5\cos\eta^2) + cc(1 - 5\cos\theta^2)).$$

Quare naneiſcemur ſequentes tres vires

I. ſec. IA $= \frac{Mee\cos\zeta}{ss} + \frac{3Mee\cos\zeta}{2s^4} (aa(3 - 5\cos\zeta^2) + bb(1 - 5\cos\eta^2) + cc(1 - 5\cos\theta^2))$

II. ſec. IB $= \frac{Mee\cos\eta}{ss} + \frac{3Mee\cos\eta}{2s^4} (bb(3 - 5\cos\eta^2) + cc(1 - 5\cos\theta^2) + aa(1 - 5\cos\zeta^2))$

III. ſec. IC $= \frac{Mee\cos\theta}{ss} + \frac{3Mee\cos\theta}{2s^4} (cc(3 - 5\cos\theta^2) + aa(1 - 5\cos\zeta^2) + bb(1 - 5\cos\eta^2))$.

Hae tres autem vires revocantur primo ad unicam in directione IF ſollicitantem, quae eſt:

$$\frac{Mee}{ss} + \frac{3Mee}{2s^4} (aa(1 - 5\cos\zeta^2) + bb(1 - 5\cos\eta^2) + cc(1 - 5\cos\theta^2)),$$

cui inſuper ſunt adjungendae hae ternae

1°. ſec. IA $= \frac{3Maaee\cos\zeta}{s^4}$; 2°. ſec. IB $= \frac{3Mbbee\cos\eta}{s^4}$;

3°. ſec. IC $= \frac{3Mccee\cos\theta}{s^4}$.

Unde

Unde patet, si terna momenta inertiae principalia fuerint inter se aequalia, omnes vires ad unicam $\frac{Mre}{ss}$ secundum IF agentem reduci, quae in Theoria Astronomiae spectatur, reliquis vero casibus vis illa centripeta non erit pure quadrato distantiae reciproce proportionalis, sed eo accedunt insuper exiguae particulae biquadrato distantiae reciproce proportionales, quae autem praeterea a situ corporis respectu virium F pendent: ad quam aberrationem in calculo Astronomico attendisse juvabit, praecipue si corpora notabiliter a figura sphaerica recedant.

SCHOLION. 2.

819. Assumsi hic singula corporis elementa versus unicum punctum F urgeri, cum tamen in hypothesi Attractionis etiam ad singula corporis attrahentis elementa sollicitentur. Verum si corpus attrahens fuerit sphaera, certum est, id perinde ad se adtrahere, ac si tota ejus massa in centro esset unita; ita ut nostrum problema etiam hos casus in se complectatur. At si corpus attrahens non fuerit sphaericum, mutabitur quidem paulisper tam ratio reciproca duplicata, quam directio vis, quae non amplius ad certum punctum erit directa: verum haec irregularitas in ingenti distantia penitus evanescere est censenda, praecipue cum corpora coelestia parum a figura sphaerica discrepent. Hic autem quoniam tantum ad motum gyratorium respicio, a motu progressivo mentem abstrahendo, centrum inertiae corporis in quiete considero, ac primo, si ipsum corpus quiescat, circa quemnam axem motum gyratorium sit acceptarum, investigabo.

PROBLEMA. 92.

Tab. XV. Fig. 5. 820. Si corpus quiescat, idque a centro virium F modo ante definito sollicitetur, definire axem circa quem primo instanti motum gyratorium accipiet, ac celeritatem angularem inde genitam.

SOLUTIO.

Corpus ergo in quiete consideramus, seu potius ab ejus motu progressivo mentem abstrahimus: ejus igitur centro inertiae in centro sphaerae constituto sint A, B, C poli axium principalium, eorumque respectu, ut hactenus, momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc. Iam recta ex centro inertiae ad centrum virium ducta trajiciat superficiem sphaericam in puncto F, ut sint arcus $AF = \zeta$, $BF = \eta$, $CF = \theta$: distantia autem centri virium sit $= s$, ejusque vis attrahens tanta, ut in distantia $= e$ aequetur gravitati. Hinc virium momenta P, Q, R respectu axium principalium IA, IB, IC sunt:

$$P = \frac{3Mee(cc-bb)\cos\eta\cos\theta}{s^3};\quad Q = \frac{3Mee(aa-cc)\cos\zeta\cos\theta}{s^3}$$

atque $R = \frac{3Mee(bb-aa)\cos\zeta\cos\eta}{s^3}$.

Quare ex §. 806. corpus gyrari incipiet circa ejusmodi axem IO, ut positis arcubus $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$ futurum sit

$$\cos\alpha = \frac{P}{aa} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$$

$$\cos\beta = \frac{Q}{bb} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$$

$$\cos\gamma = \frac{R}{cc} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$$

tempusculo autem dt acquiret celeritatem angularem nascentem $d\varepsilon = \frac{2gdt}{M} \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$ quae in sensum ABC erit directa. Atque ex his distantia poli gyrationis O a puncto F ita reperitur expressa, ut sit

$$\cos OF = \left(\frac{P\cos\zeta}{aa} + \frac{Q\cos\eta}{bb} + \frac{R\cos\theta}{cc}\right) : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}.$$

COROLL. 1.

821. Memoratu hic dignus est casus, quo centrum virium F cadit intra binos polos principales: cadat enim punctum F in arcum AB et ob $\cos\theta = 0$, et $\cos\zeta^2 + \cos\eta^2 = 1$, erit $P = 0$, $Q = 0$ et $R = \frac{3Mee(bb-aa)\sin\zeta\cos\zeta}{s^3}$; unde etiam fit $\cos\alpha = 0$, et $\cos\beta = 0$, et $\cos\gamma = 1$, ita ut polus gyrationis O cadat in polum principalem C.

COROLL. 2.

822. Eodem casu, quo centrum virium est in plano AIB, et corpus circa axem IC gyrari incipit, primo tempusculo dt acquirit celeritatem angularem nascentem $d\varepsilon = \frac{6gee(bb-aa)dt\sin\zeta\cos\zeta}{ccs^3}$ in sensum AB, seu $d\varepsilon = \frac{3gee(bb-aa)dt\sin 2\zeta}{ccs^3}$.

CO-

COROLL. 3.

823. Quodsi ergo eodem casu corpus jam habuerit motum gyratorium circa istum axem IC celeritate $= \varepsilon$ in sensum AB, is ob vim sollicitantem versus centrum virium F tendentem accelerabitur, ita ut fiat

$$d\varepsilon = \frac{3gee(bb-aa)dt \sin 2\zeta}{ccs^3}.$$

SCHOLION.

824. Hinc ergo evidens est, si centrum virium F ita circa corpus circumferatur; ut per circulum maximum AB duos axes principales IA et IB continentem incedat, corpusque circa reliquum axem principalem IC gyrari coeperit: tum perpetuo circa eundem axem IC esse gyraturum, solamque celeritatem angularem ε modo auctum modo minutum iri. Casus hic omnino dignus est, qui omni studio evolvatur: quoniam motum libratorium lunae, quo semper fere eandem faciem terrae obvertit, complecti videtur. Quae investigatio quo facilior et clarior reddatur, primo centrum virium motu uniformi circa corporis centrum inertiae in eodem plano circumferri, ac perpetuo eandem distantiam servare assumamus.

PROBLEMA. 93.

825. Si corpus gyretur circa suum axem principalem IC, centrum virium autem F in plano ad eum normali uniformiter circumferatur, ejus distantia a centro inertiae corporis eadem manente, definire motum gyratorium hujus corporis.

SOLUTIO.

Fig. 106. Quoniam ergo axis gyrationis IC manet constans, et coeli respectu quasi fixus: sit XCY hemisphaerium coeleste, et XY circulus maximus polo C descriptus, in quo centrum virium F uniformiter incedat, atque in hoc circulo quoque constanter inerunt bini reliqui poli principales corporis A et B. Ponatur celeritas angularis centri virium F $= \delta$, quod cum initio fuisset in X, tempore elapso $= t$ arcum descripserit necesse est XF $= \delta t$. Eodem autem temporis momento alter axis principalis reperiatur in A, positoque arcu XA $= \lambda$, si celeritas angularis corporis circa axem IC sit $= \varepsilon$, in sensum AB, erit $d\lambda = \varepsilon dt$. Tum vero ob AF $= \delta t - \lambda$, quod supra erat ζ, hic nobis est $\delta t - \lambda$; at retentis reliquis quantitatibus aa, bb, cc, itemque ee et s, quae sunt constantes;

stantes, ut supra, habebimus hanc aequationem $d\varepsilon = \frac{3gee(bb-aa)}{ccs^3} dt \sin 2\zeta$. Introducamus autem angulum ACF $= \zeta$, et ob $\zeta = \delta t - \lambda$, nanciscimur $\lambda = \delta t - \zeta$ et $d\lambda = \delta dt - d\zeta = \varepsilon dt$, unde fit $\varepsilon = \delta - \frac{d\zeta}{dt}$. Quocirca sumto elemento dt constante prodit haec aequatio resolvenda:

$$dd\zeta + \frac{3gee(bb-aa)}{ccs^3} dt^2 \sin 2\zeta = 0.$$

Statuamus brevitatis gratia $\frac{3gee(bb-aa)}{ccs^3} = \mathrm{N}$, et multiplicando per $2d\zeta$ fit

$$2d\zeta dd\zeta + 2\mathrm{N}\, dt^2 d\zeta \sin 2\zeta = 0$$

cujus integralis est: $d\zeta^2 - \mathrm{N}dt^2 \cos 2\zeta = \mathrm{C}dt^2$, unde colligitur $dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{(\mathrm{C}+\mathrm{N}\cos 2\zeta)}}$,

atque $\varepsilon = \delta - \sqrt{(\mathrm{C}+\mathrm{N}\cos 2\zeta)}$.

Ex illa autem aequatione ad quodvis tempus t arcum AF $= \zeta$ definiri oportet, qui si esset constans, corpus perpetuo eandem faciem centro virium F obverteret. Quatenus ergo N non est $= 0$, et angulus ζ variationi obnoxius, celeritas angularis ε est variabilis: ad quae phaenomena exploranda binos casus evolvi debet, prout fuerit vel $bb > aa$ vel $bb < aa$, quorum uterque pro ratione constantis C infinitam varietatem complectitur.

CASUS I. quo $bb > aa$.

826. Sit igitur $\frac{3gee(bb-aa)}{ccs^3} = n$ numero positivo, et dum centrum virium F celeritate δ per circulum XFY progreditur, et ad tempus t arcus FA in antecedentia vergens vocetur $= \zeta$, erit $dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{(\mathrm{C}+n\cos 2\zeta)}}$ ubi ratione constantis C sequentia annoto:

1°. Si C $= -n$, (nam valorem negativum majorem habere nequit), erit $dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{n(-1+\cos 2\zeta)}}$, ideoque angulus ζ necessario est $= 0$; scilicet punctum A cum F semper congruet, cum eoque uniformiter circa axem IA gyrabitur.

2°. Si

2°. Si C = 0, angulus ζ minor erit semirecto sive positivus sive negativus, et intra limites $+45°$ et $-45°$ vagabitur: Punctum A ergo nunquam ultra 45° a puncto F recedet, sed modo ante modo post id reperietur, qui motus ex aequatione $dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{n\cos 2\zeta}}$ colligi debet.

3°. Si C = n; et aequatio $dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{n(1+\cos 2\zeta)}}$ abit in hanc $dt = \frac{d\zeta}{\cos\zeta\sqrt{2n}}$, quae integrata dat $t = \frac{1}{\sqrt{2n}}\, l\, tang\,(45° + \frac{1}{2}\zeta)$, si sumto $t = 0$ fuerit $\zeta = 0$, unde patet demum elapso tempore infinito fieri $\zeta = 90°$.

4°. Si C $> n$, punctum A ab F tempore finito ad 90° digredietur, indeque porro in oppositum ipsi F punctum progredietur, et ad alteram partem circumeundo iterum in F revertet. Sit enim C $= mmn$, existente mm numero unitate majore, ob $dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{n(mm+\cos 2\zeta)}}$, erit proxime $dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{m} - \frac{\cos 2\zeta}{2m^3}\right)$ et integrando $t\sqrt{n} = \frac{\zeta}{m} - \frac{\sin 2\zeta}{4m^3}$: unde patet angulum ζ successive per omnes valores migrare.

5°. Hactenus posuimus $u < \delta$, ita ut motus puncti F celerior sit, quam gyratorius circa axem IC: si contrarium eveniat, tantum signum formulae $\sqrt{(C + n\cos 2\zeta)}$ mutari debet.

CASUS. II, quo $bb < aa$.

827. Sit igitur $\frac{3gee(aa-bb)}{ccs^3} = n$, erit $dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{(C - n\cos 2\zeta)}}$ et $u = \delta - \sqrt{(C - n\cos 2\zeta)}$: in quibus formulis si ponatur $\zeta = 90° + \varphi$, ut jam φ denotet distantiam poli B a centro virium F antecedentia versus sumtam, resultabunt formulae praecedentes, quae propterea eadem phaenomena exhibebunt.

COROLL. 1.

828. Si ergo ponamus centrum virium F initio cum polo A convenisse existente $bb > aa$; corpus semper eandem faciem puncto F obvertet, si celeritas angularis ipsi celeritati centri virium δ fuerit aequalis.

COROLL. 2.

829. Sin autem initio, quo F cum A conveniebat, celeritas corporis angularis u sit aliquanto major vel minor quam δ, ut differentia non superet $\sqrt{2n} = \sqrt{\frac{6gee(bb-aa)}{ccs^3}}$: polus A utrinque ab F digredietur non ultra certum intervallum, et circa punctum F quasi oscillationes peragere videbitur: in quo utique similitudo cum motu lunae libratorio cernitur.

COROLL. 3.

830. In hujusmodi ergo motu libratorio celeritas angularis corporis est maxima vel minima, dum punctum A ipsi F conjungitur, ab eo vel in consequentia vel in antecedentia digressurum: unde celeritas minima major est, quam $\delta - \sqrt{2n}$. Fieri igitur potest, ut talis motus oriatur, dum initio corpus plane nullum habuit motum gyratorium.

SCHOLION. 1.

831. Dubium ergo relinquitur nullum, quin motus libratorius lunae hac ratione oriatur; atque adeo probabile videtur, in luna eum casum locum habere, quo lunae initio vel nullus plane motus gyratorius fuerit impressus; tum autem axem lunae principalem IA, cujus respectu momentum inertiae Maa est minimum, terram versus fuisse directum. Quoniam igitur novimus, digressiones poli A ab F esse minimas, tempus harum oscillationum definire poterimus: cum enim arcus AF $= \zeta$ sit valde parvus, erit $\cos 2\zeta = 1 - 2\zeta\zeta$, ideoque $dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{(C+n-2n\zeta\zeta)}}$, unde fit integrando $t\sqrt{2n} = A\sin\frac{\zeta\sqrt{2n}}{\sqrt{(C+n)}}$. Quare cum in digressione maxima fiat $\zeta = \sqrt{\frac{C+n}{2n}}$, erit tempus, quo punctum A ab F maxime digreditur, $= \frac{\pi}{2\sqrt{2n}}$ secundis, cujus duplum $\frac{\pi}{\sqrt{2n}}$ dabit tempus, quo polus A ab F digressus iterum eodem redit. Tum autem celeritas angularis minima, quando scilicet polus A ab F in antecedentia digreditur, erit $= \delta - \sqrt{(C+n)}$: quae ut evanescat, constans C esse debe-

bet $= \delta\delta - n$, unde digressio maxima hoc casu fuerit $= \frac{\delta n}{\sqrt{2n}}$ necesse
est. Consideremus nunc etiam tempus unius revolutionis centri virium
F, quod est $= \frac{2\pi}{\delta}$ min. sec. cujus dimidium si aequale sit uni oscillatio-
ni poli A $= \frac{\pi}{\sqrt{2n}}$, fiet $\delta = \sqrt{2n}$, seu $n = \frac{\delta\delta}{2}$; ideoque C $= \frac{\delta\delta}{2} = n$:
neque ergo digressio amplius foret minima, uti assumseramus.

SCHOLION. 2.

832. Hinc igitur concludimus, motum lunae libratorium non ita
explicari posse, ut statuamus lunae initio nullum plane motum gyrato-
rium fuisse impressum ? sed potius cum, vehementer verisimile, sit, lu-
nam, si ea circa terram in orbita circulari uniformiter circumferretur,
quae est hypothesis nostri problematis, perpetuo eandem plane faciem
nobis esse obversuram, neque ullam nutationem in ea observatum iri;
in eadem hypothesi statuere debemus, lunae initio talem motum gyra-
torium fuisse impressum; ut praecise fuerit celeritas angularis $= \delta$,
nempe celeritati terrae circa lunam, et simul axem ejus IA terram ver-
sus fuisse directum. Hoc autem satis probabile videtur, cum enim
respectu axis IA momentum inertiae sit minimum, ideoque lunae, si
ejus corpus sphaeroides oblongum statuatur, axis maximus, causa esse
potuit, quae initio hunc axem ad terram direxerit, atque eidem cau-
sae fortasse tribuendum est, quod dum luna primum motum accepit,
hic ipse axis directionem suam versus terram conservaverit: quod idem
est, ac si celeritas angularis prima ipsi celeritati terrae δ fuisset aequalis.
Cum igitur luna, si circulum circa terram motu uniformi describeret,
nobis constanter eandem faciem esset obversura, ejus librationes observa-
tae motui lunae irregulari, quo modo celerius modo tardius incedit,
tribui debent. Quare etiam praecedens problema in hac hypothesi re-
solvamus, ut punctum F neque uniformiter circumferri, neque perpe-
tuo eandem distantiam a centro inertiae corporis tenere assumamus.

PROBLEMA. 94.

833. Si corpus gyretur circa suum axem principalem IC, centrum
virium autem F in plano ad eum normali neque uniformiter neque in
eadem distantia circumferatur: initio vero axis IA fuerit ad centrum
virium

virium F directus similemque motum acceperit, definire motum cor-
poris libratorium.

SOLUTIO.

Motus corporis irregularis puncti F ita exprimi poterit, ut tem-
pore t, descripserit arcum XF $= \delta t + \alpha \sin At$; ac pro distantia varia-
bili sit $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{f^3}(1 + \mathfrak{C} \cos At)$. Quare si jam celeritas angularis sit
$= \upsilon$, posito arcu XA $= \lambda$, erit $d\lambda = \upsilon dt$, et vocato arcu AF $= \zeta$ ha-
bebimus $d\upsilon = \frac{3gcc(bb-aa)dt \sin 2\zeta}{ccs^3}$. Cum igitur sit $\lambda = \delta t + \alpha \sin$
$At - \zeta$, erit $\upsilon = \delta + A\alpha \cos At - \frac{d\zeta}{dt}$, ideoque posito $\frac{3gcc(bb-aa)}{ccf^3}$
$= n$ erit

$$-AA\alpha dt \sin At - \frac{dd\zeta}{dt} = ndt(1 + \mathfrak{C} \cos At) \sin 2\zeta.$$

Quod si jam assumamus arcum ζ semper manere valde parvum, habe-
bimus hanc aequationem

$$\frac{dd\zeta}{dt^2} + AA\alpha \sin At + 2n\zeta(1 + \mathfrak{C} \cos At) = 0,$$

cui proxime satisfieri potest ponendo $\zeta = m \sin At$, unde fit $-AAm \sin$
$At + AA\alpha \sin At + 2mn \sin At = 0$, ob terminum $\mathfrak{C} \cos At$ prae 1 valde
parvum. Hinc ergo adipiscimur $m = \frac{AA\alpha}{AA-2n}$, ideoque $\zeta = \frac{AA\alpha}{AA-2n}$
$\sin At$, unde fit $\upsilon = \delta + A\alpha \cos At - \frac{A^3\alpha \cos At}{AA-2n} = \delta - \frac{2A\alpha n}{AA-2n} \cos$
At. Hic cum sit XF $= \delta t + \alpha \sin At$, pars prior δt vocatur locus me-
dius puncti F, et pars altera $\alpha \sin At$ ejus aequatio seu prosthaphaeresis,
unde patet digressionem FA huic prosthaphaeresi esse proportionalem,
eamque majorem ob α numerum positivum. Ita evanescente prosthaphae-
resi, seu quoties locus verus cum medio congruit, toties corpus ean-
dem faciem centro virium F obvertit, neglectis quidem minoribus in-
aequalitatibus, quas ratio quantitatis $\mathfrak{C}$ inveheret. Verum haec fusius
prosequi, atque accuratius determinare sine majori astronomiae cogni-
tione haud convenit.

 C O:

COROLL. 1.

834. Si ergo inaequalitas motus puncti F ita exprimitur, ut tempore t conficiat arcum $XF = \delta t + \alpha \sin At$, eodem tempore fit arcus librationis $FA = \zeta = \frac{AA\alpha}{AA-2n} \sin At$, existente $n = \frac{3gee(bb-aa)}{ccf^3}$: ubi f distantiam mediam centri virium F denotat.

COROLL. 2.

835. Si hunc arcum librationis ζ accuratius definire velimus, variabilitas distantiae $FI = s$ etiam in computum ingreditur, ita ut si sit $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{f^3}(1 + \varepsilon \cos At)$, reperiatur $\zeta = \frac{AA\alpha}{AA-2n} \sin At + \frac{n\alpha\varepsilon}{4(AA-2n)} \sin 2At$.

COROLL. 3.

836. Simili modo si generalius fuerit arcus tempore t confectus $XF = C + \delta t + \alpha \sin(At + \mathfrak{A}) + \alpha' \sin(A't + \mathfrak{A}')$ &c. et $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{f^3}(1 + \varepsilon \cos(At + \mathfrak{A}) + \varepsilon' \cos(A't + \mathfrak{A}')$ &c.$)$, invenitur proxime arcus librationis

$$FA = \zeta = \frac{AA\alpha}{AA-2n} \sin(At + \mathfrak{A}) + \frac{A'A'\alpha'}{A'A'-2n} \sin(A't + \mathfrak{A}') + \&c.$$

SCHOLION. 1.

837. Hic jam perinde est, sive numerus $n = \frac{3gee(bb-aa)}{ccf^3}$ sit positivus sive negativus: neque conditio superius requisita, ut pro arcu ζ evanescente esse debeat $bb > aa$, amplius locum habet. Casu enim (827.) si ponatur $C = n$ fit $dt\sqrt{2n} = \frac{d\zeta}{\sin\zeta}$ et $t\sqrt{2n} = l\,tang\,\frac{1}{2}\zeta$ − Const. unde si initio $t = 0$, fuerit $\zeta = 0$, constans addenda fit infinita, ideoque nonnisi elapso tempore infinito punctum A ab F digreditur. Quare dum punctum F uniformiter in circulo circumfertur, quicunque axis principalis initio ad punctum F fuerit directus, cum eoque pari celeritate gyrari coeperit, is ei constanter manebit annexus. Ac si deinceps punctum F motum suum vel intendat vel remittat, polus A ab eo

eo digredietur secundum formulas inventas. Quin etiam patet, si fuerit $n = 0$, seu $bb = aa$, quo casu corpus uniformiter circa polum C gyraretur, digressiones ζ perpetuo differentiae inter locum medium et verum puncti F futuras esse aequales: At si numerus n sit positivus seu $bb > aa$, digressiones ista differentia essent majores, contra autem si $bb < aa$ minores. Ceterum numerus A inaequalitatem motus definiens, ex tempore quo inaequalitas $\sin At$ ad eosdem valores revertitur, colligi potest, quod si eveniat post tempus $= \Theta$ min. sec. erit $A\Theta = 2\pi$ ideoque $A = \frac{2\pi}{\Theta}$.

SCHOLION. 2.

838. Hinc patet motum libratorium lunae, quo non semper eandem faciem terrae obvertit, potissimum defectui uniformitatis motus, quo terra circa lunam, seu quod idem est, luna circa terram circumferri videtur, tribui debere; neque huc inaequalitatem momentorum principalium in luna multum conferre, quoniam ea tantum coefficientes terminorum afficiuntur. Libratio scilicet adesse posset, etiamsi luna esset corpus sphaericum, seu ejus momenta principalia aequalia. Verum tum nulla ratio patet, cur lunae initio praecise tantus motus gyratorius fuisset impressus, quantum formulae nostrae exhibent: sin autem luna sit corpus sphaeroidicum sive oblongum sive compressum, rationem quodammodo intelligere licet, ob quam initio quidam axis principalis reliquis notabilior terram respicere inceperit: utrum autem sit sphaeroides oblongum an compressum? ex quantitate librationis dijudicari licet, quae si excedat differentiam inter locum lunae verum ac medium, indicet esse $bb > aa$, seu axem lunae terrae obversum momento minimo gaudere. Verum hic non est locus quicquam definiendi, cum etiam luna ad solem urgeatur, indeque libratio turbetur: praeterea vero quoque uti luna non in eodem plano circa terram movetur, ita etiam vicissim motus centri virium F non in eodem plano circa lunam absolvetur, ex quo haec investigatio vehementer intricata redderetur, ut in tractatu generali locum invenire nequeat. Ceterum hoc semper insigne foret mysterium, quod luna initio praecise tantum motum gyratorium, quantum hic librationis casus postulat, acceperit: si enim vel majorem vel minorem accepisset, labente tempore sane jam facies opposita nobis obverti debuisset. Interim tamen hoc phaenomenon praescriptum celeritatis gradum non tam exacte postulat, quoniam etsi

fuerit tantillo vel major vel minor, librationes tamen [illegible] problema praecedens contingere [illegible], unde illud mysterium haud leviter illustratur. Talis autem latitudo admitti nequit, nisi casu quo $bb > aa$,

seu $n > 0$; aequatio enim differentialis [illegible] $\frac{ddζ}{[illegible]}$ [illegible] $\sin At + 2nζ (1 + 6$ $\cos At) = 0$ generalius accedente constante arbitraria ita integrari potest,

ut sit $ζ = C \sin t γ^{-2n} + \frac{AAa [illegible]}{AA - 2n}$ [illegible], unde fit celeritas angularis x

$= \delta - Cγ^{-2n}. \cos t γ^{-2n} - \frac{2Aan}{AA-2n} \cos At$; ubi etiam pro $tγ^{-2n}$ scribi

potest $(t + γ) γ^{-2n}$, ita ut C et $γ$ pro libitu [illegible] queant. Quare cum initio $t = 0$ fuerit $ζ = C \sin γ. γ^{2n}$, dum celeritas angularis impressa sit

$= \delta - Cγ^{-2n}. \cos γ γ^{2n} - \frac{2Aan}{AA-2n}$, atque C sit fractio satis parva [illegible] motus libratorius sequetur, ut constanter pars quaedam lunae nobis maneat abscondita. At vero etiam fractio $\frac{[illegible]A\alpha}{AA-2n}$ esse debet valde parva, ut pro $\sin ζ$ recte scribere liceat $ζ$.

SCHOLION. 3.

839. Explicatio ergo motus libratorii lunae huc redit, ut statuamus, lunae corpus esse sphaeroides oblongum, cujus major axis, vel is cujus respectu momentum inertiae est minimum, initio terram versus directus, lunae autem tum circa axem ad planum orbitae terrestris normalem impressus fuerit motus gyratorius, cujus celeritas angularis propemodum motui lunae medio fuerat aequalis, in quo quidem insignis latitudo locum habere potest. Quin etiam sufficit, dummodo axis gyrationis propemodum fuerit ad planum orbitae terrestris normalis, et axis major propemodum tantum terram versus directus: namque etiam his casibus nutatio disci lunae reciproca evenire debet, etiamsi eam haud facile determinare liceat. Quare hoc casu relicto ad alias motus gyratorii perturbationes a viribus centripetis ortas progrediamur, unde nutatio axis terrae explicari possit.

PROBLEMA. 95.

840. Si corpus gyretur circa axem, qui alicui axi principali fuerit proximus, ac simul actioni centri virium subjiciatur, determinare mutationem momentaneam, tam in ipso axe gyrationis quam in celeritate angulari productam.

SOLUTIO.

Sint A, B, C, terni poli principales corporis, eorumque respectu momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc; corpus autem nunc gyretur circa polum O ipsi A proximum celeritate angulari x in sensum ABC: unde positis ternis arcubus $OA = \alpha$, $OB = 6$, $OC = γ$, erit arcus α valde parvus, at 6 et $γ$ minime a quadrante discrepabunt, ita ut sit $\cos \alpha =$ Fig. 107.
1 et $\cos 6 = \cos γ = 0$. Quare posito $x = x \cos \alpha$, $y = x \cos 6$ et $z = x \cos γ$, hae litterae y et z pro evanescentibus haberi poterunt, neque tamen earum differentialia [illegible], eritque $dy = -x d6$ et $dz = -x dγ$. Transeat jam recta ad [illegible] ducta per punctum F, sintque arcus $AF = ζ$, $BF = η$, $CF = θ$, distantia autem centri virium ponatur $= s$, ejusque vis attrahens tanta, ut in distantia $= e$ aequetur gravitati. Ab actione ergo hujus vis quantitates x, y, z tempusculo dt ita immutabuntur, ut sit

$$dx + \frac{cc - bb}{aa} yzdt = \frac{6gee(cc-bb)dt \cos η \cos θ}{aas^3}$$

$$dy + \frac{aa-cc}{bb} xzdt = \frac{6gee(aa-cc)dt \cos ζ \cos θ}{bbs^3}$$

$$dz + \frac{bb-aa}{cc} xydt = \frac{6gee(bb-aa)dt \cos ζ \cos η}{ccs^3}$$

Cum nunc sit $dx = dx$, ob y et z evanescentes, erit

$$dx = \frac{6gee(cc-bb)dt \cos η \cos θ}{aas^3}$$

$$-x d6 = \frac{6gee(aa-cc)dt \cos ζ \cos θ}{bbs^3}$$

$$-x dγ = \frac{6gee(bb-aa)dt \cos ζ \cos η}{ccs^3}$$

Quam variationem quo diligentius exploremus, quaeramus arcum FO, at ob $\sin BAO = \frac{\cos γ}{\sin \alpha}$, $\cos BAO = \frac{\cos 6}{\sin \alpha}$; $\sin BAF = \frac{\cos θ}{\sin ζ}$; $\cos BAF = \frac{\cos η}{\sin ζ}$ fit $\sin FAO = \frac{\cos γ \cos η - \cos 6 \cos θ}{\sin \alpha \sin ζ}$, $\cos FAO = \frac{\cos 6 \cos η + \cos γ \cos θ}{\sin \alpha \sin ζ}$

hinc

hincque $\cos FO = \cos \epsilon \cos \eta + \cos \gamma \cos \theta + \cos \alpha \cos \zeta$: cujus differentiale dat,

$$(Fo - FO) \sin FO = d\epsilon \cos \eta + d\gamma \cos \theta \text{ ob } \sin \epsilon = \sin \gamma = 1 \text{ et } \sin \alpha = 0.$$

Quare cum sit $FO = FA = \zeta$ habebitur

$$(Fo - FO) \sin \zeta = -\frac{6geedt \cos \zeta \cos \eta \cos \theta}{8s^3}\left(\frac{aa-cc}{bb} + \frac{bb-aa}{cc}\right)$$

$$\text{seu } Fo - FO = \frac{6gee(cc-bb)(bb+cc-aa)dt \cos \zeta \cos \eta \cos \theta}{8bbccs^3}$$

$$\tang BAO = \frac{\cos \gamma}{\cos \epsilon}$$

Pro situ autem puncti o inveniendo habemus differentiando: $\frac{-OAo}{\cos BAO^2} = \frac{-d\gamma \cos \epsilon \sin \gamma + d\epsilon \cos \gamma \sin \epsilon}{\cos \epsilon^2}$ ideoque

$$OAo = \frac{d\gamma \cos \epsilon \sin \gamma - d\epsilon \cos \gamma \sin \epsilon}{\sin \alpha^2} \text{ et } Oo = \sqrt{(d\epsilon^2 + d\gamma^2)}.$$

Tum vero cum sit $d\alpha = \frac{-d\epsilon \sin \epsilon \cos \epsilon - d\gamma \sin \gamma \cos \gamma}{\sin \alpha \cos \alpha}$ oritur $\tang OoA = \frac{d\epsilon \sin \epsilon \cos \gamma - d\gamma \sin \gamma \cos \epsilon}{d\epsilon \sin \epsilon \cos \epsilon + d\gamma \sin \gamma \cos \gamma}$ ob $\cos \alpha = 1$, seu $\tang OoA = \frac{d\epsilon \cos \gamma - d\gamma \cos \epsilon}{d\epsilon \cos \epsilon + d\gamma \cos \gamma}$.

COROLL. 1.

841. Si momenta inertiae respectu axium IB et IC sint aequalia seu $bb = cc$, primo fit $ds = 0$, seu celeritas angularis nullam patitur mutationem: tum vero erit

$$d\epsilon = \frac{-6gee(aa-cc)dt \cos \zeta \cos \theta}{8ccs^3} \text{ et } d\gamma = \frac{6gee(aa-cc)dt \cos \zeta \cos \eta}{8ccs^3}$$

ita ut sit $d\epsilon \cos \eta + d\gamma \cos \theta = 0$.

COROLL. 2.

842. Hoc porro casu $bb = cc$, fit $Fo - FO = 0$, seu polus gyrationis O ita transfertur in o, ut spatiolum Oo sit normale ad arcum FO: est hoc spatiolum $Oo = \frac{6gee(aa-cc)dt \cos \zeta \sin \zeta}{8ccs^3}$, sed jam quaeritur utrum ab O versus FA, an contra sit directum.

CO-

COROLL. 3.

843. Cum autem sit $\sin FO : \sin FAO = \sin AC : \sin AFO$ erit $\sin AFO = \frac{\cos \gamma \cos \eta - \cos \epsilon \cos \theta}{\sin \zeta \sin FO}$. Iam quia FO non variatur, fiet secundum figuram, ubi O ad AF accedere sumitur:

$$-OFo.\cos AFO = \frac{-d\gamma \cos \eta + d\epsilon \cos \theta}{\sin \zeta \sin FO} = \frac{-6gee(aa-cc)dt \sin \zeta \cos \zeta}{8ccs^3 \sin FO}$$

ideoque $OFo = \frac{6gee(aa-cc)dt \sin \zeta \cos \zeta}{8ccs^3 \sin FO \cos AFO}$. Cum igitur sit angulus AFO infinite parvus, et $\cos AFO = 1$, et $FO = FA = \zeta$, erit $OFo = \frac{6gee(aa-cc)dt \cos \zeta}{8ccs^3}$. Ergo si $aa > cc$, punctum O ad arcum AF accedit, vel circa A in sensum CB procedit.

SCHOLION.

843. Casus hic quo $bb = cc$, ita ut corpus duo habeat momenta principalia respectu axium IB et IC aequalia, et propemodum circa axem singularem IA gyretur celeritate angulari s in sensum BC, praecipue locum habet in motu vertiginis terrae, ideoque meretur plenius evolvi. Quod quo facilius fieri possit, cum sit $AO = \alpha$, ponatur angulus $BAO = \varrho$ erit $90 - \epsilon = \alpha \cos \varrho$ et $90 - \gamma = \alpha \sin \varrho$, unde $\epsilon = 90° - \alpha \cos \varrho$ et $\gamma = 90° - \alpha \sin \varrho$. Quodsi ergo brevitatis gratia ponamus $\frac{3gee(aa-cc)}{8ccs^3} = N$, ut sit $d\epsilon = -2Ndt \cos \zeta \cos \theta$ et $d\gamma = 2N.\cos \zeta \cos \eta$, erit $-d\alpha \cos \varrho + \alpha d\varrho \sin \varrho = -2Ndt \cos \zeta \cos \theta$ et $-d\alpha \sin \varrho - \alpha d\varrho \cos \varrho = 2Ndt \cos \zeta \cos \eta$; unde colligitur

$$d\alpha = 2Ndt \cos \zeta (\cos \varrho \cos \theta - \sin \varrho \cos \eta)$$

$$\text{et } \alpha d\varrho = -2Ndt \cos \zeta (\sin \varrho \cos \theta + \cos \varrho \cos \eta).$$

Si jam centro virium F motum quemcunque tribuamus, etiam tamdiu his formulis uti poterimus, quamdiu arcus $AO = \alpha$ manet tam parvus, ut contractiones adhibitae locum habere possint.

PROBLEMA. 96.

844. Si corpus habeat duo momenta principalia aequalia, ac circa tertium axem singularem propemodum gyretur, centrum autem virium uniformiter in circulo circa centrum inertiae corporis circumferatur, ad quodvis tempus situm et motum corporis determinare.

SO-

SOLUTIO.

Fig. 108. Progrediatur centrum virium per circulum maximum XFY celeritate angulari $= \delta$, ac tempore elapſo $= t$ ex X pervenerit in F, ut ſit $XF = \delta t$. In ſphaera igitur conſideretur circulus fixus XZY, in quo ſit Z polus circuli XFY, ut ſit angulus $XZF = \delta t$. Nunc autem verſetur axis corporis ſingularis in A, ponaturque angulus $XZA = \lambda$, et arcus $ZA = p$: tum vero corporis quaſi primus meridianus ſit AB, diſtans ab arcu ZA angulo $ZAB = q$. Porro gyretur nunc corpus circa axem IO, ut ſit arcus minimus $AO = \alpha$, et angulus $BAO = \varrho$, celeritate angulari $= \varepsilon$, quoniam jam novimus eam fore conſtantem, et punctum A abibit tempuſculo dt in a, ut ſit $Aa = \varepsilon dt \sin \alpha = \alpha\varepsilon dt$ et angulus aAO rectus: quare ob $ZAO = q + \varrho$ erit $ZAa = q + \varrho - 90^\circ$, ideoque demiſſo $a\alpha$ perpendiculo ad ZA, fiet $a\alpha = -\alpha\varepsilon dt \cos(q+\varrho)$ et $A\alpha = \alpha\varepsilon dt \sin(q+\varrho)$, unde colligimus $dp = -\alpha\varepsilon dt \sin(q+\varrho)$ et $d\lambda = \frac{\alpha\varepsilon dt \cos(q+\varrho)}{\sin p}$: deinde vero quia corpus quaſi circa polum A gyratur, erit $dq = \varepsilon dt$. Denique in triangulo AZF ob $ZA = p$; $ZF = 90^\circ$ et $AZF = \lambda - \delta t$, reperitur $\cos FA = \cos\zeta = \sin p \cos(\lambda - \delta t)$; et $\cot ZAF = -\cos p \cot(\lambda - \delta t)$. Ponamus brevitatis gratia angulum ZAF $= \varphi$, ut ſit $\tang \varphi = \frac{-\tang(\lambda - \delta t)}{\cos p}$, erit $BAF = \varphi - q$; hincque $\cos BF = \cos(\varphi - q)\sin\zeta = \cos\eta$ et $\cos CF = \sin(\varphi - q)\sin\zeta = \cos\theta$. Eſt vero $\sin\varphi \sin\zeta = \sin(\lambda - \delta t)$ et $\cos\varphi \sin\zeta = -\cos p \cos(\lambda - \delta t)$,

ideoque $\cos\eta = -\cos p \cos q \cos(\lambda - \delta t) + \sin q \sin(\lambda - \delta t)$

et $\cos\theta = \cos q \sin(\lambda - \delta t) + \cos p \sin q \cos(\lambda - \delta t)$.

Unde ſi ponatur $\frac{3gee(aa-cc)}{gccs^3} = N$, colligitur fore

$$d\alpha = 2Ndt \sin p \cos(\lambda - \delta t)(\cos p \sin(q+\varrho)\cos(\lambda - \delta t) + \cos(q+\varrho)\sin(\lambda - \delta t))$$

$$\text{et } \alpha d\varrho = -2Ndt \sin p \cos(\lambda - \delta t)(\sin(q+\varrho)\sin(\lambda - \delta t) - \cos p \cos(q+\varrho)\cos(\lambda - \delta t));$$

quibus ſi adjungamus $dq = \varepsilon dt$ et $dp = -\alpha\varepsilon dt \sin(q+\varrho)$, ex his quatuor aequationibus quatuor quantitates p, q, α et ϱ definiri oportet. Binae autem priores transformantur in has ſimpliciores:

$$d\alpha \cos(q+\varrho) - \alpha d\varrho \sin(q+\varrho) = 2Ndt \sin p \sin(\lambda - \delta t)\cos(\lambda - \delta t)$$

$$d\alpha \sin(q+\varrho) + \alpha d\varrho \cos(q+\varrho) = 2Ndt \sin p \cos p (\lambda - \delta t)^2.$$

Cum ſit $q = \varepsilon t + C$, ponamus $q + \varrho = \omega$, ut ſit $\varrho = \omega - q$, et adjungendo aequationes priores quaternas adhuc habebimus aequationes:

dp

$$dp = -\varepsilon\alpha dt \sin\omega, \quad d\lambda = \frac{\varepsilon\alpha dt \cos\omega}{\sin p}$$

$$d\alpha \cos\omega - \alpha d\omega \sin\omega + \varepsilon\alpha dt \sin\omega = 2Ndt \sin p \sin(\lambda - \delta t)\cos(\lambda - \delta t)$$

$$d\alpha \sin\omega + \alpha d\omega \cos\omega - \varepsilon\alpha dt \cos\omega = 2Ndt \sin p \cos p \cos(\lambda - \delta t)^2.$$

ac ſi inſuper ponamus $\lambda - \delta t = \varphi$, quae littera cum praecedente φ non eſt confundenda, erunt:

$$dp = -\varepsilon\alpha dt \sin\omega; \quad d\varphi = -\delta dt + \frac{\varepsilon\alpha dt \cos\omega}{\sin p}$$

$$d\alpha \cos\omega - \alpha d\omega \sin\omega + \varepsilon\alpha dt \sin\omega = 2Ndt \sin p \sin\varphi \cos\varphi$$

$$d\alpha \sin\omega + \alpha d\omega \cos\omega - \varepsilon\alpha dt \cos\omega = 2Ndt \sin p \cos p \cos\varphi^2.$$

Ponamus porro $\alpha \cos\omega = x$ et $\alpha \sin\omega = y$, ut habeamus has aequationes

$$1^\circ.\ dp = -\varepsilon y dt, \quad 2^\circ.\ d\lambda = \frac{\varepsilon x dt}{\sin p}, \quad 3^\circ.\ d\varphi = -\delta dt + \frac{\varepsilon x dt}{\sin p}.$$

$$4^\circ.\ dx + \varepsilon y dt = Ndt \sin p \sin 2\varphi$$

$$5^\circ.\ dy - \varepsilon x dt = Ndt \sin p \cos p + Ndt \sin p \cos p \cos 2\varphi,$$

ubi cum x et y ſint quantitates minimae, ad veritatem ſatis appropinquabimus, ſi in binis poſtremis aequationibus arcum p et angulum λ ut conſtantes ſpectemus. Tribuamus ergo illis valores quaſi medios, ſitque proxime $p = n$, et $\lambda = m$, ideoque $d\varphi = -\delta dt$, ut habeamus aequationes:

$$4^\circ.\ dx - \frac{\varepsilon y d\varphi}{\delta} = -\frac{Nd\varphi}{\delta}\sin n \sin 2\varphi$$

$$5^\circ.\ dy + \frac{\varepsilon x d\varphi}{\delta} = -\frac{Nd\varphi \sin n \cos n}{\delta} - \frac{Nd\varphi \sin n \cos n \cos 2\varphi}{\delta}$$

quibus evidens eſt ſatisfieri poſſe ponendo

$x = E + F \cos 2\varphi$ et $y = G \sin 2\varphi$,

ac hi coefficientes ita definiuntur, ut ſit

$$E = \frac{-N \sin n \cos n}{\varepsilon}; \quad F = \frac{-N \sin n(2\delta + \varepsilon \cos n)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta}; \quad G = \frac{N \sin n(2\delta \cos n + \varepsilon)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta}.$$

Tum vero quia haec ſolutio tantum eſſet particularis, ponatur $x = E + F$

cof

$\cos 2\phi + u$ et $y = G \sin 2\phi + v$, orienturque hae aequationes $du - \frac{\varepsilon v\, d\phi}{\delta} = 0$ et $dv + \frac{\varepsilon u\, d\phi}{\delta} = 0$, ex quibus elicitur $u = b \sin \frac{\varepsilon}{\delta}(\phi + \zeta)$, et $v = b \cos \frac{\varepsilon}{\delta}(\phi + \zeta)$, ubi b et ζ sunt constantes arbitrariae. Quocirca habebimus

$$x = a \cos \omega = \frac{-N \sin n \cos n}{\varepsilon} - \frac{N \sin n(\varepsilon \cos n + 2\delta)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta} \cos 2\phi + b \sin \frac{\varepsilon}{\delta}(\phi + \zeta)$$

$$y = a \sin \omega = \frac{N \sin n(\varepsilon + 2\delta \cos n)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta} \sin 2\phi + b \cos \frac{\varepsilon}{\delta}(\phi + \zeta)$$

ubi ϕ exprimit angulum FZA $= \lambda - \delta t$. Deinde ob $dp = -\varepsilon y\, dt = \frac{\varepsilon y\, d\phi}{\delta}$, nanciscimur integrando:

$$p = n - \frac{\varepsilon N \sin n(\varepsilon + 2\delta \cos n)}{2\delta(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta)} \cos 2\phi + b \sin \frac{\varepsilon}{\delta}(\phi + \zeta) = \text{ZA}.$$

Denique aequatio $d\lambda = \frac{\varepsilon x\, dt}{\sin p} = \frac{-\varepsilon x\, d\phi}{\delta \sin n}$ praebebit:

$$\lambda = m - Nt \cos n + \frac{\varepsilon N(\varepsilon \cos n + 2\delta)}{2\delta(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta)} \sin 2\phi + \frac{b}{\sin n} \cos \frac{\varepsilon}{\delta}(\phi + \zeta) = \text{XZA}.$$

COROLL. 1.

845. Cum sit ex nostris positionibus $a = \sqrt{(xx + yy)}$, patet successu temporis distantiam AO $= a$ non ultra certum limitem augeri posse, qui si fuerit satis exiguus, hypothesi nostra tuto utimur. Simul vero patet hanc distantiam a nunquam plane evanescere, nisi forte fiat tam $x = 0$ quam $y = 0$.

COROLL. 2.

846. Neglectis inaequalitatibus ab angulis $2\phi = 2$ FZA et $\frac{\varepsilon}{\delta}(\phi + \zeta)$

$(\phi + \zeta)$ pendentibus, polus Z uniformiter circa punctum Z in antecedentia regreditur celeritate angulari $= N \cos n$, si quidem $N = \frac{3g\varepsilon\varepsilon(aa - cc)}{\varepsilon c c s^3}$ fuerit numerus positivus, sicque integram revolutionem absolvet tempore $= \frac{2\pi}{N \cos n}$ min. sec. dum centrum virium F revolutionem absolvit tempore $= \frac{2\pi}{\delta}$, et ipsum corpus tempore $= \frac{2\pi}{\varepsilon}$.

COROLL. 3.

847. Praeterea vero tam distantia ZA, quam angulus XZA exiguas inaequalitates patientur, partim ab angulo $2\phi = 2$FZA partim ab angulo $\frac{\varepsilon}{\delta}(\phi + \zeta) = C - u$, hoc est, partim a motu centri virium, partim a motu vertiginis ipsius corporis pendentes. Quare si ponamus angulum ZAB $= \psi$ erit

$$\text{ZA} = n - \frac{\varepsilon N \sin n(\varepsilon + 2\delta \cos n)}{2\delta(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta)} \cos 2\phi - b \sin(\psi + \zeta)$$

$$\text{XZA} = m - Nt \cos n + \frac{\varepsilon N(\varepsilon \cos n + 2\delta)}{2\delta(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta)} \sin 2\phi + \frac{b}{\sin n} \cos(\psi + \zeta).$$

SCHOLION. 1.

848. Sumsimus hic corpus in eundem sensum gyrari, in quem centrum virium F circa id circumfertur, quemadmodum fit in terra, quae ab occidente in orientem gyratur, in quem sensum etiam sol et luna motu proprio promoveri cernuntur. Deinde etiam spectavimus numerum $N = \frac{3g\varepsilon\varepsilon(aa - cc)}{\varepsilon c c s^3}$ ut positivum, seu corpus ita comparatum, ut ejus momentum inertiae respectu axis, circa quem proxime gyratur, sit maximum $= Maa$, dum respectu axium in aequatore sumtorum est minimum $= Mcc$, qua proprietate terram esse praeditam observationes circa figuram terrae sphaeroidicam compressam institutae declarant. In hac ergo constitutione axis terrae circa polum eclipticae Z in antecedentia regredi debet, quemadmodum etiam per observationes constat. Praeterea vero neque ille

iste axis motus est aequabilis, neque ejus distantia a polo elepticae Z constans, sed duplici inaequalitati est obnoxia, quarum altera ab angulo FZA $= \phi$ duplicato pendet, altera vero ab ipso motu vertiginis corporis, quae posterior major minorve esse potest, prout initio polus gyrationis O tam ratione poli A quam ratione situs centri virium F fuerit constitutus. Scilicet cum ω denotet angulum ZAO, si initio vel dato saltem tempore innotuerint quantitates AO $= \alpha$, ZAO $= \omega$, FZA $= \phi$, et ZAB $= \psi$, sumto AB pro corporis primo meridiano, ex his aequationibus

$$\alpha \cos\omega + \frac{N \sin n \cos n}{\varepsilon} + \frac{N \sin n(\varepsilon \cos n + 2\delta)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta} \cos 2\phi + b \sin(\psi + \zeta) = 0$$

$$\alpha \sin\omega - \frac{N \sin n(\varepsilon + 2\delta \cos n)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta} \sin 2\phi - b \cos(\psi + \zeta) = 0$$

binae constantes b et ζ definiuntur. Nisi ergo prodeat $b = 0$, polus A inaequalitates etiam diurnas patietur, ita ut intervallo cujusque revolutionis ad polum eclipticae alternatim accedat ab eoque recedat, simulque alternatim in antecedentia et consequentia nutet. Ob hanc scilicet inaequalitatem polus A singulis revolutionibus circulum describeret: cujus centrum cum quiescat, id potius pro vero polo terrae habebitur, ita ut hae inaequalitates non percipiantur. Tum vero reliquae inaequalitates ab actione centri virium pendentes non hunc polum apparentem, sed ipsum polum axis principalis afficient.

SCHOLION. 2.

849. Praetermissis autem his inaequalitatibus diurnis, quibus forte nutatio axis afficitur, si fuerit $\alpha\alpha > \varepsilon\varepsilon$ corpusque in eundem sensum gyratur ac centrum virium, phaenomena ita se habebunt;

Primo distantia poli A a puncto Z, quod est vertex seu polus orbitae, quam centrum virium describit, erit variabilis ac minima quidem deprehendetur, si angulus FZA vel evanescit, vel fit 180°; maxima autem, si iste angulus fuerit vel 90°, vel 270°, differentia inter maximam minimamque distantiam existente $= \frac{\varepsilon N \sin n(\varepsilon + 2\delta \cos n)}{\delta(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta)}$.

Secundo polus A circa punctum Z in antecedentia motu non uniformi regredietur, qui si ut moris est per motum medium prostaphaeresi corrigendum repraesentetur, motu medio regredietur celeritate angulari $= N \cos n$, tum vero correctio seu prostaphaeresis maxima erit $= \frac{\varepsilon N(\varepsilon \cos n + 2\delta)}{2\delta(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta)}$, addenda si angulus FZA sit vel 45° vel 225°, subtrahenda vero si iste angulus fiat vel 135° vel 315°, ubi notandum est, hunc angulum FZA $= \phi$ reperiri, si longitudo centri virium F a longitudine poli A subtrahatur. Ceterum hic celeritatem motus vertiginis ε prae celeritate centri virium δ ut multo majorem spectamus: si enim esset $\varepsilon = 2\delta$, conationes inventae adeo in infinitum abirent; verum hoc casu integratio nostrarum aequationum singulari modo esset instituenda, ponendo $x = E + F \cos 2\phi + A\phi \sin 2\phi$ et $y = G \sin 2\phi + B\phi \cos 2\phi$, reperireturque $E = \frac{-N \sin n \cos n}{2\delta}$, $A = B = \frac{-N \sin n(1 + \cos n)}{2\delta}$ et $F + G = \frac{N \sin n(1 - \cos n)}{4\delta}$. Verum quia hic x et y continuo crescerent, mox hypothesin factam transgrederentur, totusque calculus non amplius locum haberet. Quare nisi $\varepsilon\varepsilon$ notabiliter discrepet a $4\delta\delta$, formulae nostrae adhiberi nequeunt.

CAPUT XVII.

PLENIOR EXPLICATIO MOTUS TURBINUM SUPER PLANO HORIZONTALI SEMOTA FRICTIONE.

DEFINITIO. 14.

850. **A**xis *turbinis* est recta AF ex cuspide F per centrum inertiae I ducta, qui simul sit ejus axis principalis singularis, ita ut respectu omnium axium ad eum normalium IB momenta inertiae sint inter se aequalia. Fig. 109.

COROLL. 1.

851. Aptissima ergo turbinis figura est tornata, quae generatur, si figura quaecunque circa axem AF revolvitur; dummodo ea in cuspidem F desinat, qua super plano horizontali incedere possit.

COROLL. 2.

852. In turbine autem ſequentes quantitates cognitas eſſe oportet, quae in calculum ingrediuntur: 1°. ejus maſſam vel pondus, quod ſit = M. 2°. Diſtantiam cuſpidis a centro inertiae, quae ſit IF = f; 3°. Momentum inertiae reſpectu axis AF, quod ſit = Maa et 4°. Momentum inertiae reſpectu omnium axium ad illum normalium, quod ſit = Mcc.

COROLL. 3.

853. Cum ergo ſupra in genere momenta inertiae principalia cujusque corporis poſuerimus Maa, Mbb, et Mcc, hic bina poſteriora aequalia ſtatuemus, ut ſit $bb = cc$.

COROLL. 4.

854. Dum igitur turbo cuſpide F ſuper plano horizontali incedit, ejus axis AF non ultra certum terminum ad horizontem inclinari poteſt, qui habebitur ducendo ab F ad corpus turbinis rectam extremam Fk, tum enim angulus AFk dabit illum terminum.

SCHOLION.

855. Supra tantum ejusmodi turbines conſideravimus, in quibus omnia momenta inertiae inter ſe eſſent aequalia; quae conditio nimium erat limitata. Nunc igitur motum turbinum in genere exploremus, ſiquidem conditio, quod AF ſit axis principalis, et reſpectu binorum reliquorum axium momenta inertiae aequalia, cum indole turbinum neceſſario conjuncta videtur. Principia autem, unde hujus motus determinatio eſt petenda, ſupra in Cap. 14. jam ſunt expoſita, ubi vidimus totum negotium a preſſione, qua turbo, dum movetur, cuſpide ſua F plano horizontali innititur, pendere. Quae preſſio, etiamſi nonniſi ſolutione ad finem perducta cognoſci queat, tamen ſtatim ab initio in calculum ingreditur. Sit ergo Π iſta preſſio, cujus directio a cuſpide F ſemper verticaliter ſurſum tendit; atque de hac preſſione ſupra §. 767 oſtendimus, ſi inclinatio axis AF ad horizontem ponatur = θ, quae tempuſculo dt ſuo differentiali $d\theta$ creſcat, ſumto elemento dt conſtante, fore $\frac{dd\theta\, cos\theta - d\theta^2 ſi\theta}{dt^2} = \frac{2g}{f}\left(\frac{\Pi}{M} - 1\right)$; ſive $\frac{\Pi}{M} = 1 +$

$$\frac{f(dd\theta\, coſ\theta - d\theta^2 ſi\theta)}{2g\,dt^2} = 1 + \frac{fd.d\theta\, coſ\theta}{2g\,dt^2} = 1 + \frac{fdd.ſin\theta}{2g\,dt^2}.$$

Cum igitur turbo praeter hanc vim Π a gravitate tantum urgeri ſtatuatur,

ejus centrum inertiae I alium motum recipere nequit, niſi in directione verticali vel aſcendendo vel deſcendendo, dum ejus diſtantia a plano horizontali eſt = f ſin θ. Sin autem initio ei inſuper quidam motus horizontalis fuerit impreſſus, eum conſtanter aequabilem conſervabit, ſicque tota quaeſtio ad ſolum motum gyratorium reducitur. Quare cum gravitas ad eum nihil conferat, ejusque perturbationes omnes a ſola preſſione Π oriantur, hujus vis momenta reſpectu axium principalium turbinis definiri oportet.

PROBLEMA. 97.

856. Si turbo teneat ſitum quomodocunque inclinatum ad horizontem, ſimulque detur preſſio Π, qua ejus cuſpis horizontali plano innititur, definire hujus vis momenta reſpectu axium principalium turbinis.

SOLUTIO.

Deſcripta ſphaera circa centrum inertiae turbinis I, in qua ſit Z punctum verticale, axis turbinis autem ſphaeram trajiciat in punctis A et F, bini reliqui vero axes principales pertingant ad ſphaerae puncta B et C; etſi enim hi duo axes per ſe non determinantur, tamen certas duas lineas tam inter ſe quam ad axem AF normales accipi convenit, ex quibus deinceps ſitus turbinis ad quodvis tempus definiatur. Ponantur arcus circulorum maximorum ZA = l, ZB = m, et ZC = n, erit $l = 90° - \theta$ denotante θ inclinationem axis AF ad horizontem. Cum jam cuſpis F, cujus diſtantia a centro inertiae I eſt FI = f, urgeatur in directione verticali FΠ vi = Π, ut ſit angulus AFΠ = l, reſolvatur ea ſecundum directiones FA et FV, quarum haec FV ſit in plano verticali AZF ad AF normalis, erit vis ſec. FA = Π $coſ\, l$, et vis ſec. FV = Π $ſin\, l$, quarum illa per centrum inertiae tranſiens nulla praebet momenta. Haec vero vis FV = Π $ſin\, l$ reſpectu axis AF quoque nullum praebet momentum; at reſpectu axis IB dat momentum = Π f $ſin\, l$ $ſin$ VFB in ſenſum AC, ſimilique modo reſpectu axis IC momentum = Π f $ſi\, l$ $ſi$ VFC in ſenſum BA. Verum eſt ang. VFB = ZAB, et $ſin$ ZAB = $-$ $coſ$ ZAC = $-\frac{coſ\, n}{ſi\, l}$, tum vero ang. VFC = ZAC et $ſi$ ZAC = $coſ$ ZAB = $\frac{coſ\, m}{ſi\, l}$. Quamobrem habebimus

mom. reſp. axis IB = $-$ Π f $coſ\, n$ in ſenſum AC

mom. reſp. axis IC = Π f $coſ\, m$ in ſenſu BA

et quia momenta virium reſpectu axium IA, IB, IC in ſenſum BC, CA, CA, AB supra in genere posuimus P, Q, R, erit pro nostro casu:

$$P = 0; \quad Q = + \Pi f \cos n \text{ et } R = - \Pi f \cos m.$$

PROBLEMA 98.

857. Si turbo in situ quocunque inclinato gyretur circa axem quemcunque, per ejus centrum inertiae transeuntem, definire variationem momentaneam tam in axe gyrationis quam in celeritate angulari productam.

SOLUTIO.

Fig. III. Circa centrum inertiae I constituta sphaera immobili, in qua sit Z punctum verticale, et ZX circulus verticalis fixus; teneat jam turbo ejusmodi situm, ut axis turbinis proprius respondeat sphaerae puncto A, bini reliqui autem axes principales punctis B et C, ponanturque horum axium declinationes a verticali seu arcus $ZA = l$, $ZB = m$, $ZC = n$, ut sit $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$; tum vero anguli $XZA = \lambda$, XZB $= \mu$, et XZC $= \nu$, quorum relatione ad illos arcus sunt cognitae. Nunc autem turbo gyretur circa axem IO celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ABC, sintque pro polo gyrationis O arcus $AO = \alpha$, $BO = \beta$, et $CO = \gamma$, atque ponendo $\varepsilon \cos \alpha = x$, $\varepsilon \cos \beta = y$, $\varepsilon \cos \gamma = z$, [illegible] momenta virium $P = 0$, $Q = \Pi f \cos n$ et $R = -\Pi f \cos m$, atque $bb = cc$, variationes tempusculo dt productae sequentibus formulis exprimentur:

$$\text{I. } dx = 0$$

$$\text{II. } dy + \frac{aa-cc}{cc} xzdt = \frac{2\Pi f g\, dt \cos n}{Mcc}$$

$$\text{III. } dz - \left(\frac{aa-cc}{cc}\right) xydt = -\frac{2\Pi f g\, dt \cos m}{Mcc}.$$

Praeterea vero has aequationes pro l, m, n, λ, μ, ν, adjungi oportet:

$$dl \sin l = dt\,(y \cos n - z \cos m); \quad d\lambda \sin l^2 = - dt\,(y \cos m + z \cos n)$$
$$dm \sin m = dt\,(z \cos l - x \cos n); \quad d\mu \sin m^2 = - dt\,(z \cos n + x \cos l)$$
$$dn \sin n = dt\,(x \cos m - y \cos l); \quad d\nu \sin n^2 = - dt\,(x \cos l + y \cos m).$$

Cum autem inclinatio axis ad horizontem sit $= 90^\circ - l$ quae supra posita est θ, ob $\sin \theta = \cos l$ erit $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{f\, dd.\cos l}{2g\, dt^2}$. Ad haec magis contrahenda statuamus:

cos

$$\cos l = p; \quad \cos m = q; \quad \cos n = r$$

et habebimus $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{f\, ddp}{2g\, dt^2}$, ac praeterea has aequationes:

$$\text{I. } dx = 0$$

$$\text{II. } dy + \frac{(aa-cc)xzdt}{cc} = \frac{2\Pi f g r dt}{Mcc}$$

$$\text{III. } dz - \frac{(aa-cc)xydt}{cc} = \frac{-2\Pi f g q dt}{Mcc}$$

$$\text{IV. } dp = dt\,(qz - ry); \quad \text{VII. } d\lambda = \frac{-dt(qy+rz)}{1-pp}$$

$$\text{V. } dq = dt\,(rx - pz); \quad \text{VIII. } d\mu = \frac{-dt(rz+px)}{1-qq}$$

$$\text{VI. } dr = dt\,(py - qx); \quad \text{IX. } d\nu = \frac{-dt(px+qy)}{1-rr}$$

ubi notandum est, esse $pp + qq + rr = 1$.

COROLL. 1.

858. Si turbo circa ipsum axem IA gyretur, ut sit $\alpha = 0$ et $\beta = \gamma = 90^\circ$, erit $x = \varepsilon$, $y = 0$ et $z = 0$, et $dx = d\varepsilon$, $dy = -\varepsilon d\beta$, $dz = -\varepsilon d\gamma$. Fiet ergo

$$d\varepsilon = 0; \quad d\beta = \frac{-2\Pi f g r dt}{\varepsilon Mcc}, \quad d\gamma = \frac{2\Pi f g q dt}{\varepsilon Mcc};$$

$$dp = 0; \quad dq = \varepsilon r dt; \quad dr = -\varepsilon q dt, \quad \text{et } d\lambda = 0,$$

tum ergo primo instanti neque celeritas angularis ε, neque situs puncti A, mutationem patitur.

COROLL. 2.

859. Cum sit $dp = dt\,(qz - ry)$ erit differentiando $ddp = dt\,(qdz - rdy) + dt\,(zdq - ydr)$, et substitutis valoribus datis reperietur:

$$\frac{ddp}{dt^2} = \frac{(aa-cc)x}{cc}(qy+rz) - \frac{2\Pi fg}{Mcc}(qq+rr) + x\,(qy+rz) - p\,(yy+zz)$$

unde fit

$$\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{f(aa-cc)x}{2gcc}(qy+rz) - \frac{\Pi ff}{Mcc}(qq+rr) + \frac{fx(qy+rz)}{2g} - \frac{fp(yy+zz)}{2g}$$

seu

seu $\frac{\Pi}{M}\left(1+\frac{ff(qq+rr)}{cc}\right) = 1 + \frac{faa(qy+rz)}{2gcc} - \frac{fp(yy+zz)}{2g}$,

hincque $\frac{\Pi}{M} = \frac{2gcc+faa(qy+rz)-fccp(yy+zz)}{2gcc+2gff(qq+rr)}$.

COROLL. 3.

860. Ex aequationibus IV. V. VI. colligitur, ut jam ante notavimus, $xdp + ydq + zdr = 0$, quae aequatio, cum sit $pp + qq + rr = 1$, loco aequationum V. et VI. usurpari potest. At aequationum VII, VIII, IX unicam tractasse sufficiet, quod negotium postremo loco erit suscipiendum.

COROLL. 4.

861. Inventis autem quantitatibus x, y et z, ob $cof\,\alpha^2 + cof\,\beta^2 + cof\,\gamma^2 = 1$ erit celeritas angularis $\vartheta = \surd(xx+yy+zz)$ hincque vicissim arcus α, β, γ concluduntur; nempe

$$cof\,\alpha = \frac{x}{\vartheta};\ cof\,\beta = \frac{y}{\vartheta} \text{ et } cof\,\gamma = \frac{z}{\vartheta}.$$

PROBLEMA. 99.

862. Aequationes differentiales ante inventas, quibus motus turbinis exprimitur, ad integrationem perducere, quantum fieri licet.

SOLUTIO.

Primo statim patet esse $x =$ conft: ponamus ergo $x = A$, et reliquae aequationes integrandae erunt

$$1^\circ.\ dy + \frac{A(aa-cc)zdt}{cc} = \frac{2\Pi fgrdt}{Mcc}$$

$$2^\circ.\ dz - \frac{A(aa-cc)ydt}{cc} = \frac{-2\Pi fgqdt}{Mcc}$$

$$3^\circ.\ dp = dt\,(qz - ry)$$

$$4^\circ.\ ydq + zdr = -Adp$$

existente $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fddp}{2gdt^2}$ et $pp + qq + rr = 1$.

Nunc $1^\circ.\ q + 2^\circ.\ r$ suppeditat hanc aequationem

$$qdy + rdz + \frac{A(aa-cc)}{cc}\,dt\,(qz-ry) = 0$$

quae ob $dt\,(qz-ry) = dp$ abit in hanc:

qdy

$$qdy + rdz = \frac{-A(aa-cc)}{cc}\,dp \text{ huc addatur } 4^\circ$$

$$ydq + zdr = -Adp,$$

erit $qdy + ydq + rdz + zdr = \frac{-aa}{cc}\,Adp$ cujus integrale est

$$qy + rz = B - \frac{aa}{cc}\,Ap.$$

Porro colligendo $1^\circ.\ y + 2^\circ.\ z$ prodit:

$$ydy + zdz = \frac{2\Pi fgdt}{Mcc}(ry - qz) = \frac{-2\Pi fgdp}{Mcc}$$

quare cum sit $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fddp}{2gdt^2}$ erit

$$ydy + zdz = \frac{-2fgdp}{cc} - \frac{ffdpddp}{ccdt^2},$$

unde integrando nanciscimur:

$$yy + zz = C - \frac{4fgp}{cc} - \frac{ffdp^2}{ccdt^2}.$$

Cum jam sit $\frac{dp}{dt} = qz - ry$, obtinemus novam aequationem finitam:

$$yy + zz = C - \frac{4fgp}{cc} - \frac{ff}{cc}(qz-ry)^2$$

ex qua cum sit

$$(qz-ry)^2 = \frac{Ccc}{ff} - \frac{4gp}{f} - \frac{cc(yy+zz)}{ff}$$

ex ante inventa autem

$$(qy+rz)^2 = \left(B - \frac{Aaap}{cc}\right)^2$$

prodibit his addendis

$$(qq+rr)(yy+zz) = \frac{Ccc}{ff} - \frac{4gp}{f} - \frac{cc(yy+zz)}{ff} + \left(B - \frac{Aaap}{cc}\right)^2$$

unde ob $qq + rr = 1 - pp$ elicitur

$$\left(1 - pp + \frac{cc}{ff}\right)(yy+zz) = \frac{Ccc}{ff} - \frac{4gp}{f} + \left(B - \frac{Aaap}{cc}\right)^2, \text{ seu}$$

$$yy + zz = \frac{Ccc - 4fgp + ff\left(B - \frac{Aaap}{cc}\right)^2}{cc + ff - ffpp}$$

(qz − ry)

$$(qz - ry)^2 = \frac{(Ccc - 4fgp)(1-pp) - \varepsilon\varepsilon(B - \frac{Aaap}{cc})^2}{cc + ff - ffpp}.$$

Cum ergo jam has quantitates $qy + rz$, $yy + zz$ et $qz - ry$ per solam p definiverimus, statim pressionem Π per eandem solam p ita reperimus expressam

$$\frac{\Pi}{M} = \frac{2gcc + faaA(B - \frac{Aaap}{cc})}{2g(cc + ff - ffpp)} - \frac{fccp(Ccc - 4fgp + ff(B - \frac{Aaap}{cc})^2)}{2g(cc + ff - ffpp)^2},$$

deinde vero etiam elementum temporis dt obtinebimus

$$dt = \frac{dp\,\surd(cc + ff - ffpp)}{\surd\left((Ccc - 4fgp)(1-pp) - \varepsilon\varepsilon(B - \frac{Aaap}{cc})^2\right)}$$

ex quo pariter per p erit $d\lambda = \frac{-dt(B - \frac{Aaap}{cc})}{1-pp}$;

atque celeritas angularis s ita definietur, ut fit

$$ss = AA + \frac{Ccc - 4fgp + ff(B - \frac{Aaap}{cc})^2}{cc + ff - ffpp}.$$

Ex s autem porro cognoscitur arcus $AO = \omega$, ita ut, quoniam tempus t per p datur, quantitates s, ω, p et λ ad datum tempus assignari queant. Denique etsi parum refert, nosse quantitates y et z seorsim: tamen ex 1°. et 2° fit

$$zdq - ydz + \frac{A(aa - cc)(yy + zz)}{cc}dt = \frac{2\Pi fgdt}{Mcc}(rz + qy)$$

ideoque

$$\frac{ydz - zdy}{yy + zz} = \frac{A(aa - cc)dt}{cc} - \frac{2\Pi fgdt(B - \frac{Aaap}{cc})(cc + ff - ffpp)}{Mcc(Ccc - 4fgp + ff(B - \frac{Aaap}{cc})^2)}$$

quae cum etiam fit integrabilis, dabit A $tang\,\frac{z}{y}$ ideoque rationem inter y et z, ex qua cum $yy + zz$ conjunctim, utraque y et z seorsim datur: quibus inventis etiam q et r seorsim ex valoribus formularum $qy + rz$ et $qz - ry$ eliciuntur.

PRO-

PROBLEMA 100.

863. Si turbini initio in data inclinatione impressus fuerit motus gyratorius circa, proprium axem data celeritate angulari, definire ejus situm et motum ad quodvis tempus inde elapsum.

SOLUTIO.

Ponamus initio quo $t = 0$, axem turbinis fuisse in a distantia ... Fig. III. arcu existente $Za = l$, ac ponatur $cos.\, l = \mathfrak{p}$, ut fuerit $f\mathfrak{p}$ altitudo centri inertiae supra planum horizontale, eodem autem tempore arcus AB fuerit in ab, ita ut pro initio habeatur $l = l$, $m = 90 - l$, $n = 90°$, et $\lambda = 0$, ideoque $p = \mathfrak{p}$, $q = \surd(1 - \mathfrak{pp})$, et $r = 0$. Deinde initio turbo circa ipsum axem IA acceperit in sensum BC motum gyratorium celeritate angulari $= \varepsilon$, ita ut fuerit $\alpha = 0$, $\mathfrak{C} = 90°$, et $\gamma = 90°$, ideoque $s = \varepsilon$, $x = \varepsilon$, $y = 0$ et $z = 0$. Hinc ergo si constantes supra per integrationem ingressae definiantur, obtinebimus:

1°. $A = \varepsilon$; 2°. $B = \frac{\varepsilon aa\mathfrak{p}}{cc}$ et 3°. $C = \frac{4fg\mathfrak{p}}{cc}$.

Hic autem valoribus substitutis primo inter t et p haec reperitur aequatio

$$dt = \frac{c\,dp\surd(cc + ff - ffpp)}{\surd(\mathfrak{p} - p)(4ccfg(1 - pp)) - \varepsilon\varepsilon a^4(\mathfrak{p} - pp)}.$$

Deinde angulus $XZA = \lambda$ ita definitur, ut fit

$$d\lambda = \frac{-\varepsilon aadt(\mathfrak{p} - p)}{cc(1 - pp)} = \frac{-\varepsilon aadp\surd(\mathfrak{p} - p)(cc + ff - ffpp)}{c(1 - pp)\surd 4ccfg(1 - pp) - \varepsilon\varepsilon a^4(\mathfrak{p} - p)}.$$

Porro celeritas angularis s in sensum ABC ita exprimitur

$$ss = \varepsilon\varepsilon + \frac{4c^4fg(\mathfrak{p} - p) + \varepsilon\varepsilon a^4 ff(\mathfrak{p} - p)^2}{c^4(cc + ff - ffpp)}$$

hincque $cos\,\alpha = \frac{\varepsilon}{s}$; at pro $cos\,\mathfrak{C} = \frac{y}{s}$ et $cos\,\gamma = \frac{z}{s}$ est primo

$$yy + zz = \frac{4c^4fg(\mathfrak{p} - p) + \varepsilon\varepsilon a^4 ff(\mathfrak{p} - p)^2}{c^4(cc + ff - ffpp)} = ss - \varepsilon\varepsilon.$$

Praeterea vero invenimus:

$$qy + rz = \frac{\varepsilon aa}{cc}(\mathfrak{p} - p) \text{ et}$$

$$qz - ry = \frac{\surd(\mathfrak{p} - p)(4cccfg(1 - pp) - \varepsilon\varepsilon a^4(\mathfrak{p} - p))}{c\surd(cc + ff - ffpp)}.$$

atque

atque pressionem, quam nunc turbo cuspide sua exerit in planum horizontale

$$\frac{\Pi}{M}=\frac{2c^4g+\varepsilon\varepsilon a^4f(\mathrm{p}-p)}{2ccg(cc+ff-ffpp)}-\frac{fp(\mathrm{p}-p)(4c^4fg+\varepsilon\varepsilon a^4ff(\mathrm{p}-p))}{2ccg(cc+ff-ffpp)^2}.$$

Denique ad quantitates y et z seorsim definiendas habetur haec aequatio

$$\frac{ydz-zdy}{yy+zz}=\frac{\varepsilon(aa-cc)dt}{cc}-\frac{\Pi}{M}\cdot\frac{\varepsilon aafgdt(cc+ff-ffpp)}{4c^4fg+\varepsilon\varepsilon a^4ff(\mathrm{p}-p)}\ \text{seu}$$

$$\frac{ydz-zdy}{yy+zz}=\frac{\varepsilon(aa-cc)dt}{cc}-\frac{\varepsilon aadt(2c^4fg+\varepsilon\varepsilon a^4ff(\mathrm{p}-p))}{2cc(4c^4fg+\varepsilon\varepsilon a^4ff(\mathrm{p}-p))}$$

$$+\frac{\varepsilon aaffpdt(\mathrm{p}-p)}{2cc(cc+ff-ffpp)}$$

Inventis autem y et z, etiam q et r per eas determinantur.

COROLL. 1.

864. Arcus ZA $= l$ usque ad angulum rectum augeri, seu turbo procidere potest, quamdiu $\varepsilon\varepsilon a^4\mathrm{p} < 4ccfg$. Ne ergo turbo prolabatur, necesse est, ut ejus celeritas angularis primo impressa major sit quam $\frac{2c}{aa}\sqrt{\frac{fg}{\mathrm{p}}}$, ubi est $\mathrm{p}=cos\,Za$. Unde, si turbo initio fuerit verticalis, debet esse $\varepsilon > \frac{2c\sqrt{fg}}{aa}$ nisi enim haec conditio observetur, levissima causa turbinem deturbare valebit.

COROLL. 2.

865. Sin autem fuerit $\varepsilon\varepsilon a^4\mathrm{p} > 4ccfg$, quemadmodum quantitas p nunquam superare potest p, ita dabitur limes, infra quem nunquam diminuetur, qui definitus ex aequatione, $4ccfgpp = 4ccfg - \varepsilon\varepsilon a^4\mathrm{p} + \varepsilon\varepsilon a^4p$ prodit

$$p=\frac{\varepsilon\varepsilon a^4-\sqrt{(\varepsilon^4a^8-16\varepsilon\varepsilon a^4ccfg\mathrm{p}+64c^4ffgg)}}{8ccfg}$$

unde fit proxime $p=\mathrm{p}-\frac{4ccfg(1-\mathrm{pp})}{\varepsilon\varepsilon a^4-8ccfg\mathrm{p}}$ pro minimo valore ipsius $p = cos\,ZA$, seu pro maximo arcu ZA.

COROLL. 3.

866. Sin autem in fig. 109. spectemus ad angulum IFk, quo inclinatio axis ad horizontem, cujus sinus est $= p$, minor fieri non potest: motus turbinis gyratorius perennis esse nequit, nisi valor minimus ipsius p adhuc fuerit major quam sinus anguli IFk. Quare posito sin IF$k = k$, debet esse $\varepsilon\varepsilon > \frac{4ccfg(1-kk)}{a^4(\mathrm{p}-k)}$.

SCHOLION. 1.

867. Hic ergo duos casus constitui convenit, alterum quo celeritas angularis turbini primum impressa ε minor est, quam $\frac{2c\sqrt{fg(1-kk)}}{aa\sqrt{(\mathrm{p}-k)}}$, alterum quo hac quantitate est major. Priori casu quo $\varepsilon < \frac{2c\sqrt{fg(1-kk)}}{aa\sqrt{(\mathrm{p}-k)}}$, turbo mox procidet, quoniam ad minimam inclinationem pervenire nequit, quin corpore suo planum horizontale attingat, sicque motus gyratorius destruatur. Posteriori vero casu quo $\varepsilon > \frac{2c\sqrt{fg(1-kk)}}{aa\sqrt{(\mathrm{p}-k)}}$, motus gyratorius perpetuo durabit, quandoquidem a frictione omnibusque motus obstaculis mentem abstrahimus. Ut ergo motus gyratorius prodeat perennis, necesse est turbini primum majorem celeritatem angularem imprimi, quam ista formula exhibet. Patet autem, quo major turbini celeritas angularis imprimatur, eo minus eum ad horizontem inclinatum iri, ac si celeritas illa foret infinita, turbo eandem inclinationem perpetuo conservaret. Quando autem motus gyratorius est perennis, turbo ab initio magis ad horizontem inclinabitur, donec maximam inclinationem attigerit, tum iterum se eriget usque ad statum initialem, quo ubi pervenerit, quasi unam motus sui periodum absolvisse est censendus, deinceps simili modo progressurus; nunquam enim turbo magis fiet erectus, quam fuerat initio, si quidem nulla affuerit frictio. Namque si turbo, dum cuspide super plano horizontali incedit, frictionem offendat, ejus effectus in erigendo turbine consumetur, quatenus is ob minutam celeritatem angularem non prolabi cogitur. Quare nemini mirum videri debet, si experientia nostro calculo minus conveniat, cum aberrationes frictioni sint tribuendae.

SCHOLION. 2.

868. Ex his etiam ratio constructionis turbinum perspicitur, ut facillime motum gyratorium recipiant, seu ut minima celeritas angularis ad hoc sufficere possit. Scilicet cum celeritas angularis initio impressa major esse debeat quam $\frac{2c\sqrt{fg}}{aa}$, patet turbinis figuram ejusmodi esse

eſſe oportere, ut ejus momentum inertiae reſpectu axis AF ſit maxi- mum prae momento reſpectu axium ad hunc normalium. Quare fi- gura aptiſſima erit diſcus planus haſta tenuiſſima transfixus, quo caſu fit $aa = 2cc$: ac ſi radius ejus diſci fuerit $= b$: erit $aa = \frac{1}{2} bb$, et $cc = \frac{1}{4} bb$, hincque $\epsilon > \frac{2\sqrt{fg}}{b}$. Deinde quo brevior fuerit cuſpis ſeu inter- vallum IF $= f$, eo magis celeritas angularis ϵ ad durationem gy- rationis requiſita minuitur: verum tum etiam in minore incli- natione turbo planum horizontale corpore ſuo attinget. Ponamus $b = \frac{1}{2}$ dig. et $f = \frac{1}{4}$ dig. quoniam $g = 187\frac{1}{2}$ dig. ſumi debet $\epsilon > \sqrt{750}$: quare ſi capiatur ϵ duplo major vel $\epsilon = 55$, turbo uno minuto ſecundo con- ficiet arcum $= 55$, ſeu $\frac{55}{2\pi}$, hoc eſt fere novem revolutiones abſolvet. Pro turbinibus autem majoris moduli celeritas angularis minor ſecun- dum rationem ſubduplicatam laterum ſufficiet.

PROBLEMA 101.

869. Si turbini initio datam inclinationem tenenti impreſſus fue- rit motus gyratorius ſatis inſigni celeritate angulari, ut inclinatio ejus minimas ſubeat mutationes, definire ejus motum gyratorium.

SOLUTIO.

Manentibus omnibus, uti in problemate praecedente ſunt conſti- tuta, aſſumimus hic $\epsilon\epsilon$ multis vicibus excedere quantitatem $\frac{4ccfg}{a^4\mathfrak{p}}$. Po- namus ergo $\epsilon\epsilon = \frac{4nccfg}{a^4\mathfrak{p}}$, ut n hic denotet numerum ſatis magnum, ac primo pro relatione inter t et p hanc habebimus aequationem, quia ab initio quantitas p decreſcit

$$dt = \frac{-dp\sqrt{\mathfrak{p}(cc+ff-ff\mathfrak{p}\mathfrak{p})}}{2\sqrt{fg(\mathfrak{p}-p)(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}\mathfrak{p}p-n\mathfrak{p}+np)}}.$$

Cum igitur p quam minimum a $\mathfrak{p}$ deficiat, ponamus $p = \mathfrak{p} - u$, ut u ſit particula vehementer exigua, fietque

$$dt = \frac{+du\sqrt{\mathfrak{p}(cc+ff-ff\mathfrak{p}\mathfrak{p})}}{2\sqrt{fgn(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}^3-uu)}} \text{ hincque}$$

$$t = \frac{+\sqrt{\mathfrak{p}(cc+ff-ff\mathfrak{p}\mathfrak{p})}}{2\sqrt{nfg}} \int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{\mathfrak{p}-\mathfrak{p}^3}{n}u-uu\right)}} = C + \frac{\sqrt{\mathfrak{p}(cc+ff-ff\mathfrak{p}\mathfrak{p})}}{2\sqrt{nfg}} A\, \mathit{ſin}\, \mathrm{verſ}\, \frac{2nu}{\mathfrak{p}-\mathfrak{p}^3}$$

ubi debet eſſe $C = 0$. Quare ab initio ubi $u = 0$ ſeu $p = \mathfrak{p}$ usque ad tempus, quo inclinatio fit maxima $u = \frac{\mathfrak{p}(1-\mathfrak{p}\mathfrak{p})}{n}$, ſeu $p = \mathfrak{p} - \frac{\mathfrak{p}(1-\mathfrak{p}\mathfrak{p})}{n}$, erit tempus $= \frac{\pi\sqrt{\mathfrak{p}(cc+ff-ff\mathfrak{p}\mathfrak{p})}}{2\sqrt{nfg}}$, quod ergo eo eſt brevius, quo major fuerit numerus n.

Deinde vero fit $d\lambda = \frac{-2\sqrt{nfg}}{c(1-\mathfrak{p}\mathfrak{p})\sqrt{\mathfrak{p}}}\, udt$ ſive

$$\lambda = \frac{-\sqrt{(cc+ff-ff\mathfrak{p}\mathfrak{p})}}{c(1-\mathfrak{p}\mathfrak{p})} \int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{\left(\frac{\mathfrak{p}-\mathfrak{p}^3}{n}-u\right)}}, \text{ unde elicitur}$$

$$\lambda = \frac{-\sqrt{(cc+ff-ff\mathfrak{p}\mathfrak{p})}}{c(1-\mathfrak{p}\mathfrak{p})} \left(\frac{\mathfrak{p}(1-\mathfrak{p}\mathfrak{p})}{2n} A\, \mathit{ſin}\, \mathrm{verſ}\, \frac{2nu}{\mathfrak{p}(1-\mathfrak{p}\mathfrak{p})} - \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{p}(1-\mathfrak{p}\mathfrak{p})}{n}u-uu\right)}\right).$$

Arcus ſcilicet ZA in ſenſum oppoſitum progreditur, et elapſo tem- pore $t = \frac{\pi\sqrt{\mathfrak{p}(cc+ff-ff\mathfrak{p}\mathfrak{p})}}{2\sqrt{nfg}} = \frac{\pi c\sqrt{(cc+ff-ff\mathfrak{p}\mathfrak{p})}}{\epsilon aa}$ quo turbo ma- xime ad horizontem inclinatur, fit $\lambda = -\frac{\pi\mathfrak{p}\sqrt{(cc+ff-ff\mathfrak{p}\mathfrak{p})}}{2nc}$. Non quidem axis A motu aequabili circa verticem Z circumfertur, ſed ne- glecta motus inaequalitate, erit celeritas angularis media $= \frac{\sqrt{\mathfrak{p}fg}}{c\sqrt{n}} = \frac{2fg}{\epsilon aa}$, ob $n = \frac{\epsilon\epsilon a^4\mathfrak{p}}{4ccfg}$, ita ut haec celeritas angularis ipſius axis turbi- nis circa verticem Z ſit reciproce, ut celeritas angularis turbinis circa proprium axem. Deinde dum turbo maximam habet inclina- tionem, ut ſit $p = \mathfrak{p} - \frac{4ccfg(1-\mathfrak{p}\mathfrak{p})}{\epsilon\epsilon a^4}$, celeritas angularis x ita definitur ut ſit

$$xx = \epsilon\epsilon + \frac{16ffgg(1-\mathfrak{p}\mathfrak{p})}{\epsilon\epsilon a^4} \text{ ſeu } x = \epsilon + \frac{8ffgg(1-\mathfrak{p}\mathfrak{p})}{\epsilon^3 a^4},$$

eritque $\mathit{coſ}\,\alpha = \mathit{coſ}\,\mathrm{AO} = 1 - \frac{8ffgg(1-\mathfrak{p}\mathfrak{p})}{\epsilon^4 a^4} = 1 - \frac{1}{2}\alpha\alpha$

ſeu ipſe arcus minimus $\alpha = \mathrm{AO} = \frac{4fg\sqrt{(1-\mathfrak{p}\mathfrak{p})}}{\epsilon\epsilon aa}$.

 Pro

Pro pressione autem cuspidis F in planum horizontale habetur pro motus initio, seu ubi $p = \mathfrak{p}$, et axis turbinis maxime erectus $\frac{\Pi}{M} = \frac{cc}{cc+ff-ff\mathfrak{pp}}$: at quando turbo maxime inclinatur:

$$\frac{\Pi}{M} = \frac{cc+2ff(1-\mathfrak{pp})}{cc+ff-ff\mathfrak{pp}} - \frac{8ccf^3g\mathfrak{p}(1-\mathfrak{pp})}{\varepsilon\varepsilon a^4(cc+ff-ff\mathfrak{pp})}.$$

Haecque ad motus cognitionem sufficiunt.

COROLL. 1.

870. Si axis turbinis initio fuerit in a, posito $Za = \mathfrak{l}$ cum sit $\mathfrak{p} = \cos \mathfrak{l}$, si A sit maxima elongatio axis a vertice, posito $ZA = l$, quia est $p = \cos l = \cos \mathfrak{l} - \frac{4ccfg \sin \mathfrak{l}^2}{\varepsilon\varepsilon a^4}$ erit $l = \mathfrak{l} + \frac{4ccfg \sin \mathfrak{l}}{\varepsilon\varepsilon a^4}$.

COROLL. 2.

871. Quia in maxima turbinis inclinatione arcus ZA est maximus, evidens est polum gyrationis O tum in ipsum arcum ZA cadere debere, ut sit ZO < ZA, et tum intervallum hoc AO erit $= \frac{4fg\sqrt{(1-\mathfrak{p}^2)}}{\varepsilon\varepsilon aa}$.

SCHOLION.

872. Hactenus sumsimus turbini initio motum gyratorium imprimi circa ipsum axem AF, qui est casus maxime communis. Verum tamen fieri potest, ut ipsi circa alium axem motus imprimatur, quod evenit, si axis verus AF, dum turbo circa eum gyratur, simul impulsionem accipiat, qua ad horizontem vel magis inclinetur, vel inde magis erigatur. Hoc enim eodem redit, ac F turbini circa alium axem motus gyratorius imprimeretur, nisi quatenus inde simul motus progressivus oritur, qui cum nihil habeat difficultatis, ad eum non respiciamus. Casus quidem jam ante tractatus huc referri potest, si statuamus medium, quo turbo jam circa alium axem praeter AF gyratur, tanquam initialem spectemus, sed quoniam ibi axis turbinis se nunquam ad situm verticalem erigere potest, in eo non omnes motus continentur. Quare conveniet adhuc eum casum pertractari, quo turbinis axis AF primo quidem tenet situm verticalem, ipsi autem motus gyratorius circa alium axem ad horizontem inclinatum imprimitur, quem casum etiam per formulas generales ante evolutas resolvere poterimus.

PRO-

PROBLEMA. 102.

873. Si turbinis axis initio fuerit verticalis, eique circa axem quendam inclinatum impressus sit motus gyratorius data celeritate angulari, determinare motum turbinis.

SOLUTIO.

Cum ergo initio punctum A fuerit in Z, ponamus arcum AC in circulum ZX incidisse, ita ut arcus AB fuerit ad ZX normalis. Quare facto $t = 0$, erat $l = 0$, $m = 90°$ et $n = 90°$, ideoque $p = 1$, $q = 0$, et $r = 0$: ac $\mu = 90°$, $\nu = 0$, manente λ indefinito, tum vero initio turbini impressus fuerit motus gyratorius celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ABC circa polum in arcu AC situm, ita ut posito $t = 0$, fuerit $\alpha = \mathfrak{a}$, $\beta = 90$, et $\gamma = 90° - \mathfrak{a}$, ideoque $x = \varepsilon \cos \mathfrak{a}$, $y = 0$, et $z = \varepsilon \sin \mathfrak{a}$. His positis statum turbinis post tempus $= t$ ex §. 862. definiemus, si constantes per integrationem ingressas his conditionibus convenienter determinemus. Primo ergo fiet $A = \varepsilon \cos \mathfrak{a}$, deinde $B = \frac{aa}{cc} \varepsilon \cos \mathfrak{a}$; tertio $\frac{Ccc}{ff} - \frac{4g}{f} - \frac{\varepsilon\varepsilon cc \sin \mathfrak{a}^2}{ff} = 0$, sive $C = \frac{4fg}{cc} + \varepsilon\varepsilon \sin \mathfrak{a}^2$; His autem valoribus substitutis obtinebimus

$$qy + rz = \frac{\varepsilon aa \cos \mathfrak{a}}{cc}(1-p)$$

$$qz - ry = \frac{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon c^4(1-pp)\sin \mathfrak{a}^2 + 4ccfg(1-p)(1-pp) - \varepsilon\varepsilon a^4(1-p)^2 \cos \mathfrak{a}^2)}}{c\sqrt{(cc+ff-ffpp)}}$$

$$yy + zz = \frac{\varepsilon\varepsilon c^4 \sin \mathfrak{a}^2 + 4c^4fg(1-p) + \varepsilon\varepsilon a^4 ff(1-p)^2 \cos \mathfrak{a}^2}{c^4(cc+ff-ffpp)}$$

hincque $dt = \frac{-c\,dp\sqrt{(cc+ff-ffpp)}}{\sqrt{(1-p)(4ccfg(1-pp) + \varepsilon\varepsilon c^4(1+p)\sin \mathfrak{a}^2 - \varepsilon\varepsilon a^4(1-p)\cos \mathfrak{a}^2)}}$

quoniam initio quantitas p minuitur.

Porro ob $vv = xx + yy + zz$ et $x = \varepsilon \cos \mathfrak{a}$ erit

$$vv = \varepsilon\varepsilon \cos \mathfrak{a}^2 + \frac{\varepsilon\varepsilon c^6 \sin \mathfrak{a}^2 + 4c^4fg(1-p) + \varepsilon\varepsilon a^4 ff(1-p)^2 \cos \mathfrak{a}^2}{c^4(cc+ff-ffpp)}$$

ac tandem

$$d\lambda = \frac{-\varepsilon aa\,dt \cos \mathfrak{a}}{cc(1+p)}.$$

CO-

COROLL. 1.

874. Ex formula pro dt inventa judicare licet, utrum turbo sit prolapsurus, nec ne? ponatur enim $p = 0$, et denominatoris factor $4ccfg + \varepsilon\varepsilon c^4 \sin\alpha^2 - \varepsilon\varepsilon a^4 \cos\alpha^2$, quoties est positivus, turbinem ad lapsum proclivem indicat: quod ergo evenit, si $4ccfg + \varepsilon\varepsilon c^4 \sin\alpha^2 > \varepsilon\varepsilon a^4 \cos\alpha^2$.

COROLL. 2.

875. Ne ergo turbo prolabatur, primo necesse est, ut sit $a^4 \cos\alpha^2 > c^4 \sin\alpha^2$ seu $\tan\alpha < \frac{aa}{cc}$, deinde vero esse oportet $\varepsilon\varepsilon > \frac{4ccfg}{a^4\cos\alpha^2 - c^4\sin\alpha^2}$; seu celeritas angularis primum impressa superare debet limitem $\frac{2c\sqrt{fg}}{\sqrt{(a^4\cos\alpha^2 - c^4\sin\alpha^2)}}$: et quidem notabiliter, ne turbo, dum inclinatur, corpore suo horizontem attingat.

COROLL. 3.

876. Quando autem est tam $\tan\alpha < \frac{aa}{cc}$ quam $\varepsilon\varepsilon > \frac{4ccfg}{a^4\cos\alpha^2 - c^4\sin\alpha^2}$, axis turbinis non ad horizontem usque inclinari, seu quantitas p ad nihilum usque diminui potest: sed minimus ejus valor prodiens ex aequatione

$$4ccfgpp = \varepsilon\varepsilon p(a^4\cos\alpha^2 + c^4\sin\alpha^2) - \varepsilon\varepsilon a^4\cos\alpha^2 + \varepsilon\varepsilon c^4\sin\alpha^2 + 4ccfg$$

reperitur

$$p = \frac{\varepsilon\varepsilon(a^4\cos\alpha^2 + c^4\sin\alpha^2) - \sqrt{(\varepsilon^4(a^4\cos\alpha^2 + c^4\sin\alpha^2)^2 - 16\varepsilon\varepsilon ccfg(a^4\cos\alpha^2 - c^4\sin\alpha^2) + 64c^4ffgg)}}{8ccfg}.$$

COROLL. 4.

877. Sin autem fuerit $\tan\alpha = \frac{aa}{cc}$ seu $a^4\cos\alpha^2 = c^4\sin\alpha^2$, aequatio inter p et t erit $dt = \frac{-dp\sqrt{(cc+ff-ffpp)}}{\sqrt{(1-p)(4fg(1-pp)+2\varepsilon\varepsilon ccp\sin\alpha^2)}}$ atque p non solum ad nihilum usque, sed etiam ad valorem negativum minui poterit, qui foret:

$$p = \frac{\varepsilon\varepsilon cc\sin\alpha^2 - \sqrt{(\varepsilon^4c^4\sin\alpha^4 + 16ffgg)}}{4fg}$$

sed tantum inclinationem status quaestionis excludit.

SCHOLION.

878. Status initialis talem motum exhibens in fig. 112. repraesentatur, ubi axis turbinis A in ipso vertice versatur, bini reliqui vero in B et C, et circulum quidem verticalem fixum AX ita assumsimus, ut in eo esset quadrans AC, et alter AB ad istum normalis. Initio motus ergo erat $l = 0$, $m = 90^\circ$, $n = 90^\circ$, ideoque $p = 1$, $q = 0$, $r = 0$, tum vero $\mu = 90^\circ$ et $\nu = 0$, existente λ indefinito. Deinde vero turbini initio motum gyratorium impressum esse sumo circa axem IO, existente arcu AO $= \alpha$, eumque celeritate ε in sensum ABC: sicque posito $t = 0$ erat $\alpha = \alpha$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ - \alpha$, et $\varepsilon = \varepsilon$, hincque $x = \varepsilon\cos\alpha$, $y = 0$ et $z = \varepsilon\sin\alpha$. Ne igitur hoc casu turbo prolabatur, binae conditiones requiruntur, altera ut sit $\tan\alpha$ seu $\tan$ AO $< \frac{aa}{cc}$, et altera ut sit $\varepsilon > \frac{2c\sqrt{fg}}{\sqrt{(a^4\cos\alpha^2 - c^4\sin\alpha^2)}}$. Ac si velimus ut axis quam minime inclinetur, fiatque $p = 1 - \omega$ existente ω particula valde parva, reperitur Fig. 112.

$$\omega = \frac{2\varepsilon\varepsilon c^4\sin\alpha^2}{\varepsilon\varepsilon a^4\cos\alpha^2 + \varepsilon\varepsilon c^4\sin\alpha^2 - 8ccfg}$$

quare arcus AO $= \alpha$ quam minimus esse, deinde vero $\varepsilon\varepsilon a^4$ multum excedere debet $8ccfg$ ut sit $\varepsilon > \frac{2c\sqrt{2fg}}{aa}$. Quod si eveniat, motus satis erit regularis, quem accuratius determinasse juvabit.

PROBLEMA. 103.

879. Si turbini in situ erecto constituto circa axem quam minime declinantem impressus fuerit motus gyratorius satis celer, ut turbo parumper tantum a statu erecto recedat, ejus motum determinare.

SOLUTIO.

Sumimus ergo arcum AO $= \alpha$ initio fuisse valde parvum, et celeritatem angularem initio impressam ε tantam ut fuerit $\varepsilon\varepsilon a^4\cos\alpha^2 > 8ccfg$. Ponamus ergo

$\varepsilon\varepsilon a^4\cos\alpha^2 = 8nccfg$ ut sit $n > 1$, et habebimus

dt

$$dt = \frac{-\varepsilon dp\sqrt{(cc+ff-ffpp)}}{\sqrt{(1-p)(4\varepsilon ccfg(1-pp)-8ncfg(1-p)+\varepsilon\varepsilon c^4(1+p)\sin a^2}}$$

Quia ergo novimus p parum infra unitatem diminui, statuamus $p=1-u$, fietque neglectis terminis minimis

$$dt = \frac{c\partial u}{\sqrt{u(8fgu-8nfgu+2\varepsilon\varepsilon ccfg-\varepsilon\varepsilon cc\sin a^2)}}$$

cujus integrale est

$$t = \frac{c}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon cc\sin a^2+8(n-1)fg)}}\,\mathrm{A\ sin\ vers.}\,\frac{u(\varepsilon\varepsilon cc\sin a^2+8(n-1)fg)}{\varepsilon\varepsilon cc\sin a^2}.$$

Cum nunc maximus valor ipsius u sit $= \frac{2\varepsilon\varepsilon cc\sin a^2}{\varepsilon\varepsilon cc\sin a^2+8(n-1)fg}$ tempus usque ad maximam turbinis inclinationem est $= \frac{\pi c}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon cc\sin a^2+8(n-1)fg)}}$

$$= \frac{\pi cc}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4\cos a^2+\varepsilon\varepsilon c^4\sin a^2-8ccfg)}}$$

atque turbo tum declinabit a situ verticali angulo exiguo, cujus sinus versus est $= \frac{2\varepsilon\varepsilon c^4\sin a^2}{\varepsilon\varepsilon a^4\cos a^2+\varepsilon\varepsilon c^4\sin a^2-8ccfg}$ et ipse angulus $= \frac{2\varepsilon cc\sin a}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4\cos a^2+\varepsilon\varepsilon c^4\sin a^2-8ccfg)}}$. Deinde cum sit $d\lambda = \frac{-\varepsilon aa\,dt\cos a}{cc(1+p)}$, hicque p ut constans $=1$ considerari possit, tempore quo turbo ad maximam inclinationem pertingit, ejus axis versabitur in plano verticali, quod a circulo ZX declinat angulo XZA $= 90° - \frac{\pi\varepsilon aa\cos a}{2\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4\cos a^2+\varepsilon\varepsilon c^4\sin a^2-8ccfg)}}$ primo enim initio, quo A circa O gyratur fig. 112. angulus λ est rectus seu $= \frac{\pi}{2}$.

Fig. 111.

COROLL. 1.

880. Cum arcus initialis AO $= a$ sit quasi infinite parvus, et angulus XZA $= \lambda$ initio fuerit $= 90°$, elapso tempore t, fiet hic angulus $\lambda = 90° - \frac{\varepsilon at}{2cc}$. Axis ergo turbinis ex puncto verticali egressu in antecedentia movetur, et integrum circuitum absolvit tempore $= \frac{4\pi cc}{\varepsilon a a}$ min. sec.

COROLL. 2.

881. Cum initio esset $u=0$, elapso tempore t fiet

$$1 - \frac{u(\varepsilon\varepsilon a^4-8ccfg)}{\varepsilon\varepsilon c^4\sin a^2} = \cos\frac{t\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4-8ccfg)}}{cc}.$$

Posito autem arcu ZA minimo $= l$, ob $p=\cos l = 1-\frac{1}{2}ll$, erit $u = \frac{1}{2}ll$, hincque $l = \frac{2\varepsilon cc\sin a}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4-8ccfg)}}\sin\frac{t\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4-8ccfg)}}{2cc}$ ita ut ad quodvis tempus t assignare valeamus λ et l.

COROLL. 3.

882. Cum axis turbinis ex Z digressus ad maximam declinationem pertingit, praeterlabitur tempus $= \frac{\pi cc}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4-8ccfg)}}$, quo tempore is circa Z in antecedentia circumfertur per angulum $= \frac{\pi\varepsilon aa}{2\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4-8ccfg)}}$, qui ergo recto est major: atque in verticem Z revertetur absoluto angulo $= \frac{\pi\varepsilon aa}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4-8ccfg)}}$ majore duobus rectis.

SCHOLION.

883. Hujusmodi motibus evolvendis fusius non immoror, cum omnia phaenomena facile ex formulis inventis derivari queant. Probe autem meminisse oportet, hic nullam frictionis rationem esse habitam, quae quamvis parva statuatur, phaenomena hic definita vehementer perturbat. Ex frictione enim, quam cuspis F super plano horizontali incedens patitur, nascitur vis horizontalis, qua turbini motus progressivus imprimitur, et quia directio illius vis continuo mutatur, facile causa perspicitur, cur turbines motu curvilineo incedere observentur. Verum motus ob frictionem perturbati singularem exigunt tractationem: quare sepositis hujusmodi impedimentis ad alia quaedam motus genera, in quibus gyratio occurrit, progrediamur; et quoniam hic ejusmodi corpora sum contemplatus, quae cuspide super plano horizon

zontali incedunt, ita ut cuspis sit quasi basis eorum censenda. hinc ad alia corporum genera ducimur, quae basi quacunque super plano incedant. Ac de basi quidem plana vel angulosa vix quicquam proferri potest attentione dignum, cum vel nullus motus gyratorius locum inveniat, ideoque motus determinatio nihil habeat difficultatis, vel saltem per saltus gyratio se immisceat, dum contactus ad aliam hedram transfertur, ubi simul conflictus se exerit, cujus explicatio ad aliam Mechanicae partem est referenda. Hic igitur ejusmodi tantum bases, quibus corpora super plano immobili incedant, contemplari convenit, quae curvatura continua sint praeditae, ne ullus saltus in motu occurrat. Nimias autem ambages, quae in calculos inextricabiles perducerent, evitaturi, duo tantum corporum genera, cylindrica scilicet ac sphaerica, potissimum evolvamus, quorum nimirum figura externa, qua plano applicantur, sit vel cylindrica vel sphaerica, quomodocunque materia intrinsecus fuerit distributa, cujus ratio ex centro inertiae et axibus principalibus determinatur. Hinc ad genus cylindricum referuntur ea pendula, quae non ab axe lineari, uti supra assumsimus, sunt suspensa, sed axiculis cylindricis utrinque plano horizontali incumbant. Deinde etiam huc pertinet motus vacillatorius motui cunarum reciproco similis, cujusmodi corpora, quatenus super plano incumbunt, tanquam cylindrica spectari possunt. Deinde etiam, quomodo hujusmodi corpora super plano inclinato descendant, operae pretium erit scrutari. Ad corpora porro sphaerica refero non solum ea, quorum tota figura est globosa, sed etiam quae inferius ubi planum attingunt, in hemisphaerium sunt efformata, veluti sunt turbines, quorum axes infra non in cuspidem sed quasi in hemisphaerium desinunt; ubi quidem centrum inertiae magis est elevatum, quam centrum hemisphaerii, quando autem profundius est situm, aliud motus genus oriri potest, quo corpus quasi titubando oscillationes peragit, in quo motu mira motus gyratorii perturbatio locum habere potest.

CAPUT

CAPUT XVIII.

DE MOTU CORPORUM BASI SPHAERICA PRAEDITORUM SUPER PLANO HORIZONTALI.

PROBLEMA.

884. Si corpus basi sphaerica praeditum plano horizontali quomodocunque incumbat, definire vires, quibus [illegible] [illegible] fectum in motu corporis progressivo turbando.

SOLUTIO.

Sit EH planum horizontale et T punctum, ubi corpus ei [illegible] in corpore autem notetur primo centrum baseos [illegible] quod sit in G, deinde centrum inertiae corporis I, ac [illegible] lentet planum, in quo haec tria puncta sunt sita. [illegible] qui cum sit ad horizontem EH normalis, [illegible] ideoque ipsum planum TGI erit verticale. Iam quia pro motu [illegible] gressivo totam corpus massam, quae sit = M, tanquam in centro [illegible] tiae I collectam concipere licet; ducta IP ipsi GT parallela corpus [illegible] mo ob gravitatem urgetur in directione IP vi = M; deinde vero [illegible] planum horizontale in T tangit, ab eo certa quadam vi urgebitur [illegible] in directione TG, et pressioni aequali, quae vis sit = Π. Quae [illegible] hae duae vires se destruant, corpus in quiete persistere nequit; [illegible] perspicuum est, statum quietis exigere, ut producta recta GI in F [illegible] pus puncto F plano horizontali insistat, sicque recta DIGF fiat verticalis. Figura ergo repraesentat statum corporis inclinatum, et inclinatio indicatur angulo FGT, qui sit = ϱ, quo evanescente corpus in statu aequilibrii versatur. Ponamus porro radium basis sphaericae [illegible] = GT = e, et intervallum punctorum G et I nempe GI = f, [illegible] nus centrum inertiae I longius distat a puncto F quam centrum [illegible] G: ita ut si propius caderet, quantitas f negative esset [illegible] Hinc ergo erit IP = $e + f\cos\varrho$, quae est altitudo centri inertiae [illegible] planum horizontale EH, et quae a viribus sollicitantibus [illegible] Translata autem vi TG = Π in centrum inertiae I, punctum I [illegible] sum sollicitatur vi = M − Π; et quia ejus celeritas deorsum [illegible]

$= \frac{f\, d\varrho \sin\varrho}{dt}$, posita ea $= u$ erit $du = \frac{2g(M-\Pi)dt}{M}$, denotante dt elementum temporis, ex quo habetur $f(dd\varrho \sin\varrho + d\varrho^2 \cos\varrho) = 2g \left(1-\frac{\Pi}{M}\right) dt^2$ sumto dt constante: neque aliter motus progressivus afficietur.

COROLL. 1.

885. Vicissim ergo si ratio motus progressivi detur, vel saltem ut data consideretur, inde pressio Π definietur, cum sit $\frac{\Pi}{M} =$

$$1 - \frac{f(dd\varrho \sin\varrho + d\varrho^2 \cos\varrho)}{2g\,dt^2} \text{ seu } \frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{f\,dd.\cos\varrho}{2g\,dt^2}.$$

COROLL. 2.

886. Si fuerit $f = 0$, seu centrum inertiae I in ipsum centrum sphaerae G incidat, prodit $\Pi = M$, et corpus in omni situ aequilibrii proprietate gaudet.

COROLL. 3.

887. Si fuerit $f > 0$ seu $FI > FG$, statim ac corpus tantillum inclinatur, a vi sollicitante inclinatio augebitur, sin autem sit $f < 0$ seu $FI < FG$, inclinatio minuetur, corpusque in situm aequilibrii, quo punctum F plano insistit, restituetur; dum priori casu procumbit, alium quaerens aequilibrii situm.

SCHOLION. 1.

888. Quamcunque autem corpus habuerit figuram, in eo semper ad minimum duo dantur aequilibrii situs, quorum alter ita est comparatus, ut si corpus ex eo parumper declinetur; sponte sua se restituat, alter vero, ut penitus prolabatur: quorum prior *status aequilibrii stabilis*, posterior vero *labilis* vocari solet. Quodcunque enim corpus plano horizontali incumbit, in aequilibrio versatur, si recta a centro inertiae ad punctum contactus ducta fuerit verticalis: id quod semper duplici saltem modo evenire potest. Namque si ex centro inertiae ad omnia superficiei puncta rectae concipiantur ductae, quoniam nulla earum vel evanescit, vel fit infinita, inter eas necesse est dari et maximam et minimam: utraque autem ad planum tangens erit normalis: quare si corpus alterutro eorum punctorum, a quibus centrum inertiae vel maxime vel minime distat, plano horizontali incumbat, recta ex centro inertiae ad punctum contactus ducta erit verticalis, ideoque situm aequilibrii dabit, eumque stabilem, si recta ista fuerit minima, contra vero labilem, si maxima: unde intelligitur, centrum inertiae semper infimum locum quaerere, ubi acquiescat. Saepenumero autem plures dantur aequilibrii situs, alii stabiles alii labiles, qui se alternatim excipere debent, quoniam corpus ex situ labili digressum in stabilem perveniat necesse est.

SCHOLION. 2.

889. In praesente casu, quo corporis superficiem sphaericam statuimus, recta per centrum inertiae I et centrum figurae G ducta dabit duo illa puncta F et D, quibus si corpus plano horizontali incumbat, situm aequilibrii teneat; ac dum puncto F planum horizontale tangit, situs aequilibrii erit stabilis, si $FI < FG$ seu $f < 0$, labilis autem si $FI > FG$ seu $f > 0$: neque praeter hos duos situs aequilibrii alius hic dabitur, nisi fuerit $f = 0$; quo casu subito omnes plane situs aequilibrii indolem recipiunt. Etsi autem hic totam corporis superficiem ut sphaericam considero, tamen ad institutum nostrum sufficit, si ea saltem portio, qua durante motu planum horizontale contingit, fuerit sphaerica: atque hinc ista tractatio etiam ad turbines patet, quorum axes inferius non in cuspidem, ut ante assumsimus, sed in hemisphaerium vel etiam minus sphaerae segmentum conformantur, ita ut forma supra considerata hinc prodeat, si radius sphaerae $GF = c$ evanescat, sicque haec tractatio superiorem in se complectatur. Recta igitur DIGF per centrum inertiae I et centrum basis sphaericae G ducta proprium turbinis axem exhibet, quae quidem, uti turbines construi solent, simul unus est axium principalium corporis, bini vero reliqui momenta inertiae habent paria, qualem formam jam supra statuimus. Verum quo haec tractatio latius pateat, simulque ad titubationes corporum quorumcunque basi sphaerica praeditorum accommodari queat, axes corporis principales utcunque ab axe proprio DF diversos considerabo, eorumque respectu momenta virium explorabo.

PROBLEMA. 105.

890. Data pressione Π, quo corpus basi sphaerica praeditum plano horizontali incumbit, definire momenta inde orta respectu axium princi-

principalium corporis, quomodocunque hi ratione axis proprii corporis fuerint dispositi.

SOLUTIO.

Fig. 114. Circa corporis centrum inertiae I descripta sphaera, sit Z ejus punctum verticale, axisque proprius teneat jam situm DIG, ut ejus de[illegible] a situ verticali sit $DZ = \rho$. Cum ergo directio pressionis Π sit verticalis et per punctum G transeat existente $IG = f$, referat recta verticalis $G\Pi$ hanc pressionem $= \Pi$, ita ut $ZDG\Pi$ sit planum verticale, in quo resolvatur vis $G\Pi = \Pi$ secundum directiones GI et GV, quarum haec ad illam sit normalis, et ob angulum $DG\Pi = \rho$ prodit vis secundum $GI = \Pi \cos \rho$ et vis secundum $GV = \Pi \sin \rho$: quarum illa per centrum inertiae I transiens nulla suggerit momenta. Sint nunc IA, IB, IC, corporis tres axes principales, datum situm ratione axis proprii ID tenentes, ac per puncta A, B, C ex D ducantur semicirculi DAG, DBG, DCG. Quodsi axis IA esset normalis ad planum IGV, ejus respectu foret momentum vis $GV = \Pi f \sin \rho$, quod autem nunc in ratione sinus totius tam ad sinum arcus GA quam ad sinum anguli VGA minui debet, ita ut ex vi pressionis resultet

mom. respectu axis $IA = \Pi f \sin \rho . \sin GA . \sin VGA$ in sensum CB
mom. respectu axis $IB = \Pi f \sin \rho . \sin GB . \sin VGB$ in sensum AC
mom. respectu axis $IC = [illegible] \sin \rho . \sin GC . \sin VGC$ in sensum BA.

Haec autem terna momenta supra litteris P, Q, R indicavimus, quatenus quidem in sensum contrarium agere statuuntur, quare omnibus ad punctum D translatis habebimus:

$$P = -\Pi f \sin DZ . \sin DA . \sin ZDA = -\Pi f \sin ZD . \sin ZA . \sin DZA$$
$$[illegible] \Pi f \sin DZ . \sin DB . \sin ZDB = -\Pi f \sin ZD . \sin ZB . \sin DZB$$
$$R = -\Pi f \sin DZ . \sin DC . \sin ZDC = -\Pi f \sin ZD . \sin ZC . \sin DZC.$$

COROLL. 1.

891. Assumsimus hic, centrum basis G propius esse termino imo F quam centrum inertiae I: sin autem secus eveniat, ut intervallum FI minus sit intervallo $FG = e$, intervallum $GI = f$ negative capi debet. At si fuerit $GI = 0$, momenta inventa evanescunt, seu corpus in omni situ aequilibrium tenebit.

COROLL. 2.

892. Si pro situ axis proprii ID respectu axium corporis principalium ponatur arcus $AD = \zeta$, $BD = \eta$, $CD = \theta$, tum vero angulus ZDA

$ZDA = \phi$, existente arcu $ZD = \rho$, ob $\cos ADB = -\dfrac{\cos\zeta \cos\eta}{\sin\zeta \sin\eta}$ et $\sin ADB = \dfrac{-\cos\theta}{\sin\zeta \sin\eta}$, quia $\sin ADB : \sin DAB$ seu $\sin ADB : -\cos DAC = 1 : \sin BD = 1 : \sin\eta$, erit $\sin ZDB = \dfrac{-\cos\zeta \cos\eta \sin\phi + \cos\theta \cos\phi}{\sin\zeta \sin\eta}$, at $\cos DAC = \dfrac{\cos CD}{\sin AD} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\zeta}$, ideoque $P = -\Pi f \sin\rho \sin\zeta \sin\phi$, atque

$$Q = \frac{\Pi f \sin\rho (\cos\zeta \cos\eta \sin\phi - \cos\theta \cos\phi)}{\sin\zeta} \text{ et } R = \frac{\Pi f \sin\rho (\cos\zeta \cos\theta \sin\phi - \cos\eta \cos\phi)}{\sin\zeta}.$$

COROLL. 3.

893. Si axis proprius ID congrueret cum axe principali IA, foret $\zeta = 0$ atque $\eta = \theta = 90°$, ut esset $\cos\eta = \cos\theta = \sin\zeta$ et angulus ϕ maneret indefinitus. At ex prioribus formulis fiunt momenta virium:

$$P = 0,\ Q = -\Pi f \sin\rho \sin ZAB, \text{ et } R = -\Pi f \sin\rho \sin ZAC$$
$$\text{seu } P = 0,\ Q = \Pi f \cos ZC \text{ et } R = -\Pi f \cos ZB.$$

COROLL. 4.

894. Quodsi vero ut supra ponamus $ZA = l$, $ZB = m$ et $ZC = n$, reperiemus momenta virium in genere

$$P = \Pi f (\cos\theta \cos m - \cos\eta \cos n);\ Q = \Pi f (\cos\zeta \cos n - \cos\theta \cos l)$$
atque $R = \Pi f (\cos\eta \cos l - \cos\zeta \cos m)$,
unde illa si $\zeta = 0$, et $\eta = \theta = 90°$ sponte sequuntur.

EXPLICATIO.

895. Ratio investigationis harum posteriorum formularum ita se habet: Primo cum sit $\sin DZ \sin ZDA = \sin ZA \sin ZAD$ erit $P = -\Pi f \sin DA \sin ZA \sin ZAD$; at est $ZAD = BAD - BAZ$, et

$$\sin BAD = -\cos CAD = \frac{-\cos\theta}{\sin DA};\quad \cos BAD = \frac{\cos\eta}{\sin DA}$$
$$\sin BAZ = -\cos CAZ = \frac{-\cos n}{\sin ZA};\quad \cos BAZ = \frac{\cos m}{\sin ZA}$$

$$\text{unde } \sin ZAD = \frac{-\cos m \cos\theta + \cos n \cos\eta}{\sin ZA \sin DA} \text{ et } P = +\Pi f (\cos\theta \cos m - \cos\eta \cos n).$$

Reliqua