etiam pro praesenti instituto sufficit, relationem corporis ad coordinatas axibus principalibus parallelas nosse, quoniam et hinc relatio ad quasvis alias ternas coordinatas derivari potest. Quamobrem problema superius ita resolvam, ut vim sollicitantem respectu axium principalium dari assumam; ac solutionem ipsam ex principio jam stabilito, quod minima vis viva generetur, petam.

PROBLEMA. 60.

639. Datis corporis rigidi axibus principalibus eorumque respectu momentis inertiae, si id a vi quacunque sollicitetur, simulque ipsi in centro inertiae applicata sit alia vis illi aequalis et contraria, definire axem, circa quem corpus primum gyrari incipiet.

SOLUTIO.

Fig. 82. Sit I centrum inertiae corporis, et rectae IA, IB, IC ejus tres axes principales, quorum respectu momenta inertiae sint Maa, Mbb, Mcc. Iam a quacunque vi corpus sollicitetur, notetur ejus transitus per planum binis axibus principalibus interceptum AIB, qui fit in puncto V, ab I distante intervallo $IV = h$; existente angulo $AIV = \delta$ ipsa autem vis, quasi huic puncto esset applicata, resolvatur in ternas axibus parallelas quae sint vis $VP = P$, vis $VQ = Q$, et vis $VR = R$, quibus igitur aequales et contrariae in puncto I applicatae sunt intelligendae. Ab his ergo corpus circa quempiam axem per centrum inertiae I transeuntem verti incipiet, qui sit IF ad planum BIA inclinatus angulo $FIE = \theta$ existente angulo $AIE = \eta$, quos binos angulos investigari oportet. Iam primo respectu hujus axis IF quaeratur momentum inertiae, quod cum sit $\cos AIF = \cos\eta \cos\theta$, $\cos BIF = -\sin\eta \cos\theta$, $\cos CIF = \sin\theta$ erit per superiora

$$M(aa\cos\eta^2 \cos\theta^2 + bb\sin\eta^2 \cos\theta^2 + cc\sin\theta^2).$$

Deinde momenta virium P, Q, R respectu axis hujus IF sunt investiganda; ex antecedentibus autem patet, ducta VM ad IE normali ut $VM = h\sin(\delta+\eta)$, fore vis $VR = R$, momentum $= R.VM.\cos\theta = Rh\sin(\delta+\eta)\cos\theta$. Verum quo reliquarum virium momenta facilius inveniri queant, puncta V, A, B, C, E, F in superficie
Fig. 83. sphaerica considerentur cujus centrum sit in I. Erunt ergo arcus AB, AC et BC quadrantes, $AV = \delta$, $AE = \eta$, $EF = \theta$; et vires P, Q, R in V applicatae resolvantur in binas, quarum alterae sint in superficiem sphaericam normales, alterae superficiem sphaericam tangant, ubi

ubi priores per centrum transeuntes nulla praebent momenta, unde solas posteriores considerasse sufficit, quae erunt: vis sec. $VA = P\sin AV$; vis sec. $VB = Q\sin BV$ et vis sec. $VC = R\sin CV = R$ ob CV quadrantem. Hae vires porro resolvantur secundum directionem VF, et aliam ad eam normalem, ubi priores cum axe IF in eodem plano sitae nullum praebent momentum, alterae autem vires erunt

$$P\sin AV\sin AVF - Q\sin BV\sin BVF - R\sin CVF$$

quarum directio cum sit ad planum IFV normalis, erit etiam in plano ad axem IF normali, unde cum distantia ab axe sit $= h\sin FV$, ob $AV = \delta$, et $\sin BVF = \sin AVF$ erit momentum quaesitum $= h((P\sin\delta - Q\cos\delta)\sin AVF\sin FV - R\cos AVF.\sin FV)$ at $\sin AVF.\sin FV = \sin FE = \sin\theta$. sicque momentum habebitur:

$$Ph\sin\delta\sin\theta - Qh\cos\delta\sin\theta - Rh\cos AVF.\sin FV$$

at ex sphaericis est $\cos AVF.\sin FV = \sin(\delta+\eta)\cos\theta$, ita ut momentum quaesitum sit $= Ph\sin\delta\sin\theta - Qh\cos\delta\sin\theta - Rh\sin(\delta+\eta)\cos\theta$, ex quo angulus tempusculo dt genitus fit

$$d\omega = \frac{ghdt^2(P\sin\delta\sin\theta - Q\cos\delta\sin\theta - R\sin(\delta+\eta)\cos\theta)}{M(aa\cos\eta^2\cos\theta^2 + bb\sin\eta^2\sin\theta^2 + cc\sin\theta^2)}.$$

Quocirca minimum reddi debet haec expressio

$$\frac{((P\sin\delta - Q\cos\delta)\sin\theta - R\sin(\delta+\eta)\cos\theta)^2}{aa\cos\eta^2\cos\theta^2 + bb\sin\eta^2\cos\theta^2 + cc\sin\theta^2}$$

statuamus primo θ tantum variabile, et fiet:

$$2(aa\cos\eta^2\cos\theta^2 + bb\sin\eta^2\cos\theta^2 + cc\sin\theta^2)((P\sin\delta - Q\cos\delta)\cos\theta + R\sin(\delta+\eta)\sin\theta) =$$
$$2(-aa\cos\eta^2\sin\theta\cos\theta - bb\sin\eta^2\sin\theta\cos\theta + cc\sin\theta\cos\theta)((P\sin\delta - Q\cos\delta)\sin\theta - R\sin(\delta+\eta)\cos\theta)$$

quae reducitur ad hanc formam

$$(P\sin\delta - Q\cos\delta)(aa\cos\eta^2 + bb\sin\eta^2)\cos\theta + Rcc\sin(\delta+\eta)\sin\theta = 0$$

unde oritur $\tan\theta = \dfrac{(Q\cos\delta - P\sin\delta)(aa\cos\eta^2 + bb\sin\eta^2)}{Rcc\sin(\delta+\eta)}$

Nunc sumto η variabili obtinebimus:

$$2(aa\cos\eta^2\cos\theta^2 + bb\sin\eta^2\cos\theta^2 + cc\sin\theta^2)(-R\cos(\delta+\eta)\cos\theta) =$$
$$2(-aa\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2 + bb\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2)((P\sin\delta - Q\cos\delta)\sin\theta - R\sin(\delta+\eta)\cos\theta)$$

quae reducitur ad hanc formam

$$R\cos\theta(aa\cos\delta\cos\eta\cos\theta^2 - bb\sin\delta\sin\eta\cos\theta^2 + cc\cos(\delta+\eta)\sin\theta^2) = (Q\cos\delta - P\sin\delta)(bb-aa)\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta.$$

ubi ſi loco $Q\cos\delta - P\sin\delta$ ponatur $\dfrac{Rcc\sin(\delta+\eta)\tang\theta}{aa\cos\eta^2+bb\sin\eta^2}$, facta reductione pervenitur ad hanc aequationem

$$\cos\theta^2(aa\cos\delta\cos\eta - bb\sin\delta\sin\eta)(aa\cos\eta^2+bb\sin\eta^2) + cc\sin\theta^2\cdot(aa\cos\delta\cos\eta - bb\sin\delta\sin\eta) = 0$$

quae per $aa\cos\delta\cos\eta - bb\sin\delta\sin\eta$ diviſa praebet

$$\cos\theta^2(aa\cos\eta^2+bb\sin\eta^2)+cc\sin\theta^2 = 0$$

aequationem impoſſibilem ob omnes partes poſitivas. Quare diviſore utentes nanciſcimur determinationem anguli η ſcilicet $\tang\eta = \dfrac{aa\cos\delta}{bb\sin\delta}$ ex quo porro colligitur $\tang\theta = \dfrac{(Q\cos\delta - P\sin\delta)aabb}{Rcc\sqrt{(a^4\cos\delta^2+b^4\sin\delta^2)}}$ vel ne ambiguitas ſigni radicalis dubium relinquat:

$$\tang\theta = \frac{(Q\cos\delta - P\sin\delta)aa\cos\eta}{Rcc\sin\delta} = \frac{(Q\cos\delta - P\sin\delta)bb\sin\eta}{Rcc\cos\delta}.$$

Hoc jam axe invento ſi pro $Q\cos\delta - P\sin\delta$ valor ſuperior ſubſtituatur, colligitur momentum virium ſollicitantium reſpectu iſtius axis $= \dfrac{Rb\sin(\delta+\eta)(aa\cos\eta^2\cos\theta^2+bb\sin\eta^2\cos\theta^2+cc\sin\theta^2)}{(aa\cos\eta^2+bb\sin\eta^2)\cos\theta}$ unde angulus elementaris $d\omega$ tempuſculo dt circa axem genitus erit

$$d\omega = \frac{Rgbdt^2\sin(\delta+\eta)}{M\cos\theta(aa\cos\eta^2+bb\sin\eta^2)} = \frac{Rgbdt^2\sqrt{(a^4\cos\delta^2+b^4\sin\delta^2)}}{Maabb\cos\theta}$$

ſi in $\sin(\delta+\eta)$ loco anguli η valor repertus ſubſtituatur.

COROLL. 1.

Fig. 82. 640. Ex puncto ergo V, in quo directio vis ſollicitantis planum AIB trajicit, ſtatim invenitur in eodem plano recta IE cui axis gyrationis IF imminet: poſito enim angulo $AIV = \delta$, erit $\tang AIE = \tang\eta = \dfrac{aa\cos\delta}{bb\sin\delta}$: neque a directione ipſius vis pendet.

CO-

COROLL. 2.

641. Quare ſi vis ſollicitans per axem principalem IA tranſeat, angulus AIE ſit rectus, axisque gyrationis IF erit in plano ad axem IA normali. At ob $\delta = 0$ et $\eta = 90^\circ$ erit $\tang EIF = \tang\theta = \dfrac{Qbb}{Rcc}$.

COROLL. 3.

642. Si momenta inertiae reſpectu axium IA et IB fuerint aequalia, erit $\tang\eta = \cot\theta = \tang(90^\circ - \delta)$; ideoque angulus VIE rectus: hoc igitur caſu axis gyrationis IF erit ad rectam IV normalis, et $aa = bb$ fiet $\tang\theta = \dfrac{(Q\cos\delta - P\sin\delta)aa}{Rcc}$.

COROLL. 4.

643. Si vis ſollicitans, quae ſit $= V$, et cujus directio planum AIB in puncto V trajicit, ex cujus reſolutione naſcuntur vires P, Q, R, ſola in corpus agat, ea corpori motum aſſignatum circa axem inventum IF inducet, praeterea vero ipſi motum progreſſivum ſecundum ſuam directionem imprimet, qua tempuſculo dt conficiet ſpatiolum $= \dfrac{Vgdt^2}{M}$.

SCHOLION.

644. In ſolutione hujus problematis jucundum ſane erat perſpicere, quomodo calculus, qui initio non parum intricatus videbatur, continuo ad majorem ſimplicitatem quaſi ſponte fuerit perductus, in quo eximium veritatis criterium cernitur. Plerumque enim talis calculi commoditas deprehenditur, dum in veritatis inveſtigatione felici ſucceſſu verſamur, cum contra a veritatis tramite aberrantes in calculos inextricabiles illabi ſolemus. Ac principium quidem minimi, quo hic ſum uſus, elegantem ſuppeditavit ſolutionem, quae multo intricatior evaſiſſet, ſi eam ut ante ex primis mechanicae principiis petere voluiſſemus. Nunc ergo problema, quo praeſens caput abſolvitur, in genere pertractare licebit.

PROBLEMA. 61.

645. Si corpus rigidum quieſcens a viribus quibuscunque ſollicitetur, definire primum motum elementarem, qui in eo generabitur.

SO-

SOLUTIO.

Ex Theor. VII. omnes vires sollicitantes, quotcunque fuerint, reducantur ad binas, quarum altera ipsi centro inertiae sit applicata, altera vero extra hoc centrum directa: horum prior sit $= S$ posterior $= V$. His duabus viribus inventis primo sola vis V consideretur, cui aequalis in ipso centro inertiae contrarie applicata concipiatur, ut centrum inertiae etiamnunc in quiete conservetur. Dispiciatur ergo, ubi directio illius vis V per planum aliquod intra binos axes principales corporis transeat, et ex probl. praeced. quaeratur tam axis gyrationis circa quem corpus primum converti incipiet, quam angulus infinite parvus primo tempusculo productus. Tum autem corpori insuper motus progressivus imprimetur, ad quem inveniendum vis illa altera V secundum suam directionem ipsam quoque centro inertiae applicata concipiatur, ita ut conjunctim cum vi priore S jam corpus sollicitet; et quia utraque centro inertiae est applicata, inde orietur motus progressivus purus, qui si cum gyratorio ante invento combinetur, habebitur totus effectus a viribus propositis productus.

COROLL. 1.

646. Si vis V evanescat, hoc est, si unica detur vis S centro inertiae applicata, quae omnibus viribus sollicitantibus aequivaleat, tum ut supra jam vidimus, corpori solus motus progressivus imprimitur.

COROLL. 2.

647. Sin autem vis S aequalis sit vi V sed directionem habeat oppositam, quod fit si vires sollicitantes ita fuerint comparatae, ut omnes quaeqne in sua directione centro inertiae applicatae se mutuo destruerent, tum centrum inertiae in quiete perseverabit, solusque motus gyratorius generabitur.

COROLL. 3.

648. Reliquis casibus omnibus in corpore motus mixtus generabitur; alter progressivus, alter circa certum quendam axem per centrum inertiae transeuntem; quorum utrumque seorsim considerare ac determinare licet.

SCHOLION.

649. Idem effectus producetur ab his viribus sollicitantibus, etiam si corpus in motu versetur, verum ob hujus motus admixtionem difficilius cognosci poterit. Si enim corpus jam circa alium axem gyretur ac nunc incitatur, non solum celeritas angularis sed etiam ipse axis gyrationis mutabitur, ita ut nunc circa alium axem per centrum inertiae transeuntem gyrari incipiat. Atque in hac axis variatione maxima motus perturbatio est sita, ad quam explicandam primo conveniet hujusmodi perturbationem momentaneam accurate determinari, quod argumentum in sequente capite evolvamus.

CAPUT X.

DE VARIATIONE MOMENTANEA AXIS GYRATIONIS A VIRIBUS PRODUCTA.

PROBLEMA. 62.

650. Si corpus rigidum, dum circa axem per centrum inertiae transeuntem gyratur, ab ejusmodi viribus sollicitetur, quae ipsi si quiesceret, motum gyratorium circa alium axem essent impressurae, determinare motus mutationem tempusculo minimo productum.

SOLUTIO.

Cum tam in motu jam insito, quam in eo, qui a viribus imprimeretur, centrum inertiae quiescat, id etiam conjunctim in quiete perseverabit. Consideretur ergo centrum inertiae I tanquam centrum sphaerae. in cujus superficie sit O polus, et IO axis circa quem corpus jam gyretur celeritate angulari $= \varepsilon$: idque in eum sensum, quo punctum S feratur in s. Tum vero corpus ab ejusmodi viribus sollicitetur, ut si quiesceret, gyraretur circa polum S seu axem IS, tempusculoque dt verteretur per angulum qdt^2, quandoquidem vidimus hunc angulum quadrato tempusculi dt esse homogeneum, fiatque hac conversio in eum sensum, quo punctum O versus ω ferretur. Datur ergo angulus, quem hi duo axes OI et SI in I constituunt, seu in superficie sphaerica arcus circuli maximi OS, qui ponatur $OS = s$: ac tempusculo dt hic arcus OS, ob motum insitum, circa polum O gyrabitur per angulum $SOs = \varepsilon dt$ perventurus in situm Os, ut esset arculus $Ss = \varepsilon dt \sin s$. Ob motum autem impressum idem arcus OS circa polum S gyrabitur per angulum $OS\omega = qdt^2$ perventurus in situm $S\omega$, ut esset arculus Fig. 84.

culus $C\omega = q dt^2 . ſin\, s$. Utroque igitur hoc motu simul punctum S in s et punctum O in ω transferetur, quia neutra translatio alteram turbat: reliqua autem puncta omnia utrumque motum percipient. Scilicet punctum quodvis o in ipso arcu OS assumtum, ut sit $Oo = \omega$, ob motum insitum circa o transferetur in m, ut sit $om = \varepsilon dt ſ\omega$, at ob motum genitum circa S transferetur in μ ut sit $o\mu = q dt^2 . ſ(s - \omega)$. Prout jam fuerit vel $om > o\mu$ vel $o\mu > om$, punctum o ob utrumque motum conjunctim vel m versus vel μ versus per differentiam istorum arculorum feretur. Quare si fuerit $om = o\mu$, punctum o refera quiescet, eritque propterea polus, circa quem corpus jam gyrari est censendum: ita ut ob vires sollicitantes axis gyrationis IO tempusculo dt in Io transferetur. Ad hanc igitur axis variationem momentaneam inveniendam ponamus $om = o\mu$, seu $\varepsilon dt ſ\omega = q dt^2 ſ(s - \omega)$ erit $\varepsilon ſ\omega = q dt ſ s\, coſ\,\omega - q dt\, coſ\, s\, ſ\omega$, unde evidens est arculum $Oo = \omega$ esse infinite parvum, ideoque $ſ\omega = \omega$ et $coſ\,\omega = 1$ hinque $\omega = \frac{q dt ſ s}{\varepsilon + q dt\, coſ\, s} = \frac{q dt ſ s}{\varepsilon}$. Circa hunc autem axem Io corpus tanta celeritate angulari gyratur, qua tempusculo dt puncta O et S in ω et s transferantur, unde ea cognosci poterit. Cum enim ea tempusculo dt conficiatur angulus $= \frac{O\omega}{Oo} = \frac{q dt^2 ſ s}{\omega} = dt(\varepsilon + q dt\, coſ\, s)$ praecedente autem tempusculo ob similem vim, quippe quae nunc non subito exorta est putanda, angulus confectus censeri debeat $= dt(\varepsilon - q dt\, coſ\, s)$, ita ut differentia sit $2 q dt^2\, coſ\, s$ ipsa celeritas angularis augmentum accepit $2 q dt\, coſ\, s$ atque ob similem rationem quia valor q dum ad variationes continuas definiendas inducitur, duplicari debet, etiam spatiolum Oo duplo majus est censendum. Dum enim in calculo punctum O continuo progredi assumitur, hic autem in o quiescens assumatur, intervallum Oo hic inventum diversum est a spatiolo, per quod polus gyrationis profertur concipiatur enim punctum o' ut sit $Oo' = 2Oo$, ac dico fore; o polum gyrationis post tempus dt, cum initio esset O. Hoc enim posito manifestum est interea punctum o manere immotum. Quare cum hic invenissemus $Oo = \frac{q dt ſ s}{\varepsilon}$, spatiolum O$o'$ per quod polus gyrationis transiisse est censendus erit duplo majus $= \frac{2 q dt ſ s}{\varepsilon}$. Vires ergo, quae corpori, si quiesceret,

quiesceret, imprimerent motum gyratorium circa axem IS in sensum Cω quo tempusculo dt absolveretur angulus $OS\omega = q dt^2$, motum corporis gyratorium jam insitum circa axem IO in sensum Ss celeritate angulari $= \varepsilon$ ita turbant, ut elapso tempusculo dt axis gyrationis fit recta Io, a praecedente IO versus IS vergens angulo $OIo = \frac{2 q dt ſ s}{\varepsilon}$, simulque celeritas gyratoria ε augmentum capiat $= 2 q dt\, coſ\, s$.

COROLL. 1.

651. Si vires sollicitantes in sensum oppositum tenderent; quantitas q negative accipi deberet, et punctum o in arcum SO ultra O productum caderet, celeritasque gyratoria minueretur.

COROLL. 2.

652. Si arcus OS vel evanesceret, vel semicirculo esset aequalis, axis gyrationis IO non mutaretur, sed totus effectus in priori motu gyratorio vel accelerando vel retardando consumeretur. Qui est casus jam supra pertractatus, ubi ostendimus incrementum vel decrementum celeritatis angularis esse $2qdt$.

COROLL. 3.

653. Si arcus OS est quadrans circuli, ideoque $coſ\, s = 0$, celeritas angularis ε nullam mutationem patietur, sed totus effectus virium in axe gyrationis mutando insumetur, eum vel propius ad S vel longius inde removendo.

SCHOLION. 1.

654. Hic ejusmodi tantum vires sumus contemplati, quae corpori, si quiesceret, motum gyratorium simplicem imprimerent, centro inertiae manente immoto: cujusmodi effectum producunt vires quaecunque, si modo ipsis aequales et contrariae in centro inertiae applicentur, quemadmodum in superiori capite fusius est ostensum. Neque vero pro aliis viribus indagatio erit difficilior, cum eae eundem motum gyratorium semper producant, ac si ipsis aequales et contrariae centro inertiae essent applicatae: motus enim progressivus, quem corpori praeterea inducunt, etiam hic nihil in motu gyratorio, qui corpori jam inest, esset mutaturus. Quin etiam si in corpore praeter motum gyratorium circa axem IO jam inesset motus progressivus, is nihil a gyratione

ratione circa axem IS genita mutaretur: ex quo solutio hujus problematis latissime patet, atque etiam ad motum progressivum, quem corpus vel jam habet, vel a viribus sollicitantibus nancisceretur, extendi potest. Quae combinatio motus progressivi cum gyratorio, cum nihil habeat difficultatis, hic erat praecipuum opus, ut quantum motus gyratorius, ob alium motum gyratorium a viribus oriundum, perturbetur, sollicite definiremus.

SCHOLION. 2.

655. Si axis IO, circa quem corpus jam gyrari assumitur, esset corporis axis principalis, corpus hunc motum, si a nullis viribus sollicitaretur, perpetuo esset conservaturum, uti in antecedentibus demonstravimus. Verum si axis IO non sit principalis, etiamsi nullae vires extrinsecus urgerent, tamen motus conservari non posset, quoniam ipse motus vires suppeditat, quae ad axem gyrationis deflectendum tendunt: hoc ergo casu, si quanta variatio in axe gyrationis gignatur, explorare velimus, non sufficit, vires extrinsecus in corpus agentes contemplari, sed cum iis etiam conjungi debent vires ex ipso motu gyratorio natae, quibus axem supra affici ostendimus. Quae vires cum pendeant a positione axis gyrationis IO respectu axium principalium corporis, haud abs re erit, antequam ulterius progrediamur, in genere investigare, quomodo a viribus quibusque positio axis gyrationis respectu axium principalium corporis immutetur.

PROBLEMA. 63.

656. Data positione axis gyrationis respectu trium axium principalium corporis, isque a viribus sollicitantibus varietur, ut corpus elapso tempusculo minimo circa alium axem gyretur, definire positionem hujus axis variati respectu axium principalium.

SOLUTIO.

Fig. 65. Consideretur iterum superficies sphaerica, in cujus centro sit corporis centrum inertiae I, sintque nunc radii IA, IB, IC axes principales corporis, corpusque circa axem IO gyretur celeritate angulari ε, cujus positio cum detur respectu axium principalium, ponatur arcus $AO = \alpha$, $BO = \beta$, et $CO = \gamma$, ut sit $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$. Tum vero ponantur anguli $BAO = \lambda$, $CBO = \mu$, et $ACO = \nu$, erit ob quadrantes AB, BC, et CA

$\cos\beta = \sin\alpha \cos\lambda$; $\cos\gamma = \sin\beta\cos\mu$; $\cos\alpha = \sin\gamma\cos\nu$, unde sit

cos

$$\cos\lambda = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha};\ \cos\mu = \frac{\cos\gamma}{\sin\beta};\ \cos\nu = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$$

$$\sin\lambda = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha};\ \sin\mu = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta};\ \sin\nu = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma},\ \text{ergo}$$

$$\tan\lambda = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta};\ \tan\mu = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma};\ \tan\nu = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

ideoque $\tan\lambda \tan\mu \tan\nu = 1$: quae est relatio inter ternos angulos λ, μ, ν, ex quibus arcus α, β, γ ita definiuntur, ut sit:

$$\tan\alpha = \frac{\tan\nu}{\cos\lambda} = \frac{\cot\mu}{\sin\lambda};\ \tan\beta = \frac{\tan\lambda}{\cos\mu} = \frac{\cot\nu}{\sin\mu};\ \tan\gamma = \frac{\tan\mu}{\cos\nu} = \frac{\cot\lambda}{\sin\nu}.$$

His relationibus notatis ex datis $BAO = \lambda$ et $AO = \alpha$ reliqua sic definiuntur, ut sit

$$\cos\beta = \sin\alpha\cos\lambda;\ \cos\gamma = \sin\alpha\sin\lambda;\ \tan\mu = \frac{\cot\alpha}{\sin\lambda};\ \tan\nu = \tan\alpha\cos\lambda.$$

Quodsi jam ob vires sollicitantes tempusculo dt axis gyrationis IO abeat in Io, totum corpus, quasi interea circa axem Io esset gyratum, considerari potest, quo motu puncta A, B, C, suas distantias a puncto o conservabunt; ita ut elapso tempusculo dt, polus gyrationis o a polis principalibus A, B, C, habiturus sit distantias Ao, Bo, Co. Quare si detur angulus elementaris $OAo = d\lambda$, et $Ao = \alpha + d\alpha$, variatio reliquorum per differentiationem consuetam elicietur:

$$d\beta = \frac{d\lambda \sin\alpha \sin\lambda - d\alpha\cos\alpha\cos\lambda}{\sin\beta}$$

$$d\gamma = \frac{-d\lambda\sin\alpha\cos\lambda - d\alpha\cos\alpha\sin\lambda}{\sin\gamma}$$

$$d\mu = \frac{-d\alpha\sin\lambda - d\lambda\sin\alpha\cos\alpha\cos\lambda}{\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2\sin\lambda^2};\ d\nu = \frac{d\alpha\cos\lambda - d\lambda\sin\alpha\cos\alpha\sin\lambda}{\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2\cos\lambda^2}.$$

COROLL. 1

657. Si ab his differentialibus ad integralia progredi liceret, in corpore ad quodvis tempus ille axis, circa quem tum sit gyraturum, ejusque positio respectu axium principalium assignari posset.

COROLL. 2.

658. Hic scilicet non ad ipsum motum corporis respicimus, sed tantum id agitur, ut variatio momentanea axis gyrationis respectu axium principalium cognoscatur, ideoque ipsa celeritas gyratoria hic in computum non est ingressa.

COROLL. 3.

659. Cum in praecedente problemate arculus Oo sit determinatus, hic erit $Oo = \sqrt{(d\alpha^2 + d\lambda^2 \sin\alpha^2)}$, tum vero pro positione hujus arculi Oo respectu arcus AO seu Ao est $\tang AoO = \frac{d\lambda \sin\alpha}{d\alpha}$. Seu $\sin AoO = \frac{d\lambda \sin\alpha}{Oo}$ et $\cos AoO = \frac{d\alpha}{Oo}$, ita ut hinc habeamus elementa: $d\alpha = Oo.\cos AoO$ et $d\lambda = \frac{Oo.\sin AoO}{\sin\alpha}$.

SCHOLION.

660. Cognitis ergo viribus, quibus corpus, dum circa quempiam axem gyratur, sollicitatur, per caput praecedens is axis, circa quem quiescens gyrari inciperet, definiri: tum vero ope praecedentis problematis variatio in axe gyrationis facta explorari poterit. Verum nisi corpus primo circa axem quempiam principalem gyretur, praeter vires externas, quibus corpus forte sollicitatur, inprimis eae vires, quae ex ipso motu gyratorio, ejusque vi centrifuga nascuntur, perpendi debent. Quas vires etiamsi supra jam in genere assignavimus, tamen easdem nunc denuo respectu axium principalium, quatenus axis gyrationis ab iis discrepat, determinari oportet: quibus cognitis, cum facile sit eas cum viribus externis conjungere, eas deinceps solas contemplemur, et quantum positio axis gyrationis iis turbetur, accurate investigemus.

PROBLEMA. 64.

661. Si corpus rigidum gyretur circa axem quemcunque per ejus centrum inertiae transeuntem, cujus positio respectu axium principalium detur, invenire vires hinc ad axem gyrationis turbandum natas.

SOLUTIO.

Fig. 86. Existente I centro inertiae sint IA, IB, et IC ejus axes principales, eorumque respectu momenta inertiae Maa, Mbb et Mcc. Gyretur autem corpus circa axem IO, celeritate angulari $= \varepsilon$, ex cujus quovis puncto O demittatur ad planum AIB perpendiculum OL, ductaque recta IL vocentur anguli AIL $= m$ et LIO $= n$, ita ut pro situ hujus axis IO respectu axium principalium sit $\cos AIO = \cos m \cos n$; $\cos BIO = \sin m \cos n$ et $\cos CIO = \sin n$. Iam sumtis primo axibus principalibus pro directricibus iis parallelae constituantur ternae coordinatae $IX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$; et in Z sumto corporis elemento dM erit ex natura axium principalium $\int xydM = 0$; $\int xzdM = 0$, et $\int yzdM = 0$, tum vero $\int(yy+zz)dM = Maa$; $\int(xx+zz)dM = Mbb$; et $\int(xx+yy)dM = Mcc$ ideoque:

$$\int xxdM = \tfrac{1}{2} M (bb + cc - aa);\quad \int yydM = \tfrac{1}{2} M (aa + cc - bb);$$
$$\int zzdM = \tfrac{1}{2} M (aa + bb - cc).$$

Porro in plano AOB ducta IP ad IL, et in plano LOC recta IQ ad IO normali, ut rectae IO, IP et IQ sint inter se normales, quas tanquam directrices adhibeamus. Hunc in finem ducatur primo YS ipsi IP in plano AIB parallela, erit $IS = x \cos m + y \sin m$; et $YS = y \cos m - x \sin m$: atque ex Z ipsi YS agatur parallela Zy, quae erit in planum LIO normalis, et $Zy = y \cos m - x \sin m$, item $Sy = YZ = z$. Denique ex y ad IO demittatur perpendiculum yx, ut jam desideratae coordinatae sint $Ix = X$, $xy = Y$ et $yZ = Z$ fietque

$$X = IS \cos n + Sy \sin n = x \cos m \cos n + y \sin m \cos n + z \sin n$$
$$Y = yS \cos n - IS \sin n = z \cos n - x \cos m \sin n - y \sin m \sin n$$
$$Z = y \cos m - x \sin m.$$

Cum jam elementum dM in Z ob celeritatem angularem $= \varepsilon$ exerat vim centrifugam $= \frac{\varepsilon\varepsilon.xZdM}{2g}$, nascetur inde vis secundum $xy = \frac{\varepsilon\varepsilon YdM}{2g}$ et vis secundum directionem ipsi yZ parallelam in x applicata $= \frac{\varepsilon\varepsilon ZdM}{2g}$, quae vires ipsae cum se mutuo destruant ob $\int YdM = 0$ et $\int ZdM = 0$, earum momenta tantum erunt spectanda. Sumta ergo $IO = f$, dabitur in O vis Oq ipsi IQ parallela omnibus viribus yZ aequivalens, si modo his viribus aequales et contrariae ipsi centro inertiae I applicentur. Cum igitur ob momenta sit

$$\text{vis } Oq.\ IO = \frac{\varepsilon\varepsilon}{2g}\int XYdM \text{ et}$$

$$\text{vis } Op.\ IO = \frac{\varepsilon\varepsilon}{2g}\int XZdM$$

erit

vis

$$\text{vis } Oq = \frac{\varepsilon\varepsilon}{2fg}\int XYdM \text{ et vis } Oq = \frac{\varepsilon\varepsilon}{2fg}\int XZdM.$$

At regrediendo ad coordinatas principales eſt

$$\int XYdM = \sin n \cos n\,(\int zzdM - \cos m^2 \int xxdM - \sin m^2 \int yydM) \text{ et}$$
$$\int XZdM = \sin m \cos m \cos n\,(\int yydM - \int xxdM)$$

ideoque per momenta inertiae data

$$\int XYdM = M \sin n \cos n\,(aa \cos m^2 + bb \sin m^2 - cc) \text{ et}$$
$$\int XZdM = M \sin m \cos m \cos n\,(aa - bb).$$

Conſequenter ex motu gyratorio naſcuntur hae vires

$$\text{vis } Op = \frac{M\varepsilon\varepsilon \sin m \cos m \cos n(aa-bb)}{2fg} \text{ et}$$
$$\text{vis } Oq = \frac{M\varepsilon\varepsilon \sin n \cos n(aa\cos m^2 + bb \sin m^2 - cc)}{2fg}$$

puncto O ſecundum directiones rectis OP et OQ parallelas applicatae, quibus autem aequales et contrariae in ipſo centro inertiae I applicatae ſunt intelligendae.

COROLL. 1.

662. Cum vis Oq ſit ad axem gyrationis IO in O normalis, ea producta plano AOB in puncto M occurret, quod in IL producta erit ſitum, eritque $IM = \frac{f}{\cos n}$ et $OM = f \tang n$ ob IOM angulum rectum.

COROLL. 2.

663. Directio autem alterius vis Op eſt ad planum LIO normalis utpote rectae IP in plano AIB ad IL normali parallela: atque planum pOq continuatum ad planum AIB inclinatur angulo $= 90° - n$, idque interſecat recta ad IM normali.

COROLL. 3.

664. Quoniam hae vires ex motu gyratorio ipſo natae ſibi aequales et contrarias in centro inertiae applicatas habent, eae ſolum motum gyratorium perturbabunt, neque corpori ullum motum progreſſivum inducent, ita ut centrum inertiae in quiete ſit permanſurum.

PROBLEMA. 65.

665. Inventis viribus ex motu gyratorio ipſo natis ad eum perturbandum, invenire axem, circa quem hae vires corpus, ſi eſſet in quiete, gyraturae eſſent.

SO-

SOLUTIO.

Manentibus omnibus, ut in problemate praecedente, ita ut IA, IB, IC ſint axes corporis principales, eorumque reſpectu momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc, ſit IO axis, circa quem jam corpus gyratur celeritate $= \varepsilon$, et pro ejus ſitu anguli $AIL = m$, et $LIO = n$, exiſtente recta OL ad planum AOB normali, ut poſita $IO = f$, ſit $IL = f \cos n$ et $OL = f \sin n$. Tum vero ex O ad IO ducatur normalis OM, erit $IM = \frac{f}{\cos n}$ et $OM = f \tang n$, ducta autem ad IM in plano AIB normali MA, erit $IA = \frac{f}{\cos m \cos n}$ et $MA = \frac{f \tang m}{\cos n}$. Nunc autem in O habentur vires Op et Oq, quarum Op ipſi AM parallela et Oq cum OM in directum eſt ſita; ſuntque hae vires: Fig. 87

$$\text{vis } Op = \frac{M\varepsilon\varepsilon \sin m \cos m \cos n(aa-bb)}{2fg}.$$
$$\text{vis } Oq = \frac{M\varepsilon\varepsilon \sin n \cos n(aa\cos m^2 + bb\sin m^2 - cc)}{2fg}.$$

quarum media directio planum AIB alicubi in V in recta MA ſecabit, ut ſit $MO : MV = Oq : Op$, unde colligitur $MV = \frac{ff \sin m \cos m(aa-bb)}{\cos n(aa\cos m^2 + bb\sin m^2 - cc)}$, hincque $\tang MIV = \frac{\sin m \cos m(aa-bb)}{aa\cos m^2 + bb\sin m^2 - cc}$: ex quo concluditur $\tang AIV = \frac{(bb-cc)\sin m}{(aa-cc)\cos m}$, quem angulum ſupra vocavimus δ, at diſtantia $IV = \frac{f\sqrt{(a^4\cos m^2 + b^4 \sin m^2 + c^4 - 2cc(aa\cos m^2 + bb\sin m^2))}}{\cos n(aa\cos m^2 + bb\sin m^2 - cc)}$ quam ſupra vocavimus $= h$, ut ſit $h = \frac{f(bb-cc)\sin m}{\cos n \sin \delta(aa\cos m^2 + bb\sin m^2 - cc)}$ ſeu $h = \frac{f(aa-cc)\cos m}{\cos n \cos \delta(aa\cos m^2 + bb\sin m^2 - cc)}$. Nunc igitur in puncto V illas vires applicatas concipere licet, quae ſunt

$$\text{vis ſec. } VM = \frac{M\varepsilon\varepsilon \sin m \cos m \cos n(aa-bb)}{2fg}$$
$$\text{vis ſec. } VT = \frac{M\varepsilon\varepsilon \sin n \cos n(aa\cos m^2 + bb\sin m^2 - cc)}{2fg}$$

quarum haec ſecundum VR ipſi LO et VN ipſi ML parallelam relata dat vim sec. VR $= \frac{M\aleph\aleph \sin n \cos n^2 (aa\cos m^2 + bb\sin m^2 - cc)}{2fg}$

et vim sec. VN $= \frac{M\aleph\aleph \sin n^2 \cos n (aa\cos m^2 + bb\sin m^2 - cc)}{2fg}$

quarum illa VR supra littera R est indicata. At quod supra erat $Q\cos\delta - P\sin\delta$, qua expressione vis ad IV in plano AIB normalis denotatur, hic est vis VM $\cos$ MIV − vis VN $\sin$ MIV, unde prodit

$$Q\cos\delta - P\sin\delta = \frac{M\aleph\aleph \sin m \cos m \cos n^3 (aa-bb)(aa\cos m^2 + bb\sin m^2 - cc)}{2fg\sqrt{(a^4\cos m^2 + b^4\sin m^2 + c^4 - 2cc(aa\cos m^2 + bb\sin m^2))}}$$

Cum porro sit $\tang \delta = \frac{(bb-cc)\sin m}{(aa-cc)\cos m}$ erit

$$\cos\delta = \frac{(aa-cc)\cos m}{\sqrt{(a^4\cos m^2 + b^4\sin m^2 + c^4 - 2cc(aa\cos m^2 + bb\sin m^2))}}$$

His definitis sit jam IF axis ille, circa quem istae vires corpus, si quiesceret, essent gyraturae, ductoque ex F in planum AIB perpendiculo FE, vocentur anguli AIE $= \eta$ et EIF $= \theta$, ac per probl. 60. consequimur:

$$\tang\eta = \frac{aa\cos\delta}{bb\sin\delta} = \frac{aa(aa-cc)\cos m}{bb(bb-cc)\sin m}, \text{ et}$$

$$\tang\theta = \frac{Q\cos\delta - P\sin\delta}{Kccc\cos\delta}.\ bb\sin\eta = \frac{\sin m\cos n(aa-bb)\,bb\sin\eta}{Q\,cc(aa-cc)\sin n}.$$

Denique tempusculo dt circa hunc axem IF angulus $d\omega$ generabitur, ut sit:

$$d\omega = \frac{\aleph\aleph dt^2 \sin n\cos n\sqrt{(a^4(aa-cc)^2\cos m^2 + b^4(bb-cc)^2\sin m^2)}}{2aabb\cos\theta}$$

$$\text{seu } d\omega = \frac{\aleph\aleph(aa-cc)dt^2\cos m\sin n\cos n}{2bb\sin\eta\cos\theta} = \frac{\aleph\aleph(bb-cc)dt^2\sin m\sin n\cos n}{2aa\cos\eta\cos\theta},$$

COROLL. 1.

666. Si pro axe gyrationis proposita IO ponantur anguli OIA $= \alpha$; OIB $= \beta$; OIC $= \gamma$; at pro axe gyrationis elementaris IF anguli FIA $= \mathfrak{A}$; FIB $= \mathfrak{B}$; FIC $= \mathfrak{C}$; erit;

$\cos\alpha = \cos m \cos n$; $\cos\beta = \sin m \cos n$; $\cos\gamma = \sin n$, atque
$\cos\mathfrak{A} = \cos\eta\cos\theta$; $\cos\mathfrak{B} = -\sin\eta\cos\theta$; $\cos\mathfrak{C} = \sin\theta$.

CO-

COROLL. 2.

667. Deinde ob $\tang\eta = \frac{aa(aa-cc)\cos\alpha}{bb(bb-cc)\cos\beta}$, si ponatur brevitatis gratia $\sqrt{(a^4(aa-cc)^2\cos\alpha^2 + b^4(bb-cc)^2\cos\beta^2)} = W$ erit $\sin\eta = \frac{aa(aa-cc)\cos\alpha}{W}$ et $\cos\eta = \frac{bb(bb-cc)\cos\beta}{W}$. Porro autem posito

$$\sqrt{(a^4b^4(aa-bb)^2\cos\alpha^2\cos\beta^2 + a^4c^4(aa-cc)^2\cos\alpha^2\cos\gamma^2 + b^4c^4(bb-cc)^2\cos\beta^2\cos\gamma^2)} = \Omega$$

habebitur:

$$\cos\mathfrak{A} = \frac{bbcc(bb-cc)\cos\beta\cos\gamma}{\Omega};\ \cos\mathfrak{B} = \frac{aacc(cc-aa)\cos\alpha\cos\gamma}{\Omega}$$

$$\cos\mathfrak{C} = \frac{aabb(aa-bb)\cos\alpha\cos\beta}{\Omega} \text{ et } d\omega = \frac{\aleph\aleph\Omega dt^2}{2aabbcc}.$$

SCHOLION.

668. Quod ad sensum attinet; in quem gyratio circa axem IF fiet, quoniam angulus elementaris $d\omega = \frac{\aleph\aleph\Omega dt^2}{2aabbcc}$ semper est positivus, notandum est, in indagatione hujus valoris vim VR ut positivam esse spectatam, unde secundum figuram punctum E in sensum Ee versus A motu gyratorio feretur. Etsi enim haec ratio tantum in figura, ubi anguli m, n, η, θ sunt positivi et recto minores, locum habet, tamen hinc ratio sensus recte concludi potest; quo semel in calculum introducto deinceps generatim veritati inhaerebimus. Ceterum evidens est, si axis IO in quempiam principalium cadat, fore $d\omega = 0$; namque si $\alpha = 0$, fit $\beta = \gamma = 90°$, ideoque $\cos\beta = \cos\gamma = 0$ quo casu utique quantitas Ω evanescit: simul vero perspicuum est, nullo alio casu hanc perturbationem $d\omega$ evanescere posse, ideoque plures tribus non dari axes gyrationis liberos, nisi forte duo momenta principalia fuerint aequalia.

PROBLEMA. 66.

669. Si corpus gyretur circa axem quemcunque per ejus centrum inertiae transeuntem, ab axibus principalibus diversum, definire variationem momentaneam, quam cum ipse axis gyrationis tum celeritas angularis patietur.

SOLUTIO.

Fig. 88. Transferantur omnia, quae in praecedente problemate sunt inventa ad superficiem sphaericam centro inertiae I descriptam, in qua A, B, C sint poli axium principalium, eorumque respectu momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc. Tum vero sit O polus axis illius, circa quem corpus jam gyratur celeritate angulari $= ȣ$ in sensum ABC. Ex C per O ducto circulo maximo COM qui est quadrans, erunt arcus AM $= m$ et MO $= n$: tum in quadrante BA producto capiatur AE $= \eta$, et ducto quadrante CE arcus ES $= \theta$, ut sit $\mathrm{tang}\,\eta = \frac{aa(aa-cc)\cos m}{bb(bb-cc)\sin m}$ seu $\frac{bb \sin m \sin\eta}{aa-cc} = \frac{aa\cos m\cos\eta}{bb-cc}$ atque $\mathrm{tang}\,\theta = \frac{bb\sin m\sin\eta.(aa-bb)\cos n}{cc(aa-cc)\sin n} = \frac{aa\cos m\cos\eta.(aa-bb)\cos n}{cc(bb-cc)\sin n}$. His ita definitis ob vires corporis centrifugas corpus conabitur circa polum S gyrari in sensum Ee, ita ut tempusculo dt descripturum esset angulum $d\omega = \frac{ȣȣ(aa-cc)dt.2\cos m\sin n\cos\eta}{2bb\sin\eta\cos\theta} = \frac{ȣȣ(bb-cc)dt.2\sin m\sin n\cos n}{2aa\cos\eta\cos\theta}$ seu $d\omega = \frac{ȣȣ(aa-bb)dt.2\sin m\cos m\cos n^2}{2cc\sin\theta}$. Ducatur ergo arcus circuli maximi OS, qui sit $= s$, quem deinceps determinemus, atque in probl. 62. erit $q = \frac{ȣȣ(aa-bb)\sin m\cos m\cos n^2}{2cc\sin\theta}$, hincque ob motum gyratorium elementarem corpus gyrabitur circa polum o, ut sit arculus Oo $= \frac{ȣ(aa-bb)dt\sin m\cos m\cos n^2\sin s}{cc\sin\theta}$: celeritas autem angularis $ȣ$ augmentum accipiet $dȣ$ ut fit $dȣ = \frac{ȣȣ(aa-bb)dt\sin m\cos m\cos n^2\cos s}{cc\sin\theta}$.

Nunc igitur primo quaeri debet positio arcus OS, seu angulus COS, quo ad arcum CO inclinatur: quem in finem consideretur triangulum OCS, in quo est OC $= 90^\circ - n$; CS $= 90^\circ - \theta$ et angulus OCS $= m+\eta$, unde reperitur:

$$\cot\mathrm{COS} = \frac{\cos n\,\mathrm{tang}\,\theta}{\sin(m+\eta)} - \frac{\sin n\cos(m+\eta)}{\sin(m+\eta)}.$$

Est vero $\mathrm{tang}(m+\eta) = \frac{aa(aa-cc)\cos m^2 + bb(bb-cc)\sin m^2}{(aa-bb)(cc-aa-bb)\sin m\cos m}$, atque $\frac{\cos n\,\mathrm{tang}\,\theta}{\sin(m+\eta)} = \frac{aabb(aa-bb)\sin m\cos m\cos n^2}{cc\sin n(bb(bb-cc)\sin m^2 + aa(aa-cc)\cos m^2)}$, unde fit

$$\mathrm{tang}\,\mathrm{COS} = \frac{cc\sin n(aa(aa-cc)\cos m^2 + bb(bb-cc)\sin m^2)}{(aa-bb)\sin m\cos m(aabb\cos n^2 + cc(aa+bb)\sin n^2 - c^4\sin n^2)}$$

Porro ex eodem triangulo OCS colligitur,

$$\cos s = \cos(m+\eta)\cos n\cos\theta + \sin n\sin\theta = \sin\theta\left(\sin n + \frac{\cos n\cos(m+\eta)}{\mathrm{tang}\,\theta}\right)$$

seu $\cos s = \frac{\sin n\sin\theta(aabb-(aa+bb)cc+c^4)}{aabb} = \frac{(aa-cc)(bb-cc)\sin n\sin\theta}{aabb}$

unde fit $dȣ = \frac{ȣȣ(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)\sin m\cos m\sin n\cos n^2}{aabbcc}.dt.$

Denique positis OA $= \alpha$; OB $= \beta$, OC $= \gamma$ erit arculus Oo $= \frac{ȣdt}{aabbcc}$
$$\surd\begin{pmatrix} a^4b^4(aa-bb)^2\cos\alpha^2\cos\beta^2 + a^4c^4(aa-cc)^2\cos\alpha^2\cos\gamma^2 + b^4c^4(bb-cc)^2\cos\beta^2\cos\gamma^2 \\ -(aa-bb)^2(aa-cc)^2(bb-cc)^2\cos\alpha^2\cos\beta^2\cos\gamma^2 \end{pmatrix}$$

et $dȣ = \frac{ȣȣ(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{aabbcc}.dt$

Verum si ex o ad CO perpendiculum ducatur op, per regulas trigonometriae sphaericae, arculi elementares Op et op ita rationaliter exprimuntur ut sit:

$$\mathrm{O}p = \frac{ȣ(aa-bb)dt\cos\alpha\cos\beta(aabb-(aa-cc)(bb-cc)\cos\gamma^2)}{aabbcc\sin\gamma}$$

$$op = \frac{ȣdt\cos\gamma(aa(aa-cc)\cos\alpha^2 + bb(bb-cc)\cos\beta^2)}{aabc\sin\gamma}.$$

COROLL. 1.

670. Cum sit $dȣ = \frac{ȣȣ(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{aabbcc}dt$ patet si trium momentorum principalium duo fuerint inter se aequalia, tum celeritatem angularem plane non immutari.

COROLL. 2.

671. Introductis distantiis α, β, γ poli O a polis principalibus A, B, C erit

tang

$$tang\ COS = \frac{cc\cos\gamma\,(aa(aa-cc)\cos\alpha^2 + bb(bb-cc)\cos\beta^2)}{(aa-bb)\cos\alpha\cos\beta\,(aabb-(aa-cc)(bb-cc)\cos\gamma^2)}$$

ducto autem arcu AO erit $tang\ AOC = \frac{-\cos\beta}{\cos\alpha\cos\gamma}$, unde concluditur

$$tang\ AOS = \frac{aa\cos\alpha\,(bb(bb-aa)\cos\beta^2 + cc(cc-aa)\cos\gamma^2)}{(bb-cc)\cos\beta\cos\gamma\,((bb-aa)(cc-aa)\cos\alpha^2 - bbcc)}.$$

COROLL. 3.

672. Haec formula pro angulo AOS analoga est illi pro angulo COS, indeque oritur, si litterae a, b, c, item α, β, γ in ordine uno loco promoveantur: hoc autem modo signum prodiret negativum, id quod rei naturae est consentaneum, cum angulus AOS in sensum contrarium cadat respectu prioris.

COROLL. 4.

673. Si arcus OS quadrantem AC secet in puncto R colligitur:

$$tang\ AR = \frac{aa\cos\alpha\,(bb(aa-bb)\cos\beta^2 + cc(aa-cc)\cos\gamma^2)}{cc\cos\gamma\,(aa(aa-cc)\cos\alpha^2 + bb(bb-cc)\cos\beta^2)}$$

ac si idem arcus SO productus occurrat quadranti BA in Q erit per analogiam:

$$tang\ BQ = \frac{bb\cos\beta\,(cc(bb-cc)\cos\gamma^2 + aa(bb-aa)\cos\alpha^2)}{aa\cos\alpha\,(bb(bb-aa)\cos\beta^2 + cc(cc-aa)\cos\gamma^2)}$$

$= cot\ AQ.$

COROLL. 5.

674. Cum tempusculo dt arcus $CO = \gamma$ minuatur particula Op, erit per differentialia

$$aabbcc\,d\gamma\sin\gamma = \varkappa(bb-aa)\,dt\cos\alpha\cos\beta\,(aabb-(aa-cc)(bb-cc)\cos\gamma^2)$$

hincque per analogiam:

$$aabbcc\,d\beta\sin\beta = \varkappa(aa-cc)\,dt\cos\gamma\cos\alpha\,(aacc-(cc-bb)(aa-bb)\cos\beta^2)$$

$$aabbcc\,d\alpha\sin\alpha = \varkappa(cc-bb)\,dt\cos\beta\cos\gamma\,(bbcc-(bb-aa)(cc-aa)\cos\alpha^2).$$

SCHOLION.

675. Assumsimus in solutione, quod probe est notandum, corpus circa axem IO in sensum ABC gyrari, ad quem ergo casum formulae inventae sunt accommodatae: sin autem corpus gyraretur in sensum contrarium, formulae facillime eo referentur, statuendo celeritatem gyratoriam $\varkappa$ negativam. Atque sic problema hoc difficillimum, quo variatio momentanea quaeritur, dum corpus circa axem non-principalem gyretur, satis commode resolvimus, cum formulae postremae, ad quas tandem solutio est perducta, non adeo sint intricatae, ut simpliciores expectare licuisset. Neque etiam suspicio ullius erroris in calculo commissi locum habet, cum formula qua incrementum celeritatis angularis $\varkappa$ exprimitur, ad omnes tres axes principales aeque referatur, tum derivatio anguli AOS ex angulo COS rem firmissime evincit: ac tandem aequationes in postremo coroll. exhibitae hanc proprietatem habere deprehenduntur, ut sit $d\alpha\sin\alpha\cos\alpha + d\beta\sin\beta\cos\beta + d\gamma\sin\gamma\cos\gamma = 0$, uti conditio principalis $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ exigit. Ternae autem postremae aequationes, cum ea quae differentiale $d\varkappa$ definit, plenam problematis solutionem continet, ubi quidem quaelibet trium illarum omitti potest. Si corpus insuper a viribus externis sollicitaretur, solutio non multo difficilior evaderet, quemadmodum in sequente problemate ostendetur.

PROBLEMA. 67.

676. Si corpus rigidum, dum circa axem quemcunque per ejus centrum inertiae transeuntem gyratur, a viribus quibuscunque sollicitetur, definire variationem momentaneam tam in ipso axe quam in celeritate angulari inde ortam.

SOLUTIO.

Sit IO axis, circa quem corpus nunc gyretur celeritate angulari $= \varkappa$, in sensum ABC, ac primo dispiciatur ejus situs respectu axium principalium IA, IB, IC, quorum respectu momenta inertiae sint Maa, Mbb, Mcc, positisque arcubus $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$, per problema praecedens quaeratur, quantum tempusculo dt tam axis gyrationis IO, quam celeritas angularis ob solum motum gyratorium mutari debeat. Scilicet si polus gyrationis ex O abeat in o, vidimus fore incrementum distantiae $CO = \gamma$: Fig. 88.

$$Co - CO = \frac{\varkappa(aa-bb)\,dt\cos\alpha\cos\beta\,(aabb-(aa-cc)(bb-cc)\cos\gamma^2)}{aabbcc\sin\gamma}$$

atque incrementum anguli BCO

$$OCo = \frac{\varepsilon\, dt \cos\gamma\,(aa(aa-cc)\cos\alpha^2 + bb(bb-cc)\cos\beta^2)}{aabb \sin\gamma^2}$$

quibus elementis ſitus puncti o ſine ambiguitate definitur. Praeter hanc autem axis gyrationis mutationem celeritas angularis ε capiet incrementum $= \frac{\varepsilon\varepsilon(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{aabbcc}dt$. Deinde perpendantur vires ſollicitantes, utrum corpori motum progreſſivum imprimant: cujus rei facillimum eſt judicium, dum omnes vires ſecundum ſuas quaeque directiones ipſi centro inertiae applicatae concipiantur: ſi enim ſe mutuo in aequilibrio teneant, corpori nullus motus progreſſivus imprimetur: ſin autem detur vis illis aequivalens, ab hac motus progreſſivus in corpore generabitur, ex primis principiis facile definiendus. Tum iſti vi aequivalenti aequalis et contraria ipſi centro inertiae applicetur, ut jam hoc centrum in quiete teneatur, atque hac vi cum iis, quibus corpus actu ſollicitatur, conjuncta, omnes revocentur ad duas, quarum altera in centro inertiae altera in alio quodam puncto ſit applicata, quae duae vires erunt aequales ſed contrariae. Porro ex praecedente capite quaeratur axis, circa quem corpus ab iſtis viribus converti incipiet ſimulque angulus converſionis momentaneae, unde per probl. 62. ſine ullo reſpectu ad mutationem jam inventam habito, quoniam haec eſt infinite parva, quaſi corpus adhuc circa axem Oo gyraretur, quaeratur variatio in axe et celeritate angulari inde orta, quarum illa ad incrementa vel decrementa tam in arcu CO quam in angulo BCO nata reducatur. Denique haec terna elementa cum iis, quae jam ante ex motu gyratorio ſunt definita, conjungatur, ſicque obtinebitur vera variatio tam in axe IO quam in celeritate angulari ab utraque cauſa ſimul producta,

SCHOLION.

677. Dum virium ſollicitantium effectus exploratur, variatio axis inde orta eodem modo per angulum elementarem OCo et differentiam arcuum CO et Co exprimi poteſt, quo hic uſi ſumus. Scilicet quaeratur primo axis, circa quem corpus, ſi quieſceret, a viribus verteretur, qui ſit IS, ſito $\tfrac{1}{2}qdt^2$ angulus converſionis tempuſculo dt productus circa S in ſenſum $O\omega$, ac pro puncto S ponatur arcus $AE = \eta$ et $ES = \theta$, qui valores a praecedentibus, ex ipſo motu gyratorio ortis probe ſunt diſtinguendi. Cum ergo ſit $AM = ACM = m$, ut ſit $\cos m =$

$m = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$, et $\sin m = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma}$, erit $MCE = m + \eta$, et ex triangulo OCS reperitur:

$$\cos OS = \cos s = \cos(m+\eta)\sin\gamma\cos\theta + \cos\gamma\sin\theta \text{ et}$$

$$\cot COS = \frac{\sin\gamma\tan\theta}{\sin(m+\eta)} - \frac{\cos\gamma\cos(m+\eta)}{\sin(m+\eta)}.$$

Nunc autem ex probl. 62. polus gyrationis O transfertur in o ut ſit $Oo = \frac{2qdt\sin s}{\varepsilon}$ et incrementum celeritatis angularis

$$2qdt\cos s = 2qdt\,(\sin\gamma\cos\theta\cos(m+\eta) + \cos\gamma\sin\theta).$$

Deinde ex Oo elicitur

$$Op = Oo\cos COS = \frac{2qdt\sin s}{\varepsilon}\cos COS \text{ et}$$

$$op = Oo\sin COS = \frac{2qdt\sin s}{\varepsilon}\sin COS = \frac{2qdt}{\varepsilon}\cos\theta\sin(m+\eta)$$

ideoque angulus $OCo = \frac{2qdt\cos\theta\sin(m+\eta)}{\varepsilon\sin\gamma}$.

Hinc vero porro deducitur

$$CO - Co = Op = op\cot COS = \frac{2qdt}{\varepsilon}(\sin\gamma\sin\theta - \cos\gamma\cos\theta\cos(m+\eta)).$$

Tantum ergo ſupereſt, ut haec elementa cum illis, quae ex motu gyratorio ſunt eruta combinentur, ut obtineatur axis gyrationis variatus cum incremento vel decremento celeritatis angularis.

PROBLEMA. 68.

678. Si ad aliquod tempus detur ſitus corporis rigidi circa quempiam axem per ejus centrum inertiae tranſeuntem gyrantis, atque tam axis gyrationis quam celeritas angularis utcunque varietur, invenire mutationem momentaneam in corporis ſitu ortam.

SOLUTIO.

Cum centrum inertiae corporis quieſcat, ſitus corporis referatur ad ſphaeram fixam, eodem centro deſcriptam, intra quam corpus motum ſuum abſolvat. In hac ſphaera capiatur circulus magnus VXZY in eoque punctum fixum Z: atque ad datum tempus $= t$ axes corporis principales in ſuperficie ſphaerica reſpondeant punctis A, B, C et AB, BC, Tab. XII. Fig. 89.

BC, CA sint quadrantes: ad quorum situm symbolis repraesentandum sint arcus circulorum maximorum $ZA = l$, $ZB = m$, $ZC = n$, erit $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$: ac ponantur anguli $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$, $XZC = \nu$, erit ex sphaericis

$$\cos(\mu - \lambda) = -\cot l \cot m;\quad \cos(\nu - \mu) = -\cot m \cot n;\quad \cos(\nu - \lambda) = -\cot l \cot n$$

ergo $\cos(\mu-\lambda)\cos(\nu-\lambda) = \cot l^2 \cot m \cot n = -\cot l^2 \cos(\nu-\mu)$, unde fit

$$\cot l^2 = \frac{-\cos(\mu-\lambda)\cos(\nu-\lambda)}{\cos(\nu-\mu)};\quad \cot m^2 = \frac{-\cos(\lambda-\mu)\cos(\nu-\mu)}{\cos(\nu-\lambda)},$$

$$\cot n^2 = \frac{-\cos(\lambda-\nu)\cos(\mu-\nu)}{\cos(\mu-\lambda)}.$$

Cum vero sit $\cos(\nu-\mu) - \cos(\mu-\lambda)\cos(\nu-\lambda) = \sin(\mu-\lambda)\sin(\nu-\lambda)$ erit $\cos l^2 = -\cot(\mu-\lambda)\cot(\nu-\lambda)$; $\cos m^2 = -\cot(\lambda-\mu)\cot(\nu-\mu)$; $\cos n^2 = -\cot(\lambda-\nu)\cot(\mu-\nu)$.

Hac relatione inter quantitates $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$, quae tempusculo dt suis differentialibus crescere sunt censendae, notata, sit nunc O polus gyrationis arcusque $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$, ut sit:

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1:\ \text{erit } \cos BAO = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha},\ \text{et } \sin BAO = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha};$$

at in triangulo ZAB est $\cos ZAB = \frac{\cos m}{\sin l}$ et $\sin ZAB = -\cos ZAC = \frac{-\cos n}{\sin l}$, ita ut sit pro triangulo ZAO

$$\sin ZAO = \frac{\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n}{\sin\alpha \sin l};\quad \cos ZAO = \frac{\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n}{\sin\alpha \sin l}$$

unde colligitur $\cos ZO = \cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n$,

$$\text{et } \cot AZO = \frac{\cos\alpha - \cos l(\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n)}{\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n},$$

hincque ad quodvis tempus polus gyrationis O innotescit.

Deinde posito celeritate angulari $= \varkappa$ in sensum ABC, tempusculo dt punctum A circa O describit arculum $Aa = \varkappa dt \sin\alpha$ quare ducta $a\alpha$ ad ZA normali erit.

$$A\alpha = \varkappa dt.\frac{\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n}{\sin l};\quad a\alpha = \varkappa dt.\frac{\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n}{\sin l}$$

unde differentialia quantitatum l et λ deducuntur

dl $\sin l$

$$dl \sin l = \varkappa dt(\cos\beta\cos n - \cos\gamma\cos m),\ \text{et}$$
$$-d\lambda \sin l^2 = \varkappa dt(\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n)$$

similique modo reperietur:

$$dm \sin m = \varkappa dt(\cos\gamma\cos l - \cos\alpha\cos n);\quad -d\mu \sin m^2 = \varkappa dt(\cos\gamma\cos n + \cos\alpha\cos l)$$
$$dn \sin n = \varkappa dt(\cos\alpha\cos m - \cos\beta\cos l);\quad -d\nu \sin n^2 = \varkappa dt(\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m).$$

Quocirca si ad quodvis tempus t dentur quantitates α, β, γ, et $\varkappa$, ideoque earum differentialia tempusculo dt nata, hinc colliguntur variationes eodem tempusculo in arcubus l, m, n, et angulis λ, μ, ν productae: Praeterea vero variatio in polo gyrationis O facta facile concluditur, quia tantum opus est, ut arcus ZO et angulus AZO differentientur, ponendo solum arcus α, β, γ variabiles, quia hoc modo polus O in situm sequentem o transfertur. Erit ergo $(Zo - ZO)\sin ZO = d\alpha \sin\alpha \cos l + d\beta \sin\beta \cos m + d\gamma \sin\gamma \cos n$ et cum sit $\cot AZO(\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n) = \cos\alpha - \cos l \cos ZO$ erit

$$\frac{OZo}{\sin AZO^2}(\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n) + \cot AZO(d\gamma\sin\gamma\cos m - d\beta\sin\beta\cos n) = d\alpha\sin\alpha\sin l^2 - d\beta\sin\beta\cos l\cos m - d\gamma\sin\gamma\cos l\cos n$$

hincque reducendo:

$$\frac{OZo}{\sin AZO^2} = \frac{\sin l^2(d\alpha\sin\alpha(\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n) + d\beta\sin\beta(\cos\alpha\cos n - \cos\gamma\cos l) + d\gamma\sin\gamma(\cos\beta\cos l - \cos\alpha\cos m))}{(\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n)^2}$$

ac denique angulus elementaris

$$OZo = \frac{d\alpha\sin\alpha(\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n) + d\beta\sin\beta(\cos\alpha\cos n - \cos\gamma\cos l) + d\gamma\sin\gamma(\cos\beta\cos l - \cos\alpha\cos m)}{1 - (\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n)^2}$$

in quam formulam bis ternae litterae α, β, γ, et l, m, n aequaliter ingrediuntur, ut natura rei postulat.

COROLL. 1.

679. Si ex O in Zo arculus Op perpendiculariter ducatur erit

$$po = \frac{d\alpha\sin\alpha\cos l + d\beta\sin\beta\cos m + d\gamma\sin\gamma\cos n}{\sin ZO}\ \text{et}$$

$$Op = \frac{d\alpha\sin\alpha(\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n) + d\beta\sin\beta(\cos\alpha\cos n - \cos\gamma\cos l) + d\gamma\sin\gamma(\cos\beta\cos l - \cos\alpha\cos m)}{\sin ZO}$$

COROLL. 2.

680. Porro ex $\sin BAO = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$ et $\cos BAO = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$ colligitur angulus

Mm

gulus $O\lambda o = \dfrac{-d\alpha \cos\alpha \cos\gamma - d\gamma\, \text{ſ}\alpha\, \text{ſ}\gamma}{\text{ſ}\alpha \cos\mathfrak{C}}$ hincque elementum $Oo = \dfrac{r((d\alpha^2 + d\gamma^2)\text{ſ}\alpha^2\, \text{ſ}\gamma^2 + 2\, d\alpha\, d\gamma\, \text{ſ}\alpha \cos\alpha\, \text{ſ}\gamma \cos\gamma)}{\cos\mathfrak{C}}$, quod cum aeque referatur ad α, $\mathfrak{C}$, γ ob $d\alpha\, \text{ſ}\alpha \cos\alpha + d\mathfrak{C}\, \text{ſ}\mathfrak{C} \cos\mathfrak{C} + d\gamma\, \text{ſ}\gamma \cos\gamma = 0$ reducitur ad $Oo = r(d\alpha^2\, \text{ſ}\alpha^2 + d\mathfrak{C}^2\, \text{ſ}\mathfrak{C}^2 + d\gamma^2\, \text{ſ}\gamma^2)$.

COROLL. 3.

681. Ponamus $ZO = v$ et cum fit $\cos v = \cos\alpha \cos l + \cos\mathfrak{C} \cos m + \cos\gamma \cos n$ erit $tang\ AZO = \dfrac{\cos\gamma \cos m - \cos\mathfrak{C} \cos n}{\cos\alpha - \cos l \cos v}$, et ob analogiam, quia B ad alteram partem ipsius ZO in figura cadit $-tang\ BZO = \dfrac{\cos\alpha \cos n - \cos\gamma \cos l}{\cos\mathfrak{C} - \cos m \cos v}$ unde fit $tang\ AZB = tang(\mu - \lambda) = \dfrac{\cos n}{\cos l \cos m}$; qui valor cum supra invento $\cos(\mu - \lambda) = \dfrac{-\cos l \cos m}{\text{ſ}l\, \text{ſ}m}$ egregie conspirat, eritque $\text{ſ}(\mu - \lambda) = \dfrac{-\cos n}{\text{ſ}l\, \text{ſ}m}$.

COROLL. 4.

682. Hinc ergo pro differentiis ternorum angulorum λ, μ, ν, has adipiscimur determinationes.

$$\text{ſ}(\mu - \lambda) = \frac{-\cos n}{\text{ſ}l\, \text{ſ}m};\ \text{ſ}(\nu - \mu) = \frac{-\cos l}{\text{ſ}m\, \text{ſ}n};\ \text{ſ}(\lambda - \nu) = \frac{-\cos m}{\text{ſ}l\, \text{ſ}n}$$

$$\cos(\mu - \lambda) = \frac{-\cos l \cos m}{\text{ſ}l\, \text{ſ}m};\ \cos(\nu - \mu) = \frac{-\cos m \cos n}{\text{ſ}m\, \text{ſ}n};\ \cos(\lambda - \nu) = \frac{-\cos l \cos n}{\text{ſ}l\, \text{ſ}n}.$$

SCHOLION.

683. Quae hactenus de mutatione momentanea, quam motus gyratorius tam per se quam ob vires sollicitantes subit exposuimus, fundamentum constituunt universae Theoriae de motu corporum rigidorum, quandoquidem ex cognita mutatione elementari ad ipsam motus determinationem transitus per calculum integralem patet. Aggrediamur ergo motum liberum hujusmodi corporum, quae sive proprie quasi instinctui sive viribus sollicitantibus libere obsequi possunt, ac primo quidem vires sollicitantes externas removeamus, corpora sibi tantum relicta contemplaturi, ut extrinsecus nihil accedat, quod ad motum quicquam conferat. Quoniam autem indoles axium principalium, quibus corpus est praeditum, hic imprimis in computum ingreditur, inde naturale quasi discrimen in corporibus constitui conveniet, prout momenta inertiae eorum respectu fuerint comparata. Tres igitur corporum classes constituamus, ad quarum primam ea referamus corpora, quorum momenta respectu axium principalium sint inter se aequalia; ad secundam vero classem ea corpora, in quibus duo momenta respectu axium principalium sint aequalia, tertium vero illis inaequale. Tertia vero classis in genere omnia ea corpora complectatur, quorum momenta respectu axium principalium inter se sint inaequalia.

CAPUT XI.

DE MOTU LIBERO CORPORUM RIGIDORUM TERNIS AXIBUS PRINCIPALIBUS PARIBUS PRAEDITORUM ET A NULLIS VIRIBUS SOLLICITATORUM.

DEFINITIO. 11.

684. Corpus rigidum *tres axes principales pares* habere dicitur, quando ejus momenta inertiae respectu axium principalium inter se sunt aequalia.

COROLL. 1.

685. In talibus ergo corporibus omnes rectae per ejus centrum inertiae ductae vicem axium principalium gerunt, eorumque respectu momenta inertiae inter se erunt aequalia.

COROLL. 2.

686. Quaecunque igitur ternae rectae se mutuo in centro inertiae normaliter secantes pro directricibus assumantur, si situs cujusvis corporis elementi dM per coordinatas illis parallelas x, y, et z definiatur, erit per totum corpus $\int xy\,dM = 0$, $\int xz\,dM = 0$ et $\int yz\,dM = 0$.

CO.

COROLL. 3.

687. Quodsi tale corpus circa rectam quamvis per centrum inertiae transeuntem acceperit motum gyratorium, eum ob suam inertiam perpetuo conservabit, ut ea recta maneat immota; nisi a viribus externis perturbetur.

SCHOLION. 1.

688. Dari hujusmodi corpora, quorum momenta respectu axium principalium sint inter se aequalia, eo minus dubitare licet, cum in superioribus, ubi corpora homogenea sumus contemplati, plures corporum species hac proprietate gaudentes assignaverimus. Inter quas primum locum tenet globus ex materia homogenea confectus, tum vero eo referenda sunt corpora quinque regularia; porro etiam dantur cylindri, coni et coni truncati, qui eadem proprietate sint praediti. Atque in genere si corpora non constent ex materia homogenea, innumerabilia exhiberi poterunt genera cujusvis figurae, in quibus aequalitas inter momenta inertiae respectu axium principalium locum obtineat. Atque de hujusmodi corporibus tantum in hoc capite agetur, motusque, cujus sunt capacia dum a nullis viribus externis urgentur, definietur. Character ergo essentialis hujusmodi corporum in hoc consistit: ut positis ternis coordinatis orthogonalibus x, y, z ad centrum inertiae relatis primo sit ut jam notavimus $\int xydM = \int xzdM = \int yzdM = 0$ tum vero $\int xxdM = \int yydM = \int zzdM$. Sicque momentum inertiae respectu axis cujuscunque per centrum inertiae ducti erit $= 2\int xxdM$. Hoc criterio quasi primum corporum genus constituitur, atque in cognitione mechanica nomine *corporum regularium* commode insigniri posset, cum omnes plane rectae per centrum inertiae ductae pari proprietate sint praeditae.

SCHOLION. 2.

689. Etsi in hoc capite tantum de motu corporum ternos axes principales pares habentium tanquam de casu simplicissimo tractare constitui; tamen a proprietate, quae etiam ad reliqua corporum genera pateat, exordiri conveniet. Scilicet quomodocunque corporis rigidi motus fuerit perturbatus, is semper pro quovis temporis puncto resolvi potest in binos motus, quorum alter sit progressivus alter gyratorius circa quempiam axem per centrum inertiae ductum. Quae propositio cum fundamentum motus omnium corporum rigidorum contineat, ejus demonstrationem in sequente Theoremate tradamus.

THEOREMA. 9.

690. Quomodocunque corpus rigidum moveatur, ejus motus quovis momento est compositus seu mixtus ex motu progressivo et ex gyratorio, circa axem aliquem per ejus centrum inertiae transeuntem.

DEMONSTRATIO.

Si corporis centrum inertiae moveatur, in quo motus progressivus consistit, quippe qui perpetuo cum motu centri inertiae congruit, hunc mente saltem tollendo, dum spatium cum corpore pari celeritate in oppositum ferri concipiatur, de motu qui adhuc in corpore inest, demonstrandum est, cum esse gyratorium circa quempiam axem per centrum inertiae transeuntem, qui sublato motu progressivo quiescat saltem per tempus infinite parvum. Hoc autem modo centrum inertiae corporis in quietem redigitur, et quomodocunque corpus circa hoc centrum moveatur, praeter id semper quaepiam linea recta quiescet, quae propterea erit axis gyrationis, id quod sequenti modo ostendo. Circa corpus concipiatur superficies sphaerica centrum suum in ejus centro inertiae habens, quae ut quiescens consideretur, ad quam singula corporis puncta per rectas ex centro ad superficiem ductas referantur. Centro igitur quiescente punctum corporis ad P relatum tempusculo dt transferatur in p, ductoque per P circulo maximo OPB ad spatiolum Pp normali, in eo capiatur aliud quodvis punctum Q, quod interea transferatur in q, ita ut totus arcus interceptus PQ in pq pervenisse sit censendus, unde cum omnia corporis puncta perpetuo easdem inter se distantias servent, erit $pq = PQ$. Quia autem arculi Pp et Qq sunt infinite parvi, et angulus pPQ rectus arcus, illi aequales esse nequeunt, nisi etiam arculus qQ ad PQ sit normalis. Continuentur ambo arcus PQ et pq, donec sibi occurrant in O et cum sit OP = Op et OQ = Oq, motu illo totus arcus OPQ in Opq erit translatus, ideoque punctum O in loco suo immotum persliterit necesse est. Quare ducta ex centro per hoc punctum O recta, eam totam interea in quiete perseverasse manifestum est, quae igitur erit axis gyrationis. Ex quo perspicitur corpus circa centrum inertiae quiescens commoveri non posse, quin simul tota quaedam linea recta per id centrum ducta maneat immota, ideoque motum esse gyratorium. Sin autem centrum inertiae ipsum moveatur, universus corporis motus erit compositus seu mixtus ex motu progressivo et gyratorio circa quempiam axem per ejus centrum inertiae transeuntem.

Fig. 90.

COROLL. 1.

691. Quomodocunque ergo corpus rigidum moveatur, ad ejus motum cognoſcendum, primo conſideretur ejus centrum inertiae, cujus motus dabit motum progreſſivum, hoc deinde ſublato quaeratur punctum O, unde axis gyrationis innoteſcet.

COROLL. 2.

692. Ad hoc autem punctum O inveniendum, poſito arcu OP $= v$, ob angulum O $= \frac{Pp}{\text{ſi}\,v} = \frac{Qq}{\text{ſ}(v+PQ)}$, erit $Qq.\,\text{ſ}\,v = Pp.\,\text{coſ}\,PQ.\,\text{ſ}\,v + Pp\,\text{ſi}\,PQ.\,\text{coſ}\,v$, hincque, $\text{tang}\,v = \frac{Pp.\,\text{ſi}\,PQ}{Qq - Pp.\,\text{coſ}\,PQ}$ unde patet punctum O ſemper realiter determinari.

COROLL. 3.

693. Ex motibus punctorum P et Q per ſpatiola Pp et Qq etiam facile definitur celeritas angularis circa axem gyrationis, quae eſt $= \frac{\text{ang.}\,O}{dt} = \frac{Pp}{dt.\,\text{ſ}\,v} = \frac{\sqrt{(Pp^2 - 2Pp.\,Qq.\,\text{coſ}\,PQ + Qq^2)}}{dt\,\text{ſi}\,PQ}$ ideoque nulla eſſe nequit, niſi ambo ſpatiola Pp et Qq evaneſcant.

SCHOLION.

694. Etſi haec demonſtratio ex ſphaericis maxime eſt evidens, tamen ejus vim eo magis perpendi convenit, quod non defuerint viri alioquin perſpicaciſſimi, quibus adeo viſum eſt fieri poſſe, ut omnia puncta ſuperficiei ſphaericae centro quieſcente aequalibus celeritatibus circumferantur. Hoc ſcilicet obtineri poſſe ſunt arbitrati, ſi ſphaera dum circa unum quempiam axem gyratur, ſimul circa alium axem ad illum normalem pari velocitate circumagatur. Nunc autem hac demonſtratione allata evictum eſt, etiamſi ſphaera non ſolum circa duos axes ſed etiam tres pluresve ſimul circumagatur, ejus motum tamen ſemper ita fore comparatum, ut quovis momento tota quaedam recta in quiete permaneat. Nulla enim vis demonſtrationi infertur, ſi quis objiciat puncta P et Q non ſimplici motu, ut hic aſſumſimus, ſed compoſito circa aliquot axes ſimul ferri; quomodocunque hic motus fuerit compoſitus, tamen haec puncta, P et Q poſt tempuſculum dt in alia certa puncta p et q perveniant neceſſe eſt, ut arcus pq aequalis ſit arcui PQ, et quoniam arcum PQ ad ſpatiolum Pp normalem aſſumſimus, is etiam ad Qq normalis eſſe debet. Ac ſi quis adhuc dubitet, num punctum O, in quo concurſum arcuum PQ et pq productorum conſtituimus, in codem loco permaneat, ei ſaltem concedendum eſt, id adhuc in circulo maximo Opq repertum iri, quoniam ante cum punctis P Q in eodem circulo maximo erat ſitum: pervenit ergo in o, et arcus op aequalis eſſe deberet arcui OP; verum arcus Op aequalis eſt arcui OP, ex quo punctum o in O cadat neceſſe eſt.

PROBLEMA. 69.

695. Dato motu duorum corporis rigidi punctorum, cujus centrum inertiae quieſcit, invenire axem per centrum inertiae tranſeuntem, circa quem hoc inſtanti gyratur.

SOLUTIO.

Relatis ut ante, omnibus corporis punctis ad ſuperficiem ſphaericam quieſcentem ABCD circa centrum inertiae deſcriptam, moveatur tempuſculo dt punctum P per ſpatiolum $Pp = dp$, et aliud quodvis punctum R per ſpatiolum $Rr = dr$; ponaturque arcus circuli maximi PR $= q$. Vocentur anguli $RPp = m$ et $SRr = n$, inter quos autem jam certa quaedam relatio intercedere debet, ut arcus pr aequalis fiat arcui PR $= q$. Sit jam O polus gyrationis, indeque ad P et R ductis quaſi meridianis OP et OR, erunt anguli OPR $= 90 + m$ et ORP $= 90° - n$, quoniam arcus OP et OR ad ſpatiola Pp et Rr ſunt normales. Hinc datis in triangulo ſphaerico POR latere PR $= q$, cum angulis OPR $= 90 + m$ et ORP $= 90° - n$, reperitur. Fig. 95.

$$\text{cot}\,OP = \frac{\text{ſi}\,OPR}{\text{ſi}\,PR.\,\text{tang}\,ORP} + \frac{\text{coſ}\,PR\,\text{coſ}\,OPR}{\text{ſ}\,PR} = \frac{\text{coſ}\,m\,\text{ſ}\,n}{\text{coſ}\,n\,\text{ſ}\,q} - \frac{\text{ſi}\,m\,\text{coſ}\,q}{\text{ſ}\,q}$$

$$\text{cot}\,OR = \frac{\text{ſi}\,ORP}{\text{ſ}\,PR.\,\text{tang}\,OPR} + \frac{\text{coſ}\,PR\,\text{coſ}\,ORP}{\text{ſ}\,PR} = \frac{-\text{ſ}\,m\,\text{coſ}\,n}{\text{coſ}\,m\,\text{ſ}\,q} + \frac{\text{ſ}\,n\,\text{coſ}\,q}{\text{ſ}\,q}$$

ſive

$$\text{tang}\,OP = \frac{\text{coſ}\,n\,\text{ſ}\,q}{\text{coſ}\,m\,\text{ſ}\,n - \text{ſ}\,m\,\text{coſ}\,n\,\text{coſ}\,q};\ \text{tang}\,OR = \frac{\text{coſ}\,m\,\text{ſ}\,q}{-\text{ſ}\,m\,\text{coſ}\,n + \text{coſ}\,m\,\text{ſ}\,n\,\text{coſ}\,q}$$

unde punctum O innoteſcit. Tum vero cum ſit

$$Pp : Rr = \text{ſ}\,OP : \text{ſ}\,OR = \text{ſ}\,ORP : \text{ſ}\,OPR$$

erit $dp : dr = \text{coſ}\,n : \text{coſ}\,m$ ſeu $dp\,\text{coſ}\,m = dr\,\text{coſ}\,n$, unde relatio inter ſpatiola dp, dr et angulos m et n colligitur. Denique pro ipſa celeritate angulari, ea aequalis eſt angulo POp per dt diviſo, hoc eſt $= \frac{Pp}{dt\,\text{ſ}\,OP}$, qui valor abit in $\frac{dp\sqrt{(\text{coſ}\,m^2\,\text{ſ}\,n^2 + \text{coſ}\,n^2\,\text{ſ}\,q^2 + \text{ſ}\,m^2\,\text{coſ}\,n^2\,\text{coſ}\,q^2 - 2\,\text{ſ}\,m\,\text{coſ}\,m\,\text{ſ}\,n\,\text{coſ}\,n\,\text{coſ}\,q)}}{dt\,\text{coſ}\,n\,\text{ſ}\,q}$.

ſ O.

COROLL. 1.

696. Cum ejusmodi relatio inter ſpatiola dp, dr et angulos m, n intercedere debeat, ut ſit $dp \cos m = dr \cos n$, haec relatio ita in figura repraeſentari poteſt, ut demiſſis ex p et r in arcum PR perpendiculis $p\pi$ et $r\varrho$ fiat $P\pi = R\varrho$.

COROLL. 2.

697. Haec proprietas autem per ſe eſt manifeſta; cum enim arcus pr aequalis ſit arcui $\pi\varrho$, arcui PR aequalis eſſe nequit, niſi ſit $P\pi = R\varrho$. Celeritas autem angularis ita commodius exprimitur, ut ſit $= \frac{dp\sqrt{(1-(\sin m \sin n + \cos m \cos n \cos q)^2)}}{dt \cos n \sin q}$.

COROLL. 3.

698. Si puncta P et R ſemicirculo diſtent, ut ſit $\sin q = 0$ et $\cos q = -1$. neceſſario debet eſſe $\cos m \sin n + \sin m \cos n = 0$, ſeu $\tang m = -\tang n$ et $m = -n$, ideoque $dp = dr$. Puncta enim oppoſita ſphaerae alium motum niſi aequalem habere nequeunt; hoc autem caſu circa axem gyrationis nihil determinatur.

COROLL. 4.

699. Cognito autem motu duorum punctorum ſibi non oppoſitorum, ſitus axis gyrationis cum celeritate angulari innoteſcet, unde deinceps motus omnium corporis punctorum definiri poteſt.

SCHOLION.

700. Haec, ut jam monui, non ſolum ad corpora, in quibus tres axes principales pares exiſtunt, pertinent, ſed in genere ad omnia corpora rigida; quae quomodocunque agitentur dum eorum centrum inertiae fixum manet, quovis temporis momento eorum motus eſt gyratorius circa quempiam axem per centrum inertiae tranſeuntem. Sin autem centrum inertiae non maneat fixum, quovis temporis momento motus erit compoſitus ex tali motu gyratorio et motu progreſſivo: neque alius motus in corpora rigida cadere poteſt. Quare ad motum corporis rigidi perfecte cognoſcendum, duplicem motum inveſtigari oportet, alterum ejus centri inertiae, qui eſt motus progreſſivus, alterum vero gyratorium, cujus cognitio poſtulat, ut ad quodvis tempus axem gyrationis cum celeritate angulari aſſignare valeamus. Ac ſi axis quidem gyrationis perpetuo maneat idem, determinatio motus per principia

pia ante hac paſſim expoſita nihil habet difficultatis; ſin autem ipſe gyrationis axis continuo varietur, haec principia minime ſufficiunt, ſed confugiendum erit ad ea, quae in capitibus praecedentibus fuſius ſunt explicata. In hoc tamen capite, ubi de motu corporum ternis axibus paribus praeditorum et a nullis viribus ſollicitatorum agimus, iſtis ſubſidiis non indigemus, ſed per vulgaria principia totum negotium unica propoſitione expedire poterimus.

PROBLEMA. 70.

701. Si corpus rigidum tribus axibus paribus praeditum quomodocunque projiciatur, neque deinceps ab ullis viribus ſollicitetur, definire motum quo progreditur.

SOLUTIO.

Motus corpori primum impreſſus reſolvatur in progreſſivum et gyratorium circa quempiam axem per centrum inertiae tranſeuntem, quorum utrumque ſeorſim conſiderare licet. Ac primo quidem motus progreſſivus ita continuabitur, ut centrum inertiae uniformiter in directum progrediatur, quae proprietas omni motui progreſſivo eſt communis, etiamſi corpus non ad hoc genus referatur. Quod autem ad motum gyratorium corpori primum impreſſum attinet, hic indoles hujus generis corporum imprimis ſolutionem ſuppeditat, cum enim axis gyrationis, quicunque fuerit, proprietate axium principalium gaudeat, motus gyratorius initio impreſſus ita perpetuabitur, ut axis gyrationis conſtanter in quiete perſeveraret, ſi nullus motus progreſſivus adeſſet; hoc autem accedente axis gyrationis motu ſibi parallelo cum centro inertiae uniformiter in directum promovebitur, atque interea motus gyratorius aequabiliter abſolvetur.

COROLL. 1.

702. Quicunque ergo motus tam progreſſivus quam gyratorius corpori initio imprimatur, centrum inertiae cum axe gyrationis ita uniformiter in directum progredietur, ut axis ſibi perpetuo maneat parallelus, corpusque circa eum uniformiter gyrari pergat.

COROLL. 2.

703. Etiamſi corpus non ad hoc genus pertineat, tamen ſi ei initio praeter motum progreſſivum motus gyratorius circa quempiam axem principalem imprimatur, uterque motus perinde continuabitur.

COROLL. 3.

704. Quin etiam si insuper vires externae accedant, quarum media directio per centrum inertiae transeat, iis solus motus progressivus perinde afficietur, ac si tota corporis massa in isto centro esset collecta; motus autem gyratorius manebit uniformis, et axis gyrationis constanter situm sibi parallelum conservabit.

SCHOLION.

705. Cum etiamnum vires sollicitantes removeamus et in solam motus impressi continuationem inquiramus, motus omnium corporum primi generis perfecte definivimus, ut nihil amplius desiderari possit: pro reliquis autem corporibus jam partem aliquam expedivimus, quando scilicet motus gyratorius primum impressus fit circa axem principalem, quae quidem determinatio per cognita jam pridem subsidia mechanica absolvi potuit. In aliis ergo corporum generibus difficultas tum demum occurrit, quando corpori primum motus gyratorius non circa quempiam axem principalem imprimitur: ad quod negotium pertractandum primum peculiare genus constituam eorum corporum, in quibus duo dantur momenta inertiae respectu axium principalium aequalia. Quod genus, praeterquam quod calculus haud mediocriter contrahitur, hoc commodi habet, ut in eo adhuc infiniti dentur axes principales, ita ut infinitis modis ejusmodi motus, qualem jam definivimus, existere possit; cum contra in tertio genere, in quo momenta principalia inter se sunt inaequalia, praeter tres axes determinatos nullus alius detur, circa quem corpus libere gyrari queat. In his igitur generibus id nobis est propositum, ut quicunque motus talibus corporibus fuerit impressus, ejus continuationem investigemus: ubi ad quodvis tempus primo positio axis gyrationis ratione axium principalium corporis cum celeritate angulari, deinde vero situs ipsorum axium principalium ratione spatii absoluti determinari debebit, qui modus hoc arduum argumentum tractandi maxime videtur idoneus, tam ad calculum evolvendum, quam ad ipsam cognitionem nostram illustrandam. Ad utrumque autem in praecedentibus capitibus necessaria adminicula exposuimus.

CAPUT

CAPUT XII.

DE MOTU LIBERO CORPORUM RIGIDORUM DUABUS AXIBUS PRINCIPALIBUS PARIBUS PRAEDITORUM ET A NULLIS VIRIBUS SOLLICITATORUM.

DEFINITIO. 12.

706. Corpus rigidum *duos axes principales pares habere* dicitur, quando inter ejus momenta inertiae respectu axium principalium duo sunt aequalia.

COROLL. 1.

707. Hujus generis ergo corpora innumerabiles habent axes principales; statim enim ac duo axes principales aequalia habent momenta inertiae, omnes rectae in eorum plano per centrum inertiae ductae aeque pro axibus principalibus haberi possunt, eodemque momento inertiae sunt praeditae.

COROLL. 2.

708. Hic igitur axis ille principalis, cujus momentum inertiae reliquis est inaequale, erit singularis, atque omnes rectae per centrum inertiae ad eum normaliter ductae paria habebunt momenta inertiae, et tanquam axes principales spectari poterunt.

COROLL. 3.

709. Cognito itaque axe singulari, positio binorum reliquorum non determinatur, sed eorum loco pro lubitu binae rectae quaecunquae tam inter se quam ad illum normales accipi possunt, dummodo per centrum inertiae transeant.

SCHOLION.

710. Cum igitur supra in genere pro axibus principalibus IA, IB, IC posuerimus momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc, horum duo in isthoc capite aequalia statuamus. Sit igitur primus axis IA singularis, reliquorumque momenta inertiae inter se aequalia, ut sit $bb = cc$; ex

quo

quo formulae ſupra inventae mirifice contrahentur. Etſi autem hoc caſu ſitus binorum axium IB et IC non determinatur, tamen eos tanquam determinatos ſpectabimus, ut eorum ope ſitus corporis ad quodvis tempus facilius aſſignari poſſit. Hujus autem generis utique infinita dantur corpora, atque inter homogenea imprimis huc pertinent cylindri, coni, atque in genere omnia corpora rotunda, quae converſione figurae cujuscunque circa quempiam axem fixum naſcuntur; ita ut hoc genus fere omnia corpora, quae quidem a geometris conſiderari ſolent, in ſe compleᶜtatur. Quemadmodum ergo haec corpora ratione motus ſe ſint habitura, dum a nullis viribus ſollicitantur, in hoc capite inveſtigabimus, ac primo quidem ad quodvis tempus in poſitionem axis gyrationis ratione axium principalium inquiramus, nondum ſolliciti quemnam motum hi ipſi axes ſint habituri, quem deinceps definire conabimur.

PROBLEMA. 71.

711. Si corpori rigido duobus axibus principalibus paribus praedito motus quicunque gyratorius initio fuerit impreſſus, neque ullae adſint vires externae, ad quodvis tempus poſitionem axis gyrationis ratione axium principalium aſſignare.

SOLUTIO.

Fig. 89. Centro inertiae corporis I in centro ſphaerae, ad cujus ſuperficiem omnia reducamus, conſtituto ſint IA, IB, IC axes corporis principales, ac reſpectu primi IA momentum inertiae $= Maa$, reſpectu binorum reliquorum autem IB et IC ſint momenta inertiae inter ſe aequalia $= Mcc$, ut ſit $bb = cc$. Nunc autem elapſo ab initio tempore $= t$, corpus gyretur circa axem IO in ſenſum ABC celeritate angulari $= \varepsilon$, ita ut ſitus puncti O reſpectu punctorum A, B, C definiri debeat. Ponantur ergo arcus circulorum maximorum $OA = \alpha$, $OB = \beta$, et $OC = \gamma$, qui tanquam variabiles ſunt tractandi, atque problema 66. ad hunc caſum quo $bb = cc$ translatum dabit primo $d\varepsilon = 0$, unde patet celeritatem angularem manere invariabilem, ideoque adhuc eſſe aequalem ei, quae initio corpori fuerit impreſſa. Quare ſi haec prima celeritas angularis ponatur $= \epsilon$ erit $\varepsilon = \epsilon$. Deinde vero ex §. 674. habebimus has aequationes.

I. $aac^4\, d\alpha \sin\alpha = 0$

II. $aac^4\, d\beta \sin\beta = \epsilon aacc\,(aa - cc)\, dt \cos\alpha \cos\gamma$

III. $aac^4\, d\gamma \sin\gamma = \epsilon aacc\,(cc - aa)\, dt \cos\alpha \cos\beta$

ex

ex quarum prima diſcimus, arcum $AO = \alpha$ eſſe conſtantem, ideoque aequalem illi, quo initio axis gyrationis diſtabat ab axe ſingulari IA. Cum igitur ſit $\cos\gamma = \surd(\sin\alpha^2 - \cos\beta^2)$, reliquarum aequationum altera praebet:

$$\frac{d\beta \sin\beta}{\surd(\sin\alpha^2 - \cos\beta^2)} = \frac{\epsilon(aa - cc)\, dt \cos\alpha}{cc}$$

cujus integrale eſt A $\cos. \dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha} = C + \dfrac{\epsilon(aa - cc)t\cos\alpha}{cc}$, ideoque

$$\cos\beta = \sin\alpha \cos\left(C + \frac{\epsilon(aa - cc)t\cos\alpha}{cc}\right) \text{ et}$$

$$\cos\gamma = \sin\alpha \sin\left(C + \frac{\epsilon(aa - cc)t\cos\alpha}{cc}\right).$$

Quare ſi initio ubi $t = 0$, fuerit $AO = \mathfrak{A}$, $BO = \mathfrak{B}$, et $CO = \mathfrak{C}$, erit $\alpha = \mathfrak{A}$, et $\cos\mathfrak{B} = \sin\mathfrak{A}\cos C$, unde fit conſtans $\cos C = \dfrac{\cos\mathfrak{B}}{\sin\mathfrak{A}}$ et $\sin C = \dfrac{\cos\mathfrak{C}}{\sin\mathfrak{A}}$. Quocirca habebimus

$$\cos\beta = \cos\mathfrak{B}\cos\frac{\epsilon(aa - cc)t\cos\mathfrak{A}}{cc} - \cos\mathfrak{C}\sin\frac{\epsilon(aa - cc)t\cos\mathfrak{A}}{cc}$$

$$\cos\gamma = \cos\mathfrak{B}\sin\frac{\epsilon(aa - cc)t\cos\mathfrak{A}}{cc} + \cos\mathfrak{C}\cos\frac{\epsilon(aa - cc)t\cos\mathfrak{A}}{cc}$$

unde ſi initio motus cognoverimus ſitum axis gyrationis reſpectu axium principalium, ſeu arcus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, et $\mathfrak{C}$, pro quovis tempore elapſo t ſitum axis gyrationis reſpectu eorundem axium principalium ſeu arcus α, β, γ aſſignare valemus.

COROLL. 1.

712. Si igitur initio corpori impreſſus fuerit motus gyratorius circa axem IE, ad axes principales IA, IB, IC inclinatum angulis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, celeritate angulari $= \epsilon$ in ſenſum ABC; quomodocunque deinceps axis gyrationis varietur, celeritas angularis perpetuo manebit eadem $= \epsilon$; et axis gyrationis IO eodem angulo $\mathfrak{A}$ ad axem principalem ſingularem IA inclinabitur.

COROLL. 2.

713. Tum vero ſi momentum inertiae reſpectu axis ſingularis IA ſit $= Maa$, reſpectu binorum reliquorum autem $= Mcc$ pro tempore

elapſo

elapso $= t$, quia ϵ angulum denotat, ponatur angulus $\frac{\epsilon(aa-cc)t\,cos\,\mathfrak{A}}{cc} = T$, qui cum tempore t uniformiter crescit; atque hoc tempore corpus gyrabitur circa axem IO, ut sit AO $=$ AE $= \mathfrak{A}$ et $cos\,BO = cos\,\mathfrak{B}\,cos\,T - cos\,\mathfrak{C}\,si\,T$; $cos\,CO = cos\,\mathfrak{B}\,si\,T + cos\,\mathfrak{C}\,cos\,T$.

COROLL. 3.

714. Quia arcus AO perpetuo manet aeque magnus $= \mathfrak{A}$, situs puncti O commodissime ex angulo BAO innotescet, et cum sit $cos\,BAO = \frac{cos\,BO}{si\,\mathfrak{A}}$ et $si\,BAO = \frac{cos\,CO}{si\,\mathfrak{A}}$ erit

$$cos\,BAO = \frac{cos\,\mathfrak{B}\,cos\,T - cos\,\mathfrak{C}\,si\,T}{si\,\mathfrak{A}} \text{ et } si\,BAO = \frac{cos\,\mathfrak{B}\,si\,T + cos\,\mathfrak{C}\,cos\,T}{si\,\mathfrak{A}}.$$

COROLL. 4.

715. Si fuerit $cc = aa$, qui est casus ante tractatus, quo omnia tria momenta inertiae sunt inter se aequalia; erit $T = 0$, et BO $= \mathfrak{B}$, item CO $= \mathfrak{C}$, polus scilicet gyrationis O respectu axium principalium maneret immotus, uti jam ante invenimus.

SCHOLION.

716. Formulae hae multo simpliciores reddi possunt, sed rei dignitas mereretur, ut id potius singulari propositione quam in transitu prosequamur.

PROBLEMA. 72.

717. Iisdem positis, quae in praecedente problemate sunt constituta, definire promotionem poli gyrationis O respectu axium principalium.

SOLUTIO.

Fig. 91. Maneant omnia uti in praecedente solutione, et cum poli pares B et C in circulo BC pro lubitu accipi queant, quadrans AB ita constituatur, ut per polum E, circa quem corpus primum gyrari incipit, transeat. Cum igitur hic polus gyrationis perpetuo eandem a polo principali A servet distantiam, ejus motus fiet per circulum minorem EFG centro A descriptum, cujus distantia sit arcus AE $= \alpha$, quem supra per $\mathfrak{A}$ indicavimus. Erit ergo BE $= \mathfrak{B} = 90° - \alpha$, et CE $= \mathfrak{C} = 90°$. Quare si elapso tempore $= t$; polus gyrationis ex E pervenerit in O, ob $cos\,\mathfrak{C} = 0$, erit

$$cos\,BAO = \frac{cos\,\mathfrak{B}\,cos\,T}{si\,\alpha} = cos\,T, \text{ et } si\,BAO = \frac{cos\,\mathfrak{B}\,si\,T}{si\,\alpha} = si\,T,$$

ideoque ipse angulus BAO $=$ T. At angulus T ita ex tempore t definitur, ut sit $T = \frac{\epsilon(aa-cc)t\,cos\,\alpha}{cc} =$ BAO, unde hanc egregiam solutionem consequimur. Si momentum inertiae respectu axis principalis singularis IA fuerit $= Maa$, et respectu binorum reliquorum parium IB et IC $= Mcc$, corpus autem initio circa axem IE in sensum BCA celeritate angulari $= \epsilon$ gyrari coeperit; tum respectu axium principalium, quos quasi in quiete spectamus, polus gyrationis per circulum minorem EFG circa polum A descriptum uniformiter proferetur, ita ut elapso tempore $= t$ conficiat angulum EAO $= \frac{\epsilon(aa-cc)t\,cos\,AE}{cc}$, motusque fiat in sensum BC conformem motui gyratorio, si quidem fuerit $aa > cc$; in contrarium autem si $aa < cc$.

COROLL. 1.

718. Polus gyrationis his casibus quiescet. 1°. si AE $= 0$, seu corpus circa axem principalem IA gyrari ceperit. 2°. si AE $= 90°$ seu si corpus circa quemcunque axem ad IA normalem gyrari inceperit: ac 3°. si $aa = cc$, hoc est si corpus habuerit omnes tres axes principales pares.

COROLL. 2.

719. Si fuerit $aa > cc$, polus gyrationis E circa A in eundem sensum BC in quem fit gyratio circumferetur celeritate angulari $= \frac{\epsilon(aa-cc)cos\,AE}{cc}$, sin autem fuerit $aa < cc$, in sensum contrarium circumferetur celeritate angulari $= \frac{\epsilon(cc-aa)cos\,AE}{cc}$.

COROLL. 3.

720. Ipse autem arcus circuli minoris EO, per quem axis gyrationis tempore t procedit, est $= \frac{\epsilon(aa-cc)t\,si\,AE\,cos\,AE}{cc} =$

$= \frac{\varepsilon(aa-cc)t \sin 2AE}{cc}$, quod ergo spatium ceteris paribus est maximum, si $AE = \frac{1}{2} AB = 45^\circ$, hoc est si axis gyrationis aequaliter distet ab axibus principalibus.

COROLL. 4.

721. Posita ratione diametri ad peripheriam $= 1 : \pi$, polus gyrationis totam circumferentiam EFGE percurret tempore $= \frac{2\pi cc}{\varepsilon(aa-cc)\cos AE}$ min. sec. huncque motum perpetuo uniformem conservabit.

SCHOLION.

722. Hic nondum de ipso corporis motu agimus, sed quod probe est notandum, corpus, quasi quiesceret, vel aliud ipsi aequale in quiete contemplamur, in eoque ad quodvis tempus axem gyrationis IO definire docuimus, circa quem corpus motum tum sit gyraturum, neque hic sumus solliciti, quemnam situm hic axis gyrationis tum respectu spatii absoluti sit habiturus. Nunc igitur illam completam motus cognitionem aggrediamur.

PROBLEMA 73.

723. Si corpori rigido duobus axibus principalibus praedito impressus fuerit initio motus gyratorius quicunque, ad datum tempus tam situm axium principalium quam axis gyrationis respectu spatii absoluti assignare.

SOLUTIO.

Fig. 89. Sphaera ex centro inertiae corpori circumscripta cingatur superficie sphaerica immobili ZXVY, atque elapso tempore t sphaera mobilis cum corpore eum teneat situm, ut axium ternorum principalium poli sint in A, B, C, respectu quorum primi IA momentum inertiae sit $= Maa$, respectu autem binorum reliquorum $= Mcc$. Ductis inde ad punctum quoddam fixum Z arcubus AZ, BZ et CZ, ponamus ut in probl. 68. $AZ = l$, $BZ = m$, et $CZ = n$, ut sit $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$, tum vero sint anguli $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$ et $XZC = \nu$, et quia motus gyratorius, uti jam ostendimus, manet aequabilis, sit ejus celeritas angularis $= \varepsilon$ in sensum ABC directa. Polo quoniam axis gyrationis perpetuo ab axe IA aeque maneat remotus. Sit arcus $AO = \alpha$, et aequalis initiali AE, ubi assumamus initio polum gyrationis E in ipso arcus AB positum fuisse. Ex praecedentibus ergo si ponamus $\frac{\varepsilon(aa-cc)t\cos\alpha}{cc} = T$, erit nunc elapso tempore $= t$ angulus $BAO = T$: unde si ponamus arcus $BO = \beta$ et $CO = \gamma$, erit $\cos\beta = \sin\alpha \cos T$ et $\cos\gamma = \sin\alpha \sin T$ ob BAC angulum rectum. His positis ob $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ ex §. 678. habemus has aequationes

$$dl \sin l = \varepsilon dt \sin\alpha (\cos n \cos T - \cos m \sin T); \quad -d\lambda \sin l^2 = \varepsilon dt \sin\alpha (\cos m \cos T + \cos n \sin T)$$

$$dm \sin m = \varepsilon dt \sin\alpha (\cos l \sin T - \cos n \cot\alpha); \quad -d\mu \sin m^2 = \varepsilon dt \sin\alpha (\cos n \sin T + \cos l \cot\alpha)$$

$$dn \sin n = \varepsilon dt \sin\alpha (\cos m \cot\alpha - \cos l \cos T); \quad d\nu \sin n^2 = \varepsilon dt \sin\alpha (\cos l \cot\alpha + \cos m \cos T)$$

quae quo facilius ad integrationem perduci queant, consideremus arcum $ZO = v$, et cum sit $\cos v = \cos\alpha \cos l + \sin\alpha (\cos m \cos T + \cos n \sin T)$ erit differentiando

$$dv \sin v = dl \sin l \cos\alpha + dm \sin m \sin\alpha \cos T + dn \sin n \sin\alpha \sin T + dT \sin\alpha \cos m \sin T - dT \sin\alpha \cos n \cos T$$

substitutis autem pro $dl \sin l$, $dm \sin m$, $dn \sin n$ illis valoribus fit

$$dv \sin v = -dT \sin\alpha (\cos n \cos T - \cos m \sin T) = -dT \sin\alpha . \frac{dl \sin l}{\varepsilon dt \sin\alpha}.$$

Cum igitur sit $dT = \frac{\varepsilon(aa-cc)dt\cos\alpha}{cc}$ oritur

$$dv \sin v = \frac{-(aa-cc)\cos\alpha}{cc} . dl \sin l \text{ et integrando}$$

$$\cos v = C - \frac{(aa-cc)\cos\alpha \cos l}{cc} = \cos\alpha \cos l + \sin\alpha (\cos m \cos T + \cos n \sin T)$$

ut ergo jam una habeatur aequatio integralis

$$C = \frac{aa}{cc} \cos\alpha \cos l + \sin\alpha \cos m \cos T + \sin\alpha \cos n \sin T.$$

Hinc autem concludere licet integrationem particularem, ponendo arcum l constantem, et $\cos m = \sin l \cos T$ atque $\cos n = \sin l \sin T$, ut fiat $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$. simulque primae aequationi $dl \sin l = 0$ satisfiat, reliquae vero dabunt:

$$dm \sin m = dT \sin l \sin T = \varepsilon dt \sin\alpha (\cos l \sin T - \cot\alpha \sin l \sin T)$$

$$dn \sin n = -dT \sin l \cos T = \varepsilon dt \sin\alpha (\cot\alpha \sin l \cos T - \cos l \cos T)$$

ex quarum utraque prodit $d\mathrm{T} \sin l = \varepsilon dt \sin\alpha(\cos l - \cot\alpha \sin l) = \frac{\varepsilon(aa-cc)dt\cos\alpha\sin l}{cc}$, seu $\sin\alpha\cos l - \cos\alpha\sin l = \frac{(aa-cc)\cos\alpha\sin l}{cc}$, hincque $\operatorname{tang} l = \frac{cc\operatorname{tang}\alpha}{aa}$, simul autem arcus $ZO = v$ fiet constans, nempe $\cos v = \cos\alpha\cos l + \sin\alpha\sin l$ consequenter $ZO = v = \alpha - l$ et $\operatorname{tang} AZO = 0$, ita ut puncta A, Z et O semper sint in eodem circulo maximo. Denique vero pro situ arcus ZA habebitur $-d\lambda \sin l^2 = \varepsilon dt \sin\alpha \sin l$, hincque $\lambda = \frac{-\varepsilon t\sin\alpha}{\sin l}$. Cognito autem angulo $XZA = \lambda$ reliqui $XZB = \mu$ et $XZC = \nu$ ex his formulis definientur:

$$\sin(\mu-\lambda) = \frac{-\cos n}{\sin l\sin m};\ \sin(\nu-\lambda) = \frac{\cos m}{\sin l\sin n};\ \text{seu}$$

$$\cos(\mu-\lambda) = \frac{-\cos l\cos m}{\sin l\sin m};\ \cos(\nu-\lambda) = \frac{-\cos l\cos n}{\sin l\sin n}$$

seu $\operatorname{tang}(\mu-\lambda) = \frac{\cos n}{\cos l\cos m} = \frac{\operatorname{tang}\mathrm{T}}{\cos l}$ et $\operatorname{tang}(\nu-\lambda) = \frac{-\cot\mathrm{T}}{\cos l}$.

Cum autem haec solutio sit particularis, generalem sequenti modo eliciemus.

SOLUTIO GENERALIS.

Ponamus $\cos m = \sin l\cos\Theta$ et $\cos n = \sin l\sin\Theta$, ut sit $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$, eritque

$$dl\sin l = \varepsilon dt\sin\alpha(\sin l\sin\Theta\cos\mathrm{T} - \sin l\cos\Theta\sin\mathrm{T})$$

sive $dl = \varepsilon dt\sin\alpha\sin(\Theta-\mathrm{T})$, tum vero habebitur

$$dm\sin m = d\Theta\sin l\sin\Theta - dl\cos l\cos\Theta = \varepsilon dt\sin\alpha(\cos l\sin\mathrm{T} - \cot\alpha\sin l\sin\Theta)$$

ideoque

$$d\Theta\sin l\sin\Theta = \varepsilon dt\sin\alpha(\cos l\cos\Theta\sin(\Theta-\mathrm{T}) + \cos l\sin\mathrm{T} - \cot\alpha\sin l\sin\Theta)$$

at ob $\mathrm{T} = \Theta - (\Theta-\mathrm{T})$ est $\sin\mathrm{T} = \sin\Theta\cos(\Theta-\mathrm{T}) - \cos\Theta\sin(\Theta-\mathrm{T})$ unde per $\sin\Theta$ dividendo erit

$$d\Theta\sin l = \varepsilon dt\sin\alpha(\cos l\cos(\Theta-\mathrm{T}) - \cot\alpha\sin l).$$

Statuamus jam $\Theta - \mathrm{T} = \phi$, erit $d\Theta = d\phi + \frac{\varepsilon(aa-cc)dt\cos\alpha}{cc}$, et

$$d\phi\sin l + \frac{\varepsilon(aa-cc)dt\cos\alpha\sin l}{cc} = \varepsilon dt\sin\alpha\cos l\cos\phi - \varepsilon dt\cos\alpha\sin l$$

seu

$$\text{seu } d\phi\sin l = \varepsilon dt\sin\alpha\cos l\cos\phi - \frac{\varepsilon aadt\cos\alpha\sin l}{cc}$$

quae aequatio cum praecedente $dl = \varepsilon dt\sin\alpha\sin\phi$ est conjungenda et resolvenda, quae quidem continent tres variabiles l, t, et ϕ, quarum media ob $\varepsilon dt = \frac{dl}{\sin\alpha\sin\phi}$ facile eliminatur; oritur enim

$$d\phi\sin l = \frac{dl\cos l\cos\phi}{\sin\phi} - \frac{aadl\cos\alpha\sin l}{cc\sin\alpha\sin\phi}\ \text{seu}$$

$$\frac{aadl\cos\alpha\sin l}{cc\sin\alpha} = dl\cos l\cos\phi - d\phi\sin l\sin\phi$$

cujus integrale est:

$$\mathrm{C} - \sin l\cos\phi = \mathrm{C} - \frac{aacc\cos\alpha\cos l}{cc\sin\alpha}.$$

Statuamus brevitatis gratia $\frac{aa\cos\alpha}{cc\sin\alpha} = \mathrm{D}$, ut sit

$$\cos\phi = \frac{\mathrm{C}-\mathrm{D}\cos l}{\sin l},\ \text{et } \sin\phi = \frac{1}{\sin l}\sqrt{(1 - \mathrm{CC} + 2\mathrm{CD}\cos l - (1+\mathrm{DD})\cos l^2)}$$

quo valore in altera aequatione substituto oritur

$$\varepsilon dt = \frac{dl\sin l}{\sin\alpha\sqrt{(1-\mathrm{CC}+2\mathrm{CD}\cos l-(1+\mathrm{DD})\cos l^2)}}$$

cujus integrale est

$$\varepsilon t + \mathrm{E} = \frac{1}{\sin\alpha\sqrt{(1+\mathrm{DD})}}\ \mathrm{A}\sin\frac{\mathrm{CD}-(1+\mathrm{DD})\cos l}{\sqrt{(1-\mathrm{CC}+\mathrm{DD})}}$$

$$\text{seu } \frac{\mathrm{CD}-(1+\mathrm{DD})\cos l}{\sqrt{(1-\mathrm{CC}+\mathrm{DD})}} = \sin((\varepsilon t+\mathrm{E})\sin\alpha\sqrt{(1+\mathrm{DD})})$$

unde ad quodvis tempus arcus $ZA = l$, indeque angulus $\phi = \Theta - \mathrm{T}$, hincque angulus $\Theta = \phi + \mathrm{T}$ innotescit, quo invento erit $\cos m = \sin l\cos\Theta$ et $\cos n = \sin l\sin\Theta$. Porro fiet $\cos ZO = \cos\alpha\cos l + \sin\alpha\sin l\cos\phi = \cos\alpha\cos l + \mathrm{C}\sin\alpha - \mathrm{D}\sin\alpha\cos l$, seu $\cos ZO = \mathrm{C}\sin\alpha - \frac{(aa-cc)\cos\alpha\cos l}{cc}$. Denique pro angulo $XZA = \lambda$ obtinemus:

$$-d\lambda\sin l^2 = \varepsilon dt\sin\alpha\sin l\cos\phi,\ \text{seu } d\lambda = \frac{-\varepsilon dt\sin\alpha(\mathrm{C}-\mathrm{D}\cos l)}{\sin l^2}$$

ubi si loco εdt superior valor substituatur provenit

$$d\lambda = \frac{-dl(C-D\cos l)}{\sin l\sqrt{(1-CC+2CD\cos l-(1+DD)\cos l^2)}}$$

cujus integrale elicitur

$$\lambda = E + \Lambda \sin \frac{-D+C\cos l}{\sin l}$$

ſicque omnia in genere ſunt determinata.

COROLL. 1.

724. Ex ſolutione generali naſcitur ſolutio particularis prius eruta, ſi ponatur conſtans $C=\sqrt{(1+DD)}$; tum enim in aequatione $\varepsilon t+E = \frac{1}{\sin a.\sqrt{(1+DD)}}\ \Lambda\ \sin \frac{CD-(1+DD)\cos l}{\sqrt{(1-CC+DD)}}$ ob denominatorem $\sqrt{(1-CC+DD)}=0$, etiam numerator $CD-(1+DD)\cos l$ evaneſcere debet, unde fit $\cos l = \frac{D}{\sqrt{(1+DD)}}$ et $\sin l = \frac{1}{\sqrt{(1+DD)}}$, ideoque $\tan l = \frac{1}{D} = \frac{cc}{aa}\tan \alpha$.

COROLL. 2.

725. Sumta autem conſtante $C=\sqrt{(1+DD)}$ fit $\cos\Phi = \frac{\sqrt{(1+DD)}-D\cos l}{\sin l}=1$, ideoque $\Phi=0$ et $\Theta = T$, unde colligitur $\cos m = \sin l\cos T$ et $\cos n = \sin l\sin T$, ac denique $\lambda = E + \Lambda \sin \frac{-D+\cos l\sqrt{(1+DD)}}{\sin l} = E+\Lambda\sin 0$. Verum ob $\Phi=0$, ad hoc incommodum evitandum, ſumatur aequatio $d\lambda\sin l = -\varepsilon dt\sin\alpha$, unde fit ut ante

$$\lambda = E - \frac{\varepsilon t\sin\alpha}{\sin l}.$$

SCHOLION.

726. Solutio generalis ideo tot involvit conſtantes arbitrarias, ut ubicunque punctum fixum Z in ſphaera immobili accipiatur, ad id poſſit accommodari. Cum autem punctum Z ab arbitrio noſtro pendeat, id ſemper ita accipere licebit, ut pro eo ſolutio particularis locum ſit habitura: quae cum ſit ſimpliciſſima maxime nobis perſpicuam cognitionem motus largietur, cum idem motus, ſi ad alia puncta fixa referretur, vehementer perturbatus videri debeat. Quare punctum hoc fixum Z non pro lubitu ſed ita aſſumamus, ut ſolutio illa particularis locum inveniat.

PRO-

PROBLEMA. 74.

727. Si corpori rigido duobus axibus principalibus paribus praedito impreſſus fuerit initio motus gyratorius circa axem quemcunque per centrum inertiae tranſeuntem motus hujus continuationem determinare.

SOLUTIO.

In centro ſphaerae immobilis concipiatur centrum inertiae corporis, quod etiam quieſcit; atque initio axes corporis principales fuerint in A, B, C, quorum primi IA reſpectu momentum inertiae ſit $=Maa$, reſpectu vero binorum reliquorum $=Mcc$: tum autem acceperit corpus motum gyratorium circa axem IE in ſenſum BCA, celeritate angulari $=\varepsilon$ ſitque arcus $AE=\alpha$. Quo nunc hujus motus impreſſi continuationem inveſtigemus, ſolutione particulari utentes, in arcu AB, quem in ſphaera immobili tanquam meridianum fixum ſpectemus, capiatur AZ ita ut ſit $\tan AZ = \frac{cc\tan\alpha}{aa}$ ſumaturque Z pro puncto illo fixo, ad quod deinceps ſitum corporis perpetuo referamus, ponamus autem $AZ=l$, ut ſit $ZE=\alpha-l$. Iam elapſo tempore $=t$ pervenerint poli axium principalium in A′, B′, C′; et vidimus fore adhuc $ZA'=ZA=l$, et in eodem arcu A′Z reperiri punctum O, circa quod tanquam polum corpus nunc gyretur celeritate angulari $=\varepsilon$ in ſenſum B′C′A′. Ex praecedentibus autem, ubi angulum XZA poſuimus $=\lambda$, quoniam ejus negativum hic angulum AZA′ denotat, qui initio erat $=0$, erit hic angulus $AZA' = \frac{\varepsilon t\sin\alpha}{\sin l}$: unde ad quodvis tempus poſitio axis principalis IA′ cognoſcitur. Sint bini reliqui in B′ et C′, atque §. 717. invenimus, fore angulum $B'A'O = \frac{\varepsilon(aa-cc)t\cos\alpha}{cc}$. quare invento puncto A′ capiatur angulus $ZA'B' = \frac{\varepsilon(aa-cc)t\cos\alpha}{cc}$, et ſumto arcu A′B′ quadrante, erit B′ alter duorum reliquorum polorum principalium, unde ſponte tertius C′ patet. Fig. 92

COROLL. 1.

728. Axis ergo principalis IA uniformiter gyratur circa lineam IZ fixam, ſed non ad corpus pertinentem; ita ut ſit arcus $AZ = A'Z = l$

evidenexistente $tang\, l = \frac{cc\, tang\, \alpha}{aa}$, et tempore t absolvatur angulus $AZA' = \frac{\varepsilon t\, si\, \alpha}{sl}$: cujus ergo motus celeritas angularis in sensum AA' seu BCA erit $= \frac{\varepsilon\, si\, \alpha}{sl}$.

COROLL. 2.

729. Interea autem arcus in corpore AB, qui initio in AZ cadebat, ita circa ZA dum tempore t in ZA' procedit, gyratur ut conficiat angulum $ZA'B' = \frac{\varepsilon(aa-cc)t\, cos\, \alpha}{cc}$, cujus ergo motus celeritas angularis est $= \frac{\varepsilon(aa-cc)\, cos\, \alpha}{cc}$.

COROLL. 3.

730. Motus ergo corporis potest repraesentari tanquam compositus ex duplici gyratorio. Primo scilicet corpus gyrabitur circa suum polum principalem singularem A celeritate angulari $= \frac{\varepsilon(aa-cc)\, cos\, \alpha}{cc}$ in sensum CB; tum vero interea ipse hic polus A gyrabitur circa punctum Z in spatio absoluto fixum celeritate angulari $= \frac{\varepsilon\, si\, \alpha}{sl}$.

COROLL. 4.

731. Posito arcu $ZA = l$, sit celeritas angularis, qua punctum A circa punctum fixum Z gyratur $= \zeta$, in sensum AA', quae duo elementa ut data considerentur, erit $tang\, \alpha = \frac{aa}{cc}\, tang\, l$ et $\varepsilon = \frac{\zeta\, sil}{si\alpha}$. Hinc celeritas angularis, qua interea arcus AB circa A gyratur in sensum contrarium, erit $= \frac{\zeta(aa-cc)\, sil}{cc\, tang\, \alpha} = \frac{\zeta(aa-cc)\, cos\, l}{aa}$.

SCHOLION. 1.

732. Hic corporis motus commodissime eodem modo repraesentari potest, quo motum vertiginis terrae concipimus, quatenus axis seu poli in coelo progrediuntur. Corpus nempe tanquam terra spectetur, cujus alter polus sit A, in coelo autem punctum Z polus eclipticae, a quo polus terrae constanter eandem servet distantiam $ZA = l$, et circa quem gyretur celeritate angulari $= \zeta$ in sensum AA', qui motus respondet processui poli terrestris in coelo. Interea autem dum arcus AB vel A'B' gyratur circa A vel A', ab arcu ZA recedens in sensum CB celeritate angulari $= \frac{\zeta(aa-cc)\, cos\, l}{aa}$, hic motus respondebit motui diurno terrae. Revera autem talis motus maxime discrepat a motu vertiginis terrae, cum hic motus meridiani AB circa polum A sit admodum lentus respectu motus angularis poli A circa punctum fixum Z, cum contra in terra motus diurnus sit velocissimus prae motu poli circa polum eclipticae. Quod si ergo motus polorum terrae circa polos eclipticae esset velocissimus, contra vero motus vertiginis circa polos terrae tardissimus, caussam hujus motus neutiquam in viribus externis quaeri conveniret, cum terra per se ob inertiam tali motu cieri posset. Nunc autem cum contrarium eveniat, hujus phoenomeni caussa manifesto in viribus externis, quibus terra sollicitatur, est sita.

SCHOLION. 2.

733. Memoratu hic omnino dignum est, quod motus corporis, qui revera circa axem variabilem IO fiebat, quasi sponte reductus fuerit ad binos motus gyratorios, qui autem probe a se invicem sunt distinguendi, dum alter fit circa axem verum et in corpore existentem, alter vero circa axem quasi extra corpus existentem et ad spatium absolutum relatum. Ad quem motum clarius menti exponendum, corpus PRQS hasta $APQa$ transfixum concipiatur, quae per ejus centrum inertiae I transeat, ejusque axem principalem singularem referat: tum vero hasta terminis suis A et a ita annulo $ZAza$ inferatur, ut corpus libere circa eam gyrari queat: annulus autem in punctis oppositis Z et z habeat cardines, qui extrinsecus ita firmiter retineantur, ut annulus circa eos pariter libere circumferri possit. Quod si jam corpus PRQS circa hastam Aa in gyrum agatur simulque annulus $AzaZ$ circa cardines Z et z circumferatur, ejusmodi motus orietur qualem hic descripsimus, ubi hasta refert axem verum in corpore existentem et cum corpore motum, cardines vero vero Z et z axem alterum extra corpus fixum. Bini autem hi motus gyratorii in hoc conveniunt, quod uterque altero sublato abeat in verum motum gyratorium circa axem fixum; si enim annulus

nulus quiescat, corpus circa hastam quiescentem Aa seu axem PQ fixum gyrabitur: sin autem dematur motus circa hastam, solusque annulus circa cardines Z et z gyretur, in corpore orietur motus gyratorius simplex circa axem fixum ad cardines Z et z pertingentem.

SCHOLION 3.

734. Talis motus fieri dicitur circa axem mobilem, qui probe distinguendus est a motu circa axem variabilem, qualem in praecedentibus consideravimus. Corpus enim circa axem variabilem gyrari dicitur, quando continuo circa aliam lineam per ejus centrum inertiae ductam gyratur, quae etiam eo instanti revera quiescat; atque de tali axe omnia sunt intelligenda, quae supra de motu gyratorio sunt exposita. Quando autem dicimus corpus circa axem mobilem gyrari, quae idea nunc demum nobis nata est censenda, axis quidem erit certa quaedam linea in corpore existens invariabilis, quae autem ipsa cum corpore moveatur; ita ut iste axis mobilis nunquam quiescat. Ita axis terrae qui hoc nomen genere solet, non est axis variabilis sed mobilis, cum in terra sit linea quaedam fixa, sed labente tempore ad alia atque alia coeli puncta dirigatur: qui ergo etiam abstractione facta a motu terrae annuo nullo temporis puncto quiescit, etiamsi ejus motus sit tardissimus. Verum quovis tempore quaedam linea in terra assignari potest, quae tum revera quiescat, successu temporis autem continuo mutetur: hujusque respectu terra circa axem variabilem gyrari est dicenda. Ob motum autem aequinoctiorum tardissimum prae motu diurno differentia inter verum terrae axem et axem variabilem quovis tempore locum habentem fere penitus est imperceptibilis; quae autem si esset notabilis, in Astronomia summam attentionem postularet, cum observationes pro elevatione poli institutae non situm axis veri, sed axis variabilis eo tempore ostendant, circa quem scilicet tum quiescentem terra gyretur.

PROBLEMA. 75.

735. Si corpori rigido duobus axibus principalibus paribus praedito motus quicunque imprimatur, corpusque a nullis viribus externis sollicitetur, neque usquam retineatur, quominus motum suum libere prosequi possit, determinare motum, quo moveri perget.

SOLUTIO.

Primum dispiciatur, utrum ob motum impressum centrum inertiae moveatur nec ne? si enim moveatur, corpus habebit motum progressivum

gressivum seorsim considerandum, quo uniformiter in directum progreditur, atque mente saltem hunc motum tollere licebit, dum scilicet ipsum spatium motu contrario proferri concipiatur. Sublato ergo motu progressivo, cujus ratio perinde est comparata, ac si praeterea nullus alius motus in corpore inesset, centrum corporis inertiae tanquam quiescens considerari poterit: circa quod quomodocunque corpus agitetur, linea quaepiam recta per id ducta primo saltem initio quiescet, quae ejus erit axis gyrationis. Tum si iste axis conveniat cum aliquo axium principalium, hoc est, si vel incidat in axem principalem singularem vel ad eum sit normalis, etiam hic motus manebit aequabilis, axisque quiescet, vel adjuncto motu progressivo sibi jugiter manebit parallelus. At si axis ille, circa quem corpus primum gyrari coepit, neque cum axe principali singulari congruat, neque ad eum sit normalis, corpus circa axem variabilem gyrabitur, qui quomodo continuo varietur, in praecedentibus abunde ostendimus. Clarius etiam hic motus perspicietur per reductionem illam ad axem mobilem, qua corpus circa ipsum axem principalem singularem aequabiliter gyratur, dum ipse hic axis circa quosdam polos extra corpus fixos circumfertur pariter motu uniformi.

SCHOLION.

736. Hoc problemate universum argumentum, quod hoc capite tractandum suscepimus, exhauritur, ita ut corporum rigidorum duobus axibus principalibus paribus praeditorum, et a nullis viribus sollicitatorum, motus liberos in genere determinare atque ad quovis casus accommodare valeamus. Supersunt ergo corpora tertiae classis, quorum momenta inertiae principalia sunt inaequalia, quibus sequens caput destinatur.

CAPUT XIII.

DE MOTU LIBERO CORPORUM RIGIDORUM TERNIS AXIBUS PRINCIPALIBUS DISPARIBUS PRAEDITORUM, ET A NULLIS VIRIBUS SOLLICITATORUM.

PROBLEMA. 76.

737. Si corpori rigido cuicunque impressus fuerit initio motus gyratorius quicunque, neque id ab ullis viribus externis sollicitetur; ad quodvis tempus positionem axis gyrationis respectu axium principalium assignare.

SOLUTIO.

Fig. 89. Cum centrum inertiae corporis I perpetuo quiescat, in eo constituatur centrum sphaerae, ad cujus superficiem omnia reducamus; sintque IA, IB, IC, axes corporis principales, et momenta inertiae respectu axis IA $= Maa$, respectu axis IB $= Mbb$, et respectu axis IC $= Mcc$, quae inter se inaequalia assumimus, quoniam si duo vel adeo omnia essent inter se aequalia, casus ad praecedentia capita revolveretur. Nunc elapso tempore t sit recta IO axis gyrationis, cujus situm respectu axium principalium definiri oportet; ponatur celeritas angularis, qua corpus jam circa hunc axem IO gyratur $= x$, fiatque gyratio in sensum ABC. Vocentur arcus circulorum maximorum, qui quaeruntur, OA $= \alpha$, OB $= \beta$, et OC $= \gamma$, qui tempore variantes pro variabilibus sunt habendi, ita autem inter se pendent, ut sit $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$. Deinde vero etiam celeritas angularis x hic erit variabilis, cum sit (670)

$$\frac{dx}{xx} = \frac{(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{aabbcc}\,dt,$$

tum vero ex §. 674. variabilitas arcuum α, β, γ, ita determinatur per has ternas aequationes:

$$\text{I. } aabbcc\,d\alpha\sin\alpha = x(cc-bb)\,dt\cos\beta\cos\gamma\,(bbcc-(bb-aa)(cc-aa)\cos\alpha^2)$$

$$\text{II. } aabbcc\,d\beta\sin\beta = x(aa-cc)\,dt\cos\gamma\cos\alpha\,(aacc-(cc-bb)(aa-bb)\cos\beta^2)$$

$$\text{III. } aabbcc\,d\gamma\sin\gamma = x(bb-aa)\,dt\cos\alpha\cos\beta\,(aabb-(aa-cc)(bb-cc)\cos\gamma^2).$$

Cum autem sit $\dfrac{dt\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{aabbcc} = \dfrac{dx}{xx(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)}$ hae aequationes abeunt in istas:

$$\text{I. } d\alpha\sin\alpha\cos\alpha = \frac{-dx}{x(aa-bb)(aa-cc)}(bbcc-(bb-aa)(cc-aa)\cos\alpha^2)$$

$$\text{II. } d\beta\sin\beta\cos\beta = \frac{dx}{x(aa-bb)(bb-cc)}(aacc-(cc-bb)(aa-bb)\cos\beta^2)$$

$$\text{III. } d\gamma\sin\gamma\cos\gamma = \frac{-dx}{x(aa-cc)(bb-cc)}(aabb-(aa-cc)(bb-cc)\cos\gamma^2)$$

sive has integrabiles:

$$\text{I. } +\frac{dx}{x} = \frac{-(bb-aa)(cc-aa)\,d\alpha\sin\alpha\cos\alpha}{bbcc-(bb-aa)(cc-aa)\cos\alpha^2}$$

$$\text{II. } +\frac{dx}{x} = \frac{-(cc-bb)(aa-bb)\,d\beta\sin\beta\cos\beta}{aacc-(cc-bb)(aa-bb)\cos\beta^2}$$

$$\text{III. } +\frac{dx}{x} = \frac{-(aa-cc)(bb-cc)\,d\gamma\sin\gamma\cos\gamma}{aabb-(aa-cc)(bb-cc)\cos\gamma^2}$$

quarum integralia sunt:

$$\frac{A}{xx} = bbcc-(bb-aa)(cc-aa)\cos\alpha^2$$

$$\frac{B}{xx} = aacc-(cc-bb)(aa-bb)\cos\beta^2$$

$$\frac{C}{xx} = aabb-(aa-cc)(bb-cc)\cos\gamma^2$$

ubi quidem constantium A, B, C, binae sunt arbitrariae, at tertiam ita definiri oportet, ut fiat

$$A(cc-bb) + B(aa-cc) + C(bb-aa) = 0.$$

Vel posito

$$A = \mathfrak{A}(bb-aa)(cc-aa);\quad B = \mathfrak{B}(cc-bb)(aa-bb);\quad C = \mathfrak{C}(aa-cc)(bb-cc)$$

 debet

debet esse $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}=0$. Hinc ergo erit

$$\cos\alpha^2=\frac{bbccuu-\mathfrak{A}(bb-aa)(cc-aa)}{(bb-aa)(cc-aa)uu}=\frac{bbcc}{(bb-cc)(cc-aa)}-\frac{\mathfrak{A}}{uu}$$

$$\cos\beta^2=\frac{aacc}{(cc-bb)(aa-bb)}-\frac{\mathfrak{B}}{uu}$$

$$\cos\gamma^2=\frac{aabb}{(aa-cc)(bb-cc)}-\frac{\mathfrak{C}}{uu}.$$

Ponamus brevitatis gratia:

$$\frac{bbcc}{(bb-aa)(cc-aa)}=\mathfrak{D};\quad \frac{aacc}{(aa-bb)(cc-bb)}=\mathfrak{E};\ \text{et}\quad \frac{aabb}{(aa-cc)(bb-cc)}=\mathfrak{F};$$

ut sit $\mathfrak{D}+\mathfrak{E}+\mathfrak{F}=1$, uti est $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}=0$. erit

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{(\mathfrak{D}uu-\mathfrak{A})}}{u};\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{(\mathfrak{E}uu-\mathfrak{B})}}{u};\ \text{et}\ \cos\gamma=\frac{\sqrt{(\mathfrak{F}uu-\mathfrak{C})}}{u},$$

quibus valoribus in aequatione primum inventa substitutis habebitur:

$$\frac{(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)dt}{aabbcc}=\frac{udu}{\sqrt{(\mathfrak{D}uu-\mathfrak{A})(\mathfrak{E}uu-\mathfrak{B})(\mathfrak{F}uu-\mathfrak{C})}}$$

Cujus integratio, paucissimis casibus exceptis, receptas expressiones arcuum circularium vel logarithmorum respuit.

COROLL. 1.

738. Nisi ergo duo corporis momenta principalia inter se fuerint aequalia, motus gyratorius circa axem variabilem non est uniformis; ac determinatio quidem celeritatis angularis ad quodvis tempus maximam parit difficultatem.

COROLL. 2.

739. Inventa autem celeritate angulari u ad tempus elapsum $=t$, facile positio axis gyrationis respectu axium principalium definitur per formulas pro arcubus α, β, γ, inventas.

PRO-

PROBLEMA. 77.

740. Iisdem positis, atque in praecedente problemate ex dato axe gyrationis, circa quem corpus initio data celeritate angulari gyrari coepit, ad datum tempus celeritatem angularem et axis gyrationis positionem respectu axium principalium determinare.

SOLUTIO.

Sit IE axis, circa quem corpus initio gyrari coepit, celeritate angulari $=\varepsilon$ in sensum ABC, pro cujus loco sint arcus AE $=a$, BE $=b$, et CE $=c$. Tum vero cum momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc, sint inaequalia, sit aa maximum, bb medium, et cc minimum, ponanturque numeri hinc formandi $\frac{bbcc}{(aa-bb)(aa-cc)}=\mathrm{A}$; $\frac{aacc}{(aa-bb)(bb-cc)}=\mathrm{B}$; et $\frac{aabb}{(aa-cc)(bb-cc)}=\mathrm{C}$; atque $\frac{aabbcc}{(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)}=\mathrm{D}$, ut sit $\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}=1$ et $\mathrm{DD}=\mathrm{ABC}$. Pro praecedentibus ergo formulis erit $\mathfrak{D}=\mathrm{A}$, $\mathfrak{E}=-\mathrm{B}$, et $\mathfrak{F}=\mathrm{C}$, et elapso tempore t celeritas angularis u ex hac aequatione differentiali determinari debet, Fig. 89.

$$\frac{dt}{2D}=\frac{udu}{\sqrt{(Auu-\mathfrak{A})(-Buu-\mathfrak{B})(Cuu-\mathfrak{C})}}$$

cujus integratio ita est instituenda, ut posito $t=0$ fiat $u=\varepsilon$. Deinde vero habebitur pro arcubus AO $=\alpha$, BO $=\beta$, et CO $=\gamma$,

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{(Auu-\mathfrak{A})}}{u};\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{(-Buu-\mathfrak{B})}}{u};\quad \cos\gamma=\frac{\sqrt{(Cuu-\mathfrak{C})}}{u};$$

qui cum initio fuerint a, b, c, constantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ita determinantur, ut sit

$$\mathfrak{A}=(\mathrm{A}-\cos a^2)\varepsilon\varepsilon;\quad \mathfrak{B}=-(\mathrm{B}+\cos b^2)\varepsilon\varepsilon;\quad \mathfrak{C}=(\mathrm{C}-\cos c^2)\varepsilon\varepsilon.$$

Quamobrem habebimus:

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon\cos a^2-A\varepsilon\varepsilon+Auu)}}{u}$$

$$\cos\beta=\frac{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon\cos b^2+B\varepsilon\varepsilon-Buu)}}{u}$$

$$\cos\gamma=\frac{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon\cos c^2-C\varepsilon\varepsilon+Cuu)}}{u}$$

et integrari oportet hanc formulam

$$dt = \frac{D u\,du}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon\cos a^2 - A\varepsilon\varepsilon + Auu)(\varepsilon\varepsilon\cos b^2 + B\varepsilon\varepsilon - Buu)(\varepsilon\varepsilon\cos c^2 - C\varepsilon\varepsilon + Cuu)}}$$

Ad has formulas contrahendas, statuamus $\frac{uu-\varepsilon\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon} = v$, ut fiat $u = \varepsilon\sqrt{(1+v)}$ atque

$$2\varepsilon dt = \frac{D dv}{\sqrt{(\cos a^2 + Av)(\cos b^2 - Bv)(\cos c^2 + Cv)}}$$

quae ita integrari debet, ut posito $t = 0$ fiat $v = 0$, tum vero erit

$$\cos\alpha = \frac{\varepsilon}{u}\sqrt{(\cos a^2 + Av)};\ \cos\beta = \frac{\varepsilon}{u}\sqrt{(\cos b^2 - Bv)};$$

$$\cos\gamma = \frac{\varepsilon}{u}\sqrt{(\cos c^2 + Cv)};$$

vel etiam:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{(\cos a^2 + Av)}}{\sqrt{(1+v)}};\ \cos\beta = \frac{\sqrt{(\cos b^2 - Bv)}}{\sqrt{(1+v)}};\ \cos\gamma = \frac{\sqrt{(\cos c^2 + Cv)}}{\sqrt{(1+v)}}.$$

Quodsi ergo ad datum tempus t valorem ipsius v assignare valuerimus, tam celeritatem angularem $u = \varepsilon\sqrt{(1+v)}$ quam positionem axis gyrationis IO respectu axium principalium cognoscemus.

COROLL. 1.

741. Si in statu initiali arcuum a, b, c, unus evanescat, reliqui erunt quadrantes, et axis gyrationis primus in aliquem axium principalium incidit, circa quem corpus constanter motu aequabili gyrari perget.

COROLL. 2.

742. Cum sit $\frac{du}{uu} = \frac{dt\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{D}$, et D sit quantitas positiva, patet, quamdiu polus gyrationis O in spatio ABC fuerit situs, seu cosinus arcuum α, β, γ positivi, celeritatem gyratoriam, quatenus in sensum ABC dirigitur, augeri.

COROLL. 3.

Fig. 94. 743. Sin autem polus gyrationis, productis quadrantibus in spatia αABb; βBCc; γCAa, quae sunt etiam quadrantes, cadat, celeritas minuetur; augebitur autem in quadrantibus αAa, βBb, γCc, perinde atque in principali ABC.

SCHOLION. 1.

744. Haec probe notasse juvat, ne formula irrationali utentes ambiguitate signi decipiamur, quare si fuerint cosinus arcuum a, b, c positivi vel saltem eorum productum positivum, primo initio celeritas u crescit, ideoque v positivum consequitur valorem. Formula autem integranda ita est comparata, ut neque algebraice neque per arcus circulares vel logarithmos expediri queat, sed ejus integrale per quadraturas nobis concedi postulare cogimur. Tametsi enim per arcus sectionum conicarum negotium expediri potest, tamen inde nihil plane lucrari licet, ut praestare videatur, consueto more per quadraturas uti. Quodsi enim talis scribendi ratio $\Pi x, (f)$ denotet arcum sectionis conicae, cujus semiparameter $= 1$ et semiaxis transversus $= f$, qui arcus a vertice captus respondeat abscissae $= x$; ita ut si $f > 0$; sectio conica sit ellipsis, si $f < 0$, hyperbola, et si $f = \infty$ parabola, nostra formula integranda $\int\frac{dv}{\sqrt{(a+Av)(b-Bv)(c+Cv)}}$ ubi brevitatis ergo literas a, b, c, pro $\cos a^2$, $\cos b^2$, $\cos c^2$ pono, ad partem algebraicam, arcum ellipticum, et arcum hyperbolicum reducitur. Erit enim

$$\int\frac{dv}{\sqrt{(a+Av)(b-Bv)(c+Cv)}} = \text{Const} + \frac{2A\sqrt{(b-Bv)(c+Cv)}}{(Ac-Ca)\sqrt{(a+Av)}}$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{A(Bc+Cb)}}\,\Pi\frac{A(Bc+Cb)}{B(Ac-Ca)}\left(1-\sqrt{\frac{A(b-Bv)}{C}}\right)\left(\frac{A(Bc+Cb)}{B(Ac-Ca)}\right)$$

$$- \frac{2}{\sqrt{C(Ba+Ab)}}\,\Pi\frac{C(Ba+Ab)}{B(Ac-Ca)}\left(\sqrt{\frac{(Ba+Ab)(c+Cv)}{(Bc+Cb)(a+Av)}} - 1\right)\left(\frac{-C(Ba+Ab)}{B(Ac-Ca)}\right)$$

ubi sumsi esse $Ac > Ca$, si enim secus eveniret, literas a, A, et c, C, inter se permutari deberent. Hinc autem certe nullam utilitatem ad calculum prosequendum adipiscimur, multo minus inde ad datum tempus t valorem ipsius v colligere licebit, in quo tamen cardo quaestionis versatur. Ceterum casus, quo $Ac = Ca$, hinc excluditur, qui autem ob hoc ipsum faciliorem evolutionem admittit, et quem propterea seorsim tractari operae erit pretium.

SCHO-

SCHOLION. 2.

745. Casus hinc sponte excluduntur, quibus arcuum a, b, c quidam evanescit, quoniam tum primo motus initio axis gyrationis in aliquem axium principalium incideret; ideoque idem perpetuo conservaretur. Quod etiam nostrae formulae declarant, nam si $a = 0$, et $\cos a = 1$, erit $\cos b = 0$ et $\cos c = 0$, unde formulae $\cos \beta = \frac{\sqrt{-Bv}}{\sqrt{(1+v)}}$ et $\cos \gamma = \frac{\sqrt{Cv}}{\sqrt{(1+v)}}$ subsistere nequeunt, nisi sit $v = 0$, et $z = \varepsilon$, ita ut sit $\cos \beta = 0$ et $\cos \gamma = 0$, ac polus gyrationis O constanter maneat in A. Idem evenit si $c = 0$, ubi polus gyrationis O constanter manet in C, et $z = \varepsilon$. Hoc autem minus apparet, si initio E fuerit in B, seu $b = 0$ et $\cos a = 0$ atque $\cos c = 0$; formulae enim dant

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{Av}}{\sqrt{(1+v)}}; \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{(1-Bv)}}{\sqrt{(1+v)}}; \text{ et } \cos \gamma = \frac{\sqrt{Cv}}{\sqrt{(1+v)}}$$

ubi v videtur valorem positivum habere posse. At cum sit

$$2\varepsilon dt = \frac{Ddv}{v\sqrt{AC(1-Bv)}} = \frac{dv\sqrt{B}}{v\sqrt{(1-Bv)}}, \text{ ob } D = \sqrt{ABC},$$

haec aequatio ita integrata, ut posito $v = 0$ fiat $t = 0$, dat

$$\frac{2\varepsilon t}{\sqrt{B}} = l\frac{1+1}{1-1} - l\frac{1+\sqrt{(1-Bv)}}{1-\sqrt{(1-Bv)}}$$

unde manifestum est, nonnisi elapso tempore infinito, hoc est nunquam, litteram v valorem nihilo majorem acquirere posse. Semper ergo polus gyrationis O puncto B manebit affixus, atque $z = \varepsilon$. Ceterum si arcuum a, b, c, unicus tantum sit quadrans, primo initio celeritas angularis non mutatur ob $dz = 0$; deinceps vero res ita se habebit. Sit primo $a = 90°$, seu cadat punctum E in quadrantem BC, ut sit $\cos c = \sin b$, erit $\cos \alpha = \frac{\sqrt{Av}}{\sqrt{(1+v)}}$; $\cos \beta = \frac{\sqrt{(\cos b^2 - Bv)}}{\sqrt{(1+v)}}$; et $\cos \gamma = \frac{\sqrt{(\sin b^2 + Cv)}}{\sqrt{(1+v)}}$; unde patet v obtinere valorem positivum, foreque

$$2\varepsilon dt = \frac{Ddv}{\sqrt{Av(\cos b^2 - Bv)(\sin b^2 + Cv)}}.$$

Cum ergo sit $\cos \alpha > 0$ erit $\alpha < 90°$, et polus gyrationis a quadrante BC propius ad A accedet, fietque $z > \varepsilon$, idemque eveniet, si polus gyrationis fuerit in quadrante AB. At si polus gyrationis sit in quadrante AC, ob $\cos b = 0$, erit

cos

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{(\cos a^2 + Av)}}{\sqrt{(1+v)}}; \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{-Bv}}{\sqrt{(1+v)}}; \quad \cos \gamma = \frac{\sqrt{(\cos c^2 + Cv)}}{\sqrt{(1+v)}}$$

ac necesse est, sit v quantitas negativa crescens saltem ab initio. Sit ergo $v = -u$, et cum εdt positivum valorem habere debeat, capi oportet $\sqrt{Bu}$ negative, et fiet $\beta > 90°$, ideoque polus gyrationis magis a B recedet, et celeritas $z = \varepsilon\sqrt{(1-u)}$ minuetur.

SCHOLION. 3.

746. Praeterire hic non possum insignem hujus motus proprietatem, quae in hoc consistit, quod corporis vis viva perpetuo maneat eadem. Hic autem notari convenit, si corpus circa quempiam axem gyretur celeritate angulari $= z$, sitque ejus momentum inertiae respectu hujus axis $= Mkk$, fore ejus vim vivam $= Mkk\,zz$. Hoc praemisso cum sit nostro casu $Mkk = M(aa \cos \alpha^2 + bb \cos \beta^2 + cc \cos \gamma^2)$, tum vero $zz \cos \alpha^2 = \varepsilon\varepsilon(\cos a^2 + Av)$; $zz \cos \beta^2 = \varepsilon\varepsilon(\cos b^2 - Bv)$; $zz \cos \gamma^2 = \varepsilon\varepsilon(\cos c^2 + Cv)$; erit corporis circa axem IO celeritate angulari $= z$ gyrantis vis viva $= M\varepsilon\varepsilon(aa \cos a^2 + bb \cos b^2 + cc \cos c^2 + v(Aaa - Bbb + Ccc))$. Est vero $Aaa - Bbb + Ccc = 0$, ideoque vis viva non pendet ab v, et primae impressae semper manet aequalis. Quod autem in genere $Mkk\,zz$ exprimat corporis vim vivam, seu aggregatum omnium particularum per quadrata celeritatum multiplicatarum, evidens est, concipiatur enim elementum corporis dM ab axe gyrationis distans intervallo $= r$, est ejus celeritas $= zr$, ideoque ejus vis viva $= zzrrdM$: unde fit totius corporis vis viva $= zz\int rrdM = Mkk\,zz$ ob $\int rrdM = Mkk$.

PROBLEMA. 78.

747. Positis adhuc iisdem, si initio axis gyrationis ita fuerit comparatus, ut sit $\cos a^2 : \cos c^2 = A : C = cc(bb - cc) : aa(aa - bb)$, ad quodvis tempus elapsum t positionem axis gyrationis respectu axium principalium definire.

SOLUTIO.

Ponamus $\cos a^2 = An$; ut sit $\cos c^2 = Cn$, erit $\cos b^2 = 1 - (A + C)n = 1 - (1 + B)n$: Hinc posito $z = \varepsilon\sqrt{(1+v)}$ erit

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{A(n+v)}}{\sqrt{(1+v)}}; \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{(1-n-Bn-Bv)}}{\sqrt{(1+v)}}; \quad \cos \gamma = \frac{\sqrt{C(n+v)}}{\sqrt{(1+v)}}$$

atque

atque $2\varepsilon dt = \frac{dv\sqrt{B}}{(n+v)\sqrt{(1-n-Bn-Bv)}}$ ob D = ABC.

Hic autem assumimus initio polum gyrationis E intra quadrantem ABC extitisse, ut cosinus tam arcuum a, b, c, quam saltem mox ab initio α, β, γ, sint positivi. Hinc igitur integrando adipiscimur.

$$2\varepsilon t = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{(1-n)}}\, l\, \frac{\sqrt{(1-n)}+\sqrt{(1-n-Bn)}}{\sqrt{(1-n)}-\sqrt{(1-n-Bn)}} - \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{(1-n)}}\, l\, \frac{\sqrt{(1-n)}+\sqrt{(1-n-Bn-Bv)}}{\sqrt{(1-n)}-\sqrt{(1-n-Bn-Bv)}}$$

Ponamus ad abbreviandum $\frac{\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{B}} = \sqrt{m}$, ut fiat

$$2\varepsilon t\sqrt{m} = l\,\frac{\sqrt{m}+\sqrt{(m-n)}}{\sqrt{m}-\sqrt{(m-n)}} - l\,\frac{\sqrt{m}+\sqrt{(m-n-v)}}{\sqrt{m}-\sqrt{(m-n-v)}}$$ et

sumto e pro numero, cujus logarithmus est $= 1$, statuatur $e^{2\varepsilon t\sqrt{m}} = T$, fietque $\frac{\sqrt{m}+\sqrt{(m-n-v)}}{\sqrt{m}-\sqrt{(m-n-v)}}\, T = \frac{\sqrt{m}+\sqrt{(m-n)}}{\sqrt{m}-\sqrt{(m-n)}}$

unde porro colligitur,

$$\sqrt{(m-n-v)} = \frac{\sqrt{m}+\sqrt{(m-n)}-T(\sqrt{m}-\sqrt{(m-n)})}{\sqrt{m}+\sqrt{(m-n)}+T(\sqrt{m}-\sqrt{(m-n)})}\sqrt{m}$$

eritque $1-n = Bm$ et $\cos b^2 = B(m-n)$ dum est $\cos a^2 = An$ et $\cos c^2 = Cn$; invento autem v est primo $s = \varepsilon\sqrt{(1+v)}$ et

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{A(n+v)}}{\sqrt{(1+v)}};\quad \cos\beta = \frac{\sqrt{B(m-n-v)}}{\sqrt{(1+v)}};\quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{C(n+v)}}{\sqrt{(1+v)}}.$$

Quo haec magis contrahamus sit $\frac{\sqrt{m}+\sqrt{(m-n)}}{\sqrt{m}-\sqrt{(m-n)}} = k$, unde fit $\sqrt{(m-n)} = \frac{k-1}{k+1}\sqrt{m}$, et $\sqrt{(m-n-v)} = \frac{k-T}{k+T}\sqrt{m}$, hincque porro $v = m\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 - m\left(\frac{k-T}{k+T}\right)^2$; et ob $n = m - m\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 = \frac{4mk}{(k+1)^2}$, erit $n+v = m - m\left(\frac{k-T}{k+T}\right)^2 = \frac{4mkT}{(k+T)^2}$.

Quocirca si pro motu primum impresso fuerit

$$\cos a = \frac{2\sqrt{Amk}}{k+1};\quad \cos b = \frac{(k-1)\sqrt{Bm}}{k+1};\quad \cos c = \frac{2\sqrt{Cmk}}{k+1}$$

et

et celeritas angularis $= \varepsilon$ in sensum ABC, erit elapso tempore t, positoque $e^{2\varepsilon t\sqrt{m}} = T$, primo celeritas angularis $s = \varepsilon\sqrt{\left(1 + m\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 - m\left(\frac{k-T}{k+T}\right)^2\right)}$; deinde vero pro loco poli gyrationis O

$$\cos\alpha = \frac{2\varepsilon\sqrt{AmkT}}{s(k+T)};\quad \cos\beta = \frac{\varepsilon(k-T)\sqrt{Bm}}{s(k+T)};\quad \cos\gamma = \frac{2\varepsilon\sqrt{CmkT}}{s(k+T)},$$

tum vero est $dv = 2\varepsilon dt\,\frac{4mkT(k-T)\sqrt{m}}{(k+T)^3}$,

Hinc patet, primo instanti, quo $T = 1$, numerum v a nihilo crescere, donec fiat $T = k$, seu $2\varepsilon t\sqrt{m} = lk$, hoc est elapso tempore $t = \frac{lk}{2\varepsilon\sqrt{m}}$; quo fit $s = \varepsilon\sqrt{\left(1 + m\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2\right)}$, et celeritas angularis maxima: simulque erit

$$\cos\alpha = \frac{\varepsilon}{s}\sqrt{Am};\quad \cos\beta = 0,\ \text{seu}\ \beta = 90^\circ\ \text{et}\ \cos\gamma = \frac{\varepsilon}{s}\sqrt{Cm}$$

ita ut jam polus gyrationis pervenerit in arcum AC, eum mox transgressurus. Postea enim numerus v iterum minuetur, atque adeo evanescet si $\frac{T-k}{k+T} = \frac{k-1}{k+1}$, hoc est si $T = kk$, ideoque elapso tempore $t = \frac{lk}{\varepsilon\sqrt{m}}$, quod illius est duplum, hicque fit $s = \varepsilon$; $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{Amk}}{k+1}$; $\cos\beta = \frac{-(k-1)\sqrt{Bm}}{k+1}$; $\cos\gamma = \frac{2\sqrt{Cmk}}{k+1}$. Hic scilicet ultra quadrantem AC similem situm habebit respectu poli ipsi B oppositi, ad quem continuo propius accedet, eumque adeo elapso tempore infinito attinget; posito enim $t = \infty$ quo fit $T = \infty$, erit $s = \varepsilon\sqrt{\left(1-\frac{4mk}{(k+1)^2}\right)}$, hicque propterea celeritas angularis minima: tum

 vero

vero erit $cos\,\alpha = 0$, $cos\,\beta = -\frac{\varepsilon}{\vartheta}\sqrt{Bm}$ et $cos\,\gamma = 0$. At ob $1-n = 1-\frac{4mk}{(k+1)^2} = Bm$, evidens est esse $cos\,\beta = -1$.

COROLL. 1.

748. Numerum n ita assumi oportet, ut An et Cn sint unitate minores; quo accepto erit $m = \frac{1-n}{B}$, et $k = \frac{\sqrt{m}+\sqrt{(m-n)}}{\sqrt{m}-\sqrt{(m-n)}}$. Inter numeros autem m et k haec relatio intercedit, ut sit $m = \frac{(k+1)^2}{4k+B(k+1)^2}$, unde fit $n = \frac{4k}{4k+B(k+1)^2}$ et $cos\,\beta = -\frac{(k-1)\sqrt{B}}{\sqrt{(4k+B(k+1)^2)}}$ quae semper est unitate minor ob $k > 1$.

COROLL. 2.

749. Eandem rationem inter cosinus arcuum α et γ constitutam constanter servant cosinus arcuum α et γ: et dum polus O per quadrantem AC transit, ubi fit $\beta = 90^\circ$ est $cos\,\alpha = \frac{\varepsilon}{\vartheta}, \frac{(k+1)\sqrt{A}}{\sqrt{(4k+B(k+1)^2)}}$ at $\vartheta = \varepsilon\sqrt{\left(1+\frac{(k-1)^2}{4k+B(k+1)^2}\right)} = \frac{\varepsilon(k+1)\sqrt{(1+B)}}{\sqrt{(4k+B(k+1)^2)}}$; ergo $cos\,\alpha = \sqrt{\frac{A}{1+B}}$ et $cos\,\gamma = \sqrt{\frac{C}{1+B}}$, seu $cos\,\alpha = \frac{c\sqrt{(bb-cc)}}{\sqrt{(aa-cc)(aa-bb+cc)}}$ et $cos\,\gamma = \frac{a\sqrt{(aa-bb)}}{\sqrt{(aa-cc)(aa-bb+cc)}}$.

COROLL. 3.

750. Dum autem axis gyrationis O per quadrantem AC transit, ejus respectu est momentum inertiae M $(aa\,cos\,\alpha^2 + bb\,cos\,\beta^2 + cc\,cos\,\gamma^2)$ $= \frac{Maacc}{aa-bb+cc}$, quod minus est quam Mbb; atque etiam minus quam fuerat motus initio, ubi erat $= Mbb$. Bm ob $Aaa + Ccc = Bbb$. Erat ergo $= Mbb.\ \frac{B(k+1)^2}{4k+B(k+1)^2} = \frac{Maabbcc(k+1)^2}{4kbb(aa-bb+cc)+aacc(k-1)^2}$.

EXEM-

EXEMPLUM.

751. Coeperit corpus initio gyrari circa polum E in quadrante AC situm, in sensum ABC celeritate angulari $= \varepsilon$, ita ut fuerit $cos\,AE = \sqrt{\frac{A}{B+1}}$ et $cos\,CE = \sqrt{\frac{C}{B+1}}$, posito brevitatis gratia Fig. 95.

$$A = \frac{bbcc}{(aa-bb)(aa-cc)};\quad B = \frac{aacc}{(aa-bb)(bb-cc)};\quad C = \frac{aabb}{(aa-cc)(bb-cc)}.$$

hincque $A + C = B + 1$; ad quem casum solutio generalis deducitur sumendo $k = 1$ et $m = \frac{1}{B+1}$. Iam labente tempore polus gyrationis ex E in alterum quadrantem AbC transibit, existente b polo ipsi B opposito: atque elapso tempore $= t$ min. sec. si capiatur $T = e^{2\varepsilon t : \sqrt{(1+B)}}$, polus gyrationis reperietur in O, ut sit

$$cos\,AO = \frac{2\sqrt{AT}}{\sqrt{(B(1+T)^2+4T)}}, \text{ et } cos\,CO = \frac{2\sqrt{CT}}{\sqrt{(B(1+T)^2+4T)}}$$

ibique celeritas angularis erit $= \frac{\varepsilon\sqrt{(B(1+T)^2+4T)}}{(1+T)\sqrt{(1+B)}}$.

Cum ergo sit

$$\sin AO = \frac{\sqrt{(B(T-1)^2+4CT)}}{\sqrt{(B(1+T)^2+4T)}} \text{ et } \sin CO = \frac{\sqrt{(B(T-1)^2+4AT)}}{\sqrt{(B(1+T)^2+4T)}}$$

erit $cos\,ACO = \frac{2\sqrt{AT}}{\sqrt{(B(T-1)^2+4AT)}}$ et $\sin ACO = \frac{(T-1)\sqrt{B}}{\sqrt{(B(T-1)^2+4AT)}}$

atque $cos\,CAO = \frac{2\sqrt{CT}}{\sqrt{(B(T-1)^2+4CT)}}$ et $\sin CAO = \frac{(T-1)\sqrt{B}}{\sqrt{(B(T-1)^2+4CT)}}$.

Porro est $cos\,bO = \frac{(T-1)\sqrt{B}}{\sqrt{(B(1+T)^2+4T)}}$ et $\sin bO = \frac{2\sqrt{(B+1)}\,T}{\sqrt{(B(1+T)^2+4T)}}$

ideoque $cos\,AbO = \sqrt{\frac{A}{B+1}}$ et $cos\,CbO = \sqrt{\frac{C}{B+1}}$. Cum ergo sit $AbO = AE$ et $CbO = CE$, polus gyrationis O ab E ad b per circulum maximum transfertur, atque dato tempore t percurrit arcum EO ut sit $tang\,EO = \frac{(T-1)\sqrt{B}}{2\sqrt{(b+1)T}}$. Posito ergo hoc arcu confecto $EO = \theta$, ob $tang\,\theta = \frac{(T-1)\sqrt{B}}{2\sqrt{(B+1)T}}$, fit $\sqrt{T} = \frac{\sin\theta\sqrt{(B+1)} + \sqrt{(B + \sin\theta^2)}}{cos\,\theta\sqrt{B}}$ unde ipsum tempus t, quo arcus $EO = \theta$ absolvitur, erit

$t =$

$$t = \frac{\sqrt{(B+\iota)}}{\epsilon} \cdot l \frac{si\theta.\sqrt{(B+1)}+\sqrt{(B+si\theta^2)}}{cos\theta\sqrt{B}}$$

et celeritas angularis, dum polus gyrationis eſt in O, reperitur $= \frac{\epsilon\sqrt{B}}{\sqrt{(B+si\theta^2)}}$. Momentum inertiae reſpectu axis IE eſt $= \frac{M(Aaa+Ccc)}{B+\iota} = \frac{B}{B+\iota}.\ Mbb$, et vis viva $= \frac{B\epsilon\epsilon}{B+\iota}.\ Mbb$, quae perpetuo manet eadem.

SCHOLION.

752. Si initio motus gyratorius fuerit in ſenſum contrarium directus, polus gyrationis ex E per circulum maximum ad polum B accederet, ſcilicet in quadrante AbC poli cognomines contrarium ſenſum praebent, atque in quadrante ABC. Ceterum hoc caſu notatu dignum eſt, quod polus gyrationis O ad alterutrum polorum B vel b continuo propius accedat, atque adeo ſatis cito attingat: ſtatim enim ac numerus $T = e^{2\epsilon t:\sqrt{(\iota+B)}}$ mediocriter fit magnus, quod plerumque mox evenire ſolet, declinatio axis gyrationis IO ab axe Bb non amplius erit ſenſibilis. Hic ergo circulus maximus BEb, qui quadrantem AC ita ſecat in E, ut $ſi\ AE = \sqrt{\frac{C}{B+\iota}}$ et $cof\ AE = \sqrt{\frac{A}{B+\iota}}$ ſeu $tang\ AE = \sqrt{\frac{C}{A}} = \frac{a\sqrt{(aa-bb)}}{c\sqrt{(bb-cc)}}$, hac inſigni praeditus eſt proprietate, ut ſi axis gyrationis ſemel in eo fuerit, in eo perſeveret, ac polus gyrationis ſive ad b ſive ad B accedat, prout gyratio fiat vel in ſenſum ABC vel in contrarium. Videri hinc poſſet, axem gyrationis, quicunque initio fuerit, ſemper tandem in aliquem principalium incidere, niſi in capite praecedente res ſecus eveniſſet. Atque adeo jam demonſtrabo, hunc caſum tractatum ſolum eſſe, quo axis gyrationis tandem cum aliquo principalium eoque medio coaleſcat, in reliquis vero omnibus hoc nunquam, ne elapſo quidem tempore infinito, uſu venire: ad hoc autem neceſſe eſt, ut formulam ſuperiorem integralem diligentius ſcrutemur, valoresque, quos ad quodvis tempus recipit, quodammodo aſſignare valeamus. In quo negotio, cum alia ſubſidia analytica vix plus luminis polliceantur, quam ejus reductio ad arcus ſectionum conicarum, ad ſubſidium quoddam mechanicum confugiamus, motum ſcilicet penduli per circulum; quandoquidem hujus motus determinatio ſimili formula integrali

integrali continetur, hoc tamen non obſtante, qualis hic motus ſit futurus, quodammodo aeſtimare licet.

PROBLEMA. 79.

753. Conceſſa motus determinatione, quo corpus grave ſuper peripheria circuli vel oſcillando vel revolvendo movetur, ad quodvis tempus determinare poſitionem axis gyrationis reſpectu axium principalium, ſi quidem initio datus fuerit axis gyrationis cum celeritate angulari.

SOLUTIO.

Cum tempus determinandum ſit $t = \int \frac{dv\sqrt{ABC}}{2\epsilon\sqrt{(a+Av)(b-Bv)(c+Cv)}}$ Fig. 96.
ſcribendo tantiſper litteras a, b, c pro $cof\,\mathfrak{a}^2$, $cof\,\mathfrak{b}^2$, $cof\,\mathfrak{c}^2$, conſideremus in genere motum gravis per circulum, cujus radius ſit $ca = cb = r$, ubique celeritas tanta ſit, ac ſi corpus ex puncto g eo eſſet delapſum. Ponatur ergo $cg = p$, tum vero initium motus capiatur in e, ut ſit $cd = q$, exiſtente ſcilicet recta gab verticali et de horizontali. Elapſo jam tempore t grave ex e perveniat in z, ut ducta horizontali vz, ſit $dv = kv$, ſiquidem in noſtra formula v eſt numerus abſolutus. Sit tantisper $cv = z$; erit elementum arcus in $z = \frac{rdz}{\sqrt{(rr-zz)}}$, et quia celeritas in z eſt $= 2\sqrt{g}(p+z)$, fiet elementum temporis $dt = \frac{rdz}{2\sqrt{g(p+z)(r-z)(r+z)}}$. Ergo ob $z = kv - q$ habebitur

$$dt = \frac{krdv}{2\sqrt{g(p-q+kv)(r+q-kv)(r-q+kv)}}$$

noſtra autem formula conſtruenda ſimili modo expreſſa eſt:

$$dt = \frac{kdv\sqrt{k}}{2\epsilon\sqrt{\left(\frac{ak}{A}+kv\right)\left(\frac{bk}{B}-kv\right)\left(\frac{ck}{C}+kv\right)}},$$

ad quam illa perducitur ponendo primum $\frac{kr}{2\sqrt{g}} = \frac{k\sqrt{k}}{2\epsilon}$, unde ſit $r = \frac{\sqrt{gk}}{\epsilon}$. Deinde in denominatoribus factores medii aequati praebent $r + q = \frac{bk}{B}$, hincque $q = \frac{bk}{B} - \frac{\sqrt{gk}}{\epsilon}$. Porro factores primi ac

tertii

tertii promiscue aequari possunt: si primus primo ac tertius tertio aequalis statuatur, fit

$$p-q=\frac{ak}{A} \text{ et } p=\frac{ak}{A}+\frac{bk}{B}-\frac{\Gamma gk}{\varepsilon}$$

$$r-q=\frac{ck}{C}, \text{ seu } \frac{2\Gamma gk}{\varepsilon}-\frac{bk}{B}=\frac{ck}{C} \text{ vel } \frac{2\Gamma g}{\varepsilon}=\frac{(Bc+Cb)k}{BC}$$

unde fit $\Gamma k=\frac{2BC\Gamma g}{\varepsilon(Bc+Cb)}$ et $k=\frac{4BBCCg}{\varepsilon\varepsilon(Bc+Cb)^2}$. Hinc porro $r=\frac{2BCg}{\varepsilon\varepsilon(Bc+Cb)}$, $q=\frac{2BC(Cb-Bc)g}{\varepsilon\varepsilon(Bc+Cb)^2}$; $p=\frac{4BBCCag+2ABC(Cb-Bc)g}{A\varepsilon\varepsilon(Bc+Cb)^2}$.

Ad datum ergo tempus t sequenti modo numerus v definitur: descripto circulo cujus radius $ca=cb=\frac{2BCg}{\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2+C\cos b^2)}$ corpus grave per ejus peripheriam ita moveatur, ac si ex puncto g esset delapsum, existente $cg=\frac{4BBCC\cos a^2+2ABC(C\cos b^2-B\cos c^2)}{A\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2+C\cos b^2)^2}g$ seu $bg=\frac{4BCC(A\cos b^2+B\cos a^2)}{A\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2+C\cos b^2)^2}g$ et $ag=\frac{4BBC(C\cos a^2-A\cos c^2)}{A\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2+C\cos b^2)^2}g$.

Tum in hoc circulo capiatur intervallum $cd=\frac{2BC(C\cos b^2-B\cos c^2)}{\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2+C\cos b^2)^2}g$ seu $bd=\frac{4BCCg\cos b^2}{\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2+C\cos b^2)^2}$, sumtoque puncto e pro motus initio, unde corpus per z progrediatur, abscindatur arcus ez tempore proposito t percursus, huicque respondens altitudo dv sit $=u$, qua pro cognita assumta, erit $v=\frac{\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2+C\cos b^2)^2u}{4BBCCg}$, unde deinceps pro superioribus problematibus colligitur celeritas angularis $x=\varepsilon\Gamma(1+v)$, et pro praesente poli gyrationis situ: $\cos\alpha=\frac{\Gamma(\cos a^2+Av)}{\Gamma(1+v)}$; $\cos\beta=\frac{\Gamma(\cos b^2-Bv)}{\Gamma(1+v)}$; $\cos\gamma=\frac{\Gamma(\cos c^2+Cv)}{\Gamma(1+v)}$.

COROLL. 1.

754. Cum sit $dg=cg-cd=p-q=\frac{ak}{A}$, erit altitudo puncti g supra horizontalem de nempe $dg=\frac{4BBCCg\cos a^2}{A\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2+C\cos b^2)}$, quae cum sit necessario positiva, corpus motu suo ad punctum e pertingere potest.

COROLL. 2.

755. Tum vero altitudo bd non solum etiam est positiva, sed etiam minor diametro circuli $ab=\frac{4BCg}{\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2+C\cos b^2)}$: erit enim $ad=\frac{4BBCg\cos c^2}{\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2+C\cos b^2)^2}$, unde punctum e, ex quo motus initium ducimus, semper certo in peripheria circuli reperitur.

COROLL. 3.

756. Cum igitur grave certo ex e ad imum punctum b descendat, ubi fit $u=bd=\frac{4BCCg\cos b^2}{\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2+C\cos b^2)^2}$, qui ejus est valor maximus positivus, hoc tempore erit $v=\frac{\cos b^2}{B}$, et $x=\frac{\varepsilon\Gamma(B+\cos b^2)}{\Gamma B}$, quae est celeritas angularis maxima, fietque tum $\cos\beta=0$, hoc est, polus gyrationis per quadrantem AC transit.

SCHOLION.

757. Cum igitur polus gyrationis, ubicunque initio fuerit, semper post aliquod tempus transeat per quadrantem AC, ubi celeritas angularis est maxima, hoc tempus tanquam motus initium spectare licebit, quandoquidem hinc etiam ad tempora antecedentia regredi valemus. Fuerit igitur initio polus gyrationis in quadrantis puncto E, ut sit AE $=\mathfrak{a}$ et CE $=\mathfrak{c}=90^\circ-\mathfrak{a}$, atque celeritas angularis $=\varepsilon$ in sensum ABC. Postea ergo polus gyrationis in sphaerae octantem AbC transibit, cum ante versatus sit in octante ABC: ubi notandum est, contrarium esse eventurum, si motus gyratorius in sensum contrarium dirigeretur. Hic autem duo casus considerandi occurrunt, prout in motu circulari punctum g vel supra circulum cadit, graveque integras revolutiones absolvit, vel intra circulum, graveque oscillationes peragit. Prius evenit, si fuerit $C\cos\mathfrak{a}^2 > A\cos\mathfrak{c}^2$, posterius vero, si $C\cos\mathfrak{a}^2 < A\cos\mathfrak{c}^2$. Ad hos casus distinguendos capiatur in quadrante AC punctum Fig. 97.

ctum D, ut fit $C \cos AD^2 = A \cos CD^2$, feu $\sin AD = \sqrt{\frac{C}{A}}$; eritque D id punctum, per quod fi polus gyrationis tranfeat, is per quadrantem Db polum principalem b verfus accedat, eoque tandem elapfo tempore infinito pertingat, quem cafum jam ante evolvimus. Sin autem polus gyrationis per quadrantem AC intra terminos A et D tranfeat, habebitur cafus prior, quo $C \cos \mathfrak{a}^2 > A \cos \mathfrak{c}^2$; at fi intra terminos C et D tranfeat, habebitur cafus pofterior, quo $C \cos \mathfrak{a}^2 < A \cos \mathfrak{c}^2$. Hos igitur duos cafus feorfim pertractemus.

CASUS I.

Fig. 97. 758. Tranfeat polus gyrationis per quadrantis AC punctum E, circa quem corpus celeritate angulari ε in fenfum ABC gyretur, ut fit $C \cos AE^2 > A \cos CE^2$ feu $\tang AE > \sqrt{\frac{C}{A}}$; unde elapfo tempore t progrediatur in O, quem locum definiri oportet. Cum igitur fit $AE = \mathfrak{a}$, $CE = \mathfrak{c} = 90° - \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b} = 90°$, defcribatur circulus $azez'$, cujus radius $ca = ce = \frac{2Cg}{\varepsilon\varepsilon \cos \mathfrak{c}^2}$, et in diametro verticali ea furfum producto capiatur $ag = \frac{4C(C\cos \mathfrak{a}^2 - A\cos \mathfrak{c}^2)}{A\varepsilon\varepsilon \cos \mathfrak{c}^4} g$, graveque ex hoc puncto g delapfum per circulum revolvatur, in fenfum $az'ez$, initioque, dum polus gyrationis erat in E, grave per punctum imum e tranfeat. Iam elapfo tempore t grave afcendat ad z usque, fitque altitudo $ev = u$, eritque $v = -\frac{\varepsilon\varepsilon u \cos \mathfrak{c}^4}{4CCg}$. Polus autem gyrationis nunc fit in O, et celeritas angularis circa eum erit $\mathfrak{s} = \varepsilon \sqrt{\left(1 - \frac{\varepsilon\varepsilon u \cos \mathfrak{c}^4}{4CCg}\right)}$, et pro loco puncti O erit

$$\cos AO = \frac{\varepsilon}{\mathfrak{s}} \sqrt{\left(\cos \mathfrak{a}^2 - \frac{A\varepsilon\varepsilon u \cos \mathfrak{c}^4}{4CCg}\right)}; \quad \cos bO = \frac{\varepsilon}{\mathfrak{s}} \cdot \frac{\varepsilon \cos \mathfrak{c}^2 \sqrt{Bu}}{2C\sqrt{g}}$$

$$\text{et } \cos CO = \frac{\varepsilon}{\mathfrak{s}} \sqrt{\left(\cos \mathfrak{c}^2 - \frac{\varepsilon\varepsilon u \cos \mathfrak{c}^4}{4Cg}\right)}.$$

Tum vero ex motu gravis per circulum ifochrono motui poli gyrationis,

nis, fi ponamus tempus dimidiae revolutionis $= \tau$, quo grave ex e ad punctum fummum a afcendit, ob $u = \frac{4Cg}{\varepsilon\varepsilon \cos \mathfrak{c}^2}$, habebimus $v = -\frac{\cos \mathfrak{c}^2}{C}$, et poft tempus τ erit celeritas angularis $\mathfrak{s} = \varepsilon \sqrt{\left(1 - \frac{\cos \mathfrak{c}^2}{C}\right)}$, omnium minima: polus autem gyrationis tum erit in P, ut fit

$$\cos AP = \frac{\varepsilon}{\mathfrak{s}} \sqrt{\left(\cos \mathfrak{a}^2 - \frac{A\cos \mathfrak{c}^2}{C}\right)}; \quad \cos bP = \frac{\varepsilon \cos \mathfrak{c}}{\mathfrak{s}} \sqrt{\frac{B}{C}} \text{ et } \cos CP = 0$$

unde polus P reperietur in quadrante Ab, ut fit $\cos bP = \sin AP = \frac{\cos \mathfrak{c} \sqrt{B}}{\sqrt{(C - \cos \mathfrak{c}^2)}} = \frac{\sin \mathfrak{a} \sqrt{B}}{\sqrt{(C - \sin \mathfrak{a}^2)}}$ et $\cos AP = \frac{\sqrt{(C\cos \mathfrak{a}^2 - A\sin \mathfrak{a}^2)}}{\sqrt{(C - \sin \mathfrak{a}^2)}}$. Elapfo autem tempore 2τ, quo fit $u = 0$, celeritas angularis $\mathfrak{s}$ fit ut initio $= \varepsilon$, et polus gyrationis jam reperietur in quadrantis CA producti puncto e, ut fit $Ae = AE$. Elapfo tempore 3τ perveniet polus gyrationis in p, ut fit $Ap = AP$ ac tempore 4τ elapfo revertetur in E. Polus ergo gyrationis circa polum principalem A orbitam quafi ellipticam defcribet, et tempus unius revolutionis aequale erit tempori, quo grave in circulo duas integras abfolvit revolutiones. Hic notari convenit, fi punctum E in D incideret, punctum P in b effe cafurum ob $\cos AP = 0$, tum autem foret $ag = 0$, et tempus femirevolutionis in circulo τ fieret infinitum, quemadmodum jam fupra habuimus. Porro autem fit $AP = AE$, fi $B = \infty$, et $C = \infty$ feu $bb = cc$, hoc eft, fi momenta inertiae refpectu axium IB et IC funt aequalia, qui eft cafus capite praecedente pertractatus.

CASUS II.

759. Tranfeat polus gyrationis per quadrantis AC punctum E, circa quem tum corpus celeritate angulari ε in fenfum ABC gyretur, ut fit $C \cos AE^2 < A \cos CE^2$ feu $\tang AE < \sqrt{\frac{C}{A}}$, unde elapfo tempore t progrediatur in O. Cum igitur fit $\mathfrak{b} = 90°$, $AE = \mathfrak{a}$ et $CE = 90° - \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$, defcribatur circulus $azez'$ diametro $ae = \frac{4Cg}{\varepsilon\varepsilon \cos \mathfrak{c}^2}$, et capiatur $ag = \frac{4C(A\cos \mathfrak{c}^2 - C\cos \mathfrak{a}^2)}{A\varepsilon\varepsilon \cos \mathfrak{c}^4} g$, ut fit $eg = \frac{4CC\cos \mathfrak{a}^2}{A\varepsilon\varepsilon \cos \mathfrak{c}^4} g$. Ducta igitur horizontali fgf', grave peragat ofcillationes per arcum fef', fumaturque temporis punctum, quo grave ex f' defcendens tranfit per imum punctum e, pro temporis initio, unde elapfo tempore t perveniat in Fig. 98.

in z, et poſita altitudine $ev = u$, erit $v = \frac{-\epsilon\epsilon u \cos c^4}{4CCg}$, hocque tempore celeritas angularis circa polum O erit $\mathfrak{u} = \epsilon\sqrt{\left(1 - \frac{\epsilon\epsilon u \cos c^4}{4CCg}\right)}$, et ut ante

$$\cos AO = \frac{\epsilon}{\mathfrak{u}}\sqrt{\left(\cos a^2 - \frac{A\epsilon\epsilon u \cos c^4}{4CCg}\right)};\quad \cos bO = \frac{\epsilon}{\mathfrak{u}}.$$

$$\frac{\epsilon \cos c^2 \sqrt{Bu}}{2C\sqrt{g}}$$

et $\cos CO = \frac{\epsilon}{\mathfrak{u}}\sqrt{\left(\cos c^2 - \frac{\epsilon\epsilon u \cos c^4}{4Cg}\right)}$. Sit τ tempus dimidiae oſcillationis ſeu aſcenſus per ef, atque hoc tempore elapſo, ob $u = eg = \frac{4CC\cos a^2}{A\epsilon\epsilon\cos c^4}g$ et $v = \frac{-\cos a^2}{A}$, erit celeritas angularis $\mathfrak{u} = \epsilon\sqrt{\left(1 - \frac{\cos a^2}{A}\right)}$, polusque gyrationis reperitur in P, ut ſit

$$\cos AP = \frac{\epsilon}{\mathfrak{u}}.0;\quad \cos bP = \frac{\epsilon\cos a\sqrt{B}}{\mathfrak{u}\sqrt{A}} = \frac{\cos a\sqrt{B}}{\sqrt{(A - \cos a^2)}} \text{ et}$$

$$\cos CP = \frac{\epsilon}{\mathfrak{u}}\sqrt{\left(\cos c^2 - \frac{C\cos a^4}{A}\right)} = \frac{\sqrt{(A\cos c^2 - C\cos a^2)}}{\sqrt{(A - \cos a^2)}}$$

unde patet polum gyrationis eſſe in quadrante Cb, exiſtente $\sin CP = \frac{\cos a\sqrt{B}}{\sqrt{(A - \cos a^2)}} = \frac{\sin c.\sqrt{B}}{\sqrt{(A - \sin c^2)}}$. Capiatur nunc in quadrante AC producto $Ce = CE$ et $Cp = CP$, eritque orbis ellipticus $EPepE$ via poli gyrationis, cujus ſinguli quadrantes EP, Pe, ep, pE, &c. tempore τ abſolvuntur.

Si eſſet $aa = bb$, foret $A = \infty$, $B = \infty$ et $CP = CE$, polusque gyrationis circulum minorem circa axem principalem IC, qui eſſet ſingularis, deſcriberet; qui eſt caſus capite praecedente tractatus. At ſi E in D caderet, ob $ag = 0$, foret $\tau = \infty$, qui eſt caſus problematis praecedentis.

SCHOLION.

760. Cum igitur ſatis clare intelligamus, quomodo variatio in polo gyrationis eveniat, cum is vel circa polum principalem A vel circa C circumferatur, in orbita quaſi elliptica, prout fuerit vel $\tang AE > \sqrt{\frac{C}{A}}$ vel $\tang AE > \sqrt{\frac{C}{A}}$, atque adeo ejus locum ad quodvis tempus conceſſa integratione formulae differentialis aſſignare liceat; videamus, num etiam ejus locum abſolutum ad quodvis tempus ſimulque poſitionem axium principalium definire valeamus. Equidem non ſine ſucceſſu hoc negotium in ſuperiore capite expedivimus. Verum hic multo majores difficultates offendemus, quas ne conceſſis quidem quadraturis ſuperare poterimus, cum res ad ejusmodi aequationes differentiales reducatur, quae non ſolum non integrari, ſed ne ad ſeparabilitatem quidem variabilium revocari queant.

PROBLEMA. 80.

761. Si corpori rigido cuicunque initio impreſſus fuerit motus gyratorius circa axem per centrum inertiae tranſeuntem quemcunque, ad datum tempus tam ſitum axium principalium quam axis gyrationis reſpectu ſpatii abſoluti definire. Fig. 89.

SOLUTIO.

In ſphaera immobili centro inertiae corporis deſcripta, poſt tempus $= t$ corpus nunc ſitum teneat, ut axium principalium poli ſint in A, B, C, eorumque reſpectu momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc. Tum ſumto puncto Z et circulo XZ fixo, ſtatuantur arcus $ZA = l$, $ZB = m$, $ZC = n$, atque anguli $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$, $XZC = \nu$: manentibus pro polo gyrationis O arcubus $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$, qui cum celeritate angulari $\mathfrak{u}$ nunc per tempus t dantur. His poſitis ex probl. 68. nanciſcimur:

$$dl \sin l = \mathfrak{u}dt\,(\cos\beta\cos n - \cos\gamma\cos m);\quad d\lambda \sin l^2 = -\mathfrak{u}dt\,(\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n)$$

$$dm \sin m = \mathfrak{u}dt\,(\cos\gamma\cos l - \cos\alpha\cos n);\quad d\mu \sin m^2 = -\mathfrak{u}dt\,(\cos\gamma\cos n + \cos\alpha\cos l)$$

$$dn \sin n = \mathfrak{u}dt\,(\cos\alpha\cos m - \cos\beta\cos l);\quad d\nu \sin n^2 = -\mathfrak{u}dt\,(\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m).$$

Praecipuum autem opus hic in inveſtigatione arcuum l, m, n conſiſtit, qui cum ita ſint comparati, ut ſit $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$, ponatur: $\cos m = \sin l \cos\Phi$ erit $\cos n = \sin l \sin\Phi$, eruntque tres aequationes:

I. $dl = \mathfrak{u}dt\,(\cos\beta\sin\Phi - \cos\gamma\cos\Phi)$

II. $-dl\cos l\cos\Phi + d\Phi\sin l\sin\Phi = \mathfrak{u}dt\,(\cos\gamma\cos l - \cos\alpha\sin l\sin\Phi)$

III. $-dl\cos l\sin\Phi - d\Phi\sin l\cos\Phi = \mathfrak{u}dt\,(\cos\alpha\sin l\cos\Phi - \cos\beta\cos l)$

unde II. $\sin\Phi$ — III. $\cos\Phi$ praebet:

$$d\phi \sin l = u\,dt\,(\cos\gamma \cos l \sin\phi - \cos\alpha \sin l + \cos\beta \cos l \cos\phi)$$

ex qua cum prima conjuncta binos arcus l et ϕ quaeri oportet. Posito autem $u = \varepsilon\sqrt{(1+v)}$ et pro statu initiali brevitatis gratia $\cos a^2 = \mathfrak{A}$, $\cos b^2 = \mathfrak{B}$; $\cos c^2 = \mathfrak{C}$, ut sit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 1$, vidimus esse

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{\mathfrak{A}+Av}{1+v}};\ \cos\beta = \sqrt{\frac{\mathfrak{B}-Bv}{1+v}};\ \cos\gamma = \sqrt{\frac{\mathfrak{C}+Cv}{1+v}}$$

et $2\varepsilon dt = \dfrac{dv\sqrt{ABC}}{\sqrt{(\mathfrak{A}+Av)(\mathfrak{B}-Bv)(\mathfrak{C}+Cv)}}$, positis

$$A = \frac{bbcc}{(aa-bb)(aa-cc)};\ B = \frac{aacc}{(aa-bb)(bb-cc)};\ C = \frac{aabb}{(aa-cc)(bb-cc)}\ \text{et}\ D = \frac{aabbcc}{(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)}$$

ubi quidem sumimus esse $aa > bb$ et $bb > cc$.

Ponamus $\cos\beta = \sin\alpha \cos T$ et $\cos\gamma = \sin\alpha \sin T$, fietque $v = \dfrac{\mathfrak{B}-(1-\mathfrak{A})\cos T^2}{B+(1-A)\cos T^2}$ et $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}A+(\mathfrak{A}-A)\cos T^2}{\mathfrak{B}+B+(\mathfrak{A}-A)\cos T^2}}$, ergo

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{\mathfrak{B}C+\mathfrak{C}B}{\mathfrak{B}+B+(\mathfrak{A}-A)\cos T^2}}\ \text{atque}\ u = \varepsilon\sqrt{\frac{\mathfrak{B}+B+(\mathfrak{A}-A)\cos T^2}{B+(1-A)\cos T^2}}$$

tum vero

$$\varepsilon dt = \frac{D\,dT}{\sqrt{(B\sin T^2+C\cos T^2)((\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}A)\sin T^2+(\mathfrak{A}C-\mathfrak{C}A)\cos T^2)}}$$

Unde nostrae aequationes resolvendae erunt;

$$dl = u\,dt \sin\alpha \sin(\phi - T)$$
$$d\phi \sin l = u\,dt \sin\alpha \cos l \cos(\phi - T) - u\,dt \cos\alpha \sin l$$

ubi est

$$u\,dt \sin\alpha = \frac{D\,dT\sqrt{(\mathfrak{B}C+\mathfrak{C}B)}}{(B\sin T^2+C\cos T^2)\sqrt{((\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}A)\sin T^2+(\mathfrak{A}C-\mathfrak{C}A)\cos T^2)}}.$$

$$u\,dt \cos\alpha = \frac{D\,dT}{B\sin T^2+C\cos T^2}.$$

Statuamus nunc $\phi - T = \omega$, ut habeatur

$$dl = u\,dt \sin\alpha \sin\omega \ \text{et}\ d\omega \sin l + dT \sin l = u\,dt \sin\alpha \cos l \cos\omega - u\,dt \cos\alpha \sin l$$

quarum posterior abit in

$$d\omega \sin l \sin\omega - dl \cos l \cos\omega + dT \sin l \sin\omega + \frac{D\,dT \sin l \sin\omega}{B\sin T^2 + C\cos T^2} = 0$$

dum prior est

dl

$$dl = \frac{D\,dT \sin\omega \sqrt{(\mathfrak{B}C+\mathfrak{C}B)}}{(B\sin T^2+C\cos T^2)\sqrt{((\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}A)\sin T^2+(\mathfrak{A}C-\mathfrak{C}A)\cos T^2)}}.$$

Ponamus brevitatis gratia:

$$1 + \frac{D}{B\sin T^2 + C\cos T^2} = P\ \text{et}$$

$$\frac{D\sqrt{(\mathfrak{B}C+\mathfrak{C}B)}}{(B\sin T^2+C\cos T^2)\sqrt{((\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}A)\sin T^2+(\mathfrak{A}C-\mathfrak{C}A)\cos T^2)}} = Q$$

quoniam P et Q sunt functiones cognitae ipsius T, nostrae aequationes resolvendae has induunt formas simpliciores.

$$d.\sin l \cos\omega = P\,dT \sin l \sin\omega\ \text{et}\ dl = Q\,dT \sin\omega$$

Ponamus denique $\sin l \cos\omega = x$, et $\cos l = y$, erit $\sin l \sin\omega = \sqrt{(1-xx-yy)}$ et nostrae aequationes erunt

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-xx-yy)}} = P\,dT\ \text{et}\ \frac{dy}{\sqrt{(1-xx-yy)}} = -Q\,dT.$$

Verum hic fateri cogor, ulterius me hanc resolutionem prosequi non posse; neque ergo hoc problema ad finem perducere licet. *)

SCHOLION. 1.

762. Casu praecedentis capitis, quo erat $B = \infty$ et $C = \infty$ atque adeo $\frac{B}{C} = 1$, ob $A - B + C = 1$, aequationes inventas ideo resolvere licuit, quod quantitates P et Q fiebant constantes, scilicet $P = 1 + \frac{D}{B} = 1 + \frac{bb}{aa-bb} = \frac{aa}{aa-bb}$, ob $bb = cc$ et $Q = \frac{D\sqrt{(\mathfrak{B}+\mathfrak{C})}}{B\sqrt{\mathfrak{A}}} = \frac{bb\sqrt{(1-\mathfrak{A})}}{(aa-bb)\sqrt{\mathfrak{A}}}$; unde $dx : dy = aa : -bb\sqrt{\frac{1-\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}} = P : -Q$. Ergo $dx = -\frac{P\,dy}{Q}$ et $x = \text{Const.} - \frac{Py}{Q}$. Verum hic ratio $P : Q$ constans evadere nequit, ideoque non liquet, quomodo aequationibus inventis satisfieri queat, ne quidem particulariter. Quare cum talium corporum motus calculo sit intractabilis, quousque scilicet fines analyseos adhuc patent, hoc argumentum deserere cogimur, cum etiam conatus irritos proposuisse nihil luminis afferre queat. Quod autem ad rationem mechanicam attinet, motum corporum rigidorum liberum, dum a nullis viribus sollicitantur, perfecte determinasse censendi sumus,

cum

*) Plena solutio in fine adjicietur.

cum Analyſeos defectui ſit tribuendum, quod ſolutionem ad finem perducere non valuerimus. Haec autem difficultas ſe tantum in corporibus, quorum tria momenta inertiae principalia ſunt inter ſe inaequalia, exerit; quae corpora cum ſint pro maxime irregularibus habenda, hoc incommodum, ubi ad praxin deſcendimus, minus obeſt, quoniam rariſſime ejuſmodi corporum motus requiri ſolet. Quando autem duo momenta principalia ſunt inter ſe aequalia, inveſtigatio motus proſpero ſucceſſu eſt abſoluta, ut nihil deſiderari queat.

SCHOLION. 2.

763. Expoſitis ergo, quae ad motum corporum rigidorum liberum, remotis viribus externis, pertinent, ordo poſtulat, ut jam in effectum virium inquiramus; ad quod etiam ſupra fundamenta ſunt jacta, ubi quarumvis virium effectus momentaneos determinavimus. Dum autem motus perennes tractare inſtituimus, ejuſmodi caſus eligere debemus, quibus vires ſollicitantes non per corporis centrum inertiae tranſeunt, quales Aſtronomia offert. Quoniam autem eorum evolutio majorem Aſtronomiae cognitionem requirit, quam hic ſupponere licet, in terra ſubſiſtamus, atque ejuſmodi motus contemplemur, in quibus motus gyratorius circa axem variabilem occurrat, quandoquidem motus magis regulares nihil habent difficultatis. Hic primum ſe nobis offert Theoria turbinum, cujus explicatio ob continuam axis gyrationis mutationem adhuc maximis tenebris fuit involuta. Quod argumentum ut initio a gravioribus difficultatibus liberem, axem turbinis ſuper plano horizontali politiſſimo incedere aſſumam, ne frictioni ullus locus relinquatur, tum vero axem infra in cuſpidem deſinentem ſtatuam, qua ſuper plano horizontali ingreditur. Duo autem genera turbinum conſtituam, prout vel omnia ejus momenta inertiae principalia fuerint inter ſe aequalia, vel duo duntaxat: ſi enim omnia eſſent inaequalia, haec hypotheſis non ſolum figurae turbinum adverſaretur, ſed etiam vires calculi ſuperaret.

CAPUT

CAPUT XIV.

DE MOTU TURBINUM SUPER PLANO HORIZONTALI, IN QUIBUS OMNIA MOMENTA INERTIAE SUNT INTER SE AEQUALIA.

DEFINITIO. 13.

764. *Turbo* eſt corpus rigidum haſta inferius acuminata per centrum inertiae trajectum, quae ſimul cum axe aliquo principali corporis conveniat.

EXPLICATIO.

765. Hujuſmodi turbo eſt ABbD, in quo AD haſtam, et Bb corpus trajectum refert, ut haſta cum corpore unum corpus rigidum conſtituere ſit cenſenda; ubi quidem haſta non ſolum per totius corporis centrum inertiae I tranſit, ſed etiam axem principalem corporis exhibet. Haſtam quidem infra in D in cuſpidem acutiſſimam deſinere aſſumo, qua turbo conſtanter plano horizontali inſiſtat, et ſuper eo incedat; hic enim alios motus non proſequor, niſi quamdiu turbo ſola cuſpide D planum horizontale contingit. Statim enim ac turbo procumbit, ejus motus ad aliud genus eſt referendus, quod cum turbini non amplius ſit proprium, hic non attingo. Id ergo hic aſſumo, rectam a cuſpide D per centrum inertiae I ductam ſimul eſſe corporis totius ex haſta et maſſa Bb conſtantis axem principalem, quae ſola linea in computum ingredietur, cum praeterea nihil interſit, quomodo haſta cum maſſa reliqua ſit conjuncta. Tum vero in hoc capite totum turbinis corpus ita comparatum aſſumo, ut momenta inertiae reſpectu ejus axium principalium ſint inter ſe aequalia, ideoque omnes rectae per ejus centrum inertiae I ductae pro axibus principalibus haberi queant. Planum denique hic laevigatiſſimum aſſumo, ut cuſpis D ſuper eo ſine ulla frictione incedere poſſit, ubi etiam mentem ab aeris reſiſtentia, omnibusque motus obſtaculis abſtraho, ad ſolam vim gravitatis reſpiciens. Tabula XIV. Fig. 99.

SCHOLION.

766. De tali ergo turbine primum obſervo, ſi cuſpide ſua D plano horizontali ita inſiſtat, ut recta DI ſit verticalis, cum in hoc ſitu conſtanter

ſtanter perſeverare poſſe, etiamſi vel minimum inclinatus procidat. Tum vero etiam, quia nulla adeſt frictio, in hoc ſitu verticali uniformiter in directum progredi poterit, quamquam experientia nunquam propter frictionem conſentiet. Deinde quia recta DIA eſt axis principalis, ſi ea fuerit verticalis, corpusque circa eam motum gyratorium quemcunque acceperit, hunc perpetuo uniformem conſervabit, manente recta DIA immota ideoque verticali: neque hic gravitas quicquam turbabit in motu, ſed tota ad turbinem in cuſpide D ad planum horizontale apprimendum impendetur. Statim autem atque hic axis AD vel minimum inclinari coeperit; gravitas motum turbabit, turbinemque ſubvertere tendet; ad quem effectum explorandum ſimul ad vim, qua cuſpis D plano horizontali apprimitur, reſpici oportet. Quanquam autem haec vis eſt ignota, atque ab omnibus motus circumſtantiis pendet, tamen certum eſt, ejus directionem ſemper eſſe verticalem, ab eaque eundem effectum oriri, ac ſi turbo in puncto D verticaliter ſurſum a pari vi pelleretur: ipſa vero vis ſemper tanta eſſe debet, ut cuſpis D perpetuo plano horizontali maneat applicata, ex qua conditione ejus quantitas ad quodvis tempus eſt elicienda. Sin autem haec vis ut cognita ſpectetur, motus centri inertiae I turbinis, nullo reſpectu ad ejus motum gyratorium habito, definiri poterit, id quod in ſequente problemate expediamus.

PROBLEMA. 81.

767. Si ad quodvis tempus cognita fuerit preſſio cuſpidis in planum horizontale, determinare motum centri inertiae turbinis.

SOLUTIO.

Fig. 100. Ad datum tempus elapſum $= t$, teneat axis turbinis AID ſitum quemcunque inclinatum, faciens cum horizontali DF angulum FDA $= \theta$: ubi cuſpis premat planum horizontale vi $= P$: quod idem eſt, ac ſi cuſpis D ſollicitaretur ſurſum ſecundum directionem verticalem vi DP $= P$; maſſa autem idemque pondus totius turbinis ſit $= M$. Iam quia tantum motum centri inertiae I quaerimus, ſine ullo reſpectu ad motum gyratorium habito, ejus motus perinde afficietur, ac ſi tota turbinis maſſa M in puncto I collecta, eique vires ſollicitantes ſecundum ſuam quaeque directionem applicatae eſſent. Habebimus igitur in I maſſam $= M$, ſollicitatam a duabus viribus, altera gravitate $= M$ verticaliter ſecundum IX deorſum, altera vi $= P$ verticaliter ſurſum ſecundum IQ; ex quibus vis deorſum ſecundum IX ſollicitans exoritur $= M - P$. Cum ergo nulla adſit vis horizontaliter urgens, niſi centrum inertiae I initio acceperit motum horizontalem, tantum vel ſurſum vel deorſum in recta verticali XQ feretur: ſin autem initio acceperit motum horizontalem, eundem praeterea intemeratum conſervabit. Ponamus ergo diſtantiam DI $= f$, erit altitudo IX $= f \sin\theta$, unde centri inertiae I celeritas ſurſum vergens erit $= \frac{f\,d\theta\cos\theta}{dt}$, ſumtoque elemento temporis dt conſtante, ob vim ſollicitantem deorſum $= M - P$, habebimus $\frac{f(dd\theta\cos\theta - d\theta^2\sin\theta)}{dt} = \frac{-2g(M-P)\,dt}{M}$ ſeu $dd\theta\cos\theta - d\theta^2\sin\theta = \frac{2g}{f}\left(\frac{P}{M}-1\right)dt^2$. Quare ſi vis P ad quodvis tempus t fuerit data, erit integrando:

$$d\theta\cos\theta = \frac{2g}{f}dt\int dt\left(\frac{P}{M}-1\right) \text{ et } \sin\theta = \frac{2g}{f}\int dt\int dt\left(\frac{P}{M}-1\right),$$

ubi $f\sin\theta = 2g\int dt\int dt\left(\frac{P}{M}-1\right)$ altitudinem IX centri inertiae et $\frac{f\,d\theta\cos\theta}{dt} = 2g\int dt\left(\frac{P}{M}-1\right)$ celeritatem ejus ſurſum directam exprimit.

COROLL. 1.

768. Si ergo ad quodvis tempus noſſemus preſſionem P, qua axis turbinis plano horizontali innititur, motum centri inertiae ſeu ejus locum ad quodvis tempus aſſignare, indeque inclinationem axis ad horizontem ſeu angulum FDA $= \theta$ definire poſſemus.

COROLL. 2.

769. Si turbini initio ſolus motus gyratorius imprimatur, ut centrum inertiae I manſerit in quiete per punctum ſaltem temporis, tum deinceps quomodocunque axis gyrationis varietur, indeque axis turbinis AD inclinetur, centrum inertiae alium motum non recipiet, niſi verticaliter vel ſurſum vel deorſum directum.

COROLL. 3.

770. Sin autem turbini ſimul motus progreſſivus fuerit impreſſus, motum horizontalem inde ortum conſtanter conſervabit uniformem, et in directum progredientem, quocum motus prior verticalis erit conjunctus.

SCHOLION.

771. Motus ergo centri inertiae in turbine nulla laborat difficultate, si modo pressio cuspidis D in planum horizontale ad quodvis tempus assignari posset. Verum in hoc ipso summa sita est difficultas, cum ab hac pressione oriatur momentum ad turbinem circa quempiam axem convertendum tendens, ex quo nisi turbo jam circa hunc ipsum axem gyretur, axis gyrationis variabitur, unde etiam turbinis inclinatio ad horizontem mutationem patietur. Ista vero inclinationis mutatio convenire debet cum ea, quam pressio P assumta producit, atque ex hac convenientia ipsa haec pressio determinari debet, in qua investigatione vis universae Theoriae turbinum est constituenda. Quo igitur facilius ad hunc scopum pertingamus, turbinem in situ quocunque inclinato et circa axem per centrum inertiae ductum gyrantem consideremus, atque inquiramus, quantam mutationem tam axis gyrationis, quam celeritas angularis a pressione, qua cuspis plano horizontali insistit, sit passura.

PROBLEMA. 82.

772. Dum turbo utcunque gyratur, si detur pressio, qua cuspis plano horizontali innititur, determinare variationem momentaneam, tam in axe gyrationis, quam celeritate angulari productam.

SOLUTIO.

Fig. 100. Sit inclinatio turbinis ad horizontem seu angulus $FDA = \theta$, et pressio in $D = P$, qua punctum D sursum urgetur. Quoniam in corpore omnia momenta inertiae sunt aequalia, haec vis $DP = P$ tendet turbinem, si quiesceret, convertere circa axem per centrum inertiae I transeuntem et ad planum ADF normalem. Quare posito momento inertiae turbinis circa omnes axes $= Maa$, et distantia $ID = f$, erit momentum vis DP respectu illius axis $= Pf \cos\theta$; ideoque tempusculo dt turbo circa illum axem vertetur per angulum elementarem $d\omega = \frac{Pfg\,dt^2 \cos\theta}{Maa}$. Cum autem turbo jam habeat motum gyratorium, iterum omnia ad superficiem sphaericam centro inertiae corporis descriptam referamus, in qua sit punctum Z quasi zenith, et A superior terminus axis turbinis, erit arcus $ZA = 90° - \theta$, quem supra vocavimus $= l$; nunc autem ejusmodi teneat situm turbo, ut alii bini axes in eo fixi et ad AID normales sint in B et D. Etsi enim hic omnium axium par est ratio, tamen in corpore ternos axes inter se normales concipi con-

convenit, ut ex iis situs turbinis definiatur. Erunt ergo AB, AC, BC quadrantes, ponaturque angulus $ZAB = \zeta$: tum vero turbo jam gyretur circa axem IO celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ABC, voceturque arcus $AO = \alpha$, $BO = 6$ et $CO = \gamma$, ut sit $\cos BAO = \frac{\cos 6}{\sin\alpha}$ et $\sin BAO = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$. Ducatur nunc quadrans AS ad arcum ZA normalis, erit IS axis ille ad planum verticale, in quo axis turbinis AID versatur, normalis, circa quem a vi P generatur conversio per angulum $d\omega = \frac{Pfg\,dt^2 \cos\theta}{Maa}$ in sensum BAC illi sensui ABC contrarium: quae mutatio nisi accederet, turbo circa axem IO, quia principalis proprietate gaudet, gyrari pergeret. Ob illam igitur vim jam gyrari incipiet circa polum o in arcu OS ultra O situm. Quare si in figura hoc punctum o versus S notetur, posito arcu $OS = s$, et secundum problema 62. statuatur $q = \frac{Pfg \cos\theta}{Maa}$, colligetur inde arculus $Oo = \frac{-2q\,dt \sin s}{\varepsilon} = \frac{-2Pfg\,dt \cos\theta \sin s}{Maa\varepsilon}$, et celeritas angularis ε decrementum capiet $= 2q\,dt \cos s = \frac{2Pfg\,dt \cos\theta \cos s}{Maa}$, ut sit $d\varepsilon = \frac{-2Pfg\,dt \cos\theta \cos s}{Maa}$. Ad mutationem autem poli gyrationis O in o factam commodius exprimendam, cum sit angulus $ZAB = \zeta$, erit angulus $BAS = 90 - \zeta$, deinde vocetur angulus $BAO = \eta$, ut sit $\cos\eta = \frac{\cos 6}{\sin\alpha}$ et $\sin\eta = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$, in triangulo OAS habemus $AO = \alpha$, $AS = 90°$ et $OAS = 90° - \zeta - \eta$: unde reperitur $\cos OS = \cos s = \sin(\zeta + \eta) \sin\alpha$, et producto arcu AO in p, coque ex o demisso perpendiculo op, $\cos o\,Op = \frac{\sin(\zeta + \eta) \cos\alpha}{\cos(\zeta \pm \eta)}$. Cum

nunc sit $Oo = \frac{-2Pfg\,dt \cos\theta \sin s}{Maa\varepsilon}$

erit $Op = d\alpha = \frac{-2Pfg\,dt \cos\theta}{Maa\varepsilon} \sin s \cos o\,Op$

et

et $op = \frac{-2Pfg\,dt\cos\theta}{Maaz}$, $\sin s\sin o\,Op = d\eta\sin\alpha$.

At eſt $\sin s\sin o\,Op = \cos(\zeta+\eta)$ et $\sin s\cos o\,Op = \sin s\sin o\,Op\cot o\,Op = \sin(\zeta+\eta)\cos\alpha$. Ex his ergo reperitur

$$dz = \frac{-2Pfg\,dt\cos\theta}{Maa}\sin\alpha\sin(\zeta+\eta)$$

$$d\alpha = \frac{-2Pfg\,dt\cos\theta}{Maaz}\cos\alpha\sin(\zeta+\eta) \text{ et } d\eta = \frac{-2Pfg\,dt\cos\theta}{Maaz}\cdot\frac{\cos(\zeta+\eta)}{\sin\alpha},$$

ſicque tam variatio axis gyrationis in turbine, quam celeritatis angularis z eſt definita.

COROLL. 1.

773. Eſt ergo $dz : d\alpha = \sin\alpha : \frac{\cos\alpha}{z}$, unde fit $\frac{dz}{z} = \frac{d\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha}$, et integrando $z = \frac{\varepsilon\cos\mathfrak{a}}{\cos\alpha}$, ſiquidem initio fuerit celeritas angularis $=\varepsilon$, et arcus AO $=\mathfrak{a}$, qui nunc eſt $=\alpha$. Sicque ex dato axe gyrationis O ſtatim innoteſcit celeritas turbinis angularis z.

COROLL. 2.

774. Quo magis ergo axis gyrationis O ab axe turbinis A recedit, eo major fit celeritas angularis z, eaque adeo in infinitum augeretur, ſi axis gyrationis IO usque ad angulum rectum ab axe turbinis IA digrederetur.

PROBLEMA 83.

775. Si detur ad aliquod tempus inclinatio turbinis ad horizontem, et axis gyrationis cum celeritate angulari, determinare mutationem momentaneam in ſitu turbinis ortam.

SOLUTIO.

Sumto ſphaerae immobilis centro inertiae turbinis deſcriptae puncto ſummo Z quaſi zenith, conſtituatur etiam primus quaſi meridianus ZX: et nunc quidem verſetur axis turbinis in A, pro quo dicatur arcus

cus ZA $= 90° - \theta = l$, et angulus XZA $=\lambda$, tum vero reliqui bini axes principales ſint in B et C, ponaturque angulus ZAB $=\zeta$. Nunc autem turbo gyretur circa polum O, ut ſit BAO $=\eta$: et AO $=\alpha$; celeritasque angularis $= z$ in ſenſum ABC. His poſitis, ſi ſecundum probl. 68. vocemus arcus OB $=\beta$, OC $=\gamma$; ZB $= m$, ZC $= n$, habebimus pro variatione ſitus:

$$dl\sin l = z\,dt(\cos\beta\cos n - \cos\gamma\cos m)$$
$$dm\sin m = z\,dt(\cos\gamma\cos l - \cos\alpha\cos n)$$
$$dn\sin n = z\,dt(\cos\alpha\cos m - \cos\beta\cos l)$$
$$\text{et } -d\lambda\sin l^2 = z\,dt(\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n).$$

Iam vero eſt $l = 90° - \theta$, ideoque $\cos l = \sin\theta$

$$\cos\beta = \sin\alpha\cos\eta;\ \cos\gamma = \sin\alpha\sin\eta \text{ atque}$$
$$\cos m = \cos\zeta\cos\theta;\ \text{et } \cos n = -\sin\zeta\cos\theta, \text{ unde concluditur}$$
$$-d\theta\cos\theta = z\,dt(-\sin\alpha\cos\eta\sin\zeta\cos\theta - \sin\alpha\sin\eta\cos\zeta\cos\theta)$$

ſeu $d\theta = z\,dt\sin\alpha\sin(\zeta+\eta)$

$$d\zeta\sin\zeta\cos\theta + d\theta\cos\zeta\sin\theta = z\,dt(\sin\alpha\sin\eta\sin\theta + \cos\alpha\sin\zeta\cos\theta)$$
$$+ d\zeta\cos\zeta\cos\theta - d\theta\sin\zeta\sin\theta = z\,dt(\cos\alpha\cos\zeta\cos\theta - \sin\alpha\cos\eta\sin\theta)$$

ſeu $d\zeta\cos\theta = z\,dt(-\sin\alpha\sin\theta\cos(\zeta+\eta) + \cos\alpha\cos\theta)$

ac denique $d\lambda = -\frac{z\,dt\sin\alpha\cos(\zeta+\eta)}{\cos\theta}$.

Variatio ergo momentanea in ſitu turbinis his continetur formulis differentialibus:

$$d\theta = z\,dt\sin\alpha\sin(\zeta+\eta)$$
$$d\zeta = z\,dt(\cos\alpha - \sin\alpha\tan\theta\cos(\zeta+\eta))$$
$$d\lambda = -\frac{z\,dt\sin\alpha\cos(\zeta+\eta)}{\cos\theta}.$$

SCHOLION.

776. Has duplicis generis variationes momentaneas evolvi neceſſe erat, antequam ſolutionem problematis, quo argumentum hujus capitis continetur, ſuſcipere liceret. Nunc igitur his variationibus momentaneis definitis, in motum turbinis, qualem quidem hoc capite conſideramus, poſtquam ipſi motus quicunque fuerit impreſſus, inquiramus.

PROBLEMA 84.

777. Poſtquam turbini in data axis ſui inclinatione motus gyratorius circa hunc axem fuerit impreſſus, determinare motus hujus continuati-

tinuationem, hoc est, ad quodvis tempus tam situm quam motum turbinis.

SOLUTIO.

Fig. 101. Habuerit initio axis turbinis ad horizontem inclinationem δ, circa quem acceperit motum gyratorium celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ABC. Sumamus autem initio axem turbinis A in ipso meridiano ZX fuisse, in eumque simul arcum AB ad turbinem pertinentem incidisse. Pro ipso turbine sit ejus massa $= M$, momentum inertiae respectu omnium axium per ejus centrum inertiae transeuntium $= Maa$, et in axe turbinis distantia imae cuspidis a centro inertiae $ID = f$. Nunc elapso tempore $= t$, mentem a motu centri inertiae abstrahendo, pervenerit axis turbinis in A, ut sit angulus $XZA = \lambda$, ejusque inclinatio ad horizontem θ seu arcus $ZA = 90° - \theta$, ita ut initio fuerit $\lambda = 0$ et $\theta = \delta$, tum vero arcus AB cum turbine mobilis jam cum ZA faciat angulum $ZAB = \zeta$, ita ut initio fuerit $\zeta = 0$. Porro gyretur nunc turbo circa polum O celeritate angulari $= u$ continuum in sensum ABC, ponaturque arcus $AO = \alpha$ et angulus $ZAO = \eta$, ita ut initio fuerit $\alpha = 0$, quia turbo circa ipsum axem AID gyrari coepit, angulus autem η initio erat indefinitus. Quodsi jam hoc instanti pressio cuspidis in planum horizontale ponatur $= P$, praecedentia problemata suppeditant sequentes aequationes:

$$\text{I. } \frac{P}{M} = 1 + \frac{f(dd\theta\cos\theta - d\theta^2\sin\theta)}{2g\,dt^2}$$

$$\text{II. } u = \frac{\varepsilon}{\cos\alpha} \text{ ob } a = 0$$

$$\text{III. } d\alpha = \frac{-2Pfg\,dt\cos\theta}{Maau}\cos\alpha\sin(\zeta+\eta)$$

$$\text{IV. } d\eta = \frac{-2Pfg\,dt\cos\theta}{Maau}\cdot\frac{\cos(\zeta+\eta)}{\sin\alpha}$$

$$\text{V. } d\theta = u\,dt\sin\alpha\sin(\zeta+\eta)$$

$$\text{VI. } d\zeta = u\,dt(\cos\alpha - \sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\theta\cos(\zeta+\eta))$$

$$\text{VII. } d\lambda = \frac{-u\,dt\sin\alpha\cos(\zeta+\eta)}{\cos\theta}.$$

ad

ad quarum aequationum resolutionem omnes vires intendere debemus. Quo igitur multitudinem variabilium restringamus, ex aequationibus III. et IV. eliminando P colligimus

$$\frac{d\alpha\cos(\zeta+\eta)}{\sin\alpha\cos\alpha} = d\eta\sin(\zeta+\eta);$$

tum V et VI eliminando $u\,dt$ praebent

$$\frac{d\theta\cos\alpha}{\sin\alpha} - d\theta\,\mathrm{tang}\,\theta\cos(\zeta+\eta) = d\zeta\sin(\zeta+\eta).$$

Addamus has duas aequationes, et posito $\zeta+\eta = \Phi$ habebimus

$$\frac{d\alpha\cos\Phi}{\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{d\theta\cos\alpha}{\sin\alpha} - d\theta\,\mathrm{tang}\,\theta\cos\Phi - d\Phi\sin\Phi = 0,$$

quae multiplicata per $\mathrm{tang}\,\alpha\cos\theta$ abit in hanc

$$\frac{d\alpha\cos\theta\cos\Phi}{\cos\alpha^2} + d\theta\cos\theta - d\theta\,\mathrm{tang}\,\alpha\sin\theta\cos\Phi - d\Phi\,\mathrm{tang}\,\alpha\cos\theta\sin\Phi = 0,$$

quae integrabilis existit praebetque

$$\mathrm{tang}\,\alpha\cos\theta\cos\Phi + \sin\theta = \sin\delta$$

quia initio fit $\alpha = 0$ et $\theta = \delta$: hinc ergo nanciscimur

$$\text{vel } \mathrm{tang}\,\alpha = \frac{\sin\delta - \sin\theta}{\cos\theta\cos\Phi} \text{ vel } \cos\Phi = \frac{\sin\delta - \sin\theta}{\mathrm{tang}\,\alpha\cos\theta}.$$

Dividamus nunc aequationem III per V, ut $\sin(\zeta+\eta)$ seu $\sin\Phi$ removeamus, fiet

$$\frac{d\alpha}{d\theta} + \frac{2Pfg\cos\theta\cos\alpha}{Maauu\sin\alpha} = 0$$

$$\text{seu } \frac{uu\,d\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha^3} + \frac{2Pfg\,d\theta\cos\theta}{Maa} = 0;$$

ubi si ponamus $\sin\theta = x$, ut sit $d\theta\cos\theta = dx$, quoniam est $\frac{P}{M} = 1 + \frac{f\,ddx}{2g\,dt^2}$, nanciscemur hanc aequationem sponte integrabilem:

$$\frac{\varepsilon\varepsilon aa\,d\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha^3} + 2fg\,dx + \frac{ff\,dx\,ddx}{dt^2} = 0,$$

quae