$$x'' = x\cos\eta\cos\theta + y\sin\eta\cos\theta + z\sin\theta$$
$$y'' = y\cos\eta - x\sin\eta; \text{ et } z'' = z\cos\theta - x\cos\eta\sin\theta - y\sin\eta\sin\theta$$

Atque hinc puncti Z ab axe IG distantiae quadratum prodibit $y''y'' + z''z'' =$

$$x^2\sin\eta^2 + y^2\cos\eta^2 + z^2\cos\theta^2 - 2xy\sin\eta\cos\eta - 2xz\cos\eta\sin\theta\cos\theta$$
$$- 2yz\sin\eta\sin\theta\cos\theta$$
$$+ x^2\cos\eta^2\sin\theta^2 + y^2\sin\eta^2\sin\theta^2 + 2xy\sin\eta\cos\eta\sin\theta^2$$

Ponamus jam sequentia integralia per totum corpus extensa:

$$\int xxdM = A;\ \int yydM = B;\ \int zzdM = C$$
$$\int xydM = D;\ \int xzdM = E;\ \int yzdM = F,$$

eritque momentum inertiae respectu axis IG quaesitum

$$A(\sin\eta^2 + \cos\eta^2\sin\theta^2) + B(\cos\eta^2 + \sin\eta^2\sin\theta^2) + C\cos\theta^2$$
$$- 2D\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2 - 2E\cos\eta\sin\theta\cos\theta - 2F\sin\eta\sin\theta\cos\theta.$$

COROLL. 1.

434. Hic quantitates A, B, C necessario sunt quantitates positivae, reliquae vero D, E, F pro ratione corporis vel positivae vel negativae esse possunt.

COROLL. 2.

435. Momentum inertiae respectu axis IA est $= B + C$; respectu axis IB $= A + C$, et respectu axis IC $= A + B$: Cognitis ergo his tribus momentis innotescunt valores A, B, et C.

COROLL. 3.

436. Quomodocunque autem accipiantur anguli η et θ, momentum inertiae inventum nunquam evanescere potest, sed semper valorem positivum obtinet.

SCHOLION.

437. Si non solum motum corporis circa axem IG, sed etiam vires ab axe sustentatas determinare velimus, praeter momentum inertiae respectu hujus axis quoque valores formularum integralium $\int x''y''dM$ et $\int x''z''dM$ nosse debemus. Fiunt autem istae formulae per coordinatas x, y, z;

$$\int x''y''dM = \int dM(x\cos\eta\cos\theta + y\sin\eta\cos\theta + z\sin\theta)(y\cos\eta - x\sin\eta) \text{ et}$$
$$\int x''z''dM = \int dM(x\cos\eta\cos\theta + y\sin\eta\cos\theta + z\sin\theta)(-x\cos\eta\sin\theta - y\sin\eta\sin\theta + z\cos\theta)$$

Quare si hic valores supra assumti substituantur, habebimus

$\int x''y''dM$

$$\int x''y''dM = -A\sin\eta\cos\eta\cos\theta + B\sin\eta\cos\eta\cos\theta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)\cos\theta$$
$$- E\sin\eta\sin\theta + F\cos\eta\sin\theta$$
$$\int x''z''dM = -A\cos\eta^2\sin\theta\cos\theta - B\sin\eta^2\sin\theta\cos\theta + C\sin\theta\cos\theta$$
$$-2D\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta + E\cos\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) + F\sin\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2)$$

qui valores sunt eo magis notandi, quod casibus, quibus momentum inertiae sit maximum vel minimum, evanescunt, uti mox videbimus.

PROBLEMA. 27.

438. Inter omnes axes per centrum inertiae dati corporis ductos definire eum, cujus respectu momentum inertiae est vel maximum vel minimum.

SOLUTIO.

Maneant omnia, uti in problemate praecedente, sitque IG axis talis quaesitus, itaut determinari oporteat angulos AIF $= \eta$ et FIG $= \theta$. Momentum ergo inertiae respectu hujus axis cum sit $\int(y''y'' + z''z'')dM =$

$$A\sin\eta^2 + A\cos\eta^2\sin\theta^2 + B\cos\eta^2 + B\sin\eta^2\sin\theta^2 + C\cos\theta^2$$
$$- 2D\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2 - 2E\cos\eta\sin\theta\cos\theta - 2F\sin\eta\sin\theta\cos\theta$$

differentietur duplici modo, sumendo primum η deinde θ variabile, et utrumque differentiale nihilo aequale ponatur. Ex priore igitur prodibit haec aequatio

$$2A\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2 - 2B\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2 - 2D\cos\eta^2\cos\theta^2 + 2D\sin\eta^2\cos\theta^2$$
$$+ 2E\sin\eta\sin\theta\cos\theta - 2F\cos\eta\sin\theta\cos\theta = 0$$

quae per $-2\cos\theta$ divisa praebet

$$-(A-B)\sin\eta\cos\eta\cos\theta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)\cos\theta - E\sin\eta\sin\theta + F\cos\eta\sin\theta = 0$$

sive $\int x''y''dM = 0$: unde colligitur

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tang\theta = \frac{-(A-B)\sin\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)}{E\sin\eta - F\cos\eta}.$$

Sumendo autem θ variabile pervenimus ad hanc aequationem;

$$2A\cos\eta^2\sin\theta\cos\theta + 2B\sin\eta^2\sin\theta\cos\theta - 2C\sin\theta\cos\theta + 4D\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta$$
$$- 2E\cos\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) - 2F\sin\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) = 0$$

quae formula est $= -2\int x''z''dM$. Cum nunc sit

$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ et $\cos\theta^2 - \sin\theta^2 = \cos 2\theta$ erit

$$A\cos\eta^2\sin 2\theta + B\sin\eta^2\sin 2\theta - C\sin 2\theta + 2D\sin\eta\cos\eta\sin 2\theta - 2E\cos\eta\cos 2\theta$$
$$- 2F\sin\eta\cos 2\theta = 0$$

unde

unde sequitur

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \operatorname{tang} 2\theta = \frac{2E\cos\eta + 2F\sin\eta}{A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2 - C + 2D\sin\eta\cos\eta}$$

Verum ex superiori ob $\operatorname{tang} 2\theta = \frac{2\operatorname{tang}\theta}{1-\operatorname{tang}\theta^2}$ habetur:

$$\operatorname{tang} 2\theta = \frac{2(E\sin\eta - F\cos\eta)((B-A)\sin\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2))}{(E\sin\eta - F\cos\eta)^2 - ((B-A)\sin\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2-\sin\eta^2))^2}$$

quibus valoribus coaequatis erit

$$\begin{aligned}(E\cos\eta + F\sin\eta)(E\sin\eta - F\cos\eta)^2 &= (E\cos\eta + F\sin\eta)((B-A)\sin\eta\cos\eta \\ &\quad + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2))^2 \\ &\quad + (E\sin\eta - F\cos\eta)((B-A)\sin\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2))(A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2 \\ &\quad - C + 2D\sin\eta\cos\eta) \\ &= ((B-A)\sin\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2))(E(B\sin\eta - C\sin\eta + D\cos\eta) \\ &\quad - F(A\cos\eta - C\cos\eta + D\sin\eta))\end{aligned}$$

Cum jam $\sin\eta$ et $\cos\eta$ ubique totidem compleant dimensiones, si ponamus $\frac{\sin\eta}{\cos\eta} = \operatorname{tang}\eta = t$, obtinebimus hanc aequationem

$$(E+Ft)(F-Et)^2 = (D + (B-A)t - Dtt)(DE - AF + CF + (BE - CE - DF)t)$$

quae in ordinem redacta dat

$$\begin{aligned} 0 &= EFF - DDE + (A-C)DF \\ &+ t(F^3 - 2EEF + DDF + (A-2B+C)DE - (A-B)(A-C)F) \\ &+ t^2(E^3 - 2EEF + DDE + (B-2A+C)DF + (A-B)(B-C)E) \\ &+ t^3(EEF - DDF + (B-C)DE)\end{aligned}$$

ita ut ex hac aequatione cubica valor ipsius t erui debeat.

COROLL. 1.

439. Cum aequatio, ex qua valor ipsius t inveniri debet, sit cubica, semper unam certe habet radicem realem, quae praebet tangentem anguli AIF $= \eta$, quo angulo invento alter FIG $= \theta$ ita definitur ut sit

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{(B-A)\sin\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)}{E\sin\eta - F\cos\eta} = \frac{\frac{1}{2}(B-A)\sin 2\eta + D\cos 2\eta}{E\sin\eta - F\cos\eta}$$

COROLL. 2.

440. Fieri autem potest, ut omnes tres radices sint reales, quo casu tres in corpore dabuntur axes, quorum respectu momenta inertiae sunt vel maxima vel minima.

SCHO-

SCHOLION.

441. Ex rei autem natura intelligitur, in quovis corpore plus uno tali axe inesse, cujus respectu momentum inertiae sit vel maximum vel minimum; si enim unicus daretur, ejus respectu momentum esset omnium vel maximum vel minimum, utrovis ergo casu alius daretur axis necesse est, cujus respectu momentum inertiae foret vel minimum vel maximum. Atque hinc concludere licet, aequationem cubicam inventam non solum unam, sed duas habere radices reales, ex quo adeo omnes tres radices semper erunt reales, quod quidem difficulter ex ejus forma perspici potest. Verum cognito jam uno tali axe haud difficulter reliqui ejusdem indolis reperiuntur, id quod sequente problemate ostendisse operae erit pretium.

PROBLEMA. 28.

442. Dato uno corporis axe per centrum inertiae transeunte, cujus respectu momentum inertiae est maximum vel minimum, invenire reliquos ejus axes per centrum inertiae ductos, quibus eadem proprietas conveniat.

SOLUTIO.

Existente I centro inertiae corporis, sit IA axis ille datus, cujus respectu momentum inertiae est maximum vel minimum, atque ex praecedente problemate constat, hanc proprietatem locum habere non posse nisi sit $\int xydM = 0$ et $\int xzdM = 0$; quare pro formulis superioribus erit $D = 0$ et $E = 0$. Quodsi jam IG aliud fuerit ejusmodi axis, pro quo ponatur ut ante angulus AIF $= \eta$ et FIG $= \theta$, ut sit ejus respectu momentum inertiae $A(\sin\eta^2 + \cos\eta^2\sin\theta^2) + B(\cos\eta^2 + \sin\eta^2\sin\theta^2) + C\cos\theta^2 - 2F\sin\eta\sin\theta\cos\theta$, methodus maximorum et minimorum has duas suppeditat aequationes:

I. $(A-B)\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2 - F\cos\eta\sin\theta\cos\theta = 0$

II. $(A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2)\sin\theta\cos\theta - C\sin\theta\cos\theta - F\sin\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) = 0$.

Quarum prior cum sit divisibilis per $\cos\eta\cos\theta$, erit vel $\cos\eta = 0$ vel $\cos\theta = 0$; tertia enim ejus radix $\operatorname{tang}\theta = \frac{(A-B)\sin\eta}{F}$ in altera aequatione substituta nihil definit, quoniam angulus η prorsus ex calculo egreditur. Sit ergo $\cos\eta = 0$, ideoque $\eta =$ AIF rectus, et $\sin\eta = 1$; atque altera aequatio praebet:

$$B\sin\theta\cos\theta - C\sin\theta\cos\theta - F(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) = 0$$

seu

seu $\frac{1}{2}(B-C)ſ2\theta = F\,coſ\,2\theta$ et $tang\,2\theta = \frac{2F}{B-C}$: unde pro angulo FIG duplex prodit valor, alter $FIG = \theta$, alter $FIG = \theta + 90°$. Sicque ex uno axe IA dato, duo ſemper novi colliguntur, eadem maximi minimive proprietate gaudentes, qui ergo tres axes reſpondent tribus radicibus aequationis cubicae ante inventae. Prioris autem aequationis radix $coſ\,\theta = 0$ nihil plane huc facit, cum enim angulus FIG eſſet rectus, utcunque angulus $AIE = \eta$ variatur, recta IG eundem ſitum IG perpetuo ſervat, neque differentiatio hic locum habet, erit vero ob $\eta = 90°$ momentum inertiae reſpectu axis $IG = A + Bſ\theta^2 + C\,coſ\,\theta^2 - 2Fſ\theta\,coſ\,\theta$, at reſpectu axis dati $IA = B + C$.

COROLL. 1.

443. Cum igitur ſit angulus $AIF = \eta$ rectus, ambo reliqui axes ſunt ad IA normales, et quia illi etiam invicem angulum rectum conſtituunt, in omni corpore tres dantur axes per centrum inertiae I ducti et inter ſe normales, quorum reſpectu momenta inertiae ſunt vel maxima vel minima.

COROLL. 2.

444. Quodſi ergo ipſae rectae IA, IB et IC fuerint hi tres axes, quorum reſpectu momenta inertiae ſunt vel maxima vel minima, erit $\int xydM = D = 0$; $\int xzdM = E = 0$ et $\int yzdM = F = 0$.

SCHOLION.

445. In his quidem problematibus ſumſimus, punctum I eſſe corporis centrum inertiae, quoniam calculum momenti inertiae tantum ad ejusmodi axes, qui per corporis centrum inertiae tranſeunt, adſtrinximus: verum in toto calculo utriusque problematis nihil ineſt, quod naturam centri inertiae cum puncto I conjungat. Quare haec problemata multo latius patent, ita ut ſumto quocunque puncto I inter omnes axes per id tranſeuntes ſemper tres definiri queant, quorum reſpectu momenta inertiae ſint vel maxima vel minima, atque ut hi tres axes ſint inter ſe normales. Verum hic tantum iſtam proprietatem tanquam centro inertiae convenientem conſidero, ac pro quolibet corpore plurimum intererit, hos ternos axes noſſe, quoniam ex iis momenta inertiae reſpectu omnium axium facillime inveniri poterunt.

DEFINI-

DEFINITIO. 8.

446. *Axes principales* cujusque corporis ſunt tres illi axes per ejus centrum inertiae tranſeuntes, quorum reſpectu momenta inertiae ſunt vel maxima vel minima.

COROLL. 1.

447. Ex praecedentibus intelligitur, pro quolibet corpore non ſolum dari tales ternos axes principales, ſed eos etiam inter ſe eſſe normales: unde ii commodiſſime pro ternis directricibus, ad quas corpus referatur, accipientur.

COROLL. 2.

448. Quodſi ergo IA, IB, IC fuerint cujuspiam corporis axes principales, iisque pro elemento corporis dM in Z ſito parallelae conſtituantur coordinatae $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, non ſolum erit $\int xdM = 0$, $\int ydM = 0$, $\int zdM = 0$; ſed etiam $\int xydM = 0$, $\int xzdM = 0$, et $\int yzdM = 0$. Fig. 47

COROLL. 3.

449. Tum vero ſi ponatur $\int xxdM = A$; $\int yydM = B$; $\int zzdM = C$, erit corporis momentum inertiae reſpectu axis $IA = B + C$; reſpectu axis $IB = A + C$, et reſpectu axis $IC = A + B$, quae ſunt maxima vel minima.

SCHOLION.

450. Veritas utique eſt maximi momenti, quod in omni corpore tales tres axes principales dentur, cujus demonſtratio ex praecedentibus utique eſt manifeſta. Sumtis enim ternis directricibus IA, IB, IC utcunque, quae in centro inertiae I ſe invicem normaliter interſecent, unum ejusmodi axem principalem IG definire docuimus ope reſolutionis aequationis cubicae: tum vero cognito uno facili calculo duo reliqui aſſignantur. Iam vero vix occurret corpus tam irregulare, cujus non ſaltem unus axis principalis innoteſcat, ita ut deinceps bini reliqui facillime ſe prodant. Quare in poſtremum aſſumam, in quovis corpore hos ternos axes principales nobis eſſe cognitos; quorum reſpectu dummodo momenta inertiae, pro omnibus aliis axibus promptiſſime exhiberi poſſunt, uti ex ſequente problemate patebit.

EXPLI-

EXPLICATIO.

451. Quomodo ratio maximi ac minimi his tribus axibus principalibus conveniat, haud ita facile perspicitur. Cum enim inter eos certe sit unus, cujus respectu momentum inertiae sit omnium maximum, itemque unus, cujus respectu momentum inertiae sit omnium minimum; necesse est, ut respectu tertii momentum inertiae sit neque omnium maximum neque omnium minimum, nisi forte cum alterutro illorum conveniat, quod aliquando fieri potest. Verum calculus maximorum et minimorum saepenumero ejusmodi quantitates indicit, quae absolute neque sint maxima neque minima; quoniam eo calculo plus non declaratur, quam si infinite parum ab loco invento recesseris, neque augmentum neque decrementum prodire. Ita si IA sit axis maximi absolute sumti, et IC axis minimi absolute sumti, respectu axis IB momentum inertiae neque omnium erit maximum neque minimum, verumtamen ejusmodi medium tenebit, ut si alius axis ab eo infinite parum distans in quamcunque plagam assumatur, ejus momentum inertiae neque crescat, neque decrescat. Atque hanc ob rem inter hos tres axes principales ingens discrimen intercedit, quod imprimis observari meretur, si eorum unus habeat maximum momentum, unus minimum, tertius vero medium, quod tamen in calculo tanquam maximum vel minimum spectari possit, cujus rei ratio in sequenti problemate magis illustrabitur. Fig. 47.

PROBLEMA. 29.

452. Datis cujusdam corporis momentis inertiae respectu trium axium principalium, invenire ejus momentum inertiae respectu cujusvis axis per ejus centrum inertiae ducti.

SOLUTIO.

Fig. 47. Sint IA, IB, IC tres corporis axes principales, sibi mutuo in centro inertiae I normaliter occurrentes, et posita corporis massa = M, sit ejus momentum inertiae respectu axis IA = Maa, respectu axis IB = Mbb et respectu axis IC = Mcc: unde quaeri debeat momentum inertiae respectu axis cujuscunque IG, qui ad planum AIB inclinetur angulo GIF = θ, sitque angulus AIF = η. Consideretur nunc elementum corporis dM in Z, cujus puncti coordinatae sint IX = x, XY = y et YZ = z; ac positis integralibus $\int xxdM = A$, $\int yydM = B$, $\int zzdM = C$, erit $\int xydM = D = 0$, $\int xzdM = E = 0$, $\int yzdM = F = 0$. Unde ex §. 433. erit momentum inertiae respectu axis IG =

$$A(\sin\eta^2 + \cos\eta^2 \sin\theta^2) + B(\cos\eta^2 + \sin\eta^2 \sin\theta^2) + C\cos\theta^2.$$

Cum

Cum autem ex datis ternis momentis sit

$$Maa = B + C;\quad Mbb = A + C;\quad Mcc = A + B;$$

hinc vicissim colligitur

$$A = \tfrac{1}{2}M(bb + cc - aa);\ B = \tfrac{1}{2}M(aa + cc - bb);\ C = \tfrac{1}{2}M(aa + bb - cc)$$

quibus valoribus substitutis erit quaesitum momentum inertiae respectu axis IG = $M(aa\cos\eta^2\cos\theta^2 + bb\sin\eta^2\cos\theta^2 + cc\sin\theta^2)$. Ubi notetur, esse $\cos\eta\cos\theta = \cos AIG$, $\sin\eta\cos\theta = \cos BIG$ et $\sin\theta = \cos CIG$. Quare si distantiae axis IG a ternis axibus principalibus ponantur:

$$AIG = \alpha;\ BIG = \beta,\ CIG = \gamma$$

erit momentum inertiae respectu axis IG =

$$Maa\cos\alpha^2 + Mbb\cos\beta^2 + Mcc\cos\gamma^2$$

illi autem anguli α, β, γ ita sunt comparati, ut sit semper $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$.

COROLL. 1.

453. Posito momento inertiae respectu axis IG = Mkk, id sequentibus modis exprimi potest:

$$Mkk = Maa - M(aa - bb)\cos\beta^2 - M(aa - cc)\cos\gamma^2$$
$$Mkk = Mbb + M(aa - bb)\cos\alpha^2 - M(bb - cc)\cos\gamma^2$$
$$Mkk = Mcc + M(aa - cc)\cos\alpha^2 + M(bb - cc)\cos\beta^2$$

et in qualibet harum expressionum binos angulos pro lubitu assumere licet.

COROLL. 2.

454. Si fuerit $aa > bb$ et $bb > cc$; momentum inertiae respectu axis IA omnium erit maximum, at respectu axis IC omnium erit minimum: medium autem tenebit momentum inertiae respectu axis IB.

COROLL. 3.

455. Si fuerit $(aa - bb)\cos\alpha^2 > (bb - cc)\cos\gamma^2$, momentum inertiae respectu axis IG majus est quam medium Mbb, contra vero est minus. Sin autem sit $(aa - bb)\cos\alpha^2 = (bb - cc)\cos\gamma^2$, quod infinitis locis fieri potest, ibi omnia momenta inertiae sunt inter se aequalia.

COROLL. 4.

456. Si fuerit $aa = bb = cc$, hoc est si momenta inertiae principalia fuerint inter se aequalia, respectu omnium axium per centrum inertiae ductorum momenta inertiae sunt inter se aequalia: ideoque quilibet axis pro principali haberi potest.

SCHO-

SCHOLION.

Fig. 48. 457. Eleganter haec more in trigonometria ſphaerica recepto repraeſentari poſſunt. Sint enim conſtituto centro inertiae I in centro ſphaerae, puncta A, B, C extremitates axium principalium in ſuperficie ſphaerica terminatae, ita ut arcus AB, AC et BC ſint quadrantes; axibusque in A, B, C terminatis reſpondeant momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc, quorum primum ſit maximum, ſecundum medium, et tertium minimum. Quodſi jam alius axis quicunque per centrum inertiae tranſiens, qui ſuperficiem ſphaericam in puncto S trajiciat, conſideretur, ejus reſpectu momentum inertiae erit:

$$Maa \cos AS^2 + Mbb \cos BS^2 + Mcc \cos CS^2$$

quod ob $\cos AS^2 + \cos BS^2 + \cos CS^2 = 1$, his modis exprimi poteſt:

$$Maa - M(aa-bb)\cos BS^2 - M(aa-cc)\cos CS^2 \text{ vel}$$
$$Mbb + M(aa-bb)\cos AS^2 - M(bb-cc)\cos CS^2 \text{ vel}$$
$$Mcc + M(aa-cc)\cos AS^2 + M(bb-cc)\cos BS^2.$$

Hinc ſi S ſit in quadrante BC puta in D, erit momentum inertiae reſpectu axis $ID = M(bb \cos BD^2 + cc \cos CD^2) = Mbb - M(bb-cc)\cos CD^2 = Mcc + M(bb-cc)\cos BD^2$,
ſeu momentum inertiae reſpectu axis ID erit:

$$Mbb - M(bb-cc)\sin BD^2 = Mcc + M(bb-cc)\sin CD^2.$$

Simili modo momentum inertiae reſpectu axis IE eſt

$$Maa - M(aa-cc)\sin AE^2 = Mcc + M(aa-cc)\sin CE^2;$$

momentum autem inertiae reſpectu axis IF fit

$$Maa - M(aa-bb)\sin AF^2 = Mbb + M(aa-bb)\sin BF^2$$

PROBLEMA. 30.

458. Invenire omnes axes per centrum inertiae ductos, quorum reſpectu momenta inertiae ſint inter ſe aequalia.

SOLUTIO.

Fig. 48. Sint momenta inertiae reſpectu axium principalium IA, IB, IC reſpective Maa, Mbb, Mcc et $aa > bb > cc$: et quaerantur omnes axes per centrum inertiae I ducendi, quorum reſpectu momenta inertiae ſint inter ſe aequalia, et quidem aequalia ei, quod reſpondet axi IE, ſumto E in quadrante AC, quoniam ab A ad C omnia momenta hujus corporis a maximo ad minimum occurrunt. Sit IS talis axis, et habebimus hanc aequationem:

$$Maa - M(aa-cc)\sin AE^2 = Maa - M(aa-bb)\cos BS^2 - M(aa-cc)\cos CS^2$$

ſeu

ſeu $(aa-cc)\sin AE^2 = (aa-bb)\cos BS^2 + (aa-cc)\cos CS^2$
ergo ob $\cos BS^2 = \sin AS^2 - \cos CS^2$ erit

$$(aa-cc)\sin AE^2 = (aa-bb)\sin AS^2 + (bb-cc)\cos CS^2.$$

Introducatur angulus CAS, et cum ſit $\cos CS = \sin AS \cos CAS$ erit

$$(aa-cc)\sin AE^2 = (aa-bb)\sin AS^2 + (bb-cc)\sin AS^2 \cos CAS^2$$

ergo $\sin AS^2 = \frac{(aa-cc)\sin AE^2}{aa-bb+(bb-cc)\cos CAS^2}$.

Sin autem angulum ACS introducamus, reperiemus

$$\sin CS^2 = \frac{(aa-cc)\sin CE^2}{bb-cc+(aa-bb)\cos ACS^2};$$

angulus CAS usque ad rectum augeri poteſt, dum $(aa-cc)\sin AE^2$ non excedat $aa-bb$, hoc eſt ſi fuerit $\sin AE < \sqrt{\frac{aa-bb}{aa-cc}}$; at angulus ACS usque ad rectum creſcere poteſt, ſi ſit $\sin CE < \sqrt{\frac{bb-cc}{aa-cc}}$ ſeu $\sin AE > \sqrt{\frac{aa-bb}{aa-cc}}$. Quare punctum S erit in curva, quae ex E aſſurgens per quadrantem AB tranſibit, ſi fuerit $\sin AE < \sqrt{\frac{aa-bb}{aa-cc}}$; curva autem illa per quadrantem BC tranſibit, ſi fuerit $\sin AE > \sqrt{\frac{aa-bb}{aa-cc}}$. Caſu autem quo $\sin AE = \sqrt{\frac{aa-bb}{aa-cc}}$ curva per ipſum punctum B tranſibit, omniaque momenta inertiae erunt $= Mbb$. Hoc igitur caſu erit $\sin AS^2 = \frac{aa-bb}{aa-bb+(bb-cc)\cos CAS^2}$.

Hinc ob $\cos AE = \sqrt{\frac{bb-cc}{aa-cc}}$, et $\frac{aa-bb}{bb-cc} = \frac{\sin AE^2}{\cos AE^2}$, fiet $\sin AS^2 = \frac{\sin AE^2}{\sin AE^2 + \cos AE^2 \cos CAS^2}$ ideoque $\tang AS = \frac{\tang AE}{\cos CAS}$: unde intelligitur loca punctorum S ſita eſſe in circulo maximo per puncta B et E traducto.

Caſu quo $\sin AE < \sqrt{\frac{aa-bb}{aa-cc}}$, ſeu punctum E propius ad A ſumitur, ſit id in e, et in quadrante AB dabitur punctum f, in quo momentum ſit aeque magnum. Erit ergo $\sin Af^2 = \frac{(aa-cc)\sin Ae^2}{aa-bb}$: unde ſi ponatur $Ae = e$; $Af = f$; $AS = s$ et angulus $eAs = \Phi$, ob $\frac{aa-cc}{aa-bb} = \frac{\sin f^2}{\sin e^2}$ et $\frac{bb-cc}{aa-bb} = \frac{\sin f^2 - \sin e^2}{\sin e^2}$, habebimus inter s et Φ hanc aequationem: Fig. 49

tionem: $\mathit{si}\,s^2 = \frac{\mathit{si}\,e^2\,\mathit{si}\,f^2}{\mathit{si}\,e^2 + (\mathit{si}\,f^2 - \mathit{si}\,e^2)\cos\varphi^2} = \frac{\mathit{si}\,e^2\,\mathit{si}\,f^2}{\mathit{si}\,e^2\,\mathit{si}\,\varphi^2 + \mathit{si}\,f^2\cos\varphi^2}$, qua aequatione natura lineae esf exprimitur, estque $\frac{\mathit{si}\,e}{\mathit{si}\,f} = \mathit{si}$ AE. Casu denique quo si AE $> \sqrt{\frac{aa-bb}{aa-cc}}$, cadat punctum E in e', dabiturque in quadrante BC punctum d, ubi momentum est idem atque in e', ut sit $\mathit{si}\,\mathrm{C}d^2 = \frac{(aa-cc)\,\mathit{si}\,\mathrm{C}e'^2}{bb-cc}$. Ponatur jam C$e' = e$; C$d = f$; C$s' = s$ et angulus e' C$s' = \varphi$; ob $\frac{aa-cc}{bb-cc} = \frac{\mathit{si}\,f^2}{\mathit{si}\,e^2}$ et $\frac{aa-bb}{bb-cc} = \frac{\mathit{si}\,f^2 - \mathit{si}\,e^2}{\mathit{si}\,e^2}$ inter s et φ haec prodit aequatio: $\mathit{si}\,s^2 = \frac{\mathit{si}\,e^2\,\mathit{si}\,f^2}{\mathit{si}\,e^2 + (\mathit{si}\,f^2 - \mathit{si}\,e^2)\cos\varphi^2}$ $= \frac{\mathit{si}\,e^2\,\mathit{si}\,f^2}{\mathit{si}\,e^2\,\mathit{si}\,\varphi^2 + \mathit{si}\,f^2\cos\varphi^2}$, qua natura lineae $e's'd$ exprimitur; estque $\frac{\mathit{si}\,e}{\mathit{si}\,f} = \mathit{si}$ CE.

COROLL. 1.

459. Per totum ergo circulum maximum ex B per E ductum ut sit $\mathit{si}\,\mathrm{AE} = \sqrt{\frac{aa-bb}{aa-cc}}$, momentum inertiae est $= \mathrm{M}bb$. Et quia arcus AE tam negative quam positive accipi potest, duo in sphaera dantur circuli maximi eadem proprietate gaudentes.

COROLL. 2.

460. Simili modo tam circa polum A, quam ipsi oppositum, erunt in superficie sphaerae orbes elliptici, quorum semiaxis major est arcus Af et semiaxis minor arcus Ae, in quibus ubique idem regnabit momentum inertiae majus quam Mbb. In figura linea fse refert quadrantem horum orbium ellipticorum.

COROLL. 3.

461. Lineae autem, in quibus momentum inertiae minus est quam Mbb, erunt bini orbes elliptici, quorum centra sunt in polo C eique opposito, et semiaxis major arcus Cd, minor vero arcus Ce'. In figura linea $ds'e'$ refert quadrantem horum orbium ellipticorum.

SCHOLION. 1.

462. Et si hae lineae fse, et $ds'e'$ in superficie sphaerae ductae, non sunt in eodem plano, tamen eas orbium ellipticorum nomine insignire

lubet, quoniam earum projectiones in plana sphaeram in punctis A et C tangentia per rectas eo normales factae sunt ellipses, quarum centra sunt in punctis A et C. In projectione enim lineae fse in planum ad A tangens facta si ponatur si A$f = m$, si A$e = n$, ut sit $\frac{mm}{nn} = \frac{aa-cc}{aa-bb}$, et pro puncti s projectione abscissa in m sumta $= x = \mathit{si}\,s\,\mathit{si}\,\varphi$, et applicata eo normalis $= y = \mathit{si}\,s\cos\varphi$, habebitur inter x et y haec aequatio $nnxx + mmyy = mmnn$, quae est pro ellipsi centrum in A habente, cujus semiaxes sunt m et n. Parique modo projectio lineae $ds'e'$ in planum ad C tangens facta reperietur esse ellipsis. Si fuerit Mbb = Mcc, quo casu punctum E in C cadit, fitque Ae = Af et $m = n$, ellipsis illa abit in circulum, eritque linea fse circulus minor circa polum A descriptus.

SCHOLION. 2.

463. Investigationem ergo momenti inertiae eo redaximus, ut pro quolibet corpore proposito sufficiat terna momenta inertiae definivisse, quae scilicet sumta sint respectu ternorum ejus axium principalium. His enim cognitis facile momentum inertiae ejusdem corporis respectu aliuscujuscunque axis per ejus centrum inertiae transeuntis, atque hinc porro respectu aliorum omnium illi parallelorum assignari potest. Hocque modo inventio momentorum inertiae, quae initio pro quovis corpore quasi infinita videbatur, mirifice in compendium est redacta. Praeterea vero notari meretur, in hoc negotio aliud insigne subsidium, cujus ope momentum inertiae alicujus corporis facile colligi potest ex momentis ejus partium, id quod sequente problemate explicemus.

PROBLEMA. 31.

464. Datis momentis inertiae duarum partium respectu axium inter se parallelorum, et per cujusque centrum inertiae transeuntium, invenire momentum inertiae totius corporis respectu axis illis paralleli et per hujus centrum inertiae transeuntis.

SOLUTIO.

Sit ergo corpus compositum ex duabus partibus, quarum alterius massa sit = M habens suum centrum inertiae in M; alterius vero massa sit = N ejusque centrum inertiae in N, ponaturque intervallum Fig. 6.

 MN = c.

$MN = c$. Data jam ſint momenta inertiae prioris partis M reſpectu axis mm, quod ſit $= Mmm$, et poſterioris partis N reſpectu axis nn, quod ſit $= Nnn$; ſintque hi axes mm et nn, qui per utriusque partis centrum inertiae tranſeant, inter ſe paralleli: unde totius corporis momentum inertiae reſpectu axis ii illis paralleli et per ſuum centrum inertiae I tranſeuntis determinari debet. Totius autem corporis maſſa eſt $= M + N$, ejusque centrum inertiae in rectae MN puncto I reperitur, ut ſit $IM = \frac{Nc}{M+N}$ et $IN = \frac{Mc}{M+N}$. Cum igitur hi tres axes in eodem plano ſint ſiti, ponatur eorum inclinatio ad rectam MN ſeu angulus $NIi = \delta$ eritque diſtantia axium mm et $ii = \frac{Nc\,ſi\,\delta}{M+N}$, unde partis M momentum inertiae reſpectu axis ii erit $= Mmm + \frac{MNNcc\,ſi\,\delta^2}{(M+N)^2}$. Tum vero ob diſtantiam axium nn et $ii = \frac{Mc\,ſi\,\delta}{M+N}$ prodit partis N momentum inertiae reſpectu axis $ii = Nnn + \frac{MMNcc\,ſi\,\delta^2}{(M+N)^2}$. Quare totius corporis momentum inertiae reſpectu axis ii habebitur $= Mmm + Nnn + \frac{MNcc\,ſi\,\delta^2}{M+N}$.

COROLL. 1.

465. Momentum ergo totius corporis majus eſt quam momenta partium ſimul ſumta, reſpectu axium inter ſe parallelorum et per cujusque centrum inertiae traductorum: atque exceſſus $\frac{MNcc\,ſi\,\delta^2}{M+N}$ proportionalis eſt quadrato diſtantiae axium.

COROLL. 2.

466. Si maſſa totius corporis ponatur $= I = M + N$, ejusque momentum inertiae reſpectu axis $ii = Iii$ erit

$$Iii = Mmm + Nnn + \frac{MNcc\,ſi\,\delta^2}{I}.$$

Tum vero poſitis diſtantiis $IM = a$, et $IN = b$, erit $a = \frac{Nc}{I}$ et $b = \frac{Mc}{I}$: unde fit $Iii = Mmm + Nnn + I\,ab\,ſin\,\delta^2$.

CO-

COROLL. 3.

467. Hinc dato momento totius corporis Iii una cum momento alterius partis Mmm, facile quoque colligitur momentum alterius partis $Nnn = Iii - Mmm - I\,ab\,ſi\,\delta^2$ ſumtis ſcilicet axibus inter ſe parallelis, et per cujusque centrum inertiae tranſeuntibus.

COROLL. 4.

468. Si corpus conſtet pluribus partibus, quarum ſingularum momenta inertiae reſpectu axium inter ſe parallelorum et per cujusque centrum inertiae tranſeuntium ſint explorata; hinc binis conjungendis tandem momentum inertiae totius corporis reſpectu axis illis paralleli et per ſuum centrum inertiae tranſeuntis colligetur.

SCHOLION. 1.

469. Hoc caſu plurium partium non opus eſt ſecundum problema bina conjungere, ſed ſtatim momentum totius corporis colligi poteſt. Sint enim Mmm, Nnn, Ppp, Qqq momenta partium, reſpectu axium inter ſe parallelorum et per cujusque centra inertiae tranſeuntium: pro toto autem corpore concipiatur axis illis parallelus per ejus centrum inertiae tranſiens, a quo axes partium M, N, P, Q diſtent intervallis a, b, c, d: quibus cognitis erit momentum inertiae totius corporis $= M(mm + aa) + N(nn + bb) + P(pp + cc) + Q(qq + dd)$. Hoc igitur modo ſaepe corporum admodum irregularium momenta inertiae facile colligi poterunt, dummodo ex ejusmodi partibus fuerint compoſita, quarum momenta inertiae aſſignare liceat, quo pacto calculus momentorum inertiae non mediocriter adjuvatur.

SCHOLION. 2.

470. Verum non ſufficit methodum tradidiſſe omnium corporum momenta inertiae inveniendi; neceſſe eſt etiam ea pro praecipuis corporum generibus evolvere, ut quoties uſus poſtulat, inde deſumi queant. Ne autem opus ſit infinitum, hanc inveſtigationem ad corpora homogenea, quae per totam extenſionem ſimilari conſtent materia, reſtringamus, ita ut calculus quaſi ad corpora geometrica tantum ſit accommodandus, ubi quidem figuras ſolum principales ſum conſideraturus. Ac primo, quoniam fila tenuiſſima et laminas tenuiſſimas tanquam lineas et ſuperficies conſiderare licet, ab iis initium ducamus, inde ad varias

varias species solidorum, cujusmodi prae ceteris occurrere solent, progressuri. In singulis autem his corporibus ternos axes principales eorumque respectu momenta inertiae definiamus, quandoquidem ex his momenta respectu omnium axium facili negotio colligi possunt. Hinc etiam simul patebit, quomodo calculum ad omnia alia corporum genera quam commodissime accommodari conveniat.

CAPUT VI.

INVESTIGATIO MOMENTI INERTIAE IN CORPORIBUS HOMOGENEIS.

PROBLEMA. 32.

Fig. 51. 471. Si corpus fuerit filum tenuissimum rectum AIB, invenire ejus axes principales, eorumque respectu momenta inertiae.

SOLUTIO.

Sit tota fili longitudo AB $= 2a$, in cujus medio puncto I erit ejus centrum inertiae, ut sit IA $=$ IB $= a$: massa autem fili, quae geometrice per $2a$ exprimitur sit $=$ M. Iam unus axium principalium certo est ipsa linea AB, cujus respectu momentum inertiae est nullum, ideoque minimum: bini reliqui sunt ad AB in I normales, eorumque respectu momenta inertiae aequalia, ita ut eorum situs non determinetur. Ad momentum ergo inertiae respectu talis axis ad AB in I normalis inveniendum, sumto IP $=$ IQ $= x$, elementorum Pp $=$ Qq $= dx$ momenta sunt $xxdx$, sicque amborum conjunctim $= 2xxdx$, cujus integrale $\frac{2}{3}x^3$ posito $x = a$, dat momentum inertiae fili respectu axium ad filum in I normalium $= \frac{2}{3}a^3 = \frac{1}{3}$ Maa ob M $= 2a$.

COROLL. 1.

472. Bini ergo reliqui axes principales praeter AIB non determinantur, perindeque est, quaenam duae rectae tam inter se quam ad filum in I normales pro iis accipiantur. Eorumque respectu momentum inertiae $\frac{1}{3}$ Maa est maximum, ita ut medium cum maximo congruat.

COROLL. 2.

473. Cum momentum inertiae respectu axis AB sit nihilo aequale, respectu alius cujuscunque axis S I s ad AB angulo AIS $= \theta$ inclinato erit $= \frac{1}{3} Maa \sin\theta^2$, quod ex superioribus evidens est, si binorum reliquorum axium principalium alter in plano AIS capiatur: tum enim axis Ss ad eum inclinatur angulo $90° - \theta$, ad alterum vero angulo recto.

PROBLEMA. 33.

474. Si corpus fuerit filum tenuissimum in peripheriam circuli AEBF incurvatum, invenire ejus axes principales eorumque respectu momenta inertiae. Fig. 52

SOLUTIO.

Sit radius circuli IA $= a$, et posita ratione diametri ad peripheriam $= 1 : \pi$, erit longitudo fili $= 2\pi a$, quae simul ejus massam refert, quae sit $=$ M. Cum centrum inertiae sit in circuli centro I, primo recta ad planum circuli in I perpendicularis erit unus axis principalis, cujus respectu erit momentum inertiae $= Maa$, duo reliqui axes in plano circuli sunt siti, pro quibus binos diametros quoscunque inter se normales assumere licet AB et EF. Sumta jam abscissa IP $= x$, et applicata $PM = y = \sqrt{(aa - xx)}$, ob elementum fili $Mm = \frac{adx}{y}$, erit ejus momentum respectu axis AB $= aydx$, ideoque momentum totum $= a\int ydx = a \times$Aream circuli $= \pi a^3$, quod ob $M = 2\pi a$ erit $= \frac{1}{2} Maa$. Quare momentum respectu diametri cujusvis est $= \frac{1}{2} Maa$.

COROLL. 1.

475. Momentum ergo inertiae respectu axis principalis ad planum circuli normalis, Maa est maximum, et momentum medium cum minimo congruit, estque utrumque semissis maximi.

COROLL. 2.

476. Si alius axis quicunque concipiatur ad planum circuli in I inclinatus angulo $= \eta$, quia is ad axem primum inclinatur angulo $90° - \eta$, ad reliquorum alterum angulo η et ad tertium angulo recto, erit ejus respectu momentum inertiae $= Maa \sin\eta^2 + \frac{1}{2} Maa \cos\eta^2 = \frac{1}{2} Maa (1 + \sin\eta^2)$.

PROBLEMA. 34.

477. Si corpus fuerit lamina tenuissima plana triangularis ABD, invenire ejus tres axes principales, eorumque respectu momenta inertiae. Fig. 53.

SOLUTIO.

Ut centrum inertiae I obtineatur, ex angulo A ducatur recta AC latus oppositum BD bisecans, sumtaque CI parte tertia totius AC erit centrum inertiae in I. Ponamus CI $= a$, CB $=$ CD $= c$, et angulum ACB $= \zeta$, ut sit AI $= 2a$, AC $= 3a$ et BD $= 2c$. Iam perspicuum est, unum axem principalem fore ad planum trianguli normalem in I, quoniam si in hac recta coordinatam x sumeremus, foret $\int xydM = 0$ et $\int xzdM = 0$, ob $x = 0$. Quare secundum probl. 28. praeter istum axem sumantur in plano trianguli binae reliquae directrices, quarum altera sit IA: et sumto elemento quocumque dM in Z, indeque ad IA demisso perpendiculo ZY, sit IY $= y$ et YZ $= z$, vocenturque integralia $\int xxdM = A = 0$; $\int yydM = B$, $\int zzdM = C$; tum $\int yzdM = F$: unde si IF et IG sint bini reliqui axes principales, ponaturque angulus AIF $= \theta$, demonstravimus fore $\tang 2\theta = \frac{2F}{B-C}$, et respectu axis IF momentum inertiae $= A + B\sin\theta^2 + C\cos\theta^2 - 2F\sin\theta\cos\theta$, ubi θ denotat tam angulum AIF quam AIG. Tum vero respectu primi axis ad planum trianguli normalis est momentum inertiae $= B + C$. Ad hos valores inveniendos per Z ducatur lateri BD parallela MN, positisque AP $= t$ et PZ $= u$, erit PM $=$ PN $= \frac{ct}{3a}$. YZ $= u\sin\zeta$ et PY $= u\cos\zeta$, atque elementum in Z $= dt\,du\sin\zeta = dM$. Hinc igitur erit $y = 2a - t + u\cos\zeta$ et $z = u\sin\zeta$; concipiatur aliud aequale elementum $dt\,du\sin\zeta$ ad alteram partem pro quo sit u negativum, hisque iunctim consideratis fiet

$$B = 2\int dt\sin\zeta\int du\,((2a-t)^2 + uu\cos\zeta^2);\quad C = 2\int dt\sin\zeta\int uu\,du\sin\zeta^2$$
$$\text{et } F = \int dt\sin\zeta\int(u\,du\sin\zeta(2a-t+u\cos\zeta) - u\,du\sin\zeta(2a-t-u\cos\zeta))$$
$$\text{seu } F = 2\int dt\sin\zeta.\int uu\,du\sin\zeta\cos\zeta.$$

Prima integratione peracta poni debet $u = \frac{ct}{3a}$, unde fit

$$B = 2\sin\zeta\int dt\left(\frac{ct}{3a}(2a-t)^2 + \frac{c^3t^3}{81a^3}\cos\zeta^2\right);\quad C = 2\sin\zeta\int dt.\frac{c^3t^3\sin\zeta^2}{81a^3}$$
$$\text{et } F = 2\sin\zeta^2\cos\zeta\int dt.\frac{c^3t^3}{81a^3},\text{ ideoque}$$
$$B = 2\sin\zeta\left(\frac{2actt}{3} - \frac{4ct^3}{9} + \frac{ct^4}{12a} + \frac{c^3t^4}{324a^3}\cos\zeta^2\right)$$
$$C = 2\sin\zeta.\frac{c^3t^4\sin\zeta^2}{324a^3}\text{ et } F = \frac{c^3t^4\sin\zeta^2\cos\zeta}{162a^3}$$

quibus valoribus per totum triangulum, ponendo $t = 3a$, extensis habebimus:

$$B = \tfrac{1}{2}ac\sin\zeta(3aa + cc\cos\zeta^2);\quad C = \tfrac{1}{2}ac^3\sin\zeta^3;\quad F = \tfrac{1}{2}ac^3\sin\zeta^2\cos\zeta$$

Ex his pro situ axium IF et IG fiet

$$\tang 2\theta = \frac{2ac^3\sin\zeta^2\cos\zeta}{ac\sin\zeta(3aa+cc\cos 2\zeta)} = \frac{cc\sin 2\zeta}{3aa+cc\cos 2\zeta}.$$

hinc enim duo valores pro θ eliciuntur. Denique momentum inertiae respectu axis principalis ad planum trianguli normalis est $= \frac{1}{2}ac\sin\zeta(3aa+cc) = \frac{1}{6}M(3aa+cc)$ ob $M = 3ac\sin\zeta$; et respectu axis IF vel IG, prout θ angulum AIF vel AIG denotat, est momentum inertiae

$$\tfrac{1}{6}M(3aa+cc\cos\zeta^2)\sin\theta^2 + \tfrac{1}{6}Mcc\sin\zeta^2\cos\theta^2 - \tfrac{1}{3}Mcc\sin\zeta\cos\zeta\sin\theta\cos\theta$$
$$= \tfrac{1}{2}Maa\sin\theta^2 + \tfrac{1}{6}Mcc(\cos\zeta\sin\theta - \sin\zeta\cos\theta)^2 = \tfrac{1}{2}Maa\sin\theta^2$$
$$+ \tfrac{1}{6}Mcc\sin(\zeta-\theta)^2.$$

COROLL. 1.

478. Cum sit AB^2 + AD^2 $= 18aa + 2cc$, erit $3aa = \frac{AB^2+AD^2-2cc}{6}$ hincque momentum inertiae respectu axis ad planum trianguli in I normalis fiet $= \frac{1}{36}$ M (AB^2 + AD^2 + BD^2), ita ut sit pars tricesima sexta massae per summam quadratorum laterum multiplicatae.

COROLL. 2.

479. Pro binis reliquis axibus principalibus in plano trianguli sitis IF et IG, notetur ζ esse angulum recto non maiorem, unde $\sin 2\zeta$ erit positivus. Posito ergo angulo AIF $= \theta$ erit $\tang\theta =$

$$\frac{-3aa - cc\cos 2\zeta + \sqrt{(9a^4 + 6aacc\cos 2\zeta + c^4)}}{cc\sin 2\zeta} = \tang\text{AIF};\text{ at }\tang\text{AIG} =$$
$$\frac{-3aa - cc\cos 2\zeta - \sqrt{(9a^4 + 6aacc\cos 2\zeta + c^4)}}{cc\sin 2\zeta}$$

COROLL. 3.

480. Momentum inertiae respectu horum axium est $= \frac{1}{6}$ M $(\frac{3}{2}aa - \frac{3}{2}aa\cos 2\theta + \frac{1}{2}cc - \frac{1}{2}cc\cos 2(\zeta-\theta))$, cum igitur sit $\tang 2(\zeta-\theta) = \frac{3aa\sin 2\zeta}{3aa\cos 2\zeta + cc}$, hoc utrumque momentum ita exprimetur:

$\frac{1}{6}$ M

$$\tfrac{1}{12}\mathrm{M}(3aa+cc\pm\surd(9a^4+6aacc\cos 2\zeta+c^4))\zeta=\tfrac{1}{12}\mathrm{M}cc$$
$$(1-\cos 2\zeta-\sin 2\zeta \tang\theta)=\frac{\mathrm{M}cc\sin\zeta\sin(\zeta-\theta)}{6\cos\theta}$$

prout enim pro θ angulus AIF vel AIG assumitur, ita ad utrumque axem referetur.

EXEMPLUM.

481. Sit triangulum ABD isosceles seu angulus ζ rectus, hincque ob $\tang 2\theta=\circ$, erit vel $\theta=0$ vel $\theta=90°$, unde alter axis in ipsam rectam AC incidit, alter vero ad eum est normalis. Respectu prioris AC momentum inertiae erit $=\frac{1}{6}\mathrm{M}cc$, respectu posterioris vero $=\frac{1}{2}\mathrm{M}aa$: dum respectu primi, qui ad planum trianguli est normalis, erat $=\frac{1}{2}\mathrm{M}aa+\frac{1}{6}\mathrm{M}cc$ ita, ut hoc sit aequale summae binorum reliquorum. Si praeterea triangulum sit aequilaterum, cujus singula latera $=2c$; erit $3a=c\surd 3$ seu $aa=\frac{cc}{3}$, quare omnes axes in plano trianguli per I ducti aequalia praebent momenta inertiae $=\frac{1}{6}\mathrm{M}cc$ et momentum respectu axis ad triangulum in I normalis erit duplo majus $=\frac{1}{3}\mathrm{M}cc$.

COROLL. 4.

482. Haec postrema proprietas adeo in genere valet: cum enim sit momentum inertiae respectu axis ad planum trianguli normalis $=\frac{1}{6}\mathrm{M}(3aa+cc)$, tum vero respectu axis IF $=\frac{1}{12}\mathrm{M}(3aa+cc-\surd(9a^4+6aacc\cos 2\zeta+c^4))$ respectu axis IG $=\frac{1}{12}\mathrm{M}(3aa+cc+\surd(9a^4+6aacc\cos 2\zeta+c^4))$, evidens est, horum summam priori esse aequalem.

SCHOLION.

483. Notari hic meretur, si reliqua trianguli latera ponantur AB $=2b$, AD $=2d$, uti est BD $=2c$, fore $9aa=2bb+2dd-cc$, et $\cos\zeta=\frac{dd-bb}{3ac}$, unde formula irrationalis $\surd(9a^4+6aacc\cos 2\zeta+c^4)$ abit in hanc

$$\tfrac{2}{3}\surd(b^4+c^4+d^4-bbcc-bbdd-ccdd).$$

Ceterum hic in genere definire non licet, uter axium IF et IG majus praebeat momentum, cum haec ipsa formula irrationalis quandoque negativum valorem induere debeat, quemadmodum patet ex casu $\zeta=90°$, ubi valor ejus $3aa-cc$ sit negativus, si $cc>3aa$. In genere autem haec duo momenta inter se aequalia fieri nequeunt, quia formula irrationalis evanescere non potest, nisi sit $2\zeta=180°$ et $3aa=cc$. At judicium hoc quovis casu, adhibitis angulis θ utrique axi convenientibus, facile instituetur ex formula $\frac{1}{2}\mathrm{M}aa\sin\theta^2+\frac{1}{6}\mathrm{M}cc\sin(\zeta-\theta)^2$.

PROBLEMA. 35.

484. Si corpus fuerit lamina tenuissima plana figuram parallelogrammi BDbd habens, invenire ejus tres axes principales, eorumque respectu momenta inertiae. Fig. 54.

SOLUTIO.

Bisectis lateribus binis oppositis BD et bd in A et C, ductaque recta AC in ejus puncto medio I erit centrum inertiae corporis, cujus massa ponatur $=\mathrm{M}$. Ponantur latera Bb = Dd = AC $=2a$, BD $=bd=2b$, et angulus acutus $\mathrm{B}=d=\zeta$, erit area $=4ab\sin\zeta=\mathrm{M}$. Iam unus axium principalium erit ad planum laminae in I normalis, binique reliqui IF et IG in ipso hoc plano siti: ad quos inveniendos concipiatur elementum quodcunque $d\mathrm{M}$ in Z, per quod punctum primo ducatur recta MN laterali BD parallela, sitque AP $=t$ et PZ $=u$; tum ex Z ad AC demisso perpendiculo ZY vocetur secundum probl. 28. IY $=y$ et YZ $=z$. Ob APZ $=\zeta$ erit ZY $=u\sin\zeta$ et PY $=u\cos\zeta$, unde $y=a-t+u\cos\zeta$ et $z=u\sin\zeta$; tum vero $d\mathrm{M}=dt\,du\sin\zeta$: at in illo calculo fit $x=\circ$, ut sit $\int xxd\mathrm{M}=\circ$, $\int xyd\mathrm{M}=\circ$, $\int xzd\mathrm{M}=\circ$. Hinc ergo habemus: $\int yyd\mathrm{M}=\mathrm{B}=\int dt\int du\sin\zeta(a-t+u\cos\zeta)^2$, $\int zzd\mathrm{M}=\mathrm{C}=\int dt\int uudu\sin\zeta^3$ et $\int yzd\mathrm{M}=\mathrm{F}=\int dt\int udu\sin\zeta^2(a-t+u\cos\zeta)$. Combinetur cum his elementum simile Z′ ad alteram partem situm, pro quo est u negativum, fietque:

$$\mathrm{B}=2\sin\zeta\int dt\int du((a-t)^2+uu\cos\zeta^2);\quad \mathrm{C}=2\sin\zeta^3\int dt\int uudu$$
$$\text{et } \mathrm{F}=2\sin\zeta^2\cos\zeta\int dt\int uudu.$$

Priori integratione instituta ponatur $u=b$, prodibitque

$$\mathrm{B}=2\sin\zeta\int dt(b(a-t)^2+\tfrac{1}{3}b^3\cos\zeta^2);\quad \mathrm{C}=\tfrac{2}{3}b^3\sin\zeta^3\int dt$$

et $\mathrm{F}=\frac{2}{3}b^3\sin\zeta^2\cos\zeta\int dt$. Denique posteriori integratione facta ponatur $t=2a$, fietque $\mathrm{B}=\frac{4}{3}ab\sin\zeta(aa+bb\cos\zeta^2)=\frac{1}{3}\mathrm{M}(aa+bb\cos\zeta^2)$; $\mathrm{C}=\frac{4}{3}ab^3\sin\zeta^3=\frac{1}{3}\mathrm{M}bb\sin\zeta^2$ et $\mathrm{F}=\frac{4}{3}ab^3\sin\zeta^2\cos\zeta=\frac{1}{3}\mathrm{M}bb\sin\zeta\cos\zeta$. Ex his colligitur momentum inertiae respectu primi axis ad laminam in I normalis $\mathrm{B}+\mathrm{C}=\frac{1}{3}\mathrm{M}(aa+bb)$: quod ergo non ab obliquitate, sed tantum a lateribus pendet. At pro reliquis axibus IF et IG posito an-

gulo

gulo AIF $= \theta$ invenimus $tang\ 2\theta = \frac{2F}{B-C} = \frac{2bb \sin\zeta \cos\zeta}{aa + bb \cos 2\zeta}$ seu $tang\ 2\theta = \frac{bb \sin 2\zeta}{aa + bb \cos 2\zeta}$, cujus duplex valor θ praebet utrumque angulum AIF et AIG. Momentum autem inertiae respectu horum axium est $B \sin\theta^2 + C \cos\theta^2 - 2F \sin\theta \cos\theta = \frac{1}{3} M (aa \sin\theta^2 + bb \cos\zeta^2 \sin\theta^2 + bb \sin\zeta^2 \cos\theta^2 - 2bb \sin\zeta \cos\zeta \sin\theta \cos\theta) =$

$$\tfrac{1}{6} M (aa - aa \cos 2\theta + bb - bb \cos 2\zeta \cos 2\theta - bb \sin 2\zeta \sin 2\theta)$$

sicque hoc momentum inertiae ita exprimi poterit

$$\tfrac{1}{6} M (aa + bb - aa \cos 2\theta - bb \cos(2\zeta - 2\theta)).$$

Cum igitur sit

$$\sin 2\theta = \frac{bb \sin 2\zeta}{\sqrt{(a^4 + 2aabb \cos 2\zeta + b^4)}} \text{ et } \cos 2\theta = \frac{aa + bb \cos 2\zeta}{\sqrt{(a^4 + 2aabb \cos 2\zeta + b^4)}}$$

istud momentum erit:

$$\tfrac{1}{6} M (aa + bb - \sqrt{(a^4 + 2aabb \cos 2\zeta + b^4)})$$

ubi ambiguitas signi radicalis et ambos axes IF et IG et momenta inertiae eorum respectu praebet. Patet ergo summam horum binorum aequalem esse momento primo.

COROLL. 1.

485. Si $aa + bb \cos 2\zeta$ habeat valorem positivum, sumto radicali positivo, angulus 2θ recto erit minor, ideoque angulus AIF semirecto minor; ac respectu axis IF momentum inertiae erit minimum $= \frac{1}{6} M (aa + bb - \sqrt{(a^4 + 2aabb \cos 2\zeta + b^4)})$; respectu axis IG vero medium.

COROLL. 2.

486. Si $aa + bb \cos 2\zeta$ habeat valorem negativum, et radicale pro axe IF capiatur positive, angulus 2θ erit recto major, ideoque angulus AIF semirecto major: atque axis IF respectu momentum inertiae erit minimum.

COROLL. 3.

487. Si ducatur diagonalis Bd per angulos acutos B et d, ob tang. AIB $= \frac{b \sin\zeta}{a + b \cos\zeta}$ reperitur $tang\ 2BIF = \frac{2ab \sin\zeta (aa - bb)}{a^4 + 2a^3 b \cos\zeta + 2aabb \cos 2\zeta + 2ab^3 \cos\zeta + b^4}$ unde

patet, in rhombo ubi $a = b$, ambas diagonales fore axes principales: dum in rectangulo recta AC est axis principalis.

EXEMPLUM. 1.

488. Si parallelogrammum $BbdD$ sit rectangulum, ob $\zeta = 90°$ fit $tang\ 2\theta = 0$, ideoque vel $\theta = 0$ vel $\theta = 90°$: unde respectu axis ad laminam in I normalis erit momentum inertiae $= \frac{1}{3} M (aa + bb)$: tum vero alter axis principalis est AC, cujus respectu momentum inertiae est $= \frac{1}{3} Mbb$; tertius vero axis principalis est in plano laminae ad AC normalis, cujus respectu momentum inertiae est $= \frac{1}{3} Maa$: existentibus lateribus $Bb = Dd = 2a$ et $BD = bd = 2b$.

EXEMPLUM. 2.

489. Si parallelogrammum $BbdD$ sit rhombus, ut sit $b = a$ et singula ejus latera $= 2a$, existentibus angulis acutis $= \zeta$, fit $tang\ 2\theta = \frac{\sin 2\zeta}{1 + \cos 2\zeta} = tang\ \zeta$, hincque vel $\theta = \frac{1}{2}\zeta$ vel $\theta = 90° + \frac{1}{2}\zeta$. Quare respectu primi axis principalis ad planum rhombi in I normalis est momentum inertiae $= \frac{2}{3} Maa$; reliqui ambo axes sunt diagonales Bd et Db, quorum illius Bd respectu momentum inertiae est $= \frac{1}{3} Maa (1 - \cos\zeta) = \frac{2}{3} Maa \sin \frac{1}{2}\zeta^2$, respectu vero alterius diagonalis Db est $= \frac{1}{3} Maa (1 + \cos\zeta) = \frac{2}{3} Maa \cos \frac{1}{2}\zeta^2$.

COROLL. 4.

490. Si ergo parallelogrammum abeat in quadratum, cujus latus $= 2a$, omnes rectae in ejus plano per centrum inertiae I ductae pro axibus principalibus haberi possunt, eritque eorum respectu momentum inertiae $= \frac{1}{3} Maa$; at respectu axis ad quadratum in I normalis duplo erit majus $= \frac{2}{3} Maa$.

PROBLEMA. 36.

491. Si corpus fuerit lamina tenuissima plana in figuram circuli efformata, invenire ejus axes principales, eorumque respectu momenta inertiae.

SOLUTIO.

Sit radius circuli $= a$, erit area $= \pi aa$, quae massam M refert: et cum unus axium principalium ad planum circuli in centro I sit normalis, Fig. 5[illegible] normalis, ponantur pro elemento quocunque dM in Z sito coordinatae $IP = y$, $PZ = z$, ob $dM = dydz$, erit $\int yydM = \int dy \int yydz = \int dy . yyz = \int yydy \surd (aa - yy)$ posito $z = \surd (aa - yy)$. At hoc integrale reducitur ad hanc formam $\int yydM = \frac{1}{8} a^4 \int \frac{dy}{\surd (aa - yy)} - \frac{1}{8} y (aa - 2yy) \surd (aa - yy)$, quod quater sumtum et posito $y = a$, dat $B = \frac{\pi}{4} a^4 = \frac{1}{4} Maa$. Simili modo vero fit $\int zzdM = C = \frac{1}{4} Maa$. Deinde $\int yzdM$ si ex altera diametri parte simile elementum conjungatur, ad nihilum reducitur, ita ut sit $\int yzdM = F = 0$. Hinc cum $B - C = 0$, oritur $tang\ 2\theta = \frac{0}{0}$, sicque angulus θ est indeterminatus, ex quo cognoscimus, quod per se est clarum, omnes diametros pro axibus principalibus haberi posse, quorum respectu sit momentum inertiae $= \frac{1}{4} Maa$. At respectu primi axis ad planum circuli in centro I normalis est momentum inertiae $B + C = \frac{1}{2} Maa$.

SCHOLION.

492. Cum hic elementum massae dM esset $= dydz$, notandum est, id semper manere positivum, etiamsi vel y vel z capiatur negative, quo casu etiam differentialia alioquin fierent negativa. In hoc ergo calculo probe cavendum est, ne cum coordinatae negative accipiuntur, elementi massae dM expressio in calculum tanquam negativa infratur. Ex quo conveniet pro singulis regionibus, ubi coordinatae signis contrariis afficiuntur, calculum seorsim institui. Ceterum idem valor $B = \int yydM = \frac{1}{4}\pi a^4$ eruitur, si ponatur $IZ = r$ et angulus $AIZ = \phi$, erit enim $dM = rdrd\phi$ et $y = r \cos \phi$, unde $yydM = r^3 drd\phi \cos \phi^2$ quae secundum variabilem r integrata posito $r = a$ dat $\frac{1}{4} a^4 d\phi \cos \phi^2$ cujus integrale ob $\cos \phi^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\phi$ praebet $\frac{1}{4} a^4 (\frac{1}{2} \phi + \frac{1}{4} \sin 2\phi)$. Statuatur nunc $\phi = 2\pi$, ob $\sin 4\pi = 0$, prodit $\frac{1}{4} \pi a^4$ ut ante; unde patet superiorem cautelam legi continuitatis non repugnare.

PROBLEMA. 37.

Fig. 55. 493. Si corpus sit lamina tenuissima plana figuram habens quamcunque ACBD, definire ejus axes principales, eorumque respectu momenta inertiae.

SOLUTIO.

Sit I figurae centrum inertiae, manifestumque est, rectam ad ejus planum in I normalem fore unum axium principalium; tum in plano ipso

ipso sumtis binis directricibus AB et CD inter se normalibus, pro elemento quovis dM in Z ponantur coordinatae $IP = y$ et $PZ = z$, erit $dM = dydz$, hincque $\int yydM = \int dy \int yydz = \int dy . yyz$. Posito ergo $z = PM$, fit $\int yydM = \int PM . yydy$, cujus valor pro singulis regionibus AIC, AID, BIC et BID erui debet, eorumque summa erit $= B$, ut sit

$$B = \int IP^2 . MN . d . IP + \int IQ^2 . \mu\nu . d . IQ.$$

Deinde est $\int zzdM = \int dy \int zzdz = \frac{1}{3} \int dy . z^3 = \frac{1}{3} \int PM^3 . dy$, ita ut sit

$$C = \frac{1}{3} \int (PM^3 + PN^3)\, d . IP + \frac{1}{3} \int (Q\mu^3 + Q\nu^3)\, d . IQ.$$

Porro est $\int yzdM = \int dy \int yzdz = \frac{1}{2} \int yzzdy = \frac{1}{2} \int PM^2 . ydy$, cujus valor in regionibus AID et BIC est negativus, in BID vero positivus, unde habebitur

$$F = \frac{1}{2} \int IP\, (PM^2 - PN^2)\, d . IP - \frac{1}{2} \int IQ\, (Q\mu^2 - Q\nu^2)\, d . IQ.$$

At vero tota massa M erit

$$M = \int MN . d . IP + \int \mu\nu . d . IQ.$$

His valoribus inventis erit momentum inertiae respectu axis ad planum in I normalis $= B + C$, tum sint reliqui axes principales FIf et GIg, ac posito angulo $AIF = \theta$ reperimus $tang\ 2\theta = \frac{2F}{B - C}$, et momentum inertiae respectu axis FIf $= B \sin \theta^2 + C \cos \theta^2 - 2F \sin \theta \cos \theta =$

$$\tfrac{1}{2} B + \tfrac{1}{2} C - \tfrac{1}{2} (B - C) \cos 2\theta - F \sin 2\theta.$$

Verum ob $\sin 2\theta = \frac{2F}{\surd ((B - C)^2 + 4FF)}$ et $\cos 2\theta = \frac{B - C}{\surd ((B - C)^2 + 4FF)}$ obtinebitur momentum inertiae respectu

$$\text{axis } FIf = \tfrac{1}{2} (B + C) - \tfrac{1}{2} \surd ((B - C)^2 + 4FF) \text{ et}$$
$$\text{axis } GIg = \tfrac{1}{2} (B + C) + \tfrac{1}{2} \surd ((B - C)^2 + 4FF)$$

COROLL. 1.

494. Momenta ergo inertiae respectu axium Ff et Gg simul sumta aequalia sunt momento inertiae respectu primi axis principalis, qui ad planum laminae in I est normalis.

COROLL. 2.

495. Si recta AB fuerit figurae diameter, ut sit PM = PN, valor litterae F evanescit, id quod etiam evenit si recta CD fuerit diameter, ut sumto IQ = IP sit $Q\mu$ = PM. At quoties fit F = 0, tum ob $tang\ 2\theta = 0$, ipsae rectae AB et CD erunt axes principales.

COROLL. 3.

496. Casu hoc quo F = 0, et AB et CD sunt axes principales, erit momentum inertiae respectu axis Ff = C et, respectu axis CD = B, quae

quae si insuper fuerint aequalia ob $tang^2\, 2\,\theta = \frac{0}{0}$, omnes rectae per I ductae paria habent momenta $= B = C$.

COROLL. 4.

497. Si praeter diametrum AB reperiatur alia recta per I ducta, cujus respectu momentum inertiae illi sit aequale, tum omnes plane rectae per I ductae eadem proprietate gaudebunt, et momenta inertiae habebunt aequalia.

PROBLEMA. 38.

Fig. 56. 498. Si corpus fuerit lamina tenuissima plana in figuram polygoni regularis efformata, ejus axes principales eorumque respectu momenta inertiae definire.

SOLUTIO.

Centrum inertiae talis polygoni regularis erit in centro circuli circumscripti I, cujus radius ponatur $IA = a$, numerusque laterum $= n$. Hinc fit angulus $AIB = \frac{2\pi}{n}$, eoque per rectam IG bisecto angulus $AIG = \frac{\pi}{n}$ atque $AB = 2a\, sin\frac{\pi}{n}$ et $IG = a\, cos\frac{\pi}{n}$: quare area trianguli $AIB = aa\, sin\frac{\pi}{n}\, cos\frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}aa\, sin\frac{2\pi}{n}$, et area polygoni totius $= \frac{n}{2}aa\, sin\frac{2\pi}{n}$ vicem massae M gerens. Iam primo observo (497) omnes rectas in plano laminae per I ductas aequalia esse habituras momenta, quorum bina simul sumta efficiant momentum respectu axis ad planum laminae in I normalis. Hoc vero momentum ex superioribus colligi potest. Consideretur enim triangulum AIB, cujus massa ponatur $= m$, et centrum inertiae in i, ut sit $Gi = \frac{1}{3}a\, cos\frac{\pi}{n}$ et $Ii = \frac{2}{3}a\, cos\frac{\pi}{n}$ existente $AG = a\, sin\frac{\pi}{n}$. Quia igitur hoc triangulum est isosceles, per §. 481. erit ejus momentum inertiae respectu axis ad planum trianguli in i normalis $= \frac{1}{2}m.\, Gi^2 + \frac{1}{6}m.\, AG^2 = m(\frac{1}{18}aa\, cos\frac{\pi^2}{n} + \frac{1}{6}aa\, si\frac{\pi^2}{n})$; hincque respectu axis ad idem planum in I normalis $= m(\frac{1}{18}aa$ cos

$cos\frac{\pi^2}{n} + \frac{1}{6}aa\, si\frac{\pi^2}{n} + \frac{4}{9}aa\, cos\frac{\pi^2}{n} = maa(\frac{1}{2}cos\frac{\pi^2}{n} + \frac{1}{6}si\frac{\pi^2}{n})$ quod per n multiplicatum ob $mn = M$ dabit momentum totius polygoni respectu axis ad id in I normalis $= Maa(\frac{1}{2}cos\frac{\pi^2}{n} + \frac{1}{6}/\frac{\pi^2}{n}) = \frac{1}{3}Maa(1 + \frac{1}{2}cos\frac{2\pi}{n})$. Respectu vero cujusque axis in plano laminae per punctum I ducti erit momentum inertiae $= \frac{1}{6}Maa(1 + \frac{1}{2}cos\frac{2\pi}{n})$ illo scilicet duplo minus.

COROLL. 1.

499. Si praeterea latus polygoni ponatur $AB = c$, ut sit $c = 2a\, si\frac{\pi}{n}$, ob $a = \frac{c}{2si\frac{\pi}{n}}$ erit momentum inertiae respectu axis principalis ad planum in I normalis $= \frac{Mcc}{12si\frac{\pi^2}{n}}(1 + \frac{1}{2}cos\frac{2\pi}{n}) = \frac{1}{12}Mcc.\frac{2 + cos\frac{2\pi}{n}}{1 - cos\frac{2\pi}{n}}$, respectu reliquorum vero axium principalium est duplo minus.

COROLL. 2.

500. Si praeter radium circuli circumscripti $IA = a$, latus polygoni $AB = c$ introducatur, ob $si\frac{\pi}{n} = \frac{c}{2a}$ et $cos\frac{2\pi}{n} = 1 - \frac{cc}{2aa}$ erit momentum respectu axis in I normalis $= \frac{1}{3}Maa(1 + \frac{1}{2} - \frac{cc}{4aa}) = \frac{1}{12}M(6aa - cc)$, respectu axium vero in ipso plano polygoni per I ductorum est duplo minus.

PROBLEMA. 39.

501. Si corpus fuerit cylindrus rectus, cujus axis $Aa = 2a$ et radius basis $AB = AD = c$, invenire ejus axes principales, eorumque respectu momenta inertiae. Fig. 57.

SOLUTIO.

Cum area basis sit $= \pi cc$, erit cylindri soliditas seu massa $= 2\pi acc = M$. In axis autem puncto medio I erit ejus centrum inertiae, ut

sit

sit $AI = Ia = a$: at ipse hic axis Aa unus manifesto est axium principalium, per quem sumto plano quocunque $BDbd$ pro elemento quovis dM in Z sito habebuntur coordinatae $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ ut sit $dM = dxdydz$. Hinc colligantur valores sequentes:

1°. $\int xxdM = \int xxdxdydz$: ubi sumtis primo x et y constantibus et posito post integrationem $z = \sqrt{(cc-yy)}$, habetur $\int xxdx \int dy \sqrt{(cc-yy)}$, at $\int dy \sqrt{(cc-yy)}$ dat aream sectionis per X factae $= \pi cc$, ut habeatur $\pi cc \int xxdx$, cujus integrale tam ad A quam a extensum praebet $\frac{2}{3}\pi cca^3$, ut sit $\int xxdM = A = \frac{1}{3} Maa$.

2°. $\int yydM = \int yydxdydz = \int dx \int yydy \sqrt{(cc-yy)}$, at posito $y = c$ est $\int yydy \sqrt{(cc-yy)} = \frac{1}{16}\pi c^4$, quod quater sumi debet, ut sit $\int yydM = \frac{1}{4}\pi c^4 \int dx$, hincque habebitur per totum cylindrum $\int yydM = \frac{2}{4}\pi c^4 a = \frac{1}{4} Mcc = B$.

3°. $\int zzdM = \int zzdxdydz$, ubi si primo x et z pro constantibus sumantur, posito $y = \sqrt{(cc-zz)}$ habetur $\int dx \int zzdz \sqrt{(cc-zz)}$, cujus valor ut ante colligitur $\int zzdM = \frac{1}{4} Mcc = C = B$.

4°. $\int yzdM$ si simile elementum dM infra planum $BDbd$ cum eo conjungatur, in nihilum abit, ita ut prodeat $\int yzdM = F = 0$.

His positis respectu axis Aa erit momentum inertiae $= B + C = \frac{1}{2} Mcc$: pro reliquis vero binis axibus ad illum normalibus fit $\tang 2\vartheta = \frac{2F}{B-C} = \frac{0}{0}$; ita ut omnes diametri sectionis in I ad Aa normalis tanquam axes principales spectari possint, quorum omnium respectu erit momentum inertiae $= A + B = M(\frac{1}{3}aa + \frac{1}{4}cc)$.

COROLL. 1.

502. Si alius axis quicunque per I transiens accipiatur, qui faciat cum axe Aa angulum $= \zeta$, ejus respectu momentum inertiae erit $= (B+C) \cos \zeta^2 + (A+B) \sin \zeta^2 = M(\frac{1}{2} cc \cos \zeta^2 + \frac{1}{3} aa \sin \zeta^2 + \frac{1}{4} cc \sin \zeta^2) = M(\frac{1}{3} aa \sin \zeta^2 + \frac{1}{2} cc - \frac{1}{4} cc \sin \zeta^2)$.

COROLL. 2.

503. Fieri potest, ut omnia momenta respectu rectarum per I ductarum fiant inter se aequalia, quod evenit si fuerit $\frac{1}{3}aa = \frac{1}{4}cc$ seu $a = \frac{c\sqrt{3}}{2}$, ideoque $\frac{c}{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, et angulus $AaB = 30°$, sive triangulum BaD aequilaterum, quo casu singula momenta sunt $= \frac{1}{2} Mcc = \frac{1}{8} M. BD^2$.

PRO-

PROBLEMA. 40.

504. Si corpus fuerit conus rectus, cujus vertex A, altitudo $AC = a$, et radius basis $GB = CD = c$, invenire ejus axes principales eorumque respectu momenta inertiae. Fig. 58

SOLUTIO.

Cum area basis sit $= \pi cc$ erit soliditas eademque massa $M = \frac{1}{3}\pi acc$: tum vero centrum inertiae I ita in axe est situm, ut sit $CI = \frac{1}{4} a$ et $AI = \frac{3}{4} a$. Sumatur jam elementum quodcunque dM in Z, pro quo sint coordinatae $IX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, erit $dM = dxdydz$. Ponatur autem $AX = t$, erit $XM = \frac{ct}{a}$, et $x = \frac{3}{4}a - t$, nihilo vero minus capi debet $dM = dtdydz$. Evolvantur ergo sequentes formulae:

1°. $\int xxdM = A = \int (\frac{3}{4}a - t)^2 dtdydz$, ubi sumtis primo t et y constantibus positoque $z = \sqrt{(\frac{cctt}{aa} - yy)}$ habebitur: $\int (\frac{3}{4}a - t)^2 dt \int dy \sqrt{(\frac{cctt}{aa} - yy)}$; ubi pro tota sectione in X est $\int dy \sqrt{(\frac{cctt}{aa} - yy)} = \frac{\pi cctt}{aa}$, ita ut integrandum supersit $\frac{\pi cc}{aa} \int tt\,dt (\frac{3}{4}a - t)^2 = \frac{\pi cc}{aa} (\frac{3}{16} aat^3 - \frac{3}{8} at^4 + \frac{1}{5} t^5)$. Ponatur $t = a$ fietque $A = \frac{1}{80}\pi cca^3 = \frac{3}{80} Maa$.

2°. $\int yydM = B = \int yydtdydz = \int dt \int yydy \sqrt{(\frac{cctt}{aa} - yy)}$ per primam integrationem. At manente adhuc t constante est $\int yydy \sqrt{(\frac{cctt}{aa} - yy)}$, posito $y = \frac{ct}{a}$ et quater sumtum $= \frac{1}{4}\pi . \frac{c^4t^4}{a^4}$, ut etiamnum integrari debeat $\int \frac{1}{4}\pi . \frac{c^4t^4}{a^4} dt$, unde posito pro toto cono $t = a$, fit $B = \frac{1}{20}\pi ac^4 = \frac{3}{20} Mcc$.

3°. $\int zzdM = C$ pari modo dat $C = \frac{3}{20} Mcc = B$, at $\int yzdM = F$ manifesto evanescit ut ante.

Cum ergo AC sit unus axium principalium, ejus respectu momentum inertiae est $= B + C = \frac{3}{10} Mcc$. Reliqui axes principales sunt diametri omnes sectionis in I ad axem normalis, quorum respectu momentum inertiae est $A + B = \frac{3}{80} M(aa + 4cc)$.

CO-

COROLL.

505. Casu quo $aa + 4cc = 8cc$, seu $a = 2c$, hoc est AC = BD, omnes rectae per I ductae axium principalium proprietate gaudent, eorumque respectu erit momentum inertiae $= \frac{3}{20} Mcc$.

PROBLEMA. 41.

Fig. 59. 506. Si corpus fuerit globus ex materia homogenea confectus, cujus centrum I et radius IA $= a$, definire ejus momentum inertiae respectu axis cujusvis per ejus centrum transeuntis.

SOLUTIO.

Ob radium IA $= a$, erit area circuli maximi $= \pi aa$, et superficies globi $= 4\pi aa$, hinc ejus soliditas seu massa $M = \frac{4}{3}\pi a^3$. Iam positis pro elemento quocunque dM in Z posito coordinatis IX $= x$, XY $= y$ et YZ $= z$, erit respectu axis AC momentum inertiae $= \int dM (yy + zz)$. Ponatur XZ $= r$, et angulus YXZ $= \phi$, erit $y = r \cos \phi$, $z = r \sin \phi$, et $dM = r dr d\phi dx$, unde $\int rrdM = \int r^3 dr d\phi dx = 2\pi \int r^3 dr dx$ ob $\int d\phi = 2\pi$: nunc sumto r variabili, positoque $r = XM = \sqrt{(aa - xx)}$ habebimus $\frac{1}{2}\pi \int dx (aa - xx)^2 = \frac{1}{2}\pi (a^4 x - \frac{2}{3} aax^3 + \frac{1}{5} x^5)$. Statuatur $x = a$ pro altero hemisphaerio, et duplum hujus expressionis dabit momentum inertiae quaesitum $= \pi . \frac{8}{15} a^5 = \frac{2}{5} Maa$.

PROBLEMA. 42.

Fig. 60. 507. Si corpus fuerit conoides quodcunque revolutione lineae AMB circa axem AC genitum, ejus axes principales eorumque respectu momenta inertiae invenire.

SOLUTIO.

Sit AC $= a$, et pro curva AX $= t$, et XM $= u$, ita ut detur aequatio inter t et u: erit soliditas seu massa $M = \pi \int uudt$ posito post integrationem $t = a$. Tum vero centrum inertiae erit in I, ut sit AI $= \frac{\int tuudt}{\int uudt}$. Ponatur brevitatis ergo AI $= f$ ut sit $\int tuudt = f \int uudt$: est vero AC unus axium principalium. Iam pro elemento dM in Z posito sint coordinatae IX $= x = f - t$; XY $= y$, et YZ $= z$, ac ponatur XZ $= r$, angulus YXZ $= \phi$, erit $dM = r dr dt d\phi$, $y = r \cos \phi$ et $z = r \sin \phi$. Nunc considerentur formulae sequentes.

1°. $\int xxdM = \int (f-t)^2 r dr dt d\phi = 2\pi \int (f-t)^2 r dr dt$ ob $\int d\phi = 2\pi$. Sit adhuc t constans, et posito $r = XM = u$, fiet $\int xxdM = \pi \int (f-t)^2 uudt = A$, ideoque $A = \pi ff \int uudt - 2\pi f \int tuudt + \pi \int ttuudt = -\pi ff \int uudt + \pi \int ttuudt = M(-ff + \frac{\int ttuudt}{\int uudt})$.

2°. $\int yydM = \int r^3 dr dt d\phi \cos \phi^2 = \pi \int r^3 dr dt$ ob $\int d\phi \cos \phi^2 = \int d\phi (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\phi) = \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{4} \sin 2\phi$, quae posito $\phi = 2\pi$ abit in π. Porro prodit $\frac{\pi}{4} \int u^4 dt$ posito $r = u$, ita ut sit $\int yydM = B = \frac{\pi}{4} \int u^4 dt = \frac{M \int u^4 dt}{4 \int uudt}$, cui etiam aequale fit $\int zzdM = C$. At $\int yzdM = F$ evanescit.

His evolutis prodit momentum inertiae respectu axis AC $= B + C = \frac{M \int u^4 dt}{2 \int uudt}$, posito post integrationem $t = a$, tum vero in sectione ad AC in I normali omnes diametri locum axium principalium sustinent, eorumque respectu reperitur momentum inertiae $= A + B = M(-ff + \frac{4 \int ttuudt + \int u^4 dt}{4 \int uudt}) = M(\frac{\int uudt (4tt + uu)}{4 \int uudt} - ff)$.

EXEMPLUM. 1.

508. Sit corpus hemisphaerium seu AMB quadrans circuli radii CA = CB $= a$: erit $uu = 2at - tt$, hinc $\int uudt = att - \frac{1}{3} t^3 = \frac{2}{3} a^3$, posito $t = a$; porro $\int tuudt = \frac{2}{3} at^3 - \frac{1}{4} t^4 = \frac{5}{12} a^4$, ergo $f = AI = \frac{5}{8} a$ et CI $= \frac{3}{8} a$. Deinde $\int u^4 dt = \int dt (4aatt - 4at^3 + t^4) = \frac{4}{3} aat^3 - at^4 + \frac{1}{5} t^5 = \frac{8}{15} a^5$, et $\int ttuudt = \int ttdt (2at - tt) = \frac{1}{2} at^4 - \frac{1}{5} t^5 = \frac{3}{10} a^5$. Quare respectu axis AC est momentum inertiae $= \frac{M . 8a^5 . 3}{15 . 4a^3} = \frac{2}{5} Maa$, et respectu axis cujusvis alius ad istum in I normalis $= M(-\frac{25}{64} aa + \frac{13}{20} aa) = \frac{83}{320} Maa$: ita ut illud momentum sit ad hoc ut 128 ad 83.

EXEMPLUM. 2.

509. Sit corpus conus truncatus cujus axis AC $= a$, radius alterius basis BC $= c$, alterius AD $= b$, eritque $u = b + \frac{(c-b)t}{a}$ et $uu = bb + \frac{2b(c-b)t}{a} + \frac{(c-b)^2 tt}{aa}$, unde pro centro inertiae I inveniendo, erit $\int uudt = bbt + \frac{b(c-b)tt}{a} + \frac{(c-b)^2 t^3}{3aa} = \frac{1}{3} a (bb + bc + cc)$ ideoque soliditas seu massa $M = \frac{1}{3} \pi a (bb + bc + cc)$, deinde $\int tuudt = \frac{1}{2} bbtt + \frac{2b(c-b)t^3}{3a} + \frac{(c-b)^2 t^4}{4aa} = \frac{1}{12} aa (bb + 2bc + 3cc)$ unde Fig. 61.

erit

oritur intervallum $AI = f = \frac{a(bb+2bc+3cc)}{4(bb+bc+cc)}$ et $CI = \frac{a(cc+2bc+3bb)}{4(bb+bc+cc)}$.
Porro ob $u^4 = b^4 + \frac{4b^3(c-b)t}{a} + \frac{6bb(c-b)^2tt}{aa} + \frac{4b(c-b)^3t^3}{a^3} + \frac{(c-b)^4t^4}{a^4}$ erit $\int u^4dt = b^4t + \frac{2b^3(c-b)tt}{a} + \frac{2bb(c-b)^2t^3}{aa} + \frac{b(c-b)^3t^4}{a^3} + \frac{(c-b)^4t^5}{5a^4}$ et facto $t = a$, $\int u^4dt = \frac{1}{5}a(b^4 + b^3c + bbcc + bc^3 + c^4)$, denique $\int ttuudt = \frac{1}{3}bbt^3 + \frac{b(c-b)t^4}{2a} + \frac{(c-b)^2t^5}{5aa} = \frac{1}{30}a^3(bb+3bc+6cc)$.

Ex his colligitur momentum inertiae respectu axis $AC = \frac{3}{10}M. \frac{b^4+b^3c+bbcc+bc^3+c^4}{bb+bc+cc} = \frac{3}{10}M. \frac{b^5-c^5}{b^3-c^3}$:
at respectu axium ad AC in I normalium fit momentum $= \frac{3}{20}M \frac{b^4+b^3c+bbcc+bc^3+c^4}{bb+bc+cc} + \frac{3}{80}Maa\left(\frac{8(bb+3bc+6cc)}{bb+bc+cc} - \frac{5(bb+2bc+3cc)^2}{(bb+bc+cc)^2}\right)$
quae reducitur ad hanc formam:

$$\frac{3}{20}M. \frac{b^4+b^3c+bbcc+bc^3+c^4}{bb+bc+cc} + \frac{3}{80}Maa\frac{(b+c)^4+4bbcc}{(bb+bc+cc)^2}.$$

COROLL. 1.

510. Si $b = c$ prodit casus cylindri, quo fit $AI = f = \frac{1}{2}a$, mom. inert. respectu $AC = \frac{1}{2}Mcc$, et mom. inert. respectu axium ad illum in I normalium $= \frac{1}{4}Mcc + \frac{1}{12}Maa$.

COROLL. 2.

511. Si $b = 0$, prodit casus coni recti, quo fit $AI = f = \frac{3}{4}a$; mom. inert. respectu $AC = \frac{3}{10}Mcc$ et mom. inert. respectu axium ad illum in I normalium $= \frac{3}{20}Mcc + \frac{3}{80}Maa$, ut supra.

COROLL. 3.

512. Ut omnia momenta respectu axium per I ductorum fiant aequalia, debet esse $4(b^4 + b^3c + bbcc + bc^3 + c^4) = aa.\frac{(b+c)^4+4bbcc}{bb+bc+cc}$ ideoque datis basibus coni truncati, altitudo $AC = a$, ita debet definiri ut sit $aa = \frac{4(bb+bc+cc)(b^4+b^3c+bbcc+bc^3+c^4)}{(b+c)^4+4bbcc}$.

EXEM-

EXEMPLUM 3.

513. Sit corpus sphaeroides ellipticum conversione semiellipsis AEB circa axem AB natum, in cujus ergo medio I est centrum inertiae. Ponatur semiaxis $AI = IB = a$, et conjugatus $IE = c$, erit $uu = \frac{cc}{aa}(2at-tt)$: et in integralibus poni oportet $t = 2a$. Hinc habebimus $\int uudt = \frac{cc}{aa}(att-\frac{1}{3}t^3) = \frac{4}{3}acc$, ideoque massam $M = \frac{4}{3}\pi acc$: deinde $\int tuudt = \frac{cc}{aa}(\frac{2}{3}at^3 - \frac{1}{4}t^4) = \frac{4}{3}aacc$, ergo $AI = f = a$, porro $\int ttuudt = \frac{cc}{aa}(\frac{1}{2}at^4 - \frac{1}{5}t^5) = \frac{8}{5}a^3cc$, et ob $u^4 = \frac{c^4}{a^4}(4aatt - 4at^3 + t^4)$ erit $\int u^4dt = \frac{c^4}{a^4}(\frac{4}{3}aat^3 - at^4 + \frac{1}{5}t^5) = \frac{16}{15}ac^4$. Ex his colligitur momentum inertiae respectu axis $AB = \frac{2}{5}Mcc$, at respectu axium ad AB in I normalium $= \frac{1}{5}M(aa+cc)$.

Fig. 62.

EXEMPLUM. 4.

514. Si corpus sit lens ex duobus segmentis sphaerae aequalibus composita, seu ortum ex conversione figurae AEB, ex duobus semisegmentis circuli aequalibus AIE et BIE formatae, circa axem AB, in cujus ergo medio I erit centrum inertiae. Ponatur semiaxis $AI = BI = a$, et $IE = IF = b$, erit diameter circuli $= \frac{aa+bb}{a}$, quem tantisper ponamus $= 2c$, ut sit $c = \frac{aa+bb}{2a}$. Quare fiet $uu = 2ct - tt$, et integralibus superioribus poni debet $t = a$, quo facto ea debebunt duplicari: nisi quod $AI = f$ per se sit $= a$, ideoque $\Lambda = M(aa - \frac{2a\int tuudt + \int ttuudt}{\int uudt})$. Hinc nanciscimur $\int tuudt = \frac{2}{3}a^3c - \frac{1}{4}a^4$; $\int uudt = aac - \frac{1}{3}a^3$ et $M = 2\pi(aac - \frac{1}{3}a^3)$; $\int ttuudt = \frac{1}{2}a^4c - \frac{1}{5}a^5$, et $\int u^4dt = \frac{4}{3}a^3cc - a^4c + \frac{1}{5}a^5$. Ex his colligitur momentum inertiae respectu axis $AB = \frac{1}{15}M.\frac{20acc-15aac+3a^3}{3c-a} = \frac{1}{15}M.\frac{a^4+5aabb+10b^4}{aa+3bb}$
at respectu axium EF ad AB in I normalium:

Fig. 63.

$$\frac{1}{30}M\left(\frac{a^3-5aac+20acc}{3c-a}\right) = \frac{1}{30}M.\frac{7a^4+15aabb+10b^4}{aa+3bb}.$$

PLO-

PROBLEMA. 42.

515. Si corpus fuerit parallelepipedum rectangulum, invenire ejus axes principales, eorumque respectu momenta inertiae.

SOLUTIO.

Fig. 64. Sit rectangulum BDbd basis parallelepipedi, cujus latera sint Bb $= 2a$, BD $= 2b$, altitudo vero $= 2c$, atque manifestum est, in puncto medio parallelepipedi fore ejus centrum inertiae, et axes principales fore tres rectas per id punctum lateribus parallelas. Quaeratur ergo momentum inertiae respectu axis altitudini paralleli, qui basi in puncto medio G perpendiculariter insistet. Consideretur hoc rectangulum BDbd tanquam sectio basi parallela a centro inertiae distans intervallo $= x$, et ponatur GY $= y$, et YZ $= z$, erit $dxdydz$ elementum soliditatis seu massae dM, unde fit $M = 8abc$. Tum vero habebimus $\int xxdM = \int xx\,dx\,dy\,dz$, et bis integrando per y et z variabiles, ponendoque $y = a$, et $z = b$, duplicentur integralia, ut per totam sectionem extendantur, erit $\int xxdM = 4ab\int xxdx = \frac{4}{3}abx^3$: jam posito $x = c$, ac duplicando, erit per totum parallelepipedum $\int xxdM = A = \frac{8}{3}abc^3 = \frac{1}{3}Mcc$, simili modo erit $\int yydM = B = \frac{1}{3}Maa$ et $\int zzdM = C = \frac{1}{3}Mbb$: atque $\int yzdM = F = 0$. Ex his concluditur momentum inertiae respectu axis principalis altitudini paralleli seu ad basin BDbd perpendicularis $= B + C = \frac{1}{3}M(aa + bb)$: deinde momentum inertiae respectu axis lateri Bb paralleli $= \frac{1}{3}M(bb + cc)$, et respectu axis lateri BD paralleli $= \frac{1}{3}M(aa + cc)$.

COROLL. 1.

Fig. 65. 516. Si ergo ABCD$abcd$ fuerit tale parallelepipedum rectangulum, cujus massa sit $= M$: erunt ejus axes principales lateribus AB, AC, AD paralleli per punctum medium transeuntes, eritque momentum inertiae

$$\text{respectu axis lateri}\begin{Bmatrix}AB\\AC\\AD\end{Bmatrix}\text{paralleli} = \begin{Bmatrix}\frac{1}{12}M(AC^2+AD^2)\\\frac{1}{12}M(AB^2+AD^2)\\\frac{1}{12}M(AB^2+AC^2)\end{Bmatrix}$$

COROLL. 2.

517. Si corpus fuerit cubus, cujus latus $= a$, haec tria momenta fiunt inter se aequalia; ideoque momenta inertiae respectu omnium plane axium per centrum cubi ductorum erunt inter se aequalia et quidem $= \frac{1}{6}Maa$. Talis autem aequalitas in omnibus corporibus regularibus locum habere debet.

PRO-

PROBLEMA. 43.

518. Si corpus fuerit globus excavatus, ut cavitas sit etiam sphaera eodem centro praedita, definire ejus momentum inertiae respectu omnium axium per ejus centrum ductorum. Fig. 66.

SOLUTIO.

Sit I centrum, et radius globi IA $= a$, cavitatis vero I$a = b$, ut crassities crustae sphaericae sit $= a - b = Aa$, erit ergo massa hujus globi cavi $= \frac{4}{3}\pi(a^3 - b^3)$, quae ponatur $= M$; omnes autem axes per centrum I ductos paria habere momenta inertiae, per se est manifestum; quaeramus ergo momentum inertiae respectu axis AB. Ac si globus esset solidus, ob ejus massam $= \frac{4}{3}\pi a^3$, foret ejus momentum inertiae $= \frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \frac{2}{5}aa = \frac{8}{15}\pi a^5$, globi autem e medio sublati $= \frac{8}{15}\pi b^5$, quo ab illo subtracto remanere debet momentum inertiae globi cavi, quod ergo erit $= \frac{8}{15}\pi(a^5 - b^5)$ $= \frac{2}{5}M.\frac{a^5 - b^5}{a^3 - b^3}$. Habebitur ergo momentum inertiae pro globo excavato respectu omnium axium per centrum ductorum $= \frac{2}{5}M.$ $\frac{a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4}{aa + ab + bb}$.

COROLL. 1.

519. Si $b = 0$, prodit casus globi solidi, cujus radius $= a$, pro quo momentum inertiae est ut supra $= \frac{2}{5}Maa$ respectu omnium axium per centrum ductorum.

COROLL. 2.

520. Si crusta haec sphaerica fuerit tenuissima, ut sit proxime $b = a$, erit momentum inertiae $= \frac{2}{3}Maa$, quae formula valet pro superficie sphaerica. Sin autem crassitiem Aa, quae sit $= c = a - b$, omnino negligere nolimus, erit momentum $= \frac{2}{5}M.\frac{5a^4c - 10a^3c^2}{3aac - 3acc} = \frac{2}{3}M(aa - ac)$.

SCHOLION.

521. Hi casus abunde sufficiunt, non solum ut hinc pro pluribus corporibus momenta inertiae depromere, sed etiam si alia corpora occurrant, calculum eo facilius instituere valeamus. Quamobrem progrediamur ad motus gyratorios corporum a gravitate sollicitatorum definiendos, quandoquidem hic est praecipuus casus, ad quem haec tractatio accommodari solet.

CAPUT

CAPUT VII. DE MOTU OSCILLATORIO CORPORUM GRAVIUM.

PROBLEMA. 44.

522. Si corpus rigidum fuerit mobile circa axem horizontalem fixum, ejusque motus a sola gravitate turbetur, determinare mutationem momentaneam in motu gyratorio productam.

SOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 67. Communem hic gravitatis hypothesin assumo, qua singula corporis elementa massis proportionaliter deorsum urgentur secundum directiones inter se parallelas. Quatenus ergo corpus est rigidum, his omnibus viribus aequivalet una vis ponderi corporis aequalis, cujus directio deorsum tendens per ejus centrum inertiae transit. Quare si corporis massa dicatur $= M$, ejusque centrum inertiae sit in I, indeque deorsum ducatur recta verticalis IG, ob gravitatem corpus sollicitabitur in directione IG a vi, quae ipsius massae M aequalis est statuenda, quandoquidem ipsam massam M per pondus hujus corporis exprimimus. Porro cum axis gyrationis sit horizontalis, ad eum normaliter constituatur planum per centrum inertiae I transiens, quod erit verticale, et ipso plano tabulae referatur: axis igitur gyrationis ad hoc planum normalis per punctum O trajectus concipiatur, unde ad I ducta recta OI exhibet distantiam centri inertiae I ab axe gyrationis. His praemissis teneat nunc corpus AEBF situm in figura repraesentatum, ductaque verticali OC, ex angulo COI situs corporis innotescit. Ponatur intervallum $OI = f$, et ad tempus $= t$ angulus $COI = \phi$, erit vis $IG = M$ momentum respectu axis gyrationis $= Mf \sin\phi$, tendens ad angulum COI minuendum, quae in probl. 22. loco momenti Vf est substituenda. Praeterea vero necesse est nosse momentum inertiae corporis respectu axis gyrationis O, ibi per $\int rrdM$ indicatum: hunc in finem concipiatur axis per ipsum centrum inertiae I transiens axi gyrationis parallelus, cujus respectu sit momentum inertiae corporis $= Mkk$, eritque ejusdem momentum inertiae respectu axis gyrationis $O = M(ff+kk)$ ob intervallum horum axium $OI = f$. Hinc si corpus ita gyretur, ut recta OI accedat ad verticalem OC, fueritque celeritas angularis $= z$, quia

quia ea a vi sollicitante augetur, per §. 408. erit $dz = \frac{2g.\,Mf \sin\phi}{M(ff+kk)}\,dt$ seu $dz = \frac{2fg\,dt \sin\phi}{ff+kk}$; sin autem recta OI recederet a verticali OI celeritate angulari $= z$, foret $dz = \frac{-2fg\,dt \sin\phi}{ff+kk}$. Cum autem illo casu sit $z = \frac{-d\phi}{dt}$, hoc vero $z = \frac{d\phi}{dt}$, sumto dt constante pro utroque erit $dd\phi = \frac{-2fg\,dt^2 \sin\phi}{ff+kk}$, ubi signum $-$ adest, quia momentum vis sollicitantis tendit ad angulum ϕ minuendum.

COROLL. 1.

523. Si corpus in situ AEBF nullum adhuc habeat motum, a gravitate ita rectam verticalem OC versus urgebitur, ut tempusculo dt eo sit accessurum per angulum $= \frac{fg\,dt^2 \sin\phi}{ff+kk}$, qui est infinite parvus secundi ordinis.

COROLL. 2.

524. Si ergo corpus fuerit in quiete, in quiete persistere nequit nisi sit $\sin\phi = 0$, hoc est nisi centrum inertiae I in recta verticali OC versetur. Quare si corpus quodcunque hoc modo suspendatur, in quiete esse nequit, nisi recta OI sit verticalis, quod fit si centrum inertiae locum vel imum vel summum obtineat.

COROLL. 3.

525. Quoties autem recta OI fuerit obliqua, corpus ob gravitatem ad motum sollicitabitur, ac si jam habuerit motum, ejus motus perturbabitur, vel accelerando vel retardando, prout motus vel ad OC accedat vel ab eo recedat.

COROLL. 4.

526. Patet etiam, si axis per ipsum centrum inertiae I transeat, ut sit $OI = f = 0$, momentum gravitatis evanescere, motumque gyratorium propterea plane non turbari. Hoc ergo casu corpus vel quiescet, vel uniformiter circa axem O gyrabitur.

 SCHO-

SCHOLION.

527. Hic statim notari convenit, corpus non perinde moveri, ac si tota ejus massa in ipsius centro inertiae I esset collecta, quemadmodum in motu progressivo usu venire vidimus. Si enim hic tota corporis massa M revera in centro inertiae I esset collecta, ejus momentum inertiae respectu axis per I ducti evanesceret, foretque $kk = 0$; motusque ergo ita perturbaretur, ut esset $dd\phi = \frac{-2g\,dt^2 \sin\phi}{f}$, quae formula major est quam casu proposito. Unde intelligitur, motum corporis extensi, quale hic contemplamur, minus a gravitate perturbari, quam si tota corporis massa in centro inertiae esset collecta. Verum infra videbimus, dari in recta OI aliud punctum magis ab axe O remotum, in quo si tota corporis massa esset collecta, motus eandem perturbationem esset passurus, quod punctum in motu gyratorio imprimis notari meretur, quoniam est id ipsum quod vulgo *centrum oscillationis* appellari solet, et de cujus inventione plurima passim occurrunt praecepta.

PROBLEMA. 45.

Fig. 67. 528. Si corpus rigidum AEBF fuerit mobile circa axem horizontalem, ejusque detur situs et celeritas initio motus, ad tempus quodvis invenire ejus situm et celeritatem.

SOLUTIO.

Manentibus omnibus uti in praecedente problemate, scilicet massa corporis $= M$, distantia centri inertiae I ab axe gyrationis O, scilicet $OI = f$, et momento inertiae respectu axis ipsi axi gyrationis paralleli et per I transeuntis $= Mkk$; teneat corpus elapso tempore $= t$ situm in figura repraesentatum, sitque angulus $COI = \phi$, existente CO recta verticali, atque sumto elemento dt constante pervenimus ad hanc aequationem $dd\phi = \frac{-2fg\,dt^2 \sin\phi}{ff+kk}$, quae per $2d\phi$ multiplicata et integrata praebet

$$d\phi^2 = \alpha dt^2 + \frac{4fg\,dt^2 \cos\phi}{ff+kk}$$

unde cognoscitur quadratum celeritatis $uu = \alpha + \frac{4fg \cos\phi}{ff+kk}$. Deinde posito brevitatis gratia $\frac{4fg}{ff+kk} = \lambda$, ob $d\phi^2 = dt^2(\alpha + \lambda \cos\phi)$ reperitur $dt = \frac{d\phi}{\sqrt{(\alpha + \lambda\cos\phi)}}$ et $t = \int \frac{d\phi}{\sqrt{(\alpha+\lambda\cos\phi)}}$: ubi constans α et altera in ultima integratione ingressa ex statu initiali dato debent definiri.

COROLL. 1.

529. Evanescente angulo $COI = \phi$, fit celeritas angularis $u = \sqrt{(\alpha + \frac{4fg}{ff+kk})}$ omnium maxima, in aequalibus autem elongationibus rectae OI a verticali OC celeritates sunt aequales: et nisi constans α sit minor, quam $\frac{4fg}{ff+kk}$, corpus integras revolutiones circa axem absolvet: quoniam tum pro angulo $\phi = 180°$ celeritas angularis adhuc est realis.

COROLL. 2.

530. Sin autem fuerit $\alpha < \frac{4fg}{ff+gg}$, angulus $COI = \phi$ non ultra certum limitem crescere potest, corpusque cum eo pertigerit rursus descendet, motumque oscillatorium peraget: ac ducta IK horizontali ob $OK = f\cos\phi$, angulo elongationis COI respondebit celeritas angularis $u = \sqrt{(\alpha + \frac{4g\cdot OK}{ff+kk})}$.

SCHOLION.

531. Sive corpus integras revolutiones absolvat, sive oscillando eat redeatque, determinatio motus eundem calculum postulat, atque motus penduli simplicis, quo corpusculum infinite parvum filo inertiae experti alligatum circa axem horizontalem gyratur. Quem motum cum jam fusius supra exposuerimus, superfluum foret, eosdem calculos hic repetere: sufficiet igitur, pro quovis casu pendulum simplex assignasse, quod pari motu angulari feratur. Atque hic quidem tantum longitudo hujus penduli simplicis in computum venit, cum motus ejus solum ab ejus longitudine pendeat; siquidem initio utrique eundem motum angularem tribuimus.

DEFINITIO. 9.

532. Pro motu gyratorio vel oscillatorio corporis cujusvis gravis circa axem horizontalem, *pendulum simplex isochronum* vocatur, quod cum

cum semel in pari a recta verticali elongatione parem celeritatem angularem acceperit, deinceps continuo simili motu angulari feratur.

EXPLICATIO.

Fig. 67. 533. Si corpus ponatur quodcunque AEBF, quod a sola gravitate sollicitatum circa axem horizontalem O gyretur, primo ejus centrum inertiae I spectandum est, quod si in recta verticali OC versetur, corporis situm naturalem, in quo acquiescat, indicat: angulus autem COI *elongatio a situ naturali* vocatur. Quodsi jam huic corpori in data elongatione datus motus angularis fuerit impressus, pendulum simplex isochronum ita debet esse comparatum, ut si ei in pari elongatione aequalis motus angularis imprimatur, deinceps hujus motus perpetuo sit responsurus motui corporis propositi. Vel quia totum negotium a longitudine hujus penduli simplicis pendet, si id fuerit OS atque ex communi axe O suspensum concipiatur, motu suo perpetuo motum corporis AEBF comitabitur, dummodo semel aequalem motum gyratorium acceperit. Perinde quidem est, sive hoc pendulum simplex eidem axi applicatum concipiatur, sive secus: sed quoniam utrinque elongationes a situ verticali OC perpetuo eaedem esse debent, corporisque elongatio ex situ rectae OI est aestimanda, pendulum simplex commodissime in puncto O suspensum consideratur, ut ejus situs OS perpetuo in rectam OI incidat, totaque quaestio ad determinationem puncti S revocetur.

COROLL. 1.

534. Invento hoc puncto S in recta OI producta, corpus perinde movebitur, ac si tota ejus massa in ipso hoc puncto S esset collecta: tum enim ob extensionem evanescentem habetur pendulum simplex longitudinis OS.

COROLL. 2.

535. Hoc ergo punctum S quaeri debet in recta, quae per centrum inertiae corporis ad axem gyrationis normaliter ducitur, etiamsi hic non sit necessarium, ut pendulum simplex OS ex eodem axis puncto O suspensum statuatur.

SCHOLION.

536. Cum illud pendulum simili motu latum ob massae evanescentiam *simplex* vocetur, ad hunc modum corpora quaevis extensa circa axem fixum mobilia vocari solent *pendula composita*; ita ut quaestio huc reducatur, ut proposito quocunque pendulo composito, quod scilicet sit corpus rigidum, assignetur pendulum simplex isochronum, quam quaestionem nunc quidem facillime resolvere poterimus. Coeterum monendum est, filum, quo pendulum simplex axi alligatum intelligimus, non solum inertiae expers statui, sed etiam rigidum concipi oportere, ne ulla inflexio calculum turbare queat.

PROBLEMA. 46.

537. Proposito corpore quocunque rigido et gravi AEBF circa axem horizontalem fixum O mobili, definire pendulum simplex isochronum OS. Fig. 67.

SOLUTIO.

Posita massa totius corporis $= M$ ejusque centro inertiae in I, hinc ad axem ducatur recta normalis $IO = f$, quae jam a verticali OC distet angulo $COI = \phi$: tum vero sit Mkk momentum inertiae corporis respectu axis per I ducti et axi gyrationis paralleli. His positis, quicunque motus corpori initio fuerit impressus, elapso tempore $= t$, motus variatio hac formula exprimitur: $dd\phi = \frac{-2fg\,dt^2 \sin\phi}{ff+kk}$. Ponatur nunc penduli simplicis isochroni longitudo $OS = l$, quod cum eodem angulo $COS = \phi$ a situ verticali distet, ejus motus hanc variationem patietur, ut sit $dd\phi = \frac{-2g\,dt^2 \sin\phi}{l}$, quae quidem formula ex praecedente fluit, ponendo $k = 0$ et $f = l$. Quare cum eadem variatio utrinque evenire debeat, obtinemus $l = \frac{ff+kk}{f}$ seu $l = f + \frac{kk}{f}$.

COROLL. 1.

538. Longitudo ergo penduli simplicis isochroni OS superat distantiam centri inertiae I ab axe gyrationis O, estque intervallum $IS = \frac{kk}{f}$. Cognita vero longitudine $OS = l$, erit $kk = f(l-f) = OI \cdot IS$, ita ut pro eodem corpore rectangulum OI. IS sit constans.

COROLL. 2.

539. Si pro eodem corpore distantia $OI = f$ varietur, patet, tam casu $f = 0$, quam $f = \infty$, pendulum simplex isochronum l evadere infinitum;

finitum; breviſſimum autem erit, ſi capiatur $f = k$, quo caſu fit $l = 2k$; praeterea ſemper eſt $l > 2k$.

COROLL. 3.

540. Invento pendulo ſimplici iſochrono l, quoniam oſcillationes minimae corporis perinde atque iſtius penduli ſunt iſochronae, tempus cujusque oſcillationis erit $= \frac{\pi \sqrt{l}}{\sqrt{2g}}$ min. ſec. (215.). Hinc ſi prodeat $l = \frac{2g}{\pi\pi}$, ſingulae oſcillationes minimae corporis abſolventur minutis ſecundis.

SCHOLION.

541. Hinc colligitur methodus facilis cujusque corporis momentum inertiae practice definiendi. Suſpenſo enim corpore ex axe horizontali, circa quem liberrime gyrari queat, omni cura primo definiatur diſtantia centri inertiae I ab axe gyrationis O, nempe $OI = f$, quod etiam practice fieri poteſt: deinde corpus ad minimas oſcillationes peragendas incitetur, pluribusque dato tempore numeratis, inde colligatur tempus unius oſcillationis, quod ſit $= \tau$ min. ſec. hincque habebitur $l = \frac{2g\tau\tau}{\pi\pi}$: quo invento erit $kk = f(l - f)$, et pondus corporis M per kk multiplicatum dabit momentum inertiae, reſpectu axis per ejus centrum inertiae tranſeuntis et axi gyrationis paralleli. Poteſt etiam hoc experimentum multiplicari, dum corpus ſucceſſive ex variis axibus, qui tamen ſint inter ſe paralleli, ſuſpenditur, quo certiores de vero valore kk reddamur. Quin etiam hinc viciſſim longitudo penduli ſimplicis ſingulis minutis ſecundis oſcillantis explorari poteſt, quandoquidem neque pendulis ſimplicibus uti licet, neque altitudo lapſus g uno minuto ſecundo abſoluta ſatis accurate per experimenta lapſus determinari poteſt. Hinc autem pro corpore ſuſpenſo quantitates f et kk accurate noſſe oportet, unde colligitur $l = f + \frac{kk}{f}$: tum ſi tempus unius oſcillationis minimae τ ſit obſervatum, habebitur $g = \frac{\pi\pi l}{2\tau\tau}$, hincque longitudo penduli ſimplicis ſingulis minutis ſecundis oſcillantis $\frac{2g}{\pi\pi} = \frac{l}{\tau\tau}$.

DEFI-

DEFINITIO. 10.

542. Centrum oſcillationis in pendulo compoſito eſt punctum, in quo ſi tota corporis maſſa eſſet collecta, idem motus oſcillatorius eſſet proditurus. Sumitur autem in recta, quae per centrum inertiae corporis tranſiens ad axem gyrationis eſt normalis.

COROLL. 1.

543. Diſtantia ergo centri oſcillationis ab axe gyrationis aequalis eſt longitudini penduli ſimplicis iſochroni; at ſemper ab axe gyrationis O magis diſtat, quam centrum inertiae, intervallo $IS = \frac{kk}{f}$.

COROLL. 2.

544. Ad centrum igitur oſcillationis S inveniendum noſſe oportet momentum inertiae corporis reſpectu axis per ejus centrum inertiae I tranſeuntis et axi gyrationis paralleli, quod ſi fuerit $= Mkk$, dividi debet per Mf, hoc eſt per productum ex maſſa corporis M in diſtantiam axis gyrationis a centro inertiae $OI = f$, et quotus $\frac{Mkk}{Mf}$ oſtendet diſtantiam centri oſcillationis a centro inertiae.

SCHOLION.

545. Hoc modo inveſtigatio motus pendulorum compoſitorum ad centri oſcillationis inveſtigationem perduci ſolet, etſi ad hoc ſufficit, longitudinem penduli ſimplicis iſochroni noſſe, neque ulla ratio urget, ut hoc pendulum eidem axi ſuſpenſionis, et quidem ſecundum rectam per centrum inertiae ad axem ſuſpenſionis normaliter ductam applicatum concipiatur. Verum hic modus rem concipiendi eſt commodiſſimus, et ſi corpus in ſitu quietis pendeat, ut recta per centrum inertiae ad axem normaliter ducta ſimul ſit verticalis, centrum oſcillationis in eadem recta profundius quam centrum inertiae erit ſitum; neque enim hic opus eſt, ut corpus tanquam in motu ſpectetur. Ita recta OI in verticalem OC incidens conſideratur, in qua erit centrum oſcillationis S profundius ſitum centro inertiae I, quod hic revera nomen *centri gravitatis* obtinet, ita ut ſit intervallum $IS = \frac{Mkk}{Mf} = \frac{kk}{f}$. Quare calculus centri oſcillationis facillime expeditur calculo, quem ſupra pro momento inertiae inveniendo tradidimus.

EXEM-

EXEMPLUM.

Fig. 68. 546. Experimenta ante memorata globo ex materia homogenea confecto inſtitui ſolent, qui ope fili OB ſuſpenſus ad minimas oſcillationes incitatur, ubi quidem filum tam tenue eſt ſumendum, ut ejus maſſa prae globo pro nihilo haberi liceat. Sit igitur radius globi BI $= b$, et diſtantia puncti ſuſpenſionis O a centro globi I, quod ſimul ejus eſt centrum inertiae vel gravitatis, nempe OI $= f$, erit ut ſupra invenimus $kk = \frac{2}{5} bb$. Quare centrum oſcillationis erit in S, ut ſit IS $= \frac{2bb}{5f}$, ſeu oſcillationes convenient cum oſcillationibus penduli ſimplicis, cujus longitudo eſt $= f + \frac{2bb}{5f}$. Ut ergo hoc pendulum ſingulis minutis ſecundis oſcilletur, neceſſe eſt ſit $f + \frac{2bb}{5f} = \frac{2g}{\pi\pi}$ ſeu $ff = \frac{2gf}{\pi\pi} - \frac{2}{5} bb$, unde $f = \frac{g}{\pi\pi} \pm \sqrt{\left(\frac{gg}{\pi^4} - \frac{2}{5} bb\right)}$, ita ut pro f duplex habeatur valor, qui ſimul ſumti dent $\frac{2g}{\pi\pi}$. Hi ambo valores fient aequales, ſi globus tantus accipiatur, ut ſit $bb = \frac{5gg}{2\pi^4}$, et $b = \frac{g}{\pi\pi}\sqrt{\frac{5}{2}}$: hoc eſt in pedibus Rhenanis debet eſſe radius globi $= 2, 50317$, ac tum diſtantia OI $= f$ fit $= 1, 583144$ ped. ita ut punctum ſuſpenſionis ſeu axis gyrationis intra globum capi debeat. Cum autem ſit $f = \frac{g}{\pi\pi} = b\sqrt{\frac{2}{5}}$ ſeu $f = k$, evidens eſt hoc caſu globum celerrime oſcillari. Scilicet ſi ſit I$\omega = b\sqrt{\frac{2}{5}}$, ducta horizontali $\mu\nu$, quae axem gyrationis referet, erit $\cos$ B$\mu = \sqrt{\frac{2}{5}}$, ideoque arcus B$\mu = 50°, 46'$. Sin autem globus fuerit valde parvus, ut fieri ſolet, ad minuta ſecunda producenda ſummi debet OI $= \frac{2g}{\pi\pi} - \frac{\pi\pi bb}{5g}$: quare ut globus ex ipſo puncto B ſuſpenſus hoc praeſtet, ejus radius debet eſſe $b = \frac{(\sqrt{65} - 5)g}{2\pi\pi} = 0, 155136g$ proxime.

PROBLEMA 47.

547. Si corpus rigidum circa axem horizontalem mobile pluribus conſtet partibus, quarum ſingularum centra inertiae et momenta inertiae ſint cognita, definire totius corporis centrum oſcillationis.

SOLUTIO.

Axis gyrationis horizontalis ad planum figurae in puncto O normalis concipiatur, ſintque A, B, C, D centra inertiae partium, ex quibus corpus eſt compoſitum, quarum partium maſſae ſint A, B, C, D, et momenta inertiae reſpectu axium ipſi axi gyrationis parallelorum et per cujusque centrum inertiae tranſeuntium Aa^2, Bb^2, Cc^2, Dd^2; Fig. 69.
centra autem inertiae diſtent ab axe gyrationis intervallis AO, BO, CO, DO; perinde enim eſt, ſive haec intervalla ad idem axis punctum O tendant, ſive ad diverſa, quoniam tam momenta gravitatis quam momenta inertiae tantum a diſtantiis ab axe pendent, neque diverſitas punctorum O quicquam eo confert. Primum ergo centrum inertiae I totius corporis, cujus maſſa ſit $=$ M $=$ A $+$ B $+$ C $+$ D, definiatur, quod in tali recta OI erit ſitum, ut ſit AOA. $\sin$ AOI $+$ BOB. $\sin$ BOI $=$ COC. $\sin$ COI $+$ DOD. $\sin$ DOI: tum vero erit:

$$\text{M. OI} = \text{A. AO.} \cos \text{AOI} + \text{B. BO.} \cos \text{BOI} + \text{C. CO} \cos \text{COI} + \text{D. DO.} \cos \text{DOI},$$

quae quantitas in ſuperiori formula IS $= \frac{Mkk}{Mf}$ loco Mf ſcribi debet. At momentum inertiae totius corporis reſpectu axis gyrationis M$(ff + kk)$ ex partibus ita componitur, ut ſit:

$$\text{A}(\text{AO}^2 + aa) + \text{B}(\text{BO}^2 + bb) + \text{C}(\text{CO}^2 + cc) + \text{D}(\text{DO}^2 + dd).$$

Quare cum ſit OS $= \frac{M(ff+kk)}{Mf}$, erit

$$\text{OS} = \frac{A(AO^2 + aa) + B(BO^2 + bb) + C(CO^2 + cc) + D(DO^2 + dd)}{A.AO.\cos AOI + B.BO.\cos BOI + C.CO.\cos COI + D.DO.\cos DOI}.$$

COROLL. 1.

548. Si ſingulae partes ſeorſim conſiderentur, earumque centra oſcillationis ſtatuantur in punctis a, b, c, d, ob O$a = \frac{A(AO^2 + aa)}{A.OA}$, erit

$$\text{OS} = \frac{A.OA.Oa + B.OB.Ob + C.OC.Oc + D.OD.Od}{A.OA \cos AOI + B.OB.\cos BOI + C.OC.\cos COI + D.OD.\cos DOI}.$$

COROLL. 2.

549. Invento autem centro inertiae ſeu gravitatis totius corporis I loco denominatoris poni poteſt M. OI: per praecepta autem ſtatica centrum gravitatis totius corporis ex datis centris gravitatis partium facile colligitur.

EXEMPLUM.

550. Sit pendulum compoſitum ex virga cylindrica recta ACB et globo illi annexo BEDF, quod circa axem horizontalem e Of ſit mobile, cu- Fig. 7.

jus centrum oscillationis S quaeratur. Virga autem et globus constent ex materia uniformi, ponaturque virgae longitudo AB = a, pondus = A, et extremitatis B ab axe gyrationis O distantia BO = b, basis autem hujus cylindri radius = c; erit ejus centrum inertiae in C, ut sit AC = BC = $\frac{1}{2}a$, et OC = $b - \frac{1}{2}a$, momentum vero inertiae respectu axis per C ducti et axi gyrationis paralleli = A$(\frac{1}{12}aa + \frac{1}{4}cc)$. Porro globi annexi sit massa = E, radius BG = e, erit ejus centrum inertiae in G et momentum inertiae = $\frac{2}{5}$ Eee. Sit jam totius corporis centrum inertiae in I erit (A + E). OI = A$(b - \frac{1}{2}a)$ + E$(e + b)$ = Mf; deinde momentum inertiae respectu axis gyrationis = A$(\frac{1}{12}aa + \frac{1}{4}cc + (b - \frac{1}{2}a)^2)$ + E$(\frac{2}{5}ee + (b+e)^2)$ quod loco M$(ff + kk)$ substitui debet. Sicque centrum oscillationis erit in S ut sit:

$$OS = \frac{A(\frac{1}{3}aa - ab + bb + \frac{1}{4}cc) + E(bb + 2be + \frac{7}{5}ee)}{A(b - \frac{1}{2}a) + E(b+e)}$$

ergo ob OG = $b + e$ fiet

$$GS = \frac{A(be + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}ae - \frac{1}{3}aa - \frac{1}{4}cc) - E\frac{2}{5}ee}{A(b - \frac{1}{2}a) + E(b+e)}$$

C O R O L L. 1.

551. Si axis gyrationis O capiatur in summitate virgae A, ut sit $b = a$, erit

$$OS = \frac{A(\frac{1}{3}aa + \frac{1}{4}cc) + E(aa + 2ae + \frac{7}{5}ee)}{A.\frac{1}{2}a + E(a+e)}$$

$$\text{et } GS = \frac{A(\frac{1}{2}ae + \frac{1}{6}aa - \frac{1}{4}cc) - E.\frac{2}{5}ee}{A.\frac{1}{2}a + E(a+e)}$$

si quidem sumamus punctum S supra G cadere.

C O R O L L. 2.

552. Si sit exempli gratia E = 30 A; $a = b = 3$ ped. $e = \frac{1}{12}$ ped. et $c = \frac{1}{100}$ ped. ita ut cc tuto negligi possit, erit OG = $3\frac{1}{12}$ = 3, 0833 et OS = $\frac{3 + 285\frac{7}{12}}{1\frac{1}{2} + 92\frac{1}{2}} = \frac{828\frac{7}{12}}{94}$ = 3, 0669, hocque casu punctum S supra G cadit; sin autem massa virgae evanesceret, foret OS = 3, 0842, sicque S infra G caderet;

S C H O L I O N.

553. Hic postremus casus ideo est notatu dignus, quod vulgo filum, si fuerit valde tenue ac leve respectu globi, vix quicquam ad centrum oscillationis conferre videatur, hic enim certe, etsi globus tricies ponderosior est filo, hujus ratio sine insigni errore negligi non posset. Ponamus enim, hoc pendulum oscillationes absolvisse minutis secundis, hincque longitudinem penduli simplicis isochroni determinari oportere. Haec igitur neglecta fili massa prodiret = 3, 0842 ped. cum tamen revera tantum sit 3, 0669 ped. ita ut error 0, 0173 ped. = $2\frac{1}{2}$ lin. committeretur, minime certe tolerandus. Sin autem manentibus reliquis dimensionibus, filum adhuc levius atque E = 60 A esset, foret OS = $\frac{3 + 570\frac{7}{12}}{1\frac{1}{2} + 185}$ = 3, 0782, cujus loco si sumeretur 3, 0842 error committeretur = 0, 0060 ped. = $\frac{7}{8}$ lin.

P R O B L E M A. 48.

554. Si pendulum constet ex virga tenuissima OB inertiae experte rigida tamen, et globo BEDF, invenire locum, ubi alius globus datus eidem virgae affigi debeat, ut oscillationes fiant promtissimae. Fig. 71.

S O L U T I O.

Cum in O sit axis gyrationis, sit distantia OG = b, et radius globi infra affixi BG = c; massaque hujus globi = B: tum alterius globi affigendi sit massa = L, et radius QK = e, pro loco autem ejus quaesito distantia OQ = q. His positis sit I centrum inertiae commune, erit (B + L) OI = Bb + Lq = Mf, tum vero momentum inertiae totius penduli respectu axis gyrationis = B$(\frac{2}{5}cc + bb)$ + L$(\frac{2}{5}ee + qq)$ = M$(ff + kk)$. Quare si centrum oscillationis statuatur in S, erit OS = $\frac{B(\frac{2}{5}cc + bb) + L(\frac{2}{5}ee + qq)}{Bb + Lq}$, quae longitudo minima esse debet, ut oscillationes fiant promtissimae. Hinc prodit ista aequatio:

$$2BL\,bq - BL(\tfrac{2}{5}cc + bb) - \tfrac{2}{5}LL\,ee + LL\,qq = 0$$

$$\text{seu } Lq = -Bb + \sqrt{(BB\,bb + BL\,bb + \tfrac{2}{5}BL\,cc + \tfrac{2}{5}LL\,ee)}$$

unde innotescit distantia OQ = q: ex qua porro colligitur longitudo penduli simplicis isochroni

$$OS = \frac{2}{L}\sqrt{(BB\,bb + BL\,bb + \tfrac{2}{5}BL\,cc + \tfrac{2}{5}LL\,ee)} - \frac{2Bb}{L} = 2q.$$

Hinc si ambo globi ex eadem materia fuerint confecti, ob B : L = $c^3 : e^3$ erit OS = $\frac{2\sqrt{(c^6\,bb + c^3e^3\,bb + \frac{2}{5}c^5e^3 + \frac{2}{5}e^8)} - 2c^3b}{e^3}$

$$\text{et } OQ = q = \frac{\sqrt{(c^6\,bb + c^3e^3\,bb + \frac{2}{5}c^5e^3 + \frac{2}{5}e^8)} - c^3b}{e^3}$$

CO-

COROLL. 1.

555. Si diametri globorum fuerint minimi, ut cc et ee prae bb negligi queant, distantia OQ $= q$ ita capi debet, ut sit OQ $= \frac{\sqrt{B(B+L)}-B}{L} b$, et longitudo penduli simplicis isochroni erit $= 2$ OQ $= 2b \frac{\sqrt{B(B+L)}-B}{L}$.

COROLL. 2.

556. Si globus alter KLMN plane omitteretur, foret OS $= b + \frac{2cc}{5b}$, quae major est, quam adjuncto isto globo, si fuerit $b + \frac{2cc}{5b} > 2e\sqrt{\frac{2}{5}}$. Unde nisi sit $e > \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(b + \frac{2cc}{5b})$, hoc altero globo adjungendo oscillationes promptiores reddi possunt.

COROLL. 3.

557. Sin autem fuerit $e = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(b + \frac{2cc}{5b})$, quantacunque etiam fuerit hujus globi massa L, pro oscillationibus celerrimis obtinendis sumi debet OQ $= q = \frac{1}{2} b + \frac{cc}{5b}$, et tum longitudo penduli simplicis isochroni erit $= b + \frac{2cc}{5b}$, omnia ac si globus KLMN removeretur.

COROLL. 4.

558. Si ambo globi fuerint aequales, ut sit L $=$ B et $e = c$, oscillationes promtissimae evadent, capiendo OQ $= q = \sqrt{(2bb + \frac{4}{5} cc)} - b$: ac si cc prae bb negligere liceat, OQ $=$ OG $(\sqrt{2} - 1)$; hincque longitudo penduli simplicis isochroni $= 2$OG $(\sqrt{2} - 1) = 0,828427$ OG.

COROLL. 5.

559. Si ambo globi ex eadem materia constent, definiri potest globi KLMN radius e, ut eo rite adjungendo oscillationes fiant promtissime; scilicet e quaeri debet ex hac aequatione, $16e^{10} - 48c^5e^5 - 600\,bbc^6ee + 9c^6(5bb + 2cc)^2 = 0$. $-120bbc^3e^5$

SCHOLION.

560. Ceterum patet, quo minor sit radius e globi KLMN manente ejus massa L, eo minorem prodire distantiam OQ $= q$, ideoque eo promtiores fore oscillationes. At vero manente radio e oscillationes fient celerrimae, si massa L globi affigendi fuerit quam maxima; nam si esset L $= 0$, foret OS $= b + \frac{2cc}{5b}$, qui est valor maximus, si quidem affigendo altero globo oscillationes crebriores reddi possunt. At vero si fuerit $5bb + 2cc = 2bc\sqrt{10}$, seu $c = \frac{5bb+2cc}{2b\sqrt{10}}$, quantacunque fuerit hujus globi massa L, eo rite annexo oscillationes manent ejusdem durationis, et si hic globus adhuc fuerit major, oscillationes adeo tardiores evadent. Quodsi ambo globi ex materia aeque gravi fuerint confecti, magnitudo affigendi, ut motus oscillatorius fiat rapidissimus, ex aequatione decimi gradus definiri debet; verum si axis per centrum G globi BCDE transeat, fiet $b = 0$, inde prodit $e = c\sqrt[5]{\frac{3}{2}}$; pro radio globi affigendi, et pro ejus loco OQ $= q = \sqrt{(\frac{3}{5}\frac{e^5}{c^3} + \frac{2}{5}e^2)} = c\sqrt[10]{\frac{8}{27}}$, et longitudo penduli simplicis isochroni $= 2c\sqrt[10]{\frac{8}{27}}$. Axis ergo gyrationis per centrum prioris globi transiens alterum ita trajicere debet, ut ab ejus centro distet intervallo OQ $= c\sqrt[10]{\frac{8}{27}}$, quod minus est ejus radio $e = c\sqrt[5]{\frac{3}{2}}$. Hujusmodi autem quaestiones circa motum oscillatorium plures proponi possent, quae autem ex stabilitis hic principiis non difficulter solventur. Plurimum autem intererit investigare, quantas vires ipse axis gyrationis inter motum sustineat.

PROBLEMA 49.

561. Dum corpus rigidum grave circa axem horizontalem fixum OA gyratur, ad quodvis tempus definire vires, quas axis in datis duobus punctis O et A sustinet. Fig. 72.

SOLUTIO.

Repraesentet tabula planum verticale per axem gyrationis OA transiens, versetur que jam centrum inertiae corporis extra hoc planum in I, unde tam ad planum verticale, quam ad axem ducantur perpendiculares IK et IG, erit angulus IGK $= \phi$ elongatio corporis a situ naturali, ac posita distantia IG $= f$, erit KI $= f \sin\phi$ et GK $= f \cos\phi$. Tum sit massa corporis $=$ M, quae cum simul ejus pondus exprimat, vis sollicitans erit $=$ M in directione verticali IV urgens, cujus momentum $=$ M$f \sin\phi$ tendit ad angulum IGK minuendum. Deinde consideretur elemen-

elementum corporis quodcunque dM in Z, unde ad planum verticale et axem ductis perpendiculis ZY, ZX vocentur coordinatae $OX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$, eritque $OG = \frac{\int x dM}{M}$, $GK = \frac{\int y dM}{M}$ et $KI = \frac{\int z dM}{M}$: posita autem distantia $XZ = \sqrt{(yy + zz)} = r$, exprimit $\int rrdM$ momentum inertiae corporis respectu axis OA, quod sit $= Mkk$: denique ponatur distantia punctorum axis $OA = a$, et per ambo ducantur rectae BOb, COc et EAe, FAf ipsis KG et KI parallelae. His praeparatis secundum ductum probl. 23. primum observo nullam adesse vim, cujus directio cum axe sit in eodem plano: cum autem hic momentum vis $Mf \sin\Phi$ in sensum contrarium vergat, atque ibi sumsimus, erit $Vf = -Mf \sin\Phi$.

Nunc igitur ob vim $IV = M$, quae axi in G secundum directionem GK applicata est concipienda, axis in punctis O et A has sustinebit vires:

$$\text{sec. } OB \text{ vim} = \frac{M.AG}{a}; \text{ sec. } AE \text{ vim} = \frac{M.OG}{a}.$$

Quibuscum conjungendae sunt illae, quae ex viribus elementaribus contrarie applicatis nascuntur: quae sunt

$$\text{pro termino O} \begin{cases} \text{sec. } Ob \text{ vis} = \dfrac{f\sin\Phi.\int(a-x)zdM}{akk} \\ \text{sec. } OC \text{ vis} = \dfrac{f\sin\Phi.\int(a-x)ydM}{akk} \end{cases}$$

$$\text{pro termino A} \begin{cases} \text{sec. } Ae \text{ vis} = \dfrac{f\sin\Phi.\int xzdM}{akk} \\ \text{sec. } AF \text{ vis} = \dfrac{f\sin\Phi.\int xydM}{akk} \end{cases}$$

hasque vires axis ob actionem gravitatis corporis sustinet, verum ob motum, quo jam gyratur, si celeritas gyratoria vocetur $= v$, axis in punctis O et A has vires sustinet:

$$\text{pro termino O} \begin{cases} \text{sec. } OB \text{ vim} = \dfrac{vv\int(a-x)ydM}{2ag} \\ \text{sec. } OC \text{ vim} = \dfrac{vv\int(a-x)zdM}{2ag} \end{cases}$$

pro

$$\text{pro termino A} \begin{cases} \text{sec. } AE \text{ vim} = \dfrac{vv\int xydM}{2ag} \\ \text{sec. } AF \text{ vim} = \dfrac{vv\int xzdM}{2ag}. \end{cases}$$

COROLL. 1.

562. Si distantiae terminorum O et A a puncto G vocentur $OG = b$ et $AG = c$, ut sit $a = b + c$; tum vero ponatur $GX = u$, erit $x = b - u$ et $a - x = c + u$; ideo

$$\int(a-x)zdM = \int(c+u)zdM = Mc.KI + \int uzdM$$
$$\int(a-x)ydM = \int(c+u)ydM = Mc.GK + \int uydM$$
$$\int xzdM = \int(b-u)zdM = Mb.KI - \int uzdM$$
$$\int xydM = \int(b-u)ydM = Mb.GK - \int uydM.$$

COROLL. 2.

563. His valoribus introductis axis in puncto O has vires sustinet: primo secundum directionem OB vim

$$\frac{Mc}{a} - \frac{Mcf\sin\Phi.KI}{akk} - \frac{f\sin\Phi.\int uzdM}{akk} + \frac{vv.Mc.GK}{2ag} + \frac{vv.\int uydM}{2ag}$$

deinde secundum directionem OC vim

$$\frac{Mcf\sin\Phi.GK}{akk} + \frac{f\sin\Phi.\int uydM}{akk} + \frac{vv.Mc.KI}{2ag} + \frac{vv.\int uzdM}{2ag}$$

At vero in puncto A istas:

primo secundum directionem AE vim

$$\frac{Mb}{a} - \frac{Mbf\sin\Phi.KI}{akk} + \frac{f\sin\Phi.\int uzdM}{akk} + \frac{vv.Mb.GK}{2ag} - \frac{vv.\int uydM}{2ag}$$

deinde secundum directionem AF vim

$$\frac{Mbf\sin\Phi.GK}{akk} - \frac{f\sin\Phi.\int uydM}{akk} + \frac{vv.Mb.KI}{2ag} - \frac{vv\int uzdM}{2ag}.$$

COROLL. 3.

564. Si corpus ita fuerit comparatum, ut a plano IGK in duas partes similes et aequales dividatur, sitque $GO = GA = \frac{1}{2}a$, ob $\int uzdM = 0$ et $\int uydM = 0$, axis in puncto O sustinebit has vires

$$\text{sec. } OB \text{ vim} = \tfrac{1}{2}M - \frac{Mf\sin\Phi.KI}{2kk} + \frac{vv.M.GK}{4g}$$

sec.

$$\text{ſec. OC vim} = \frac{Mf\sin\phi . GK}{2kk} + \frac{uu.M.KI}{4g}$$

in puncto autem A ſuſtinebit has vires

$$\text{ſec. AE vim} = \tfrac{1}{2}M - \frac{Mf\sin\phi . KI}{2kk} + \frac{uu.M.GK}{4g}$$

$$\text{ſec. AF vim} = \frac{Mf\sin\phi . GK}{2kk} + \frac{uu.M.KI}{4g},$$

hoc ergo caſu vires non a magnitudine diſtantiae OA $= a$ pendent.

C O R O L L. 4.

565. Hoc ergo caſu, quo $\int yzdM = 0$ et $\int xzdM = 0$, nihil impedit, quominus diſtantia OA $=$ evaneſcens accipiatur, atque axis in unico puncto G retineri poterit, hic quippe ſuſtinet binas vires

$$\text{alteram ſecundum GK} = M - \frac{Mff\sin\phi^2}{kk} + \frac{Muuf\cos\phi}{2g}$$

$$\text{alteram ſecundum GH} = \frac{Mff\sin\phi\cos\phi}{kk} + \frac{Muuf\sin\phi}{2g}$$

exiſtente GH ipſi KI parallela.

S C H O L I O N.

566. Corpora, quae vulgo ad motum oſcillatorium adhiberi ſolent, ita ſunt comparata, ut plano, quod per eorum centrum inertiae ad axem gyrationis normaliter ducitur, in duas portionis aequales et ſimiles ſecentur: de iis igitur locum habet, quod axis in unico puncto retineri queat. Scilicet ſi figura 67. repraeſentet planum verticale per Fig. 67. talis corporis centrum inertiae I ductum et ad axem gyrationis normale, qui figurae in O normaliter inſiſtere concipiatur, exiſtente OC recta verticali, et OH in hoc plano horizontali, axis in puncto ipſo O vires modo indicatas ſuſtinebit. Nempe ſi angulus COI ponatur $= \phi$, diſtantia OI $= f$, maſſa corporis $= M$, ejus momentum inertiae reſpectu axis gyrationis $= Mkk$, et celeritas angularis in hoc ſtatu ſit $= u$, ſive ad angulum COI augendum tendat, ſive minuendum, axis O ſuſtinet duas vires

$$\text{alteram ſecundum OC} = M - \frac{Mff\sin\phi^2}{kk} + \frac{Muuf\cos\phi}{2g}$$

$$\text{alteram ſecundum OH} = \frac{Mff\sin\phi\cos\phi}{kk} + \frac{Muuf\sin\phi}{2g}.$$

Priori

Priori ergo vi deorſum ſollicitatur, eamque ſuſtentaculum ſuſtinet: ob alteram vero vim axis in eam plagam, in qua centrum inertiae verſatur, horizontaliter ſuper ſuſtentaculo procedere conatur, quem effectum obice arceri convenit. Quando centrum inertiae in contrariam plagam divagatur, haec vis horizontalis in contrarium dirigitur. Ceterum ambae vires ex duabus conſtant partibus, quarum altera actioni gravitatis, altera motui gyratorio ipſi debetur: ac ducta OL ad OI normali, hae partes ad pauciores ita redigentur, ut axis in puncto O ab his viribus ſollicitetur

$$\text{ſec. OC vi} = M;\ \text{ſec. OL vi} = \frac{Mff\sin\phi}{kk};\ \text{ſec. OI vi} = \frac{Mfuu}{2g}.$$

Si non fuerit $\int yzdM = 0$ et $\int xzdM = 0$, tum praeter iſtas vires axis inſuper in punctis O et A fig. 72. eas virium §. 563. partes ſuſtinet, quae has formulas integrales involvunt, quoniam reliquas partes in unicum punctum reducere licuit.

P R O B L E M A. 50.

567. Si axis OA, circa quem corpus rigidum grave eſt mobile, non fuerit horizontalis, definire motum gyratorium ut et vires, quas axis inde ſuſtinet. Fig. 73.

S O L U T I O.

Per axem OA ductum concipiatur planum verticale, in quo ſit GC recta verticalis, ponaturque angulus OGC $= \zeta$, cujus complementum $90° - \zeta$ dat axis OA inclinationem ad horizontem. Reperiatur nunc corporis centrum inertiae I extra hoc planum verticale, unde ad axem ducta normali IG $= f$, et ex G in plano verticali ad axem pariter normali GK, erit ipſum planum IGK ad planum verticale normale, ponaturque angulus IGK $= \phi$, elongationem corporis a ſitu ſuo naturali metiens: recta enim GI in plano IGK movebitur. Statuatur maſſa corporis, eademque ejus pondus $= M$, ejusque momentum inertiae reſpectu axis OA $= Mkk$, quod perinde colligitur, ac ſi axis eſſet horizontalis: inclinatio enim tantum ad vim ſollicitantem ſpectat. Effectus autem gravitatis eo redit, ut corpus in puncto I ſollicitetur in directione verticali IV a vi $= M$, ad quam reſolvendam ducantur IM et IN parallelae ipſis GO et GK, eruntque rectae IM, IV et IN in plano verticali, angulusque MIV $= \zeta$. Hinc ex vi IV $= M$ naſcuntur duae vires, altera ſec. IM $= M\cos\zeta$ et altera ſecundum IN $= M\sin\zeta$. Prior or cum ſit axi parallela, nihil plane ad motum confert, ſed tota in axem impenditur, quemadmodum ſupra definimus. Pro motu ergo reſtat ſola vis IN $= M f s\zeta$, cujus directio cum ſit ipſi GK parallela, orietur momentum $= M f s\zeta s\phi$ tendens ad angulum IGK minuendum; atque pro motu definiendo formulae ſuperiores pro axe horizontali inventae valebunt, niſi quod loco momenti vis ſollicitantis, quod ante erat $= M f s\phi$, hic ſcribi debeat $M f s\zeta s\phi$: vel quatenus M pondus corporis denotat, ejus loco ſcribi debet $M s\zeta$, quatenus autem in momentum inertiae ingreditur, immutatum relinqui debet. Quare motus ſimilis erit motui penduli ſimplicis circa axem horizontalem, cujus longitudo $= \frac{Mkk}{Mf s\zeta} = \frac{kk}{f s\zeta}$: quo ipſo motus perfecte determinatur.

Quod autem ad vires attinet, quas axis interea ſuſtinet in datis ſi placet punctis O et A, primo ob vim IM $= M \cos\zeta$ axis ſecundum ſuam directionem AO a tanta vi urgetur, praeterea vero in utroque O et A a vi $= \frac{GI}{OA} \cdot M \cos\zeta$, in puncto A ſcilicet ſecundum directionem ipſi GI parallelam, in O vero ſecundum oppoſitam. Tum vero praeter has vires in punctis O et A ab iisdem viribus ſollicitabitur, quas in problemate praecedente determinavimus, hoc tantum obſervato, quod pro M ſcribi debeat $M s\zeta$ et $f s\zeta s\phi$ loco $f s\phi$. Nempe ſi in fig. 72. OA ſit noſter axis inclinatus et reliqua maneant ut in problemate praecedente, tum axis praeter vires a vi IM $= M \cos\zeta$ natus ſuſtinet inſuper has vires. Primo in puncto O ſecundum directionem OB vim Fig. 72.

$$\frac{Mc\sin\zeta}{a} - \frac{Mcff s\zeta s\phi^2}{akk} - \frac{f s\zeta s\phi . \int uzdM}{akk} + \frac{Mc\int uu\cos\phi}{2ag} + \frac{uu\int uydM}{2ag}$$

et ſecundum directionem OC vim

$$\frac{Mcff s\zeta s\phi\cos\phi}{akk} + \frac{f s\zeta s\phi . \int uydM}{akk} + \frac{Mc\int uu s\phi}{2ag} + \frac{uu\int uzdM}{2ag}$$

Deinde in puncto A ſecundum directionem AE vim

$$\frac{Mc s\zeta}{a} - \frac{Mbff s\zeta s\phi^2}{akk} + \frac{f s\zeta s\phi . \int uzdM}{akk} + \frac{Mb\int uu\cos\phi}{2ag} - \frac{uu . \int uydM}{2ag}$$

et ſecundum directionem AF vim

$$\frac{Mbff s\zeta s\phi\cos\phi}{akk} - \frac{f s\zeta s\phi . \int uydM}{akk} + \frac{Mb\int uu s\phi}{2ag} - \frac{uu\int uzdM}{2ag}$$

ubi eſt OA $= a$, OG $= b$, AG $= c$, et celeritas angularis $= u$, integralibus ſumtis ut ibi definivimus.

CO-

COROLL. 1.

568. Cum longitudo penduli ſimplicis iſochroni ſit $= \frac{kk}{f s\zeta}$, corpus circa axem inclinatum tardius oſcillationes ſuas abſolvit quam ſi axis eſſet horizontalis, ac ſi oſcillationes fuerint minimae, tempus unius erit $= \pi \sqrt{\frac{kk}{2fg s\zeta}}$ min. ſec.

COROLL. 2.

569. Si axis eſt inclinatus, etiam vim ſuſtinet ſecundum ſuam directionem AO, quae eſt $= M \cos\zeta$, reliquae vires omnes ad axem ſunt normales, et ad duo data puncta O et A revocari poſſunt. Fig. 73

COROLL. 3.

570. Si corpus a plano IGK in duas partes ſimiles et aequales biſecetur, valores integralium $\int uydM$ et $\int uzdM$ evaneſcunt et omnes vires praeter eas, quae ex vi IM naſcuntur, ad unicum punctum G reduci poſſunt, ut ſupra.

SCHOLION.

571. Haec ſunt, quae de motu gyratorio corporum rigidorum circa axem fixum proponenda videbantur, ubi quidem ipſius motus determinatio eo eſt reducta, ut plus difficultatis non habeat, quam motus corpuſculi circa axem fixum, ſi modo momentum inertiae fuerit exploratum. Vires autem, quas axis gyrationis inter motum ſuſtinet, moleſtiorem calculum plerumque exigunt, cum ex corporis figura valores binorum integralium $\int xydM$ et $\int xzdM$ erui debeant. Verum haec inveſtigatio maximi eſt momenti, ſi ad motum corporum rigidorum circa axes non fixos progredi velimus; ubi primo quidem eos caſus diligentius evolvi convenit, quibus axis ſponte manet immobilis, etiamſi extrinſecus non retineatur. Propoſito ergo corpore quocunque rigido, inquirendum eſt, utrum in eo dentur ejusmodi axes, circa quos ſi corpus motum gyratorium receperit, ipſum inde nullas ſuſtineat vires: deinde etiam videndum eſt, a quibusnam viribus corpus circa talem axem motum ſollicitari debeat, ut etiam hinc nullae vires ad axem dimovendum naſcantur.

CAPUT

CAPUT VIII.

DE AXE GYRATIONIS LIBERO MOTUQUE CORPORUM RIGIDORUM CIRCA TALES AXES.

DEFINITIO. II.

572. *Axis gyrationis liber* in quovis corpore rigido est ejusmodi axis, qui dum corpus circa eum gyratur, nullas ob motum vires sustinet.

COROLL. 1.

573. Si igitur corpus circa axem liberum gyrari coeperit, axis sponte in quiete manebit, neque opus est, ut is extrinsecus in situ suo retineatur: quod quidem intelligendum est, si corpus a nullis viribus sollicitetur.

COROLL. 2.

574. Corpus ergo nullis viribus subjectum, si circa talem axem liberum motum gyratorium quemcunque acceperit, hoc motu perpetuo uniformiter gyrari perget, perinde ac si axis esset fixus.

SCHOLION.

575. En igitur alium casum motus liberi, in corpora rigida cadentis, cujus explicatio jam est manifesta. Primus scilicet casus erat, quo vidimus tale corpus motu progressivo libere proferri, at si vires sollicitantes per ejus centrum inertiae transeant, motus perturbationem jam definivimus. Deinde cum ostendissem corpus, cui circa axem fixum impressus fuerit motus gyratorius, eundem motum perpetuo conservare, dum axis ille fixus retineatur, nunc evidens est, si axis iste ita fuerit comparatus, ut vires, quas sustinet, se mutuo destruant, eum sponte immotum manere, corpusque motum gyratorium perpetuo esse continuaturum, qui propterea est casus motus liberi: ubi quidem nullum est dubium, quin ejusmodi etiam dentur vires, quae dum motum gyratorium vel accelerant vel retardant, axem non afficiant, ita ut adhuc in quiete persistat, de quo deinceps tractabimus. Ante omnia autem necesse est, ut inquiramus, an in quovis corpore tales axes gyrationis liberi dentur, et quomodo ii sint investigandi? in quo negotio summam

mam afferent utilitatem ea, quae supra de ternis axibus principalibus cujusque corporis tradidimus, quippe qui simul esse axes gyrationis liberi deprehendentur.

PROBLEMA. 51.

576. Definire conditiones axium liberorum, qui dum corpora circa eos gyrantur, a nullis viribus sollicitata nullas vires sustineant.

SOLUTIO.

Quaestio haec ex probl. 7. §. 338. facile resolvetur. In genere enim si corpus circa axem quemcunque OA gyretur celeritate angulari $= \gamma$, ac pro elemento corporis quocunque dM in Z sito statuantur coordinatae orthogonales $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, quarum prima x in ipso axe gyrationis capiatur, vidimus axem ob hunc motum duas sustinere vires secundum Ee et Ff quae sint Fig. 32.

$$\text{vis } Ee = \frac{\gamma\gamma}{2g}\int y dM \text{ et vis } Ff = \frac{\gamma\gamma}{2g}\int z dM$$

quae applicatae sint in punctis E et F ut sit

$$OE = \frac{\int xy dM}{\int y dM} \text{ et } OF = \frac{\int xz dM}{\int z dM}$$

Quare ut hic axis gyrationis OA sit liber, primo necesse est, ut ambae hae vires Ee et Ff seorsim evanescant, ideoque esse oportet tam $\int y dM = 0$, quam $\int z dM = 0$, unde patet, axem OA per corporis centrum inertiae I transire debere, quoniam posita corporis massa $= M$ est $\int y dM = M.GK$ et $\int z dM = M.KI$. Haec ergo est prima conditio axium gyrationis liberorum, ut per corporis centrum inertiae I transeant: verum etiamsi hae duae vires evanescant, tamen quia distantiae OE et OF fiunt infinitae, earum momenta ad axem circa punctum O vertendum prodeunt $\frac{\gamma\gamma}{2g}\int xy dM$ et $\frac{\gamma\gamma}{2g}\int xz dM$; quae nisi etiam evanescant, axis non sponte in quiete permanet. Quocirca ut axis gyrationis OA sit liber, non sufficit, ut is per corporis centrum inertiae I transeat, sed praeterea hac proprietate praeditus esse debet, ut pro eo fiat tam $\int xy dM = 0$ quam $\int xz dM = 0$. Quae cum sit proprietas axium principalium supra demonstrata, quorum respectu momenta inertiae sint vel maxima vel minima, manifestum est cujusque corporis axes principales, quos supra invenire docuimus, simul esse axes gyrationis liberos.

COROLL. 1.

577. In quolibet ergo corpore libero tres certe dantur axes gyrationis liberi, qui scilicet sunt ejus axes principales, circa quos ita libere gyrari possit, ut axes sponte in quiete perseverent.

COROLL. 2.

578. Si tria principalia momenta fuerint inter se inaequalia, tres tantum dantur axes gyrationis liberi; neque corpus circa ullum alium axem, etiamsi per centrum inertiae transeat, gyrari potest, quin viribus externis opus sit ad axem continendum.

COROLL. 3.

579. Sin autem momentum medium aequale sit vel maximo vel minimo, bini axes principales non determinantur, sed omnes ad tertium normales pari gaudent proprietate, ideoque etiam sunt axes gyrationis liberi.

COROLL. 4.

580. At si omnia tria momenta principalia fuerint inter se aequalia, uti fit in globo et cubo, omnes plane rectae per centrum inertiae transeuntes proprietatem axium principalium habebunt, corpusque circa eos libere gyrari poterit.

SCHOLION.

581. Quae ergo supra de axibus principalibus omnium corporum tradidimus, non solum in inventione momentorum inertiae maximum habent usum, sed etiam in praesenti investigatione totum negotium conficiunt, cum in quovis corpore axes principales iique soli sint axes gyrationis liberi, circa quos corpus ita gyrari possit, ut non opus sit vi externa ad eos in quiete retinendos. Quemadmodum ergo in quovis corpore rigido centrum inertiae est punctum maxime memorabile, cujus ratio per universam Mechanicam latissime patet, ita axes principales, qui simul sunt axes gyrationis liberi, in quovis corpore non minus sunt notatu digni, cum iis universa doctrina de motu corporum libero innitatur. Inter proprietates ergo corporum mechanicas axes hi principales post centrum inertiae praecipuum locum obtinent, atque in quovis corpore, cujus motus examinandus suscipitur, in id potissimum erit incumbendum, ut ejus axes principales exquirantur. Triplex scilicet datur corporum cognitio, prima geometrica, qua ejus extensio mensuratur, secunda mechanica, qua ejus massa seu inertia spectatur, ac tertia physica, qua ejus reliquae qualitates expenduntur; cognitio igitur mechanica potissimum centro inertiae et axibus principalibus continetur [illegible].

PROBLEMA 52.

582. [illegible] corpus circa axem gyrationis liberum movetur, invenire [illegible] quibuscunque viribus corpus sollicitari debeat, ut nullus inde effectus in axem redundet [illegible] etiamnum sponte in quiete persistat.

SOLUTIO.

Quemcunque motum gyratorium corpus circa axem principalem [illegible] acceperit, modo [illegible] hunc motum perpetuo conservabit [illegible] axemque ipsum in quiete esse perseveraturum, cum vires ex motu natae [illegible] destruant. Nunc igitur videamus, quomodo vires [illegible] esse debeant, ut ab iis etiam axis non [illegible] facile perspicere licet. Primo [illegible] vires obliquae, unde per resolutionem nascerentur vires [illegible] quippe quae a viribus elementaribus tolli non possent. [illegible] vires, quae in planis ad axem [illegible] sunt directae; [illegible] hujusmodi autem viribus axem ita affici [illegible], ut primo easdem vires in plano quamque suo ad axem translatas [illegible] insuper vires elementaribus contrarias pariter [illegible]. Cum autem ob axem principalem sit $\int xydM = 0$, $\int xzdM = 0$, $\int (a-x) ydM = 0$ et $\int (a-x) zdM = 0$, vires [illegible] elementaribus natae, quae in probl. 17. punctis O et A sunt applicatae [illegible], ideoque axis tantum ipsas vires sollicitantes ad axem translatas sustinebit. Quare vires sollicitantes ita debent esse comparatae, ut si singulae in planis ad axem normalibus secundum suas directiones ipsi axi applicentur, se mutuo destruant. Binae igitur quaeque vires aequales et contrariae, corpori in eodem plano ad axem normali applicatae hoc praestabunt, ut axis ab iis nullam plane vim sentiat. Scilicet si IA fuerit axis gyrationis liber, atque ad eum in puncto quovis L concipiatur planum normale, in quo agant duae vires Nn et Mm aequales et contrariae, ab iis quidem motus gyratorius, quatenus in diversis ab axe distantiis sunt applicatae, mutabitur, sed axis nihilominus sponte in quiete persistet. Consequenter quotcunque hujusmodi binarum virium paria corpori fuerint applicata, axis ab illis nullo modo afficietur. Tab. X. Fig. 74.

CO-

COROLL. 1.

583. Proposita ergo quacunque vi Nn, cujus directio sit in plano ad axem normali, quod axem in puncto L secet, si praeterea axi in ipso puncto L vis aequalis et contraria Ll applicetur, ab his duabus viribus axis nullam vim sustinebit.

COROLL. 2.

584. Quodsi igitur corpus a binis hujusmodi viribus Nn et Ll sollicitetur, axis manet immotus, et solus motus gyratorius perturbatur ab earum momentis. Cum autem vis Ll nullum habeat momentum, mutatio motus ex momento solius vis Nn erit definienda.

COROLL. 3.

585. Quare si celeritas angularis fuerit $= \varepsilon$, momentum vis $Nn = Vf$, et corporis momentum inertiae respectu axis $IA = Mkk$, erit $d\varepsilon = \pm \frac{2Vfgdt}{Mkk}$ pro elemento temporis dt; ubi ambiguitas signi vel accelerationem vel retardationem indicat.

SCHOLION.

586. Quando ergo corpus rigidum circa quempiam axium suorum principalium gyratur, simulque a quotcunque hujusmodi viribus, quarum singulae sibi pares et contrarias ipsi axi applicatas habeant quasi comites, motus continuationem assignare valemus, quoniam axis sponte manet in quiete, motusque aeque immutatur, ac si axis firmiter retineretur, quem casum jam supra evolvimus. Verum haec determinatio adstricta est ad istam virium sollicitantium rationem, minimeque adhuc patet, cujusmodi effectum aliae vires essent producturae: hoc quidem saltem intelligitur, axem non in quiete esse permansurum, utrum vero motum simplice progressivum sit nacturus, an se inclinando sit processurus, nondum liquet. Interim tamen casus, quo axi motus progressivus imprimitur, ita hunc quo in quiete persistet simplicitate excipit, ut ejus evolutionem suscipere valeamus. Observandum enim est, si cuimotui quocunque motus progressivus uniformis et rectilineus conjungatur, actionem virium minime perturbari, quod principium ad praesens institutum accommodemus.

THEOREMA. 4.

587. Quem motum gyratorium corpus rigidum circa axem quiescentem [illegible] sequitur, eundem motum circa hunc axem uniformiter in directum progredientem prosequi poterit, si quidem ab iisdem viribus sollicitetur.

DEMONSTRATIO.

Dum axis quiescit, et corpus quomodocunque circa eum gyratur, resolvantur singulorum elementorum motus secundum ternas directiones, quibus coordinatae x, y, z parallelae constituantur, eruntque posito temporis elemento $= dt$, celeritates hae laterales $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ atque $\frac{ddx}{dt}$, $\frac{ddy}{dt}$, $\frac{ddz}{dt}$ exhibent effectus virium corpus sollicitantium, quatenus iis singula elementa afficiuntur. Ponamus jam corpori insuper tribui motum progressivum, quo axis motu sibi parallelo uniformiter in directum proferatur celeritate $= c$ secundum eam directionem, cui coordinatae x capiuntur parallelae, ac jam singulorum corporis elementorum celeritates erunt $c + \frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$, quarum differentialia non discrepabunt a praecedentibus: ideoque motus gyratorius circa axem uniformiter in directum progredientem perinde se habebit, ac si axis quiesceret; viresque si quae affuerint, motum gyratorium aeque perturbabunt, sive axis quiescat, sive uniformiter in directum progrediatur.

COROLL. 1.

588. Si igitur corpori, dum circa axem principalem gyratur, motus progressivus tribuatur, neque ab ullis viribus sollicitetur, utrumque motum uniformiter continuabit.

COROLL. 2.

589. Ac si corpus interea ab ejusmodi viribus sollicitetur, quibus solus motus gyratorius mutetur, axis vero non afficiatur, etiam motus gyratorius mutationem patietur: motus progressivus autem manebit uniformis rectilineus.

COROLL. 3.

590. Sin autem corpus interea sollicitetur a vi, cujus directio transit per centrum inertiae, ab ea solus motus progressivus afficietur. Nam quia ab hac vi neque ullum momentum respectu axis gyrationis

nascitur, neque axis de situ suo sibi parallelo deturbatur, motus gyratorius nullam mutationem patitur.

SCHOLION.

591. Veritas hujus Theorematis etiam per ea, quae supra de motu absoluto et respectivo sunt exposita, [illegible] corpus, [illegible] motus refertur, uniformiter in directum progreditur, [illegible] corpus; quod motum gyratorium circa quendam axem principalem ac[illegible] ceperit, hunc motum perpetuo [illegible] conservet, ut [illegible] sponte [illegible] quiete, idem eveniat necesse est [illegible] corpus [illegible] uniformiter in directum lato versetur, hujusque respectu [illegible] quiescat. Tum enim res eodem redit, ac si corpus absolute [illegible] in directum progrediatur, simulque circa axem principalem, qui perpetuo situm sibi parallelum servet, aequabiliter gyretur. Ex quo [illegible] concipi potest quasi in corpore duplex inesset motus, alter gyratorius, quo corpus circa quendam axem principalem gyratur, alter vero progressivus, quo axis cum corpore ita abripiatur, ut axis perpetuo situm sibi parallelum conservet. Atque hinc etiam intelligitur, a viribus supra definitis motum gyratorium perinde accelerari vel retardari oportere, ac si axis quiesceret, simulque vires, quae solum motum progressivum afficere sunt ostensae; nihil quicquam in motu gyratorio mutare, ita ut uterque motus seorsim, quasi solus adesset, considerari queat. Haec igitur, quibus tam insignis casus motus liberi corporum rigidorum continetur, omnino sunt digna, ut diligentius evolvantur.

DEFINITIO 10.

592. *Motus mixtus ex progressivo et gyratorio* est, quo corpus partim circa quempiam axem principalem seu liberum gyratur, partim vero ita insuper movetur, ut ejus axis sibi semper maneat parallelus.

COROLL. 1.

593. Ad motum ergo talem mixtum cognoscendum, ad quodvis tempus nosse oportet, 1°. celeritatem angularem circa axem gyrationis, 2°. celeritatem qua axis motu progressivo promovetur, et 3°. directionem hujus motus progressivi, quomodo ad axem gyrationis sit inclinata.

COROLL. 2.

594. Celeritas porro angularis eodem modo aestimatur, ac si axis quiesceret; celeritas autem, ac directio motus progressivi ex motu axis gyrationis, vel ex motu centri inertiae judicari debet.

EXPLICATIO.

595. Idea haec motus mixti ex ideis utriusque motus progressivi et gyratorii est conflata, unde fit, ut neutra in ea pure et perfecte contineatur. Cum enim motum progressivum ita definivimus, ut omnes rectae, quas in corpore concipere licet, sibi perpetuo maneant parallelae, haec proprietas in motu mixto minime valet, sed tantum ad axem gyrationis adstringitur: interim tamen evidens est, si motus gyratorius tolleretur, vel evanesceret, motum progressivum perfectum esse remansurum. Simili modo definitio motus gyratorii supra data ad axem fixum seu quiescentem erat adstricta, nunc autem ad axem motum extenditur, quae translatio per ideam spatii moti corroboratur, dummodo ut hic assumimus, axis sibi semper maneat parallelus. Quin etiam perspicuum est, si alter motus progressivus tolleretur vel evanesceret, motum gyratorium perfectum qualem supra descripsimus esse remansurum. Quo minus erit dubitandum, quin talis motus recte ex progressivo et gyratorio mixtus appelletur, quoniam alterutro sublato alter nomen suum jure sibi vendicat.

SCHOLION.

596. Circa talem motum mixtum variae quaestiones veniunt considerandae, quarum prima est, quomodo talis motus, si nullae vires accesserint, se sit habiturus, ubi quidem jam vidimus, utrumque aequabiliter esse perrecturum. Deinde viribus accedentibus quaestionem minime in genere tractare licet, ut variatio utriusque motus a viribus quibuscunque orta definiatur; sed ea tantum ad certa virium genera est restringenda. Cum scilicet certae sint vires, quae utrumque motum seorsim ita turbant, ut genus motus non mutetur, his conjungendis eas adipiscemur vires, quarum effectum in hujusmodi motibus mixtis definire valebimus. De reliquis autem cunctis viribus nihil aliud affirmare licebit, nisi quod axis gyrationis non sit situm sibi perpetuo parallelum conservaturus. Quamdiu enim axis sibi manet parallelus, motus semper erit mixtus ex progressivo et gyratorio, atque ad genus, quod hic tractamus, erit referendus: in quo eximium hujus motus criterium cernitur.

THEOREMA. 5.

597. Si corpori rigido impressus fuerit motus mixtus ex progressivo et gyratorio, idque a nullis viribus porro [illegible], [illegible]

utrumque motum uniformiter continuabit, et progressivus erit rectilineus.

DEMONSTRATIO.

Veritas hujus Theorematis ex praecedentibus luculenter perspicitur, cum uterque motus seorsim vi inertiae sponte se conservet, neque continuatio unius impediat continuationem alterius; quandoquidem si spatio motus aequalis et contrarius motui progressivo impressus concipiatur, motus progressivus tolleretur, et gyratorius uniformis esset mansurus, secundum ea, quae supra sunt demonstrata. Necesse autem est, quod probe notandum, ut axis gyrationis per centrum inertiae corporis transeat, simulque sit unus ex ejus axibus principalibus. Nisi enim axis ita sit comparatus, motus gyratorius mox in aliud motus genus transibit, de quo hic nihil adhuc definire licet.

COROLL. 1.

598. In hoc ergo motu mixto, quem corpus vi inertiae prosequitur, non solum centrum inertiae uniformiter in directum progredietur, sed etiam axis gyrationis perpetuo eundem situm conservabit, intereaque corpus circa eum uniformiter gyrari perget.

COROLL. 2.

599. Talis ergo motus cognoscetur, si noverimus primo directionem et celeritatem centri inertiae, tum vero celeritatem angularem ejusque sensum ac denique positionem axis gyrationis.

COROLL. 3.

600. Quoniam in omni corpore tres dantur axes principales, atque in quibusdam adeo infiniti, qui simul sunt axes gyrationis liberi, omnia corpora talis motus sunt capacia idque infinitis modis.

SCHOLION.

Fig. 75. 601. Ad hujusmodi ergo motum calculo evolvendum sit AB recta, in qua centrum inertiae I uniformiter progreditur, cujus celeritas sit $= c$. Interea autem corpus circa axem principalem MIN gyretur, qui cum recta AB perpetuo eundem angulum AIM constituat; circa quem gyretur celeritate angulari $= \gamma$. Quod si jam initio centrum inertiae fuerit in A, et elapso tempore t pervenerit in I, erit spatium motu progressivo percursum $AI = ct$, et interea motu angulari corpus circa

axem MN descripserit angulum $= \gamma t$, necesse est. Ceterum compages corporis easdem vires sustinebit, ac si motus progressivus abesset. Quod denique ad motum cujuscunque puncti corporis attinet, is primo definiatur quasi motus progressivus abesset, tum cum eo conjungatur celeritas progressiva secundum praecepta resolutionis motus supra tradita, sicque habebitur verus ejus puncti motus.

PROBLEMA. 53.

602. Si corpus rigidum motu feratur mixto ex progressivo et gyratorio, definire eas vires, quarum actione axis gyrationis de situ suo sibi parallelo non deflectatur, motusque ideo maneat mixtus ex progressivo et gyratorio.

SOLUTIO.

Primo perspicuum est, omnes vires, quarum directiones per centrum inertiae corporis transeunt, nihil in motu gyratorio efficere, sed tantum ad motum progressivum impendi, ita ut ab iis axis gyrationis non de situ suo deflectatur. Tales ergo vires ad id genus virium, quas quaerimus pertinent; tum vero etiam eo sunt referendae illae vires, quae solum motum gyratorium afficiunt, quas ita vidimus esse comparatas, ut si AB sit axis gyrationis, ad eumque in quovis puncto L constituatur planum normale, binae vires aequales et contrariae Nn et Ll in hoc plano applicatae hunc effectum praestent: atque harum virium altera Ll ipsi axi applicata concipi potest. Verum hujusmodi binis viribus aequivalent binae similes vires, in plano, quod axi normaliter in ipso centro inertiae I constituitur, applicatae, quae sint Kk et Ii, illis aequales et parallelae, sumto intervallo $IK = LN$; harum enim contrariae cum illis in aequilibrio consisterent. Sicque loco binarum quarumvis talium virium Nn et Ll semper substituere licet binas similes et aequales in plano per centrum inertiae I ad axem normaliter ducto applicatas. Quare si binas hujusmodi vires quascunque Kk et Ii cum viribus quibuscunque ipsi centro inertiae applicatis conjungamus, habebimus generatim id genus virium, quibus motus mixtus ita mutatur, ut axis gyrationis sibi maneat parallelus. Inter vires igitur centro inertiae I applicatas statuamus unam $I\eta$ ipsi Ii aequalem et contrariam, qua haec destruatur, ac jam vires quaesitae ita describi possunt, ut praeter vires centro inertiae I applicatas complectantur vires quascunque, quarum directiones sint in plano per centrum inertiae I ad axem normaliter ducto, et quotcunque hujusmodi vires corpori fuerint applicatae, mo- Fig. 76.

tus ejus mixtus aliam inde mutationem non patitur, nisi qua axis situm sibi parallelum servet.

COROLL. 1.

603. Hic ergo alias vires contemplari non licet, nisi quae vel ipsi centro inertiae sint applicatae, vel quarum directiones reperiantur in plano ad axem normali et per centrum inertiae ducto.

COROLL. 2.

604. Hujusmodi igitur viribus vel motus progressivus afficitur, vel gyratorius, vel uterque, sed tamen ita, ut axis gyrationis perpetuo situm sibi parallelum sit conservaturus.

SCHOLION.

605. En ergo vires, ad quas nostra praesens tractatio adstringitur, quarum effectum in motu corporis mixto mutando ex principiis adhuc stabilitis definire licebit: de aliis autem viribus quibuscunque, nisi forte per aequivalentiam ad tales reduci queant, certum est, axem gyrationis de situ suo deturbari, motumque ad aliud genus traduci, quod etiamnum evolvere non valemus. Cujusmodi autem effectum vires assignatae producant, tribus problematibus investigabimus, quorum primo in effectum earum virium inquiremus, quarum directiones per ipsum centrum inertiae corporis transeunt: in secundo alteram virium speciem contemplabimus, quarum directiones sitae sunt in plano, quod ad axem in ipso centro inertiae est normale. In tertio denique effectum a viribus utriusque speciei, simul sollicitantibus oriundum investigemus. Perpetuo autem corpori initio ejusmodi motum mixtum imprimi assumimus, ut gyratorius fiat circa axem principalem corporis.

PROBLEMA 54.

606. Si corpori rigido initio impressus fuerit motus quicunque mixtus ex progressivo et gyratorio circa axem principalem, idque deinceps sollicitetur a viribus quibuscunque, quarum media directio constanter per ejus centrum inertiae transeat, determinare corporis motum.

SOLUTIO.

Quia virium sollicitantium media directio perpetuo per ejus centrum inertiae transit, motus gyratorius nullam inde mutationem patietur,

tur, sed uniformiter peragi perget, quasi axis quiesceret, unde ad quodvis tempus facillime patebit, quantus angulus jam circa axem motu gyratorio fuerit descriptus. Tota ergo quaestio reducitur ad motum progressivum, qui ex motu centri inertiae perfecte cognoscetur, corpus scilicet ita consideretur, quasi tota ejus massa in centro inertiae esset collecta, atque ex viribus, quibus quovis temporis momento sollicitatur, ejus motus eodem modo definietur, quo motum punctorum liberum a viribus quibuscunque sollicitatorum determinare docuimus, ita ut superfluum foret haec fusius prosequi. Cum autem ad quodvis tempus locus centri inertiae fuerit definitus, etiam positio axis gyrationis et quanto angulo corpus circa eum jam se converterit, patebit.

COROLLARIUM.

607. Hic ergo utrumque motum ita seorsim considerare licet, quasi alter plane non adesset, dum motus gyratorius manet aequabilis, progressivus autem perinde turbatur, ac si tota corporis massa in centro inertiae collecta ab iisdem viribus urgeretur.

PROBLEMA 55.

608. Si corpori rigido initio impressus fuerit motus mixtus ex progressivo et gyratorio circa axem principalem, idque sollicitetur a viribus, quarum media directio constanter in plano ad axem per centrum inertiae normaliter ducto reperiatur, determinare corporis motum.

SOLUTIO.

Quia axis sibi semper manet parallelus, elapso tempore t teneat situm AB, et ducto per centrum inertiae I plano ad axem normali, in hoc sit Kk media directio virium jam corpus sollicitantium, et vis illis aequivalens sit $Kk = V$; cui in I aequalis et contraria $Ii = V$ applicata concipiatur, quae autem a pari opposita $I\iota = V$ denuo destruatur, ita ut corpus jam ab his tribus viribus Kk, Ii et $I\iota$ sollicitetur. Nunc autem a binis viribus Kk et Ii solus motus gyratorius afficitur, cujus immutatio ita definitur: Ex centro inertiae I in directionem vis Kk demittatur perpendiculum, quod sit $= f$, erit momentum hujus vis $= Vf$ ad motum sive accelerandum sive retardandum tendens: tum sit massa corporis $= M$ ejusque respectu axis AB momentum inertiae $= Mkk$. Quibus positis, si celeritas angularis circa axem AB jam fuerit $= \varepsilon$, quae perinde aestimatur, ac si axis quiesceret, erit $d\varepsilon = + \frac{2Vfgdt}{Mkk}$: unde ad

Fig. 76.

ad quodvis tempus vera celeritas angularis γ est petenda. Deinde vis $I\eta = V$ solum motum progressivum afficit, idque non aliter, ac si tota corporis massa M in ipso centro inertiae I esset collecta, ita ut corpus tanquam punctum I, quod jam a vi $I\eta = V$ sollicitetur, considerare liceat: quae determinatio cum in praecedentibus satis sit explicata, manifestum est, quomodo ad quodvis tempus tam motum progressivum, quam gyratorium assignari oporteat.

COROLL. 1.

609. Si motus progressivus initio fuerit nullus, centrum inertiae in ipso plano ad axem normali moveri incipiet, et cum vires sollicitantes perpetuo in eodem plano agant, totus centri inertiae motus in eodem plano absolvetur, ad quod axis gyrationis ubique erit normalis.

COROLL. 2.

610. Idem evenit, si prima directio motus centri inertiae fuerit ad axem gyrationis normalis; tum enim constanter in plano ad axem gyrationis normali motum suum continuabit. Secus autem evenit, si prima motus progressivi directio cum axe gyrationis angulum fecerit obliquum.

COROLL. 3.

611. Motus ergo gyratorius ex momento vis sollicitantis Kk quod est $= Vf$, motus autem progressivus ex ipsa hac vi $Kk = V$ ita definitur, quasi haec vis in sua directione ipsi centro inertiae applicata esset.

PROBLEMA. 56.

612. Si corpori rigido impressus fuerit motus mixtus ex progressivo et gyratorio circa quempiam axem principalem, idque deinceps sollicitetur partim a viribus, quarum media directio per ipsum centrum inertiae transit, partim vero ab ejusmodi viribus, quarum directio media in plano per centrum inertiae normaliter ad axem transeunte versatur; determinare motum corporis.

SOLUTIO.

Hujus problematis solutio sponte ex praecedente fluit, dummodo insuper ratio habeatur virium, quarum media directio per ipsum centrum inertiae transit, et quibus solum motum progressivum affici vidimus. Quare pro motu progressivo determinando praeter vires priores centro inertiae per se applicatas, eidem centro insuper applicatae concipiantur omnes vires posteriores singulae secundum suas directiones; tum si placet tota etiam corporis massa in eodem puncto collecta consideretur, ut habeatur casus puncti seu corpusculi infinite parvi a viribus quibuscunque sollicitati, quem per praecepta superiora expedire licebit. Deinde pro motu gyratorio, omissis viribus per centrum inertiae transeuntibus, considerentur eae solae, quarum media directio est in plano per centrum inertiae ad axem normaliter ducto, atque ex singulis vel vi omnibus aequivalente colligetur momentum respectu axis gyrationis, quod si fuerit $= Vf$, mutatio motus gyratorii inde elicitur ut supra, cognito autem seorsim utroque motu universus corporis motus sponte innotescit.

COROLL. 1.

613. Ad motum ergo progressivum definiendum, omnes vires, quibus corpus sollicitatur, singulas in suis directionibus ad centrum inertiae transferri debent, per easque motus progressivus perinde determinabitur, ac si nullus motus gyratorius adesset.

COROLL. 2.

614. Ad motum autem gyratorium definiendum omnium virium sollicitantium colligantur momenta respectu axis gyrationis, hincque motus gyratorius perinde determinabitur, ac si nullus adesset motus progressivus, seu axis gyrationis teneretur fixus.

SCHOLION.

615. Corollarium prius latissime patet, uti infra videbimus, quomodocunque etiam vires sollicitantes fuerint applicatae: hic autem sufficiat id saltem pro ejusmodi viribus, quales in problemate assumsimus, admisisse: posterius vero locum non habet, nisi virium, quae per se non transeunt per centrum inertiae, media directio sita fuerit in plano ad axem normali et per centrum inertiae transeunte: alioquin enim axis sibi non maneret parallelus. Longissime ergo adhuc distamus a problemate generali, quo corporis rigidi a viribus quibuscunque sollicitati motus quaeritur: quo igitur continuo propius eo accedamus, corpus rigidum in quiete consideremus, et dum a viribus quibuscunque sollicitetur, primam motus generationem investigemus. Quamvis enim statim illud problema aggredi possemus tamen praestabit per gradus quasi eo ascendere, ut hoc modo clariorem omnium elementorum cognitionem consequamur.

CAPUT IX.

DE PRIMA MOTUS GENERATIONE IN CORPORIBUS RIGIDIS.

THEOREMA. 6.

616. Si cognitus fuerit effectus duarum virium junctim agentium in motu generando, quarum altera ipsi centro inertiae sit applicata, alterius etiam seorsim agentis effectus innotescet.

DEMONSTRATIO.

A vi corpori in ipso centro inertiae applicata generatur motus progressivus purus, quo singula ejus elementa secundum directionem vis per aequalia spatiola promoventur, quae si vis sollicitans sit $= V$ et massa corporis $= M$, tempusculo dt sunt $= \frac{Vg\,dt^2}{M}$. Quodsi jam corpus praeter vim hanc V centro inertiae applicatam sollicitetur ab alia viquacunque S, effectusque harum duarum virium simul agentium fuerit cognitus, res ita concipiatur, quasi corpus insuper a vi contraria ipsi V aequali et centro inertiae applicata sollicitaretur, qua prior effectus ita turbabitur, ut totum corpus motu progressivo secundum directionem hujus vis retro feratur per spatiolum $= \frac{Vg\,dt^2}{M}$, qui effectus cum illo conjunctus dabit effectum solius vis S corpus sollicitantis, qui propterea innotescet.

COROLL. 1.

617. Effectus nempe vis S aequalis est effectui a binis viribus V et S simul agentibus producto, demendo hunc effectum, quem sola vis V produceret: secundum ea quae supra de resolutione motus sunt praecepta.

COROLL. 2.

618. Si ergo a duabus viribus V et S simul urgentibus corpori imprimatur motus gyratorius circa quempiam axem, a vi sola S corpori imprimetur motus mixtus ex eodem gyratorio et progressivo, qui ipsi a vi ipsi V aequali et contraria induceretur.

SCHO-

SCHOLION.

619. Legibus justae methodi adversari videbitur, quod ex effectu duarum virium simul agentium in effectum unius vis inquirere conemur. Verum in probl. 18. ubi vires definivimus a quibus axis gyrationis non afficiatur, vidimus has vires rarissime ad unicam, semper autem ad duas reduci posse; quarum ergo effectus in corpus quiescens assignari poterit. Quare ut unius tantum vis effectum definire valeamus, efficiendum est ut illarum binarum virium altera per ipsum corporis centrum inertiae transeat, sicque hoc Theorema amplissimum nobis praestabit usum. Quo accedit, ut etiam vires quaecunque corpus sollicitantes ad duas hujusmodi vires reduci queant, quemadmodum jam docebimus.

THEOREMA. 7.

620. Quotcunque fuerint vires corpus rigidum sollicitantes, et quomodocunque fuerint applicatae, eae semper ad duas reduci possunt, quarum altera per ipsum centrum inertiae corporis transeat.

DEMONSTRATIO.

Sit I centrum inertiae corporis, per quod pro lubitu ducatur recta quaecunque ID. Per directionem cujuslibet vis sollicitantis ducatur planum ad rectam ID normale, quod eam secet in puncto R: ac nisi directio hujus vis in isto plano sit sita, ea resolvatur in duas vires $S\varsigma$ et $S\sigma$, quarum illa sit in plano ad ID normali, altera vero $S\sigma$ ipsi rectae ID sit parallela. Ad certum punctum fixum D statuatur planum ad rectam ID normale, ac ducta recta ISE loco vis $S\varsigma$ in punctis I et E substitui poterunt vires $I\iota$ et $E\epsilon$ ipsi parallelae, ut sit Fig. 77.

$$\text{vis } I\iota = \text{vi } S\varsigma.\ \frac{DR}{ID} \text{ et vis } E\epsilon = \text{vi } S\varsigma.\ \frac{IR}{ID}$$

simili modo loco vis $S\sigma$ substituantur vires $I\eta$ et $E\varepsilon$ ipsi aequivalentes parallelae, ut sit

$$\text{vis } I\eta = \text{vi } S\sigma.\ \frac{DR}{ID} \text{ et vis } E\varepsilon = \text{vi } S\sigma.\ \frac{IR}{ID}.$$

Talis resolutio in omnibus viribus corpus sollicitantibus instituatur, atque ex singulis obtinebuntur binae vires ipsi centro inertiae I applicatae, tum vero etiam binae vires $E\epsilon$ et $E\varepsilon$ illa in plano ad axem ID in D normali sita, haec vero ad istud planum normalis seu axi ID parallela. Omnibus viribus, quae centro inertiae I applicantur, in unam collectis, omnes vires $E\epsilon$, quia in eodem sunt plano, pariter in unam col-

Igi-

Fig. 78. ligi poterunt, quae sit vis Mm: similique modo omnes vires $E\varepsilon$, quia sunt inter se parallelae, etiam in unam colligi possunt, quae sit vis Nn, axi ID itidem parallela, quemadmodum illa Mm in plano mMD ad axem normali versatur. Hoc modo loco omnium virium sollicitantium, quotcunque fuerint, nanciscimur tres vires, unam ipsi centro inertiae I applicatam et binas Mm et Nn, quae tres autem porro ad duas reducentur hoc modo: Producatur recta IN in Q donec ejus ab axe distantia QR aequalis fiat distantiae DM ex D per N ad occursum vis Mm usque ductae: eritque ID : IR = DN : DM. Tum loco vis Nn substituere licebit vires Ii et Qq ipsi parallelas, ut sit

$$\text{vis } Ii = \text{vi } Nn \cdot \frac{MN}{DM} \text{ et vis } Qq = \text{vi } Nn \cdot \frac{DN}{DM}.$$

Prior cum reliquis centro inertiae applicatis in unam coalescit, posterior vero Qq secundum suam directionem in ipso puncto M applicata concipi potest, sicque cum vi Mm pariter uniri potest, quae sit vis $M\mu$, ita ut nunc omnes vires sollicitantes reductae sint ad duas, alteram centro inertiae I applicatam, alteram vero istam vim $M\mu$.

COROLL. 1.

621. Quoniam tam axem ID quam in eo punctum D pro lubitu assumere licet, vires sollicitantes infinitis modis ad hujusmodi binas vires, quarum altera ipsi centro inertiae sit applicata, reduci possunt.

COROLL. 2.

622. Facta autem una hujusmodi reductione, per eadem principia loco vis $M\mu$ duae aliae ipsi parallelae substitui possunt, quarum altera centrum inertiae I afficiat, altera vero in puncto quovis alio rectae IM sit applicata, unde patet omnes reductiones ad eandem rectam IM referri.

SCHOLION.

623. Theorema hoc maximi est momenti in argumento hujus capitis evolvendo, ubi propositum nobis est in primam motus generationem inquirere, quando corpus rigidum quiescens et liberum a viribus quibuscunque sollicitatur. Cum enim hae vires quotcunque etiam fuerint semper ad binas revocari queant, quarum altera ipsi centro inertiae sit applicata, hujusque effectus sit determinatu facillimus, totum negotium eo redit, ut effectus ab unica quacunque vi productus definiatur; quod si minus successerit, cum ea vi alia quaecunque centro inertiae applicata combinari poterit, ac si effectus inde conjunctim productus assignari potuerit, totum negotium erit confectum. Primum ergo dispiciamus, quomodo duae hujusmodi vires comparatae esse debeant, ut ab iis corpori motus circa datum axem per ejus centrum inertiae transeuntem imprimatur; hoc enim praestito facile erit institutum nostrum prosequi.

PROBLEMA. 57.

624. Definire duas vires corpori rigido applicandas, quarum alterius directio per centrum inertiae transeat, ut corpus ab iis sollicitatum circa datum axem per ejus centrum inertiae transeuntem converti incipiat.

SOLUTIO.

Incidat centrum inertiae in punctum O, sitque OA axis, circa quem motus gyratorius generari debeat; ac necesse est, ut vires sollicitantes ita sint comparatae, ut axis ab illis nihil patiatur. Hoc ergo problema continetur in probl. 18. supra §. 390. soluto, ubi in scholio §. 394. vires generaliter exhibitas ita determinari oportet, ut pro termino O omnes vires ipsi puncto O sint applicatae. Ponantur ergo vires $Pp = 0$ et $Qq = 0$, unde ob $KI = 0$, aeque ac $OK = 0$, fiet vis $O\pi = \frac{\int xy\,dM}{cb}$ Fig. 43.

et vis $O\phi = \frac{\int xz\,dM}{ab}$. Deinde pro termino A sumantur vires $A\varrho = 0$ et $A r = 0$, fientque vires $Rr = \frac{\int xy\,dM}{ab}$ et $Sr = \frac{\int xz\,dM}{ab}$, ita ut sit vis Rr = vi $O\pi$ et vis Sr = vi $O\phi$: tum vero requiritur, ut sit $AR \int xy\,dM + AS \int xz\,dM = a\int rr\,dM$. Quoniam planum OAR ob centrum inertiae I in O positum pro lubitu assumi potest, id ita assumi poterit, ut fiat $\int xz\,dM = 0$, hincque duae tantum supersunt vires problemati satisfacientes, altera vis $O\pi = \frac{\int xy\,dM}{ab}$ ipsi centro inertiae applicata, altera

vis $Rr = \frac{\int xy\,dM}{ab}$ in distantia ab axe $AR = \frac{a\int rr\,dM}{\int xy\,dM}$ applicanda. Hinc solutionem problematis ita brevi complectemur: cum axe gyrationis proposito IA ejusmodi binae directrices IB et IC conjungantur, ut constitutis pro quovis corporis elemento dM coordinatis illis parallelis $IX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, positaque $XZ = \sqrt{(yy + zz)} = r$, fiat $\int xz\,dM = 0$. Tum sumto intervallo pro lubitu $IA = a$, et ipsi IB parallela Fig. 79.

rallela $AR = \frac{a\int rrdM}{\int xydM}$, quaecunque vis Rr ipſi IC parallela et in puncto R applicata effectum propoſitum producet, ſi modo inſuper centro inertiae I vis illi aequalis et contraria $I\pi$ applicetur: et poſitis his viribus $Rr = I\pi = V$ cum momentum reſpectu axis IA inde natum fit $= \frac{Va\int rrdM}{\int xydM}$, tempuſculo dt circa axem IA generabitur angulus $d\omega = \frac{\frac{Vagdt^2}{\int xydM}}{}$.

COROLL. 1.

625. Cum intervallum $IA = a$, a quo diſtantia AR pendet, pro lubitu accipi poſſit, omnia puncta R reperiuntur in linea recta IR faciente cum axe IA angulum, cujus tangens $= \frac{\int rrdM}{\int xydM}$, dummodo planum AIB ita ſit ſumtum, ut fiat $\int xzdM = 0$.

COROLL. 2.

626. Ducta hac recta IR quaelibet vis huic rectae in quovis puncto applicata et ad planum AIB normalis, ſi in I vis illi aequalis et contraria $I\pi$ inſuper applicetur, corpus circa axem IA converti incipiet.

COROLL. 3.

627. Propoſita autem quacunque vi Rr, cui aequalis in I contrarie ſit applicata, corpus circa quempiam axem per centrum inertiae tranſeuntem verti incipiet, de quo tantum patet, quod ſitus ſit in plano, per centrum inertiae I ad directionem vis ſollicitantis Rr normaliter ducto.

PROBLEMA 58.

628. Si corpus rigidum quieſcens a vi quacunque ſollicitetur, determinare primum initium motus, qui ab ea vi in corpore generabitur, circa axem in plano ad directionem vis normali ſitum, ſi quidem fieri queat.

SOLUTIO.

Fig. 80. Sit I centrum inertiae corporis, per quod ductum concipiatur planum ad directionem vis normale, quod ipſo plano tabulae referatur, cui ergo vis ſollicitans $Rr = V$ normaliter inſiſtere eſt intelligenda,

genda, et recta IR ad eam ſit normalis, quae ponatur $IR = b$. Applicetur corpori inſuper in centro inertiae vis $I\pi$ illi aequalis et contraria, ita ut ex oppoſito in planum tabulae ſit normalis. Ab his duabus viribus ſimul agentibus corpus circa quempiam axem per centrum inertiae tranſeuntem converti incipiet, atque ex §. praec. patet, hunc axem in plano tabulae fore ſitum, qui propterea ſit IA, pro cujus poſitione quaeri debet angulus $RIA = \eta$; ita ut ducta ex R ad eum normali RA ſit $RA = b\sin\eta$ et $IA = b\cos\eta$. Quoniam autem poſitionem hujus axis nondum novimus, referamus ſingula corporis elementa ad ternas directrices IR, IP, IQ, quarum prima ex directione vis ſollicitantis datur, altera IP in plano tabulae ad eam ſit normalis, ac tertia IQ ipſi huic plano normaliter inſiſtat. Sint ergo coordinatae ſecundum has ternas directrices $IX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$. Deinde ad coordinatas ſuperioribus formulis conſentaneas obtinendas, ex Y ad axem gyrationis IA ducatur normalis YX', ſintque iſtae coordinatae:

$$IX' = x';\ X'Y = y' \text{ et } YZ = z' = z \text{ ut ante,}$$

quarum priores per praecedentes ita determinentur, ut ſit

$$x' = x\cos\eta - y\sin\eta \text{ et } y' = x\sin\eta + y\cos\eta.$$

Ex his autem neceſſe eſt fiat $\int x'zdM = 0$, et $\tang AIR = \tang\eta = \frac{\int rrdM}{\int x'y'dM}$ (625.) exiſtente $rr = y'y' + zz$.

At vero erit

$$\int x'zdM = \cos\eta\int xzdM - \sin\eta\int yzdM$$
$$\int rrdM = \sin\eta^2\int xxdM + 2\sin\eta\cos\eta\int xydM + \cos\eta^2\int yydM + \int zzdM$$
$$\int x'y'dM = \sin\eta\cos\eta\int xxdM + (\cos\eta^2 - \sin\eta^2)\int xydM - \sin\eta\cos\eta\int yydM$$

Ponamus haec integralia per totum corpus extenſa:

$$\int xxdM = A;\ \int yydM = B;\ \int zzdM = C$$
$$\int xydM = D;\ \int xzdM = E;\ \int yzdM = F$$

atque habebimus has aequationes:

$$E\cos\eta - F\sin\eta = 0 \text{ et}$$
$$A\sin\eta^2 + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2).\ \tang\eta - B\sin\eta^2 = A\sin\eta^2 + 2D\sin\eta\cos\eta + B\cos\eta^2 + C$$

ſeu $D\tang\eta + B + C = 0$: unde duplici modo naneiſcimur:

$$\tang\eta = \frac{E}{F} \text{ et } \tang\eta = \frac{-B-C}{D}$$

qui bini valores niſi conſentiant, problema ſub conditione propoſita, qua axis gyrationis in plano ad directionem vis normali aſſumitur, reſolvi nequit.

 Ponamus

Ponamus ergo vim ita esse applicatam, ut fiat $\frac{E}{F} + \frac{B+C}{D} = 0$, atque corpus gyrari incipiet circa axem IA in plano ad directionem vis normali situm, ut sit $tang\ RIA = \frac{E}{F} = \frac{-B-C}{D}$. Tum ob momentum vis $= Vb \sin\eta$, et momentum inertiae respectu hujus axis $\int rr\,dM = A\sin\eta^2 + B\cos\eta^2 + 2D\sin\eta\cos\eta + C$, tempusculo dt vertetur per angulum $d\omega = \frac{2Vgb\,dt\sin\eta}{A\sin\eta^2 + B\cos\eta^2 + 2D\sin\eta\cos\eta + C}$. Qui cum sit effectus binarum virium Rr et Iπ junctim agentium, ut prodeat effectus solius vis Rr = V, addatur insuper vis Ip = V, et corpori praeter motum gyratorium imprimetur motus progressivus purus secundum directionem IQ ipsi Rr parallelam, quo tempusculo dt conficietur spatiolum $= \frac{Vg\,dt}{M}$.

COROLL. 1.

629. Solutio ergo hujus problematis ad eos tantum casus extenditur, quibus vis sollicitans Rr = V corpori ita est applicata, ut collectis formulis integralibus expositis fiat $\frac{E}{F} + \frac{B+C}{D} = 0$.

COROLL. 2.

630. Nisi autem haec proprietas locum habeat, solutio problematis adhuc latet: hocque tantum constat, gyrationem non fieri circa axem, qui situs sit in plano ad directionem vis sollicitantis normali.

SCHOLION.

631. Mirum utique videbitur, quod cum praeparatio ex viribus quas axis supra sustinere inventus est, petita solutionem completam polliceri sit visa, nunc tamen infiniti casus excludantur, quos nostra solutio non complectatur. Cum enim certum sit, conversionem circa nullum alium axem fieri posse, nisi qui nullas plane vires sustineat, problema 18. perfectam solutionem suppeditare deberet, si quidem ipsum in omni extensione fuisset solutum. Verum probe notandum est, in hoc problemate nullas alias vires esse assumtas, nisi quarum directiones reperiantur in planis ad axem normalibus, cum tamen vires etiam obliquae induci potuissent, dummodo vires axi parallelae inde natae se destruerent. Atque hoc revera usu venit in casibus exclusis, ubi corpus initium gyrationis capere debet circa axem, qui est inclinatus ad planum

num per centrum inertiae ad vim sollicitantem normaliter ductum, quoniam tum ex resolutione vis Rr nascitur vis tali axi parallela: cujus utique ratio haberi debet, si hoc problema in genere resolvere velimus.

PROBLEMA. 59.

632. Si corpus rigidum quiescens a vi quacunque sollicitetur, eique simul in centro inertiae vis aequalis et contraria applicata fuerit, definire axem, circa quem primum gyrari incipiet.

SOLUTIO.

Sit I centrum inertiae corporis, ac tabula referat ut ante planum per I ad directionem vis sollicitantis, quae sit Rr = V, normaliter ductum; in quo ponatur distantia IR = b. Tum sumto in hoc plano angulo RIA = η, ut ducto ex R in IA perpendiculo RA sit IA = $b\cos\eta$ et RA = $b\sin\eta$: ducatur in A ad planum normalis AD, sitque ducta ID angulus AID = θ, ideoque AD = $b\cos\eta\,tang\,\theta$ et ID $= \frac{b\cos\eta}{\cos\theta}$; quae linea ID sit axis gyrationis quaesitus ita, ut ambos angulos η et θ investigari oporteat. Corpus ergo expressi debet per ternas coordinatas, quarum una in ipso axe ID capiatur. Dari igitur assumo relationem inter coordinatas IX = x, XY = y et YZ = z, quarum prima in ipsa recta IR, secunda in plano ad vim normali, et tertia ipsi vi Rr parallela capiatur. Ex Y primo ad IA perpendicularis YX′ ducatur, in plano autem ad tabulam normali AID perpendicularis X′y ipsi YZ et yZ ipsi X′Y parallela, erit ut ante vidimus: Fig. 80.

$$IX' = x\cos\eta - y\sin\eta;\ X'y = YZ = z;\ X'Y = yL = x\sin\eta + y\cos\eta.$$

Tum in plano normali ex y ad ID ducatur perpendicularis yx, et habebuntur novae coordinatae, quales desideramus, quae sint Ix = X; xy = Y et yZ = Z, atque ita per praecedentes determinantur.

$$X = x\cos\eta\cos\theta - y\sin\eta\cos\theta + z\sin\theta;\ Y = z\cos\theta - x\cos\eta\sin\theta + y\sin\eta\sin\theta;\ Z = x\sin\eta + y\cos\eta.$$

Hae jam coordinatae, plano IAD in planum tabulae projecto in fig. 81. repraesententur, ad quod jam AR = $b\sin\eta$ erit normalis, et vis Rr ipsi AD parallela: ducatur DV ipsi AR parallela, et vis in puncto V applicata concipiatur, ut sit vis Vr = V: ductisque Vv ipsi xy et Vu ipsi Ix parallela, ob angulum rVv = θ; vis Vr resolvitur in binas has: vim Vv = V $\cos\theta$ et vim Vu = V $\sin\theta$, quae contrarie puncto I applicentur, quarum prior sit vis Ii = V $\cos\theta$, ad ID jam in plano tabulae norma-

lis,

lis, altera vero axis secundum DI urgebitur. Momentum autem vis $Vv = V\cos\theta$ respectu axis ID est $= V\cos\theta . b\sin\eta = Vb\sin\eta\cos\theta$, et posito $YY + ZZ = RR$ momentum inertiae corporis respectu axis ID $= \int RRdM$, unde tempusculo dt conversio fiet per angulum $d\omega = \frac{Vgbdt^2 \sin\eta\cos\theta}{\int RRdM}$. Cum axis nullas vires sentire debeat, vis $Vz = V\cos\theta$ ipsi axi in D applicetur, ut sit vis $Dd = V\cos\theta$, vis vero $Vu = V\sin\theta$ in sua directione perpendiculo $IT = DV = b\sin\eta$ applicata concipiatur, ex qua pro axe primo vis nascitur secundum ID urgens, quae superiorem illam destruit; tum vero posito intervallo $ID = \frac{b\cos\eta}{\cos\theta} = a$ inde oriuntur binae vires ad axem et planum tabulae normales $I\eta = D\delta = \frac{b\sin\eta}{a} V\sin\theta = V \tang\eta \sin\theta\cos\theta$. Praeterea vero habentur vires $Ii = Dd = V\cos\theta$, quae per vires elementares destrui debent. At ex probl. 16. vires elementares huc accommodatae praebent binas vires Pp et Qq in punctis P et Q applicandae, ut sit

$$IP = \frac{\int XZdM}{\int ZdM};\quad \text{vis } Pp = \frac{Vb\sin\eta\cos\theta.\int ZdM}{\int RRdM}$$
$$IQ = \frac{\int XYdM}{\int YdM};\quad \text{vis } Qq = \frac{Vb\sin\eta\cos\theta.\int YdM}{\int RRdM}.$$

Cum autem motus hic in contrarium sensum incipiat, atque ibi assumsimus, hae vires praecedentibus aequivalentes statui debent: et quia ob I centrum inertiae fit $\int YdM = 0$, et $\int ZdM = 0$, omnia ad momenta revocantur, ut esse debeat $Pp. IP = Dd. ID$ et $Qq. IQ = D\delta. ID$ sicque habebimus has duas aequationes:

$$\frac{Vb\sin\eta\cos\theta\int XZdM}{\int RRdM} = Vb\cos\eta \text{ et}$$
$$\frac{Vb\sin\eta\cos\theta\int XYdM}{\int RRdM} = Vb\sin\eta\sin\theta \text{ sive}$$
$$\sin\eta\cos\theta\int XZdM = \cos\eta\int RRdM \text{ et } \cos\theta\int XYdM = \sin\theta\int RRdM.$$

Nunc igitur positis integralibus ex coordinatis principalibus x, y et z natis:

$$\int xxdM = A;\ \int yydM = B;\ \int zzdM = C;\ \int xydM = D;\ \int xzdM = E,\ \int yzdM = F$$

ob $RR = YY + ZZ$ erit

$\int RRdM$

$$\int RRdM = A(\sin\eta^2 + \cos\eta^2\sin\theta^2) + B(\cos\eta^2 + \sin\eta^2\sin\theta^2) + C\cos\theta^2$$
$$+ 2D\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2 - 2E\cos\eta\sin\theta\cos\theta + 2F\sin\eta\sin\theta\cos\theta$$
$$\int XYdM = -A\cos\eta^2\sin\theta\cos\theta - B\sin\eta^2\sin\theta\cos\theta + C\sin\theta\cos\theta$$
$$+ 2D\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta + E\cos\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) - F\sin\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2)$$
$$\int XZdM = A\sin\eta\cos\eta\cos\theta - B\sin\eta\cos\eta\cos\theta + D\cos\theta(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)$$
$$+ E\sin\eta\sin\theta + F\cos\eta\sin\theta$$

quibus valoribus substitutis binae aequationes inventae induent has formas:

$$\text{I. } -A\cos\eta\sin\theta^2 - B\cos\eta - C\cos\eta\cos\theta^2 - D\sin\eta\cos\theta^2 + E(1 + \cos\eta^2)$$
$$\sin\theta\cos\theta - F\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta = 0$$
$$\text{II. } -A\sin\theta - B\sin\theta + E\cos\eta\cos\theta - F\sin\eta\cos\theta = 0$$

quarum posterior praebet $\tang\theta = \frac{E\cos\eta - F\sin\eta}{A+B}$. At II. $\cos\eta\sin\theta$ — I praebet

$$B\cos\eta\cos\theta^2 + C\cos\eta\cos\theta^2 + D\sin\eta\cos\theta^2 - E\sin\theta\cos\theta = 0,$$

unde colligitur $\tang\theta = \frac{(B+C)\cos\eta + D\sin\eta}{E}$; hincque tandem $\tang\eta = \frac{EE-(A+B)(B+C)}{(A+B)D+EF}$: unde ambo anguli $RIA = \eta$ et $AID = \theta$ atque adeo axis gyrationis ID innotescit.

COROLL. 1.

633. Proposita ergo vi quacunque $Rr = V$, cui simul aequalis in ipso centro inertiae I contrarie sit applicata, si per I planum ad directionem vis normale ducatur PIR, atque ad id recta IQ perpendicularis, his ternis directricibus IR, IP, IQ pro quovis elemento corporis dM in Z sito parallelae capiantur coordinatae $IX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$, hincque ex indole corporis colligi debent sequentes sex valores:

$$\int xxdM = A,\ \int yydM = B,\ \int zzdM = C;\ \int xydM = D;$$
$$\int xzdM = E;\ \int yzdM = F.$$

COROLL. 2.

634. His inventis in plano RIP ad directionem vis normali ex opposito coordinatarum $XY = y$ positivarum, seu in regione negativarum capiatur angulus $RIA = \eta$ ut sit $\tang\eta = \frac{EE-(A+B)(B+C)}{(A+B)D+EF}$, quo invento super illo plano in regione coordinatarum $YZ = z$ positivarum

erigatur

erigatur angulus AID $= \theta$, ut sit $tang\,\theta = \frac{E\cos\eta - F\sin\eta}{A+B}$ seu $tang\,\theta = \frac{(B+C)\cos\eta + D\sin\eta}{E}$ eritque recta ID axis gyrationis.

COROLL. 3.

635. Posita distantia IR $= b$, erit respectu hujus axis ID momentum vis sollicitantis $= Vb\sin\eta\cos\theta$, et momentum inertiae $= \int RRdM$, quod etiam est $= tang\,\eta\cos\theta\int XZdM = \cot\theta\int XYdM$, cujus valor ex praecedentibus facile eruitur: inde vero elemento temporis dt conversio fit per angulum $d\omega = \frac{Vgbdt^2\sin\eta\cos\theta}{\int RRdM}$.

SCHOLION.

636. En ergo problema nostrum generale, in quo summa hujus capitis versatur, perfecte solutum; unde quidem casus ante tractatus sponte fluit, quippe quo est angulus $\theta = 0$: nam tum fit ex formula priori $tang\,\eta = \frac{E}{F}$ et ex posteriore $tang\,\eta = \frac{-B-C}{D}$, qui valores nisi conveniant, casus ille locum habere nequit. Vicissim autem si fuerit $DE + (B+C)F = 0$, ob $B+C = \frac{-DE}{F}$, fit $tang\,\eta = \frac{E}{F}$ et $tang\,\theta = 0$. Ceterum hic observo, ex iis quae supra de axibus principalibus sunt tradita esse

$$\int XYdM = \frac{-d.\int RRdM}{2d\theta} \text{ sumto tantum } \theta \text{ variabili, et}$$

$$\int XZdM = \frac{d.\int RRdM}{2d\eta\cos\theta} \text{ sumto tantum } \eta \text{ variabili.}$$

Quibus valoribus substitutis binae conditiones principales postulant

$$\frac{\sin\eta.d.\int RRdM}{2d\eta} = \cos\eta\int RRdM \text{ et } \frac{-\cos\theta.d.\int RRdM}{2d\theta} = \sin\theta\int RRdM,$$

in quarum priore tantum η in posteriore tantum θ est variabile. Utriusque igitur idem est integrale $\int RRdM = \alpha\sin\eta^2\cos\theta^2$, unde vicissim concludo, angulos η et θ ita definiri oportere, ut quantitas $\frac{\sin\eta^2\cos\theta^2}{\int RRdM}$ fiat minimum, quoniam hinc eaedem binae aequationes resolvendae proveniunt.

veniunt. Eadem autem formula oritur, si $d\omega^2\int RRdM$ seu $\int dM.RRd\omega^2$ reddatur minimum, in qua cum $Rd\omega$ denotet celeritatem elementi dM, ideoque $dM.RRd\omega^2$ ejus vim vivam uti vocatur, hinc colligimus illud insigne Theorema.

THEOREMA. 8.

637. Si corpus rigidum quiescens sollicitetur a vi quacunque, eique insuper in centro inertiae applicata sit vis aequalis et contraria, ei circa ejusmodi axem per centrum inertiae transeuntem primo instanti motus gyratorius imprimetur, ut totum corpus inde minimam adipiscatur vim vivam, quae est aggregatum omnium elementorum per quadrata celeritatum suarum acquisitarum multiplicatorum.

DEMONSTRATIO.

Quicunque enim axis per centrum inertiae transiens accipiatur ejus respectu vis proposita V certum obtinebit momentum quod sit Vf, tum vero etiam corpus ejus respectu certum obtinebit momentum inertiae, quod sit $= \int RRdM$: utrumque a situ axis assumti pendens; hinc autem tempusculo dt generabitur circa hunc axem angulus $d\omega = \frac{Vfgdt^2}{\int RRdM}$ et celeritas angularis infinite parva $\varepsilon = \frac{2Vfgdt}{\int RRdM}$: unde elementi dM ab axe intervallo $=$ R distantis celeritas fit $=$ Rε, ideoque vis viva $=$ $R^2\varepsilon^2dM$. Totius ergo corporis vis viva tempusculo infinite parvo dt acquisita erit $= \varepsilon\varepsilon\int R^2dM = \frac{4VVffggdt^2}{\int RRdM}$, quae ob V g et dt constans erit minimum, si $\frac{ff}{\int RRdM}$ reddatur minimum, atque ex hac conditione positio axis determinetur. Hinc autem eadem axis determinatio resultat, quam ante invenimus: ita ut ex hoc principio minimi eadem solutio erui potuisset.

SCHOLION.

638. Quod ad usum solutionis ante inventae attinet, hoc adhuc nimis est molestum, quod unaquaque vi sollicitante indoles corporis ad peculiares coordinatas revocari debent. Cui incommodo remedium affertur per ea quae supra de axibus principalibus cujusque corporis docuimus, quorum respectu si momenta inertiae semel fuerint inventa, facillime inde respectu omnium aliorum axium colligi possunt. Atque

etiam