# CAPUT I.

## DE MOTU PROGRESSIVO CORPORUM RIGIDORUM.

### DEFINITIO. 1.

260. Corpus rigidum vocatur, cujus figura nullam mutationem patitur; seu cujus singula elementa constanter easdem inter se distantias conservant.

### COROLL. 1.

261. Cognito ergo loco quaternorum punctorum corporis rigidi, ejus situs innotescit, cum inde omnium reliquorum punctorum loca determinentur: dummodo quatuor illa puncta non sint in eodem plano.

### COROLL. 2.

262. plerumque etiam ad situm corporis rigidi cognoscendum sufficit positionem trium ejus punctorum nosse, dummodo non sint in directum sita: quamquam enim hoc modo duplex relinquitur situs, saepissime uter locum habeat, aliunde paret.

### EXPLICATIO.

263. Corpora rigida non ita definio, ut eorum figura nullam plane mutationem pati possit; quandoquidem constat, nulla in mundo dari corpora tam dura, quorum figurae alterandae nullae omnino vires pares existant, cum etiam durissimus adamas diffringi queat. Ad classem ergo corporum rigidorum ea omnia refero corpora, quae dum moventur, actu nullam mutationem in figura sua patiuntur, seu quae vires, quarum actionem revera subeunt, sine ulla figurae suae mutatione

tione sustinere valeant, etiamsi majoribus viribus non resisterent. Ita in corporibus, quorum motus hic contemplari institui, ejusmodi structuram partiumque nexum statuo, qui a viribus ea actu sollicitantibus turbari nequeat, id minime curans, quando ab aliis viribus afficerentur. Hinc ad vires sollicitantes hic potissimum erit attendendum, quarum respectu corpora pro rigidis erunt habenda, quorum compages earum actioni satis resistat, etiamsi eadem respectu aliarum virium minime pro rigidis essent habenda. Fieri itaque poterit, ut corpora admodum mollia ac debilia nobis sint rigida, alia vero per se multo duriora hinc excludi debeant. Quare dum motus hujusmodi corporum investigamus, in vires, quibus eorum compages partiumque connexio afficitur, sedulo inquiri conveniet, ut intelligamus, quanta firmitate sit opus, ut figura conservetur. Corpus igitur ut rigidum spectabimus, quando nexus inter ejus partes satis est firmus, ut ne duo quidem elementa a viribus, quas actu sustinet, vel propius ad se invicem cogi, vel longius a se invicem divelli queant.

### SCHOLION.

264. Corpus ergo rigidum alium motum recipere nequit, nisi quo omnia ejus puncta easdem perpetuo inter se distantias conservant; nihilo vero minus tale corpus infinitorum motuum est capax, dum enim adeo unum aliquod ejus punctum quiescit, aliud per circumferentiam sphaerae circumferri potest, et quomodocunque hoc moveatur, tertium aliquod punctum sive celerius sive tardius moveri potest, ut tamen ab illis duobus debitas distantias servet. Ex quo intelligitur, si nullum punctum quiescat, adhuc multo majorem fore motuum multiplicitatem, qui quidem in corpore inesse possint; cognito autem trium punctorum non in directum sitorum motu, reliquorum omnium hoc est motus totius corporis innotescit. Inter [illegible] autem hos motus is est simplicissimus, quo singula corporis puncta secundum directiones inter se parallelas paribus celeritatibus quovis temporis momento promoveantur: tali enim motu situs relativus omnium particularum neutiquam turbatur. Atque hoc motus genus, quod in omnia corpora cadit, accuratius contemplemur.

### DEFINITIO. 2.

265. *Motus progressivus* est, quo singula corporis puncta paribus celeritatibus secundum directiones inter se parallelas quovis temporis momento promoventur.

CO-



### COROLL. 1.

266. Cognito ergo motu [illegible] puncti [illegible] motus [illegible] aequalis innotescit: singula enim [illegible] ris momento secundum eandem directionem et [illegible] tur, atque illud punctum.

### COROLL. 2.

267. Sive ergo unum aliquod punctum [illegible] vam motu quocunque describit, omnia [illegible] neis sive rectis sive curvis simili modo [illegible]

### COROLL. 3.

268. Tali motu, sive sit rectilineus sive [illegible] tiae binorum quorumque punctorum corporis [illegible] iam rectae bina quaeque puncta jungentes perpetuo [illegible]

### SCHOLION.

269. Hic motus tanquam simplicissimus, et cujus omnia [illegible] sunt capacia, primus se considerandum offert, eumque in [illegible] porum coelestium primo animadvertimus. Dum enim [illegible] spectamus, calculum ita instituimus, quasi solo motu [illegible] coelos ferrentur, ac deinceps demum ipsis insuper mo[illegible] tribuimus: ubi quidem prior motus *[illegible]*, [illegible] vocari solet. Quando autem corpori solum motum prog[illegible] ullo adjuncto gyratorio tribuimus, rem ita concipimus, [illegible] na quaeque puncta corporis jungentes perpetuo sibi parall[illegible] dem coeli plagas versus directae maneant. At quoties haec [illegible] in quopiam motu locum non habet, illud corpus non motu [illegible] solo seu puro moveri, sed insuper motus quidam gyratorius [illegible] censetur, cujusmodi admixtio quomodo fiat, infra [illegible] Ceterum hinc statim patet, lunam, quoniam terrae semper [illegible] dem faciem obvertit, non motu progressivo puro promoveri, [illegible] motum quendam gyratorium admisceri. Quae ergo hic [illegible] tur, de motu progressivo puro, etiamsi vox *puri* non adjiciatur, [illegible] genda sunt, quando enim gyratio quaedam superadditur, motus [illegible] genus transit.

### THEOREMA. 1.

270. Corpus, cui semel fuerit impressus motus pro[illegible] inertiam perpetuo hoc motu uniformiter in directum pro[illegible] nisi a causis externis turbetur.



[illegible]

*DEMONSTRATIO.*

Concipiatur corpus in minima elementa divisum, et cum singula aequales celeritates secundum directiones parallelas acceperunt, dum in statu suo perseverare conantur, situm relativum inter se non mutant. Omnia ergo simul motum suum uniformiter in directum prosequi possunt, sine ullo penetrationis periculo: hincque nulla nascetur vis, quae cujusquam elementi statum immutare tendat. Singula igitur elementa perinde motum suum continuabunt, ac si a se invicem essent soluta, nulloque nexu inter se cohaererent. Quare nisi externae caussae accedant, corpus, quod semel acceperit motum progressivum, hoc motu perpetuo uniformiter in directum progredi perget.

*COROLL. 1.*

271. Quemadmodum ergo corpus finitum, si semel quieverit, quiescere pergit; ita si semel motum progressivum acceperit, eundem perpetuo conservat. Sicque perseverantia in eodem statu etiam ad corpora finitae magnitudinis patet, dummodo motus fuerit progressivus.

*COROLL. 2.*

272. Quia a continuatione hujus status partium corporis nexus nullam vim patitur, conservatio figurae etiam nullam firmitatem exigit; respectu ergo talis motus omnia corpora ut rigida considerari possunt.

*COROLL. 3.*

273. Inertia ergo est causa, quod omnia corpora, ne fluidis quidem exceptis, quorum particulae nullo vinculo inter se connectuntur, vel in eodem statu quietis, vel in eodem statu motus progressivi perseverent.

*EXPLICATIO.*

274. Veritas Theorematis hoc nititur fundamento, quod singula elementa motum suum libere prosequi possint, neque ullum impediat, quo minus reliqua in suo statu perseverent. Cujus ratio clarius percipietur, si casum contemplemur, quo corpori initio motus quidam gyratorius fuerit impressus, ita ut alia elementa celerius alia tardius moveri inceperint: tum enim si singula elementa suum quaeque motum continuarent, mox a se invicem separarentur ac dissiparentur, sicque corporis



corporis compages dissolveretur. Hoc ergo casu nexus particularum obstaret, quo minus singula elementa motum impressum prosequi possent. Quod cum non eveniat, si singulis elementis motus aequales secundum directiones parallelas fuerint impressi, quae est conditio motus progressivi, nulla etiam causa adest, cur cujusquam elementi status mutaretur. Quin etiam nullum elementum in motu suo mutationem pati posset, quin simul status reliquorum perturbaretur. Ex quo necesse est, ut corpus, quod semel hujusmodi motum progressivum acceperit, eodem motu perpetuo uniformiter in directum progredi debeat. Ubi imprimis notandum est, in tali motu compagem partium nullam vim sustinere, ita ut etiamsi inter se omni nexu destituerentur, tamen easdem perpetuo distantias inter se essent conservaturae. Quare cum nulla hinc gignatur vis figuram corporis mutare tendens, cui rigiditas resistere debeat, omnia corpora respectu talis motus tanquam rigida spectari possunt.

*THEOREMA. 2.*

275. Si corporis motu progressivo lati singula elementa viribus, quae massis eorum sint proportionales, secundum directiones inter se parallelas sollicitentur, eorum situs relativus non mutabitur, et singula elementa motum quaeque suum libere continuabunt.

*DEMONSTRATIO.*

Quia vires singula elementa sollicitantes ipsorum massis statuuntur proportionales, effectus eodem tempusculo producti erunt aequales, et quia directiones virium sunt inter se parallelae, ab actione virium situs partium relativus non mutabitur, et singula elementa perinde movebuntur suis quaeque viribus obsequentia, ac si a se invicem essent dissoluta. Omnia scilicet elementa quovis momento aequaliter movebuntur, ita ut motus totius corporis aequalis sit futurus motui, quo quodque ejus elementum, si esset solitarium, moveretur; ideoque motus corporis erit progressivus.

*COROLL. 1.*

276. Neque ergo hoc casu, etiamsi vires adsint sollicitantes, compages partium ullam vim sustinet. Ex quo si etiam corpus esset fluidum, ejusque partes nullo nexu invicem cohaererent, tamen figuram suam conservaret, et pro rigido haberi poterit.

$GV = \lambda M$ omnibus viribus elementaribus $Zv$ aequivalens, si modo corpus fuerit rigidum, uti in Statica assumitur.

### COROLL. 1.

281. Dum ergo vires elementares $Zv$ sint massulis proportionales et inter se parallelae, vis omnibus aequivalens GV eandem habet positionem, sive illae vires sint majores sive minores, littera enim $\lambda$ non ingreditur in distantias GE et GF.

### COROLL. 2.

282. Quia vis aequivalentis $GV = \lambda M$ directio est rectae OC parallela, si modo unicum punctum veluti I constaret, per quod transeat, ejus positio perfecte determinaretur. Ex formulis autem pro GE et GF inventis patet, directionem GV per centrum gravitatis corporis transire.

### COROLL. 3.

283. Vis igitur $GV = \lambda M$ totum corpus, si modo motu progressivo puro feratur, perinde afficiet, ac vis quaelibet elementaris $Zv = \lambda dM$ elementum corporis $dM$: totiusque corporis motus manebit progressivus, dum singula ejus elementa pari motu proferentur.

### SCHOLION.

284. Quoniam, si singulae vires elementares sunt directrici OC parallelae, media directio GV distat a plano AOC intervallo $GE = \frac{\int y\,dM}{M}$, et a plano BOC intervallo $GF = \frac{\int x\,dM}{M}$: ita si vires elementares massulis quoque elementorum proportionales sint parallelae directrici OB, media directio eidem erit parallela, et a plano BOC distabit intervallo $= \frac{\int x\,dM}{M}$, et a plano AOB intervallo $= \frac{\int z\,dM}{M}$. Simili modo si vires elementares essent parallelae directrici OA, media directio eidem foret parallela, et a plano AOB distaret intervallo $= \frac{\int z\,dM}{M}$, et a plano AOC intervallo $= \frac{\int y\,dM}{M}$. Quare cum hae mediae directiones omnes tam a plano AOB, quam AOC et BOC aequis intervallis distent,



eae se in communi puncto secabunt: quod punctum si sit I, erit ejus situs ita comparatus, ut sit:

$$OE = \frac{\int x\,dM}{M};\ EG = \frac{\int y\,dM}{M};\ GI = \frac{\int z\,dM}{M}.$$

Puncto ergo hoc I semel invento, si singula corporis elementa a viribus ipsorum massis proportionalibus secundum directionem communem quamcunque sollicitentur, vis illis omnibus aequivalens per hoc punctum I transibit. Et quia vis aequivalens summae omnium virium elementarium est aequalis, et eandem directionem tenet, ejus positio per punctum I perfecte determinatur. Convenit autem hoc punctum cum eo, quod vulgo *centrum gravitatis* vocatur, cujus convenientiae ratio manifesta est, quoniam singula elementa massis proportionaliter gravia, et directiones gravitatis inter se parallelae assumuntur. Quoniam vero haec hypothesis veritati adversatur, et punctum I minime a gravitate pendet, sed in omnibus corporibus locum habet, id alio nomine appellari praestabit.

### DEFINITIO. 3.

285. *Centrum massae* seu *centrum inertiae* est punctum in quovis corpore, circa quod ejus massa seu inertia quaquaversus aequaliter est distributa secundum aequalitatem momentorum.

### EXPLICATIO.

286. Centrum massae seu inertiae idem est punctum, quod vulgo centrum gravitatis vocatur: cum autem hoc punctum ita omnibus corporibus sit essentiale, ut iis ob inertiam solam conveniat, gravitas autem pro vi extrinsecus in corpora agente sit habenda: malui ei nomen centri massae seu inertiae tribuere, ut intelligatur, id per solam inertiam determinari. Quod autem de aequali distributione massae circa hoc centrum commemoravi, minus facile explicatur. Optima explicatio sine dubio ex regula, qua hoc centrum invenitur, est petenda. Scilicet referatur corpus ad ternas directrices OA, OB, OC inter se normales, quibus parallelae constituantur coordinatae, tam pro quovis corporis elemento, quam pro centro inertiae I, quod quaeritur. Sit massa totius corporis $= M$, cujus quodpiam elementum consideretur in Z ejus massula posita $= dM$, ac vocatis coordinatis $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, situs centri inertiae I ita determinatur, ut sit $OE = \frac{\int x\,dM}{M}$;

$EG = \frac{\int y\,dM}{M}$ et $GI = \frac{\int z\,dM}{M}$, his integralibus per totum corpus extensis.

Quod si ergo punctum O in ipso centro inertiae I capiatur, haec tria integralia $\int x\,dM$, $\int y\,dM$, et $\int z\,dM$ evanescent, unde hanc centri inertiae indolem discimus, ut si corpus secetur plano quocunque per centrum inertiae transeunte, singula elementa corporis per distantias ab hoc plano multiplicata utrinque eandem summam producant. Atque ita intelligenda sunt, quae de aequali materiae distributione circa centrum massae seu inertiae secundum aequalitatem momentorum sunt dicta.

### COROLL. 1.

287. Si ergo singula corporis elementa secundum eandem directionem a viribus ipsorum massulis proportionalibus sollicitentur, iis una vis summae omnium aequalis et parallela, atque in centro inertiae applicata aequivalebit, si quidem corpus fuerit rigidum.

### COROLL. 2.

288. Ac vicissim si corpori rigido in centro inertiae applicata fuerit vis quaecunque, ea quasi per omnia corporis elementa massis proportionaliter distributa considerari poterit. Atque ob aequivalentiam effectus in motu turbando erunt aequales.

### SCHOLION.

289. Quodsi ergo corpus rigidum a vi sollicitetur, cujus directio transeat per ejus centrum inertiae, illi si quieverit motus progressivus imprimetur, sin autem jam motu progressivo feratur, ejus quidem vel celeritas vel directio vel utraque mutabitur, verum tamen ita ut motus maneat progressivus. Hoc est, si in corpore ductas concipiamus lineas rectas quascunque, eae durante motu perpetuo sibi manebunt parallelae, quod est criterium motus progressivi. Quomodo ergo hujusmodi motum corporis rigidi determinari conveniet, in sequente problemate videamus. Interim cavendum est, ne aequivalentia virium hic monstrata ad corpora non rigida extendatur, quandoquidem fundamentum ejus, quod in aequilibrio vectis est positum, corrueret, si vectis a viribus posset inflecti. Quocirca hic corpora tam rigida assu[illegible], ut a viribus sollicitantibus nullam mutationem in figura sua patiantur; ac deinceps investigabo, quam firma eorum compages esse debeat, ut actionem virium sine ulla figurae mutatione sustinere valeant.

PRO-



### PROBLEMA. 2.

290. Si corpus rigidum, quod initio vel quieverit, vel motum progressivum acceperit, continuo sollicitetur a viribus, quarum media directio per ejus centrum inertiae transeat; ejus motum determinare.

### SOLUTIO.

Quia vis, qua corpus sollicitatur, vel si plures fuerint, earum media directio perpetuo per ejus centrum inertiae transit, motus quomodocunque tam ratione celeritatis quam directionis mutabitur, tamen usque manebit progressivus. Ad eum ergo cognoscendum sufficit, motum unici cujusdam ejus puncti definivisse: quam enim positionem corpus initio respectu hujus puncti tenuerit, eam deinceps perpetuo servabit, si quidem uti assumimus, initio vel quieverit, vel motum progressivum purum acceperit. Quaeri igitur potissimum conveniet motum ejus centri inertiae, quoniam vis sollicitans tanquam ei applicata concipi potest. Sit itaque massa corporis $= M$, et elapso tempore $= t$ sollicitetur a vi $= V$, seu si a pluribus simul sollicitetur, sit V vis iis omnibus aequivalens, directionem habens, per centrum inertiae transeuntem. Quodsi jam in hoc centro elementum corporis, cujus massula sit $= iM$, denotante $i$ fractionem infinite parvam, concipiatur, ea a simili particula $iV$ totius vis sollicitari est censenda. Verum ex doctrina sollicitationum ante tradita patet, massam $iM$ a vi $iV$ perinde affici, ac massam M a vi V, quoniam ratio tantum massae ad vim in calculum ingreditur. Rem ergo ita concipere licet, ac si tota corporis massa M in ejus centro inertiae collecta, eique vis tota V applicata esset; ex quo problematis hujus solutio a superioribus de motu puncti datis non discrepabit. Scilicet ut rem generalissime complectamur, referamus motum ad ternas directrices OA, OB et OC, inter se normales, elapsoque tempore $t$ pervenerit centrum inertiae in S, coordinatis existentibus $OX = x$, $XY = y$ et $YS = z$. Deinde vis sollicitans V pariter secundum has tres directiones resolvatur, unde oriantur vires secundum $SP = P$; secundum $SQ = Q$ et secundum $SR = R$. Hinc sumto elemento temporis $dt$ constante totus motus his tribus formulis determinabitur: Fig. 21.

$$Mddx = 2gP\,dt^2; \quad Mddy = 2gQ\,dt^2; \quad Mddz = 2gR\,dt^2$$

quae quomodo quovis casu sint tractandae, jam supra est expositum.

### COROLL. 1.

291. Casu ergo, quo corpus rigidum motu progressivo profertur, ideoque media directio virium sollicitantium per ejus centrum inertiae tran-

transit; totam corporis massam tanquam in centro inertiae collectam eique vim aequivalentem applicatam concipere licet.

*COROLL. 2.*

292. Cum ad datum tempus locus centri inertiae fuerit inventus, etiam totius corporis situs innotescet, quippe qui respectu centri inertiae idem erit perpetuo, qui fuerat initio; eaedem enim corporis partes semper ad easdem mundi plagas spectabunt.

*COROLL. 3.*

293. Inventa porro ad quodpiam tempus celeritate centri inertiae simul omnia corporis puncta pari celeritate movebuntur, omniumque directiones inter se erunt parallelae: ita ut totius corporis motus ex motu centri inertiae perfecte cognoscatur.

*SCHOLION 1.*

294. Omnia ergo, quae de motu libero punctorum seu corpusculorum infinite parvorum in superioribus libris sunt tradita, etiam pro motu corporum rigidorum progressivo valent, ideoque cum in se nimis sterilia videantur, nunc amplissimum usum habebunt, cum eo universum genus motuum progressivorum sit referendum. Quoties nimirum corpora rigida motu progressivo incedunt, quod fit, si virium sollicitantium media directio per eorum centrum inertiae transit, eaque initio vel quieverint, vel motu progressivo fuerint impulsa, eorum motus per Theoriam motus punctorum jam cumulate expositam determinari poterit; unde hanc tractationem fusius persequi superfluum foret. Hinc autem statim diximus, si virium corpora coelestia sollicitantium media directio per eorum centrum inertiae transeat, eaque semel motu progressivo puro ingredi coepissent, ea perpetuo talem motum esse conservatura, neque unquam motum vertiginis esse adeptura. Quare cum motu vertiginis gyrari observentur, necesse est, ut ipsis talis motus jam ab initio fuerit impressus, vel ut media directio non perpetuo per eorum centrum inertiae transeat, quod posterius in luna evenire merito suspicamur.

*SCHOLION 2.*

295. Ne autem, dum corpora talibus viribus sollicitata moventur, in figura sua mutationem patiantur, eorum compagem satis firmam esse oportet, quare quantam vim ea sustineat, erit definiendum. Ac primo quidem jam animadvertimus, si singulis corporis elementis vires ipsorum massulis proportionales secundum eandem directionem essent applicatae, compagem corporis nullam plane vim sustinere, sed figuram, etiamsi partes a se invicem penitus essent dissolutae, conservatum iri. Quas autem vires nunc ostendimus illis aequivalere, id tantum ratione motus est intelligendum, et quatenus ab illis sunt diversae, eatenus etiam figuram mutare tendent; quod ne eveniat, compagem satis firmam esse oportet. Ex quo jam perspicuum est, judicium, quanta compagis firmitate opus sit, eo reduci, ut vires, quibus corpus actu sollicitatur, cum viribus illis elementaribus, quibus aequivalent, comparentur, quoniam quo magis ab iis fuerint diversae, eo plus conferent ad compagem destruendam. Quare quo clarius hoc argumentum evolvere queamus, vires illas, etiamsi ratione motus aequipolleant, sollicite a se invicem distingui conveniet, quem in finem sequentem definitionem praemitto.

*DEFINITIO. 4.*

296. *Vires elementares* sunt vires, quae singulis corporis elementis seorsim applicatae in iis eandem status mutationem producerent, quam eadem in motu corporis revera subeunt.

*EXPLICATIO.*

297. Has vires elementares sollicite distingui convenit a viribus corpus actu sollicitantibus. Cum enim cognovimus motum corporis a viribus sollicitantibus productum, difficile non est, quantum cujusvis elementi status turbetur; tum singula elementa quasi seorsim existerent considerentur, facileque ex praecedentibus vires definientur, quae iis applicatae eandem status mutationem producerent; atque istae vires junctim sumtae sunt eae, quas in posterum sub nomine virium elementarium sum complexurus. Ex quo quidem statim liquet, has vires elementares junctim sumtas esse aequivalentes viribus actu sollicitantibus, quoniam ambae in motu corporis eandem mutationem pariunt. Nempe si elementum corporis, cujus massula sit $dM$, motu vel vero vel resoluto secundum quandam directionem, in qua tempusculo $dt$ spatiolum $dx$ describat, ita acceleretur, ut sumto $dt$ constante incrementum spatioli $dx$ prodeat $ddx$: tum vis secundum eandem directionem urgens erit $= \frac{dMddx}{2g\,dt^2}$. Unde si motus elementi secundum binas vel ternas directiones fuerit resolutus, vis elementaris ejus statum per-

turbans colligetur, ficque innotefcent vires elementares pro quavis motus mutatione.

### COROLL. 1.

298. Vires ergo elementares fimul fumtae viribus actu follicitantibus aequivalent, ac praeterea ita funt comparatae, ut ab iis compages corporis nullam vim patiatur; propterea quod ab iis fingula elementa, perinde quafi fola adeffent, afficiuntur.

### COROLL. 2.

299. In motu igitur progreffivo vires elementares funt eae vires, quae fingulis elementis eandem motus mutationem inducunt, quam totum corpus a viribus follicitantibus patitur.

### PROBLEMA 3.

300. Si corpus a viribus quibuscunque follicitatum, quarum media directio per ejus centrum inertiae tranfit, motu progreffivo libere moveatur, determinare vires, quas ejus compages fuftinet, ne folvatur.

### SOLUTIO.

Fig. 28. Ad datum tempus follicitetur corpus a viribus EP et FQ, quibus aequivaleat vis $IV = V$ per centrum inertiae I tranfiens, quae, fi maffa corporis fuerit $= M$, in toto corpore eundem effectum producet, atque in elemento ejus quocunque M, cujus maffa fit $dM$, produceret vis $Mm = \frac{VdM}{M}$, cujus directio $Mm$ illi IV effet parallela: ficque $Mm$ exhibebit vim elementarem. Cum igitur quaeratur, quantam vim fuftineat compages corporis, a viribus EP et FQ actu follicitantibus, feu quam fortis ea effe debeat, ut figura nullam mutationem patiatur? quoniam corpus in motu verfatur, ejusmodi ftatus quietis feu aequilibrii affignari debet, in quo figura corporis pari virium actioni effet fubjecta. Ad talem autem ftatum perveniemus, fi corpori mente faltem ejusmodi motum et vires tribuamus, unde compages nullam vim fuftineat, ipfum autem corpus ad perfectam quietem redigatur. Quemcunque autem corpus habuerit motum, ipfi primo aequalis et contrarius imprimatur, ut hoc faltem inftanti corpus in quiete exiftat: hoc vero motu fictitio nulla vis compagi corporis infertur. Nunc autem praeterea motus a viribus follicitantibus penitus tolli debet, per ejusmodi vires, quae compagem non afficiant, quod fit, fi fingulis elementis vires elementaribus aequales et contrariae applicatae concipiantur: elemento nempe $dM$ in M exiftenti vis $Mv = \frac{VdM}{M}$, cujusmodi vires fingulis elementis applicatae funt intelligendae: hocque modo corpus in ftatum quietis reducitur. Quamobrem corpus a viribus EP et FQ, quibus aequivalet vis $IV = V$ per centrum inertiae tranfiens, follicitatum, quomodocunque motu progreffivo feratur, ratione compagis perinde afficietur, ac fi quiefceret, eique praeter vires actu follicitantes EP et FQ applicatae effent in fingulis elementis vires viribus elementaribus aequales et contrariae. In hoc ftatu aequilibrii haud difficile erit judicare, quam valide partes corporis inter fe effe debeant connexae, ut earum compages ab iftis viribus non turbetur.



### COROLL. 1.

301. Vires igitur, quibus compages corporis refiftere debet, funt 1°, vires corpus actu follicitantes, et 2°, vires elementares contrario modo applicatae: quae contraria applicatio fi figno negationis exprimatur, vires follicitantes demtis viribus elementaribus dabunt vires compagem afficientes.

### COROLL. 2.

302. Cum hic de motu corporum rigidorum fit fermo, ftructura corporum tam firma fit neceffe eft, ut his viribus compagem afficientibus refiftere valeat. Ac nifi ad hoc fatis roboris haberet, motus huc non pertineret.

### SCHOLION. 1.

303. Regula, quam hic invenimus pro viribus compagem corporis afficientibus determinandis latiffime patet, atque ex principio Metaphyfico, quod caufa femper aequalis fit effectui pleno, deduci potuiffet, fi modo hoc principium recte intelligatur; plerumque enim nimis vage proponi folet, quam ut inde quicquam tuto concludi queat. Hic autem vires actu follicitantes vicem caufae gerunt, quam littera V defignemus; deinde effectus eft duplex, alter quo motus corporis afficitur, cujus loco affumi debent vires elementares mutationem motus immediate efficientes, quas vires fimul littera T denotemus. Alter vero effectus in conatu ftructuram corporis turbandi confiftit, cujus loco fumi debent vires compagem afficientes, quas littera S notemus.

notemus. Cum igitur a causa V producatur effectus $= T + S$, censeri debet $V = T + S$, unde colligitur $S = V - T$, prorsus uti invenimus. Verum in tanta rerum metaphysicarum caligine malim demonstrationem allatam adhibere ad principium metaphysicum illustrandum.

*SCHOLION. 2.*

304. Sufficiat autem hic nobis, eas vires assignasse, quas compages corporum rigidorum sustinere debet: quomodo enim his viribus resistat, id pendet a structura corporum, et modo quo partes inter se cohaerent, et quasi glutine quodam connectuntur. Quae cohaesionis ratio cum in diversis corporum generibus plurimum discrepet, ad Physicam potius quam Mechanicam referenda videtur. Interim fatendum est, hoc argumentum adhuc parum esse cultum, ac principia, quibus firmitas corporum innititur, plerumque penitus nobis esse incognita, quae doctrina utique mereretur, ut omni studio investigaretur. Verum hoc minime ad praesens institutum pertinet, in quo tantum assumimus corpora, quorum motum consideramus, sufficienti gradu rigoris esse praedita, ut a viribus, quibus afficiuntur, nullam mutationem in figura patiantur, minime curantes, quomodo structura et cohaesio partium sit comparata. Ceterum satis verisimile videtur, nullam partium connexionem tam esse robustam, quae actioni talium virium, etiamsi sint minimae, non aliquantillum cedant: quemadmodum nullum est dubium, quin corpora etiam durissima in mutua collisione sibi quasdam impressiones inducant, etsi eae plerumque sensus nostros effugiant. Quae sententia si vera esset, nulla plane corpora pro rigidis haberi possent, nisi quae nullas omnino vires compagem turbare conantes sustinerent: cum etiam a minimis viribus mutatio quaedam in figura produceretur. Verum utrum corpora talia rigida, qualia hic assumo, in mundo existant, nec ne? haec quaestio praesentem tractationem non tangit, cum in omnibus disciplinis liceat objecta non existentia contemplari, quo facilius deinceps ad existentia transitus pateat. Neque enim in Mechanica in motum corporum non rigidorum inquirere licet, nisi ante doctrina de motu rigidorum fuerit constituta. Interim tamen negari nequit, quin ejusmodi dentur corpora, quae viribus tantopere resistant, ut mutatio in eorum figura orta plane sit imperceptibilis, atque hoc plerumque sufficit, ut talia corpora pro perfecte rigidis habere possimus.

*PROBLEMA. 4.*

305. Si corpus rigidum quiescens a vi, cujus directio per ejus centrum inertiae transit, sollicitetur, determinare spatiolum, per quod tempusculo minimo protrudetur, simulque celeritatem, quam acquiret.



*SOLUTIO.*

Quia tempus ut minimum assumitur, vis interea ut constans et eandem directionem servans considerari potest. Sit igitur massa corporis rigidi $= M$, cui applicata sit vis $= V$, cujus directio IV per centrum inertiae I transeat. In hac ergo directione IV punctum I promovebitur, totumque corpus similem motum progressivum adipiscetur. Ponamus id elapso tempore $t$, quod ut minimum spectetur, translatum fuisse per spatium $Ii = x$, et in $i$ jam celeritatem acquisivisse $= v$, erit sumto elemento $dt$ constante $Mddx = 2gVdt^2$, seu $\frac{ddx}{dt} = \frac{2gVdt}{M}$, unde ob vim V constantem elicitur $\frac{dx}{dt} = \frac{2gVt}{M}$; ubi cum $\frac{dx}{dt}$ celeritatem $v$ exprimat, quae per hypothesin evanescit posito $t = 0$, additione constantis non est opus. Hinc habetur elapso tempore $t$ celeritas $v = \frac{2gVt}{M}$: deinde ob $dx = \frac{2gVtdt}{M}$, elicitur spatiolum tempore $t$ confectum $Ii = x = \frac{gVtt}{M}$. Fig. 28.

*COROLL. 1.*

306. Est ergo spatiolum $Ii$, per quod corpus tempusculo $t$ protruditur, ut quadratum temporis, celeritas vero acquisita $v$ ipsam temporis rationem sequitur. Tum vero est $2x = vt$, seu celeritate acquisita $v$ eodem tempore $t$ duplum spatium $2x$ percurri potest.

*COROLL. 2.*

307. Haec eadem quoque valent pro tempore quantumvis magno $t$, dummodo interea vis V perpetuo eandem quantitatem et directionem retineat; corpusque initio quieverit.

*SCHOLION.*

308. Motus corporum rigidorum perinde ac corpusculorum infinite parvorum duplici modo est tractandus, prout fuerit vel liber, vel ob extrema impedimenta restrictus. Atque hoc quidem caput ad motum

tum liberum pertinet, quandoquidem extrinsecus nihil obstare assumimus, quo minus corpus sollicitationi virium obsequatur: verumtamen minimam tantum ejus partem complectitur, dum corpus libere motum, praeter motum progressivum purum, quem hic sum contemplatus, infinitis modis motus gyratorios recipere potest: a cujusmodi motu complicato evolvendo, et quomodo is a viribus quibuscunque perturbetur, adhuc longissime absumus. Neque hanc investigationem suscipere licet, ante quam motus gyratorios circa axes fixos expediverimus, hinc enim demum ad motus gyratorios circa axes mobiles, ac porro ad motus liberos in genere, progredi licebit. Quare relicto quasi ordine naturae, nunc corpora rigida extrinsecus ita restricta contemplabor, ut certum tantum genus motus recipere possint, quod fit, dum ab aliqua causa externa duo corporis puncta fixa retinentur. Facile enim patet, si tria puncta corporis rigidi non in directum sita fixa seu immota manerent, totum corpus nullius motus capax esse futurum: quando autem duo tantum puncta fixa tenentur, circa ea tanquam circa axem motu gyratorio revolvi poterit, qui motus quomodo sit comparatus et a viribus sollicitantibus afficiatur, jam indagabimus: ubi quidem insuper definiri conveniet, cum quantam vim illa puncta fixa sustineant, tum vero etiam quantum compages corporis afficiatur.

# CAPUT II.

## DE MOTU GYRATORIO CIRCA AXEM FIXUM A NULLIS VIRIBUS TURBATO.

### DEFINITIO. 5.

309. **M**otus *gyratorius* dicitur, quo corpus rigidum circa lineam rectam cum ipso firmiter connexam movetur, quae linea recta *axis gyrationis* vocatur.

### COROLL. 1.

310. In motu ergo gyratorio axis gyrationis quiescit, seu singula puncta in eo sita manent immota; reliqua vero corporis puncta eo celerius moventur, quo longius ab axe gyrationis distent.

### COROLL. 2.

311. Quia singula corporis puncta ab axe easdem perpetuo servant distantias, moveri nequeunt, nisi in arcubus circularibus, quorum centra



tra in axe gyrationis sunt sita. Scilicet recta a quovis corporis puncto ad axem normaliter ducta erit radius circuli, in cujus peripheria hoc punctum movetur.

### COROLL. 3.

312. Quoniam omnia corporis puncta tam inter se quam ab axe perpetuo easdem servant distantias, singula puncta eodem tempore per similes arcus progrediantur necesse est, ex quo eorum celeritates eodem tempore erunt inter se ut eorum distantiae ab axe.

### COROLL. 4.

313. Cum axis gyrationis maneat in quiete, si unici praeterea corporis puncti situs fuerit cognitus, ex eo totius corporis situs innotescet: ac si unici puncti celeritatem noverimus, omnium punctorum celeritates assignare poterimus.

### EXPLICATIO.

314. Gyratione motus corporis ita restringitur, ut duo ejus quaedam puncta maneant immota: concipiantur enim corpori ABCD in punctis E et F duo styli infigi, ac tam firmiter retineri, ut nequaquam dimoveri queant; atque his stylis non obstantibus corpus adhuc duplici modo moveri poterit, prout in figura puncta A, B, C vel sursum vel deorsum aguntur; quae diversitas ita commodissime innui solet, dum corpus vel in hunc *sensum* vel in oppositum gyrari dicitur. Praeterea vero motus in utrumque sensum factus infinitis modis pro ratione celeritatis variari potest; cognita autem celeritate motus nondum innotescit, nisi declaretur, in utrum sensum motus fiat. At statim ac puncta E et F in quiete retinentur, singula puncta inter ea in directum interjacentia quoque quiescent, eritque propterea recta EF axis gyrationis. Tum si *m* sit particula corporis quaecunque, indeque ad axem EF normalis ducatur *mn*, qua tanquam radio in plano ad EF normali circulus concipiatur descriptus; haec particula *m* aliter nisi in peripheria hujus circuli moveri nequit, eritque semper celeritas puncti *m* distantiae *mn* proportionalis. Fig. 29.

### SCHOLION.

315. Voce *sensus* hic utor gallicum idioma imitatus, quoniam vox [illegible] *plaga*, qua alii uti solent, discrimen non satis indicare videtur. Concipiatur enim axis gyrationis plano tabulae in O normaliter insistere, [illegible] Fig. 30.

quem ex corporis punctis A, B, C actae sint normales AO, BO, CO; jam duplex motus corpori imprimi potest, alter quo puncta A, B, C per arcus $Aa$, $Bb$, $Cc$, alter autem, quo eadem puncta per arcus $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ procedunt. Priori casu congrue dici nequit, motum fieri in plagam $Aa$, quippe quod de punctis B et C, quorum motus in alias plagas dirigitur, non esset verum. Plaga scilicet directionem quandam fixam innuit, quae in motu circulari non habet locum; unde ob defectum aptioris vocabuli in tali motu quasi duos sensus statuimus, sibi oppositos, ita ut motus circularis per arcus $Aa$, $Bb$, $Cc$ in hunc sensum, alter per arcus $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ in sensum oppositum fieri sit dicendus.

### DEFINITIO. 6.

316. Celeritas *angularis* in motu gyratorio est celeritas ejus puncti, cujus distantia ab axe gyrationis unitate exprimitur.

### COROLL. 1.

317. Ex celeritate ergo cujusque puncti cognoscetur celeritas angularis, si ea per distantiam puncti illius ab axe gyrationis dividatur; quoniam in motu gyratorio celeritates sunt distantiis ab axe proportionales.

### COROLL. 2.

318. Si ergo puncti, quod ab axe gyrationis distat intervallo $= x$, celeritas sit $= v$, erit $\frac{v}{x}$ celeritas angularis. Pro alia enim distantia $y$ foret celeritas $= \frac{yv}{x}$, ac sumta hac distantia $y = 1$, erit ea $= \frac{v}{x}$, quae est celeritas angularis.

### COROLL. 3.

319. Hinc vicissim cognita celeritate angulari, quae sit $= \varepsilon$, in distantia quacunque $x$ erit celeritas, qua ibi fit gyratio, $= \varepsilon x$: celeritas scilicet angularis per distantiam quamcunque ab axe gyrationis multiplicata, dat celeritatem veram pro ea distantia.

### EXPLICATIO.

320. Cum in motu gyratorio puncta corporis pro diversa ab axe distantia diversa celeritate ferantur, quo omnes has celeritates diversas simul



simul in calculo complecti queamus, earum loco celeritatem angularem, quae pro omnibus distantiis est eadem, in calculum introducamus; prodit enim ea, si angulus tempusculo quodam confectus per ipsum tempusculum dividatur, ita ut omnibus distantiis sit communis. Namque si in distantia $= x$ ab axe gyrationis celeritas fuerit $= v$, tempusculo $dt$ absolvetur ea arculus $= v\,dt$, qui per radium $x$ divisus dat angulum interea confectum $= \frac{v\,dt}{x}$: hic autem iterum per tempus $dt$ divisus producit $\frac{v}{x}$, hoc est celeritatem angularem. Perinde igitur est, quonam modo celeritatem angularem definire velimus, sive sit celeritas distantiae $= 1$ conveniens, sive celeritas cuicunque distantiae respondens per hanc ipsam distantiam divisa, sive angulus elementaris divisus per tempusculum, quo absolvitur; siquidem hi tres modi inter se conveniunt. Primus quidem naturae rei est maxime conformis, cum eo vera celeritas indicetur, atque distantiam illam fixam, cui respondet, ob similem rationem unitate insignimus, qua in mensura angulorum radius circuli, ad quem referuntur, unitate exprimi solet: ut nimirum anguli et arcus ad communem mensuram revocentur.

### THEOREMA. 3.

321. Si corpus rigidum circa axem fixum moveri coeperit, motum suum gyratorium perpetuo eadem celeritate angulari continuabit, nisi a viribus externis turbetur.

### DEMONSTRATIO.

Sit EF axis gyrationis, circa quem corpus rigidum moveri coeperit, celeritate angulari $= c$, quae scilicet respondeat distantiae ab axe $= 1$. Quaevis ergo particula $m$ ab axe distans intervallo $mn = x$, habuit celeritatem $= cx$ in eundem sensum. Quoniam corpus cum axe quasi unum constituit corpus rigidum, particula $m$ cum axe EF ita colligata est intelligenda, ut ab eo constanter eandem servet distantiam $mn = x$. Consideremus hanc particulam solam, tanquam filo $mn$ cum axe connexam, atque supra vidimus, eam motu accepto uniformiter in peripheria circuli esse gyraturam. Quod cum de omnibus elementis seorsim sumtis valeat, videndum est, num singula motum suum prosequi possint, ut sibi mutuo non sint impedimento. Verum perspicuum est, etiamsi singula a se invicem essent dissoluta, dum fuerint Fig. 29.

Q 3 cum

cum axe filorum ope connexa; tamen singula in motu suo ita perseverare posse, ut perpetuo easdem inter se distantias servent, corpusque suum retineat figuram. Quare etiam eorum nexus mutuus non obstabit, quo minus singula elementa motum suum prosequantur: consequenter totum corpus motum gyratorium [illegible] continuabit, ut uniformiter circa axem eadem perpetuo celeritate angulari revolvatur.

*COROLL. 1.*

322. Posita ergo celeritate angulari $\epsilon$, ut in distantia $= x$ ab axe sit celeritas $= \epsilon x$, si haec celeritas ponatur $= v$, erit $\epsilon = \frac{v}{x}$. Quare cum $x$ et $v$ sint lineae, celeritas angularis $\epsilon$ numero absoluto exprimitur.

*COROLL. 2.*

323. Ex celeritate angulari $\epsilon$ colligitur tempus $t$, quo gyratio fit per datum angulum $\phi$: cum enim motus sit uniformis, erit $\epsilon = \frac{\phi}{t}$, ideoque $t = \frac{\phi}{\epsilon}$: unde patet celeritatem angularem [illegible] angulum, qui uno minuto secundo absolvitur.

*COROLL. 3.*

324. Quare si $1 : \pi$ denotet rationem diametri ad peripheriam, ut sit $2\pi$ peripheria circuli, cujus radius est $= 1$; tempus unius revolutionis, quo corpus in pristinum situm revertitur est $= \frac{2\pi}{\epsilon}$ min. sec.

*COROLL. 4.*

325. Quoniam tempora perpetuo in minutis secundis exprimere instituimus, si celeritas angularis sit $= \epsilon$, tempore $t$ corpus motu gyratorio absolvet angulum $= \epsilon t$.

*SCHOLION.*

326. En igitur pro mensuris absolutis distinctam notionem celeritatis angularis, quippe quae exprimitur angulo, qui eo motu gyratorio, si esset uniformis, intervallo unius minuti secundi conficeretur. Congruit ea cum supra stabilito modo omnia, quae ad motum pertinent, ad mensuras absolutas revocandi: cujus fundamentum in eo constat, ut tempora perpetuo in minutis secundis exprimamus: tum vero celeritatem quamque per spatium, quod corpus ea celeritate latum uniformiter intervallo unius minuti secundi percurreret, indicamus, unde utique clarissima celeritatis idea obtinetur. Quemadmodum ergo celeritas in genere est spatium uno minuto secundo confectum, ita celeritas angularis est angulus uno minuto secundo confectus, si scilicet motus esset uniformis. Quodsi motus gyratorius non fuerit uniformis, ita ut quovis momento celeritas angularis sit diversa; simili modo pro quovis instanti ea exprimetur angulo, quem corpus, si eo motu gyratorio uniformiter revolveretur, uno minuto secundo esset descripturum. Ex hoc autem Theoremate motus gyratorius uniformis perfecte cognoscitur, quo omne corpus rigidum, nisi a viribus externis sollicitetur, ferattur necesse est; unde patet, principium aequabilitatis motus inertia innixum etiam ad motum gyratorium corporum rigidorum extendi, dummodo axis gyrationis sit fixus. Quare investigari convenit, quanta vi opus sit ad axem in situ suo fixo conservandum.



*PROBLEMA. 5.*

327. Si corpus rigidum circa axem fixum uniformiter gyretur, definire vires, quas axis sustinet, seu quae adhiberi debent, ut axis in suo situ conservetur.

*SOLUTIO.*

Consideretur corpus iterum in sua elementa divisum, quae singula cum axe gyrationis ope filorum sint connexa, et quoniam quodlibet elementum $m$ in circulo circumfertur, cujus radius est ejus distantia $mn$ ab axe EF, ob vim centrifugam supra definitam (213), filum tendet, tantaque vi axem in directione $nm$ sollicitabit. Ad quam calculo exprimendam sit $dM$ massula hujus elementi, ejusque ab axe gyrationis EF distantia $mn = x$, ac celeritas angularis $= \gamma$, ita ut $\gamma$ sit angulus singulis minutis secundis confectus; eritque celeritas qua elementum $m$ in circulo suo revolvitur $= \gamma x$. Tum si $g$ denotet altitudinem, per quam corpus a gravitate sollicitatum uno minuto secundo delabitur, erit per (213) vis centrifuga hujus elementi $= \frac{\gamma\gamma xx dM}{2gx} = \frac{\gamma\gamma}{2g} . x dM$, ubi $dM$ est pondusculum, quod elementum corporis in regione terrae ad mensuras absolutas electa esset habiturum. Quare ob motum hujus elementi, dum versatur in $m$, axis EF sustinet vim $= \frac{\gamma\gamma}{2g} . x dM$, qua secundum directionem $nm$ sollicitatur: et cum ab Fig. 29.

omnibus

omnibus elementis similes vires sustineat, ex iis colligi poterit vis totalis, quam totum corpus in axem exerit.

*COROLL.* 1.

328. Vires ergo a singulis elementis ortae pro eodem motu angulari rationem tenent compositam massarum et distantiarum ab axe: elementa igitur axi propiora minus, remotiora autem plus efficiunt.

*COROLL.* 2.

329. Deinde vero pro eodem elemento, vis quam axis ab eo sustinet, sequitur rationem duplicatam celeritatis angularis: quae si fuerit dupla, vis illa quadruplo evadet major.

*COROLL.* 3.

330. Quoniam elementum $m$ per peripheriam circuli circumfertur motu aequabili, vis quidem perpetuo ejusdem manet quantitatis, et eidem axis puncto $n$ applicata, sed directio continuo mutatur, cum semper ad elementum sit directa.

*SCHOLION.*

331. Supra scilicet (213) invenimus, ut corpusculum cujus massa $= A$, celeritate $= v$ in peripheria circuli, cujus radius $= r$, moveatur, vim requiri ad ejus centrum tendentem $= \frac{Avv}{2gr}$. Cum igitur nostro casu sit massa $A = dM$, celeritas $v = \gamma x$, et radius $r = x$, erit ista vis $= \frac{\gamma\gamma x dM}{2g}$, qua filum, quo elementum axi alligatur, tenditur; et qua propterea ipse axis secundum directionem $nm$ sollicitatur. Ab hujusmodi ergo viribus singula axis puncta afficientur: ac si nosse velimus vires, quas punctum $n$ sustinet, concipiatur sectio plana per punctum $n$ ad axem EF normaliter facta, et omnia corporis elementa in hoc plano sita vires suas in punctum $n$ exerent, quae cum omnes eidem puncto sint applicatae, per praecepta statica facile ad unam vim reduci poterunt. Hic scilicet erit casus, quando totum corpus quasi in planum ad axem normale fuerit compactum, quem igitur, antequam ad ternas dimensiones progrediamur, evolvamus.

*PROBLEMA.* 4.

332. Si corpus fuerit lamina tenuissima plana ad axem gyrationis normalis, eaque data celeritate gyretur, determinare vim, quam axis ab ea sustinet.

SOLU-



*SOLUTIO.*

Sit AEBF lamina ista tenuissima figurae cujuscunque, cujus massa sit $= M$, cui axis gyrationis normaliter insistere intelligatur in puncto O: et cum rectae a singulis laminae elementis ad O ductae simul eorum distantias ab axe gyrationis referant, omnia vires suas in ipsum punctum O exerent. Consideretur ergo elementum laminae quodvis in M, cujus massa sit $= dM$, ejusque ab axe distantia $OM = r$; et posita celeritate angulari $= \gamma$, erit vis, qua punctum O in directione OM sollicitatur $= \frac{\gamma\gamma r dM}{2g}$. Quae vires ab omnibus elementis oriundae, quo facilius ad unam reducantur, concipiantur per O duae directrices OA, OB in plano laminae inter se normales, ad quas referantur pro puncto M coordinatae $OP = x$ et $PM = y$, et completo rectangulo OPMQ, vis illa OM resolvitur in duas secundum ipsas directrices, quarum quae agit secundum OA est $= \frac{\gamma\gamma x dM}{2g}$, et quae secundum OB agit, $= \frac{\gamma\gamma y dM}{2g}$. Ex tota ergo lamina oritur vis sollicitans in directione $OA = \frac{\gamma\gamma}{2g}\int x dM$, et vis sollicitans in directione $OB = \frac{\gamma\gamma}{2g}\int y dM$. Haec autem integralia ex situ centri inertiae laminae innotescunt; quod si statuatur in I, indeque ad directrices demittantur perpendicula IK et IL; erit $\int x dM = M \cdot OK$ et $\int y dM = M \cdot OL$. Quare cum sit vis secundum $OA = \frac{\gamma\gamma}{2g} M \cdot OK$, et vis secundum $OB = \frac{\gamma\gamma}{2g} M \cdot OL$, his duabus viribus aequivalet una secundum directionem OI sollicitans, quae est $= \frac{\gamma\gamma}{2g} M \cdot OI$, atque haec est vis, quam axis ob motum laminae in puncto O sustinet. Fig. 31

*COROLL.* 1.

333. Directio ergo vis, quam axis ob motum laminae sustinet, a puncto O ad centrum inertiae laminae I tendit, atque distantiae hujus centri I ab axe est proportionalis.

*COROLL.* 2.

334. Si tota laminae massa M in ejus centro inertiae esset collecta, eaque circa axem pari celeritate angulari revolvere-

R tur,

tur, ab ea axis vim sustineret $= \frac{\gamma\gamma}{2g}$. M. OI in eadem directione OI.

*COROLL.* 3.

335. Axis ergo a lamina eandem vim sustinet, ac si tota laminae massa in centro inertiae esset collecta, eaque pari celeritate angulari circa eundem axem revolveretur, quae centri inertiae nova proprietas notatu maxime est digna.

*COROLL.* 4.

336. Si igitur axis per ipsum centrum inertiae I laminae transiret, ad eamque esset perpendicularis, ob $OI = o$, axis a motu laminae nullam plane vim sentiret, neque ergo ulla vi opus esset ad axem immotum retinendum.

*SCHOLION.*

337. Quodsi axis non per centrum inertiae transit, tam firmiter intra suos cardines retineri debet, ut vi assignatae resistere valeat, neque unquam ab ea de situ suo dimoveri possit. Cum autem ipsa hujus vis directio in gyrum agatur, quaquaversus axis in suo situ vi sufficienti retineri debet: ac perspicuum quidem est, eo majore vi opus esse ad axem retinendum, quo magis centrum inertiae ab eo distet. Praeterea vero haec vis proportionalis est massae laminae et quadrato celeritatis angularis. Ceterum hic casus, quo corpus ut laminam infinite tenuem sumus contemplati, nos manuducit ad corpora quaecunque, quoniam diviso corpore per sectiones ad axem normales in infinitas laminas, vires hinc, quibus axis in singulis punctis sollicitatur, facile colliguntur. Totum scilicet negotium ad inventionem centri inertiae cujusque laminae reducitur: verum alio modo hanc investigationem tentemus.

*PROBLEMA.* 7.

Fig. 32. 338. Si corpus rigidum circa axem OA uniformiter gyretur, vires, quas axis sustinet, in summam colligere, vel ad duas vires reducere, quibus axis sollicitetur.

*SOLUTIO.*

Cum axe gyrationis OA conjungantur in O binae directrices normales OB et OC, quibus pro elemento corporis in Z, cujus massa sit $dM$, denotante M massam totius corporis, parallelae constituantur coordi-



coordinatae ternae, $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$. Quodsi jam celeritas angularis, qua corpus circa axem OA gyratur, ponatur $= \gamma$, et elementi Z ab axe distantia $XZ = r$, ob motum hujus elementi axis in puncto X sollicitatur in directione XZ vi $= \frac{\gamma\gamma r\, dM}{2g}$, quae, ducta XV ipsi YZ seu OC parallela, resolvatur in directiones XY et XV, eritque vis urgens secundum $XY = \frac{\gamma\gamma y\, dM}{2g}$ et secundum $XV = \frac{\gamma\gamma z\, dM}{2g}$: sicque a singulis elementis axis binas sustinet vires, quarum directiones sunt ipsis OB et OC parallelae: unde omnes, quae in utraque directione agunt, seorsim in unam summam colligi poterunt. Repraesentet ergo $Ee$ vim omnibus viribus XY et $Ff$ vim omnibus XV aequivalentem; ac primo quidem utraque aequalis est summae omnium, quibus aequivalet. Quare erit

$$\text{vis } Ee = \frac{\gamma\gamma}{2g}\int y\, dM, \text{ et vis } Ff = \frac{\gamma\gamma}{2g}\int z\, dM.$$

Deinde momenta harum virium respectu puncti O aequari debent cunctis momentis elementaribus simul sumtis, unde fit:

$$\frac{\gamma\gamma}{2g}.\ OE. \int y\, dM = \frac{\gamma\gamma}{2g}\int xy\, dM, \text{ seu } OE = \frac{\int xy\, dM}{\int y\, dM} \text{ et}$$

$$\frac{\gamma\gamma}{2g}.\ OF. \int z\, dM = \frac{\gamma\gamma}{2g}\int xz\, dM, \text{ seu } OF = \frac{\int xz\, dM}{\int z\, dM}.$$

sicque omnes vires, quas axis sustentat, ad duas sunt reductae $Ee$ et $Ff$, quarum tam magnitudines quam directiones et loca applicationis innotescunt.

*COROLL.* 1.

339. Si centrum inertiae corporis fuerit in I, eique respondeant coordinatae OG, GK et KI, erit ut supra vidimus $OG = \frac{\int x\, dM}{M}$, $GK = \frac{\int y\, dM}{M}$, $KI = \frac{\int z\, dM}{M}$, unde pro superioribus formulis est $\int y\, dM = M.GK$ et $\int z\, dM = M.KI$.

*COROLL.* 2.

340. Si universa corporis massa M in centro inertiae I collecta esset, parique celeritate gyraretur, axis ab ea in puncto G vim sustineret $= \frac{\gamma\gamma}{2g}$. M. GI in directione GI, unde oriuntur vires duae



secun-

secundum GK $= \frac{\gamma\gamma}{2g} \int y\,dM$ et secundum GL $= \frac{\gamma\gamma}{2g} \int z\,dM$, quibus ergo viribus illae secundum E$e$ et F$f$ sunt aequales.

*COROLL.* 3.

341. Si planum AOB, quod arbitrio nostro relinquitur, per centrum inertiae I corporis ductum assumatur, ut sit KI $= 0$ et $\int z\,dM = 0$, erit quidem vis F$f = 0$, at vero distantia OF infinita; ita tamen ut ejus momentum sit finitum, scilicet vis F$f$. OF $= \frac{\gamma\gamma}{2g} \int xz\,dM$.

*SCHOLION.*

342. Binas autem has vires E$e$ et F$f$ non ulterius ad unam revocare licet, nisi intervallum EF evanescat: nam duae vires lineae rectae in duobus diversis punctis applicatae ad unam reduci nequeunt, nisi directiones virium fuerint in eodem plano. Verum duae istae vires E$e$ et F$f$ infinitis modis ad duas alias reduci possunt; sicuti fit, si positio directricium OB et OC mutetur, uti vidimus casu, quo planum AOB per centrum inertiae ducitur, vim F$f$ evanescere, et distantiam OF fieri infinitam. Inventis autem hujusmodi binis viribus E$e$ et F$f$, quas axis gyrationis sustinet, ne is de situ suo dimoveatur, necesse est, ut a viribus aequalibus et contrariis retineatur. Scilicet si axis in E et F in annulis fixis suspendatur, intra quos libere gyrari queat, annulus in E sustinebit vim E$e$ et annulus in F vim F$f$, unde firmitatem annulorum colligere licet. Verum si axis in datis duobus quibuscunque punctis sustineri debeat, vires assignari poterunt, in illis punctis adhibendae, ut axis immotus servetur, quam investigationem in sequenti problemate suscipiamus.

*PROBLEMA* 48.

Fig. 32. 343. Si axis, circa quem corpus rigidum motu uniformi gyratur, in datis duobus punctis O et A teneatur, definire vires, quas axis in his duobus punctis sustinet.

*SOLUTIO.*

Manentibus omnibus, quae in problemate praecedente sunt posita, vires axem sollicitantes ad duas E$e$ et F$f$ sunt revocatae, quarum illa directrici OB, haec vero directrici OC est parallela, ita ut sit





$$\text{vis E}e = \frac{\gamma\gamma}{2g} \int y\,dM \text{ et vis F}f = \frac{\gamma\gamma}{2g} \int z\,dM$$

$$\text{tum OE} = \frac{\int xy\,dM}{\int y\,dM} \text{ et OF} = \frac{\int xz\,dM}{\int z\,dM}.$$

His ergo viribus aequivalentes in punctis O et A applicandae quaeri debent. Sit ergo distantia OA $= a$, atque in O et A vires O$b$ et A$\beta$ applicentur, quae vi E$e$ aequivaleant, id quod fit si O$b$ + A$\beta$ = E$e$ et O$b$. OE = A$\beta$. AE, unde oritur:

$$Ob = \frac{AE.\,Ee}{a} = Ee - \frac{OE.\,Ee}{a} \text{ et } A\beta = \frac{OE.\,Ee}{a}.$$

Simili modo in O et A applicentur vires O$c$ et A$\gamma$, quae vi F$f$ aequivaleant, eritque

$$Oc = \frac{AF.\,Ff}{a} = Ff - \frac{OF.\,Ff}{a} \text{ et } A\gamma = \frac{OF.\,Ff}{a}.$$

Quare in utroque puncto O et A binas habemus vires, quas axis ibi sustinet, scilicet in puncto O

$$\text{vim O}b = \frac{\gamma\gamma}{2g}\left(\int y\,dM - \tfrac{1}{a}\int xy\,dM\right) \text{ et vim O}c = \frac{\gamma\gamma}{2g}\left(\int z\,dM - \tfrac{1}{a}\int xz\,dM\right)$$

deinde in puncto A

$$\text{vim A}\beta = \frac{\gamma\gamma}{2g}.\ \tfrac{1}{a}\int xy\,dM \text{ et vim A}\gamma = \frac{\gamma\gamma}{2g}.\ \tfrac{1}{a}\int xz\,dM.$$

Vel si ipsas lineas ad elementum $dM$ in Z situm pertinentes introducamus, erit

$$\text{vis O}b = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\int \text{AX. XY.}\ dM, \text{ et vis O}c = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\int \text{AX. YZ.}\ dM$$

$$\text{vis A}\beta = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\int \text{OX. XY.}\ dM, \text{ et vis A}\gamma = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\int \text{OX. YZ.}\ dM,$$

Ponamus OG $= b$, AG $= c$, ut sit $a = b + c$, tum vero GX $= u$ ut sit AX $= c - u$ et OX $= b + u$, erit

$$\text{vis O}b = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\left(c\int y\,dM - \int uy\,dM\right) \text{: vis O}c = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\left(c\int z\,dM - \int uz\,dM\right)$$

$$\text{vis A}\beta = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\left(b\int y\,dM + \int uy\,dM\right); \text{ vis A}\gamma = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\left(b\int z\,dM + \int uz\,dM\right)$$

Accipiamus planum AOB ita, ut per centrum inertiae I transeat, erit $\int z\,dM = 0$, ac statuamus integralia

$$\int y\,dM = D;\ \int uy\,dM = E \text{ et } \int uz\,dM = F.$$

fietque:

$$\text{vis } Ob = \frac{\gamma\gamma}{2ag}(Dc - E); \quad \text{vis } Oc = \frac{-\gamma\gamma}{2ag}F$$

$$\text{vis } A\mathfrak{C} = \frac{\gamma\gamma}{2ag}(Db + E); \quad \text{vis } A\gamma = \frac{\gamma\gamma}{2ag}F$$

Atque jam facile tam in O binae vires $Ob$ et $Oc$, quam in A binae vires $A\mathfrak{C}$ et $A\gamma$ ad unam redigi poterunt, ita ut in utroque termino O et A vis innotescat, quam ibi axis sustinet.

### COROLL. 1.

344. Si ergo planum AOB per centrum inertiae corporis I transiens statuatur, vires $Oc$ et $A\gamma$ sunt aequales sed contrariae, ita ut altera alterius sit negativa: seu erit vis $Oc$ + vi $A\gamma = o$, quoniam $KI = o$, ac propterea vis $GL = o$.

### COROLL. 2.

345. Si axis gyrationis OA per ipsum centrum inertiae I transeat, erit etiam $\int ydM = D = o$, ideoque vires, quas axis in punctis O et A sustinet, ita se habebunt.

$$\text{vis } Ob = \frac{-\gamma\gamma}{2ag}.E; \quad \text{vis } Oc = \frac{-\gamma\gamma}{2ag}.F$$

$$\text{vis } A\mathfrak{C} = \frac{\gamma\gamma}{2ag}.E; \quad \text{vis } A\gamma = \frac{\gamma\gamma}{2ag}.F.$$

### COROLL. 2.

346. Ut axis nullas omnino vires sustineat, corpusque circa eum libere gyrari possit, necesse est, ut quatuor haec integralia singula evanescant.

$$\int ydM = o, \quad \int zdM = o; \quad \int xydM = o \text{ et } \int xzdM = o.$$

ac binis prioribus quidem satisfit, si axis gyrationis per centrum inertiae corporis transeat.

### SCHOLION.

347. Hic duo puncta O et A, unde quasi axis suspendatur, pro lubitu assumsimus: atque in genere patet vires, quae ad axem in istis punctis retinendum requiruntur, eo fore minores, quo longius capiatur intervallum OA, quod mirum non est, cum effectus hic a momentis virium pendeat. At si puncta O et A conveniant, ut sit $OA = a = o$, vires illae adeo fiunt infinitae, ex quo intelligitur, axem in unico puncto neutiquam tam firmiter contineri posse, ut immotus maneat; ad minimum ergo ad hoc duae vires requiruntur, axi in diversis punctis applicandae: nisi forte binae vires primitivae $Ec$ et $Ff$ jam eidem puncto applicentur. Hoc autem ex praecedente problemate fieri nequit, nisi sit



$$\int xydM : \int xzdM = \int ydM : \int zdM.$$

Sumto ergo plano AOB ita ut per centrum inertiae corporis I transeat, ut sit $\int zdM = o$, hoc eveniet, si fuerit $\int xzdM = o$. Quod etiam ex hoc problemate evidens est, quoniam tum vires $Oc$ et $A\gamma$ evanescunt. Solaeque vires $Ob$ et $A\mathfrak{C}$ relinquuntur, quibus unica vis $Ec$ aequivalet, ita ut axis tum in unico puncto E sustentari queat, a vi ne npe quae aequalis sit et contraria vi $Ec$. Sufficiet ergo axem in unico puncto E sustentari, si ducto plano AOB per centrum inertiae corporis, fuerit $\int xzdM = o$, quo casu fit vis $Ec = \frac{\gamma\gamma}{2g}\int ydM$ et distantia $OE = \frac{\int xydM}{\int ydM}$. Reliquis casibus omnibus necesse est, ut axis in duobus punctis contineatur, quae utcumque accipiantur, vires ad axem retinendum requisitae aequales et contrariae esse debent viribus hic determinatis. Quas cum assignaverimus, superest ut vires, quas ipsa corporis compages ob motum gyratorium sustinet, definiamus.

### PROBLEMA. 9.

348. Si corpus rigidum circa axem fixum uniformiter gyretur, definire vires, quas corporis compages seu mutuus partium nexus sustinet.

### SOLUTIO.

Gyretur corpus circa axem OA celeritate angulari $= \gamma$, ita ut sin- Fig. 32.
gulis minutis secundis angulum $= \gamma$ absolvat, atque vidimus si particula corporis, cujus massula $= dM$, fuerit in puncto Z, quod ab axe OA distet intervallo $XZ = r$, ejus vim centrifugam fore $= \frac{\gamma\gamma r dM}{2g}$, qua haec particula conetur in directione $Zz$ ab axe recedere: ac simili vi singula corporis elementa conantur ab axe recedere, quod ne fiat compages corporis satis roboris habere debet. Quod quo facilius perspiciamus, consideremus corpus in quiete, et vires ei applicandas investigemus, quae ejus compagem perinde afficiant, atque ea nunc dum corpus est in motu afficitur. Singulis igitur elementis $dM$ in Z sitis intelligendae sunt applicatae vires $Zz = \frac{\gamma\gamma r dM}{2g}$, ea ab axe OA re-

tra[illegible]

trahentes. Praeterea vero ne totum corpus ab his viribus ad motum cieatur, axi in punctis E et F concipiantur vires ipsis E$e$ et F$f$ aequales et contrariae applicatae, sicque habebuntur omnes vires, quas corpus in quiete consideratum sustinet, cujus proinde compages tam robusta esse debet, ut ab istis viribus nulla mutatio ejus figurae inferatur; tum vero corpus ab omnibus istis viribus sollicitatum in aequilibrio conservabitur.

### COROLL. 1.

349. Si Z fuerit aliquod extremum corporis punctum, particula $dM$ ibi tam firmiter cum reliquo corpore connexa esse debet, ut inde a vi $Zz = \frac{\gamma\gamma r\,dM}{2g}$ avelli nequeat: cujus directio cum ab axe sit aversa, non opus est, ut ad latera sit affixa.

### COROLL. 2.

350. Propius autem ad axem connexio fortior esse debet, quoniam omnes particulae ulterius remotae vires suas recedendi ab axe conjungunt: unde in ipso axe robustissima compages vigeat necesse est.

### SCHOLION.

351. Quod ad axem attinet, assumsi hic eum in punctis E et F teneri; sin autem in aliis quibusque binis punctis O et A teneatur, in iis vires supra assignatis aequales et contrariae applicatae sunt intelligendae; quae cum elementaribus Z$z$ corpus etiam in aequilibrio tenebunt. Compagem ergo tam fortem esse oportet, ut si corpori quiescenti memoratae vires essent applicatae, ejus figura ab earum actione nullam mutationem esset passura. Hinc autem simul patet, omnes istas vires esse in ratione duplicata celeritatis angularis, ita ut motus duplo celerior compagem quadruplo firmiorem postulet. Verum hoc judicium, quod ab interna corporum structura et partium indole pendet, hic ulterius prosequi non licet: sed hinc potius peculiaris disciplina constitui mereretur. Quare cum in hoc capite omnia, quae ad motum gyratorium circa axem fixum nullis viribus externis turbatum pertinent, satis sint exposita, quid vires praeterea efficiant investigemus: ac primo quidem corpus rigidum, quod circa axem fixum est mobile, in quiete sum contemplaturus, motumque elementarem, qui ei a datis viribus tempore tantum infinite parvo imprimetur, scrutabor. Haec tractatio in se parum utilis patefaciet, quantum axis a viribus sollicitantibus patitur, tum vero in sequentibus, ubi de motu libero corporum rigidorum agetur, maximam afferet utilitatem.

CAPUT



# CAPUT III.

## DE MOTUS GYRATORII GENERATIONE.

### PROBLEMA. 10.

352. Si corpus rigidum circa axem fixum mobile quiescat, definire vires elementares, quibus id tempusculo minimo per datum angulum promoveatur.

### SOLUTIO.

Sit ABCD sectio corporis quaecunque ad axem gyrationis normalis, cui ergo axis in O perpendiculariter insistere concipiatur; circa quem tempusculo $dt$ per angulum $= \alpha dt^2$ promoveri debeat, siquidem novimus spatiola tempusculo infinite parvo $dt$ genita quadrato tempusculi esse proportionalia. Si ergo elementum quodpiam in M consideremus, cujus massa sit $= dM$ et distantia ab axe OM $= r$, id transferendum est per arculum M$m = \alpha r dt^2$: Ad quem effectum producendum necesse est, ut elementum hoc sollicitetur in directione M$m$ a vi quadam, quae ponatur $= p$: erat massula $dM$ a vi $p$ sollicitata tempusculo $dt$ protrahitur per spatiolum $= \frac{gp\,dt^2}{dM}$, (305), quod illi $\alpha r dt^2$ aequale positum praebet vim $p = \frac{\alpha r\,dM}{g}$. Tum vero hoc elementum adipiscetur celeritatem $= \frac{2gp\,dt}{dM}$, quae abit in $2\alpha r dt$, unde celeritas angularis acquisita erit $= 2\alpha dt$. Fig. 33.

### COROLL. 1.

353. Si angulus tempusculo $dt$ genitus vocetur $= d\omega$, ob $\alpha = \frac{d\omega}{dt^2}$, erit celeritas angularis genita $= \frac{2d\omega}{dt}$, ubi notandum est, angulum $d\omega$ esse differentiale secundi gradus, seu homogeneum esse cum quadrato tempusculi $dt$.



CO-

*COROLL.* 2.

354. Ut tempusculo $dt$ angulus $d\omega$ generetur, elementum corporis $dM$ in M situm secundum directionem motus $Mm$ sollicitari debet a vi $= \frac{r\,d\omega}{g\,dt^2} \cdot dM$, vires ergo singula elementa sollicitantes sunt in ratione composita massarum et distantiarum ab axe gyrationis.

*COROLL.* 3.

355. Si aliud elementum consideretur in N, cujus massa sit $dN$, id sollicitari debet in directione $Nn$ ad distantiam ON normaliter ducta in plano ad axem gyrationis perpendiculari. Vires autem sollicitantes haec elementa in M et N erunt ut OM. $dM$ ad ON. $dN$.

*COROLL.* 4.

356. Vicissim ergo si singula corporis elementa $dM$ secundum directionem motus imprimendi sollicitentur viribus $= \frac{r\,d\omega}{g\,dt^2} \cdot dM$, totum corpus circa axem gyrationis promovebitur angulo $= d\omega$ tempusculo $dt$, et acquiret celeritatem angularem $= \frac{2\,d\omega}{dt}$.

*COROLL.* 5.

356. Quoniam hoc modo singula elementa seorsim ad motum concitantur, neque se invicem impediunt, ab istis viribus elementaribus neque corporis compages, neque axis gyrationis afficietur: sed motus perinde producetur, ac si cuncta elementa tam a se invicem quam ab axe essent soluta.

*PROBLEMA.* II.

Fig. 34. 357. Vires elementares, quibus corpus rigidum circa axem OA dato tempusculo $dt$ per datum angulum $d\omega$ promovetur, ad duas vires finitas reducere, quae illis omnibus aequivaleant.

*SOLUTIO.*

Cum axe gyrationis OA normaliter conjungantur binae aliae directrices OB et OC, sumtoque corporis quocunque elemento in Z, cujus massa sit $= dM$, inde ad planum AOB demittatur perpendiculum ZY et ex Y ad axem OA normalis YX, ponanturque ternae coordinatae $OX = x$,



$OX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$, tum vero ejus ab axe distantia $XZ = \sqrt{(yy + zz)} = r$. Imprimatur jam elemento Z ut toti corpori motus in sensum $Z\zeta$, quae linea ad XZ est normalis in plano XYZ, et secundum hanc directionem $Z\zeta$ elementum $dM$ sollicitetur necesse est vi $= \frac{r\,d\omega}{g\,dt^2} \cdot dM = \frac{\alpha r\,dM}{g}$, posito $\alpha = \frac{d\omega}{dt^2}$. Producta YZ in $z$ agatur ZV parallela ipsi YX, et vis $Z\zeta = \frac{\alpha r\,dM}{g}$ resolvatur secundum directiones ZV et $Zz$, eritque vis secundum $ZV = \frac{\alpha z\,dM}{g}$ et vis secundum $Zz = \frac{\alpha y\,dM}{g}$. Quia perinde est, in quibusnam harum directionum punctis istae vires applicatae concipiantur, concipiatur illa $\frac{\alpha z\,dM}{M}$ applicata plano AOC in puncto V secundum $Vv$, ita ut sit ista vis secundum $Vv = \frac{\alpha z\,dM}{g}$; vis autem $\frac{\alpha y\,dM}{g}$ applicata concipiatur plano AOB in puncto Y, ita ut habeatur vis secundum $Yz = \frac{\alpha y\,dM}{g}$. Nunc omnibus viribus secundum $Vv$ aequivaleat vis una $Rr$ plano AOC normaliter applicata in R, eritque ducta RP ipsi OC parallela

$$\text{vis } Rr = \frac{\alpha}{g} \int z\,dM; \quad OP = \frac{\int xz\,dM}{\int z\,dM} \text{ et } PR = \frac{\int zz\,dM}{\int z\,dM}.$$

Deinde omnibus viribus secundum $Yz$ aequivaleat vis una $Ss$ plano AOB normaliter applicata in puncto S, unde ad OA ducta normali SQ erit

$$\text{vis } Ss = \frac{\alpha}{g} \int y\,dM; \quad OQ = \frac{\int xy\,dM}{\int y\,dM} \text{ et } QS = \frac{\int yy\,dM}{\int y\,dM}.$$

Hae ergo duae vires $Rr$ et $Ss$ in corpus eundem effectum exerent, atque omnes vires elementares simul sumtae, si modo corpus fuerit rigidum.

*COROLL.* 1.

358. Si ergo corpus rigidum ab hujusmodi duabus viribus $Rr$ et $Ss$ sollicitetur, ab iis circa axem OA ita volvi incipit, ut tempusculo $dt$ conficiat angulum $d\omega = \alpha dt^2$: neque ab his viribus ipsis axis ullam vim sustinebit, seu nulla opus erit vi, ad axem interea in quiete conservandum.

### COROLL. 2.

359. Quoniam infinitis modis aliae binae vires exhiberi possunt his aequivalentes, etiam ab his omnibus corpori idem motus imprimetur, ita ut axis OA ab illis non afficiatur. Secus autem ratio compagis est comparata, quae tantum a viribus elementaribus nullam vim patitur.

### SCHOLION.

360. In hac virium reductione non respeximus ad axis firmitatem sed quasi corpus perfecte esset liberum, ita omnibus viribus elementaribus binas invenimus vires aequivalentes, quae propterea etiam in axem nullum effectum exerunt. Sed si fixitatis axis rationem teneamus, infinitas alias vires exhibere possumus, quae quidem corpori eundem motum circa axem OA inducant, sed insuper etiam axem afficiant. Omnes scilicet vires, quae respectu axis OA idem praebent momentum, ac vires elementares omnes junctim sumtae, seu binae vires aequivalentes inventae, quoniam earum contrariae cum his in aequilibrio consisterent, corpori quoque eundem motum imprimunt. Cum vero vis $Z\zeta = \frac{\alpha r dM}{g}$ momentum respectu axis OA fit $= \frac{\alpha rrdM}{g}$, ex omnibus viribus elementaribus nascitur momentum $= \frac{\alpha}{g}\int rrdM = \frac{2d\omega}{gdt^2}\int rrdM$: omnes ergo vires, quae respectu axis OA aequale habent momentum, corpus circa hunc axem tempusculo $dt$ convertent per angulum $= d\omega$: unde sequens problema facile solvetur.

### PROBLEMA. 12.

361. Si corpus rigidum quiescens et circa axem fixum mobile a viribus quibuscunque sollicitetur, invenire motum primo temporis instante genitum.

### SOLUTIO.

Colligantur omnium virium momenta respectu axis gyrationis, attendendo in utrum sensum quaelibet vergat, sitque summa omnium momentorum $= Vf$, ex cujus sensu motus primo impressi directio innotescit. Tum sit $d\omega$ angulus, per quem corpus circa axem tempusculo $dt$ protruditur: et singula corporis elementa $dM$ multiplicentur per quadrata distantiarum suarum ab axe $rr$, et calculo colligatur integrale $\int rrdM$. Quo facto oportet esse $\frac{d\omega}{gdt^2}\int rrdM = Vf$, unde jam vicissim angulus $d\omega$ elicitur, per quem corpus tempusculo $dt$ a virium momento $Vf$ promovetur, scilicet $d\omega = \frac{Vfgdt^2}{\int rrdM}$. Celeritas autem angularis, quam corpus hoc tempusculo $dt$ acquirit, erit $= \frac{2Vfgdt}{\int rrdM}$; sicque cognoscitur effectus a viribus quibuscunque primo temporis instanti $dt$ genitus.



### COROLL. 1.

362. Angulus ergo $d\omega$ dato tempusculo $dt$ confectus est directe ut momentum virium $Vf$, et reciproce ut integrale $\int rrdM$, quod est aggregatum omnium corporis elementorum $dM$ per quadrata distantiarum suarum ab axe gyrationis multiplicatorum.

### COROLL. 2.

363. Haec formula similis est ei, qua generatio motus progressivi exprimitur, dum hic loco virium momentum virium, et loco massae corporis M valor integralis $\int rrdM$ capiatur, quem valorem deinceps *momentum inertiae* appellabimus.

### SCHOLION.

364. In hoc ergo problemate effectus virium quarumcunque in motu circa axem fixum generando perfecte est definitus, ut nihil amplius desiderari queat. Quemadmodum enim virium sollicitantium momenta respectu axis cujusvis capi debeant, in Statica docetur, et mox a nobis accuratius explicabitur. Verum praeter ipsum motum genitum plurimum interest hic vires, quas axis sustinet, determinare: hocque non solum ut intelligatur, quantis viribus opus sit ad axem continendum, ne dimoveatur, sed ut deinceps, quando ad motum corporum rigidorum liberum revertemur, judicare valeamus, quibusnam casibus axis nullas plane vires sustineat. Haec autem quaestio de viribus, quas axis a viribus sollicitantibus sustinet, etsi maximi est momenti, tamen adhuc minus studiose est tractata, quamobrem operam dabo, ut eam luculenter et distincte evolvam.

### PROBLEMA. 13.

365. Si corpus rigidum quiescens et circa axem fixum mobile a viribus quibuscunque sollicitetur, determinare vires, quas axis inde sustinet.

### SOLUTIO.

Haec quaestio iterum ita ad statum quietis est reducenda, ut corpori certae vires se in aequilibrio continentes applicatae concipiantur, a quibus axis perinde afficiatur, atque a viribus sollicitantibus, dum in corpore motum generant. Hunc in finem perpendantur omnes vires corpus sollicitantes, ex iisque momenta respectu axis gyrationis colligantur, quorum summa sit $= Vf$, unde quaeratur angulus tempusculo $dt$ genitus, qui inventus est $d\omega = \frac{Vfgdt^2}{\int rrdM}$. Deinde quaerantur vires elementares, eundem motum generantes, quas pro singulis corporis elementis ita definivimus, ut elementum $dM$ in $Z$ positum secundum directionem $Z\zeta$ ad distantiam $XZ = r$ ab axe OA perpendicularem et in plano ad axem normali sitam, seu secundum directionem motus geniti sollicitetur vi $= \frac{rd\omega dM}{gdt^2} = \frac{VfrdM}{\int rrdM}$, simulque notavimus, ab his viribus axem nihil pati. Quare si his viribus aequales et contrarias corpori insuper applicemus, corpus in quiete seu aequilibrio servabitur, simulque axis gyrationis easdem adhuc vires sustinebit, quas in motus generatione sustinuerat. Hinc ad vires axem afficientes inveniendas corpori praeter vires, quibus actu sollicitatur, applicatae concipiantur vires elementares motum genitum iterum tollentes; seu harum loco ex §. 357. corpori applicentur vires oppositae viribus $Rr$ et $Ss$ ibi assignatis, statuendo $\alpha = \frac{Vfg}{\int rrdM}$: hoc modo corpus in aequilibrio continebitur, axisque easdem vires sustinebit, quas in generatione motus sustinet.

Fig. 34.

### COROLL. 1.

366. Praeter vires ergo corpus actu sollicitantes primo ipsi vis $Rr$ contrarie est applicanda; vis autem haec $Rr$ est $= \frac{Vf\int zdM}{\int rrdM}$ sumtis $OP = \frac{\int xzdM}{\int zdM}$ et $PR = \frac{\int zzdM}{\int zdM}$. Deinde etiam contrarie applicari debet vis $Ss = \frac{Vf\int ydM}{\int rrdM}$, existente $OQ = \frac{\int xydM}{\int ydM}$ et $QS = \frac{\int yydM}{\int ydM}$.

### COROLL. 2.

367. Vel si vires sollicitantes corpori motum in sensum oppositum ipsi $Z\zeta$ imprimant, tum praeter eas hae ipsae vires $Rr$ et $Ss$ corpori



applicatae sunt intelligendae: ubi meminisse oportet, esse $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, et $rr = yy + zz$.

### COROLL. 3.

368. Ex his ergo viribus, quibus corpus in aequilibrio tenetur, judicari debet, quantum axis ab iis patiatur, seu quanta vi retineri debeat, ne de loco suo dimoveatur.

### SCHOLION.

369. Axis scilicet hic ut omnino fixus consideratur, ita ut corpus in aequilibrio versetur, si virium momenta respectu istius se mutuo destruant. Quo autem clarius pateat, quantas vires axis sustineat, res ita commodissime concipitur, quasi axis in duobus punctis teneretur, ut definiendum sit, quantis viribus in his punctis applicandis opus sit, ut in situ suo retineatur. Quod quidem judicium esset facile, si singulae vires ipsi axi essent applicatae; quoniam proposita quacunque vi axi applicata, duae semper vires in datis duobus punctis applicandae exhiberi possunt illi aequivalentes. Cum igitur directiones virium, quae corpori motum inducunt, eo ipso non per axem transeant, atque etiam vires insuper applicandae $Rr$ et $Ss$ axem non afficiant, totum negotium jam eo reducitur, ut omnes vires, quibus corpus sollicitari consideramus, ad alias ipsis aequivalentes revocentur, quae omnes axi immediate sint applicatae. Primum quidem dubitare liceret, an hoc fieri posset? sed ostendemus, quoties vires corpori applicatae fuerint in aequilibrio, iis semper ejusmodi aequivalentes assignari posse, quae ipsi axi gyrationis sint applicatae. Virium autem sollicitantium duo genera sunt constituenda, alterum earum quae nullum momentum respectu axis praebent, quod fit si earum directiones cum axe gyrationis in eodem fuerint plano; alterum earum quarum directio reperitur in plano ad axem normali, quae quasi totae ad motum gyratorium generandum impenduntur. Verum omnes vires ad haec duo genera reducere licet, unde primum investigabo, quantum axis a primo genere, quod nullum motum gignit, afficiatur.

### PROBLEMA. 14.

370. Si corpus rigidum circa axem fixum mobile sollicitetur a vi, cujus directio cum axe in eodem plano est sita, invenire vires, quas axis inde in datis duobus punctis sustinet.

SOLU-

*SOLUTIO.*

Fig. 35. Sit MN axis gyrationis, et PQ directio vis ſollicitantis V, quae niſi fuerit axi parallela, cum in quodam puncto T ſecabit, quoniam cum axe in eodem plano eſt ſita. Cum igitur ab hac vi nullum oriatur momentum reſpectu axis MN, ab ea etiam motus, ſi quis adeſſet, non afficietur, axisque perinde urgebitur, ac ſi quieſceret. Poſſumus ergo rem ita concipere, ac ſi vis V ipſi axi in puncto T ſecundum directionem TQ eſſet applicata, quae itaque ſecundum directiones TN et T$t$, quae ad MN in plano MNPQ ſit normalis, reſoluta dabit

$$\text{vim } TN = V \operatorname{cof} NTQ \text{ et vim } Tt = V \operatorname{fin} NTQ.$$

Quodſi jam quaeratur, quantas vires axis in punctis M et N ſuſtineat, inde ad directionem vis PQ demittantur perpendicula MP et NQ, et ob $\operatorname{cof} NTQ = \frac{TQ}{TN} = \frac{TP}{TM} = \frac{PQ}{MN}$ et $\operatorname{fin} NTQ = \frac{NQ}{TN} = \frac{MP}{TM}$, erit

$$\text{vis } TN = V.\frac{PQ}{MN} \text{ et vis } Tt = V.\frac{NQ}{TN} = V.\frac{MP}{TM}.$$

Primum ergo axis ſecundum ſuam directionem MN ſollicitatur a vi $= V.\frac{PQ}{MN}$, nihilque refert, in quonam ejus puncto ea applicata concipiatur. Alteri autem vi T$t$ applicari poterunt in M et N vires aequivalentes M$m$ et N$n$ normales ad axem in plano MNPQ, quae erunt:

$$\text{vis } Mm = \text{Vis } Tt.\frac{TN}{MN} = V.\frac{NQ}{MN} \text{ et}$$

$$\text{vis } Nn = \text{Vis } Tt.\frac{TM}{MN} = V.\frac{MP}{MN}.$$

Has ergo vires axis in punctis datis M et N praeter illam $V.\frac{PQ}{MN}$, qua ſecundum ſuam longitudinem urgetur, ſuſtinet a vi propoſita V, qua corpus ſecundum directionem PQ ſollicitatur.

*COROLL.* 1.

Fig. 36. 371. Si interſectio T non cadat inter puncta M et N, perpendiculum NQ ut negativum ſpectari debet, ideoque vis M$m$ in M applicanda verſus PQ dirigetur, ut ſit

$$\text{vis } Mm = V.\frac{NQ}{MN} \text{ et vis } Nn = V.\frac{MP}{MN},$$

praeter quas axis ſecundum MN ſollicitatur vi $= V.\frac{PQ}{MN}$.

CO-



*COROLL.* 2.

372. Si vis ſollicitantis V directio PQ fuerit axi MN parallela ad diſtantiam MP, ab ea axis primo ſecundum ſuam directionem MN trahetur vi $= V$, praeterea vero ſuſtinebit vires M$m$ et N$n$ aequales inter ſe, quarum utraque eſt $= \frac{MP}{MN} V$. Fig. 37

*SCHOLION.*

373. Ad noſtrum propoſitum ſufficit, hunc caſum poſtremum probl. notaſſe, quo directio vis ſollicitantis eſt ipſi axi parallela. A quacunque enim vi corpus urgeatur, ea ſemper reſolvi poteſt in duas, quarum alterius directio ſit ipſi axi parallela, altera vero in plano ad axem normali ſita. Quod quo clarius appareat, ſit OA axis gyrationis, corporique applicata ſit vis quaecunque PV $= V$, ex cujus puncto quocunque P ducatur recta PQ axi OA parallela, et ex V in planum OAPQ demiſſo perpendiculo VR, ductaque RQ ad PQ normali, erit quoque VQ ad PQ normalis, et in plano ad PQ normali ſita; cui ſi parallela et aequalis ſtatuatur P$v$, erit haec ad PQ perpendicularis et in plano ad axem OA normali exiſtens. Quare cum PQV$v$ ſit parallelogrammum rectangulum, vis PV $= V$ reſolvetur in vires PQ et P$v$, ut ſit vis PQ $= \frac{PQ}{PV}.V$ et vis P$v$ $= \frac{Pv}{PV}.V$. Quoniam igitur illius vis PQ effectum in axem jam definivimus; ſupereſt ut quantum axis a vi P$v$, dum motum gyratorium gignit, afficiatur determinemus: quem in finem ſequentia problemata evolvamus. Fig. 38.

*PROBLEMA.* 15.

374. Si lamina plana rigida EFBG mobilis ſit circa axem fixum ad eam in O normalem, eaque in eodem plano ſollicitetur; a data vi V ſecundum directionem BD invenire vires, quas axis ſuſtinet in ipſa motus generatione. Fig. 39.

*SOLUTIO.*

Ab axe O in directionem vis ſollicitantis demittatur perpendiculum OD $= f$, erit ejus momentum $= Vf$: tum ſumto elemento corporis $dM$ in Z, cujus diſtantia ab axe ſit OZ $= r$, lamina tempuſculo $dt$ in ſenſum Z$\zeta$ convertetur per angulum $d\omega = \frac{Vfg\,dt^2}{\int rrdM}$; ad quem effectum producendum opus eſt vi elementari ſecundum Z$\zeta$ ſollicitante

tante $= \frac{r\,d\omega\,dM}{g\,dt^2} = \frac{Vfr\,dM}{\int rr\,dM}$. Quae vires elementares ut colligantur, sumantur in plano laminae duae directrices OB et OC inter se normales, positisque coordinatis OY $= y$ et YZ $= z$, ut sit $rr = yy + zz$, vis $Z\zeta$ resolvatur secundum directiones ZV et Z$z$, erit

$$\text{vis } ZV = \frac{Vfz\,dM}{\int rr\,dM} \text{ et vis } Zz = \frac{Vfy\,dM}{\int rr\,dM}.$$

Jam illis omnibus ZV aequivaleat vis R$r$, his vero Z$z$ vis S$s$, eritque

$$\text{vis } Rr = \frac{Vf\int z\,dM}{\int rr\,dM} \text{ et } OR = \frac{\int zz\,dM}{\int z\,dM} \text{ atque}$$

$$\text{vis } Ss = \frac{Vf\int y\,dM}{\int rr\,dM} \text{ et } OS = \frac{\int yy\,dM}{\int y\,dM},$$

quae vires contrario modo in R$\rho$ et S$\sigma$ applicatae intelligantur; quibuscum si vis sollicitans BD $=$ V conjungatur, habebuntur vires, quarum actionem axis sustinet. Nunc autem vis D$\delta$ $=$ V aequivalet vi ipsi aequali O$\vartheta$ $=$ V in O secundum eandem directionem applicatae, et insuper vi evanescenti in distantia OD in infinitum producta applicandae, cujus autem momentum sit $=$ V$f$. Simili modo loco virium R$\rho$ et S$\sigma$ in O substitui possunt vires ipsi aequales O$\mathfrak{R}$ et O$\mathfrak{S}$, una cum viribus evanescentibus ita in distantiis infinitis applicandis, ut earum momenta sint $\frac{Vf\int zz\,dM}{\int rr\,dM}$ et $\frac{Vf\int yy\,dM}{\int rr\,dM}$. Cum igitur haec momenta a viribus evanescentibus orta se destruant, ipsae vires evanescentes non amplius in computum ingrediuntur: ex quo axis in puncto O has ternas vires sustinet, 1° vim O$\vartheta$ $=$ V aequalem et parallelam vi sollicitanti, 2°, vim O$\mathfrak{R}$ $= \frac{Vf\int z\,dM}{\int rr\,dM}$ et 3°, vim O$\mathfrak{S}$ $= \frac{Vf\int y\,dM}{\int rr\,dM}$.

*COROLL. 1.*

375. Si directrix OB per centrum inertiae laminae I ducatur, erit $\int z\,dM = 0$, et $\int y\,dM = M.\,OI$ denotante M massam totam. Hinc axis in O sustinet duas vires O$\vartheta$ $=$ V et O$\mathfrak{S}$ $= \frac{Vf.\,M.\,OI}{\int rr\,dM}$, quae facile ad unicam reducuntur.

*COROLL. 2.*

376. Ut axis nullam plane vim sustineat, necesse est, ut directio vis sollicitantis BD sit ad rectam OIB normalis, tum vero ut sit V $= \frac{Vf.\,M.\,OI}{\int rr\,dM}$, seu $f = \frac{\int rr\,dM}{M.\,OI}$, ubi $f =$ OD designat distantiam vis applicatae ab axe O.





*COROLL. 3.*

377. Sin autem vis sollicitans V ita fuerit applicata, ut axis O ab ea non afficiatur, ob $f = \frac{\int rr\,dM}{M.\,OI}$, lamina tempusculo $dt$ per angulum $d\omega$ vertetur, ut sit $d\omega = \frac{Vg\,dt^2}{M.\,OI}$; punctum ergo I perinde moveri incipiet, ac si tota massa ibi esset collecta, eaque ab eadem vi V sollicitaretur.

*EXPLICATIO.*

378. Fundamentum hujus solutionis isti nititur principio, quod vires, quarum momenta respectu axis gyrationis se destruunt, in axem eundem effectum exerant, ac si hae vires ipsi axi immediate in suis directionibus essent applicatae. Quod etiamsi in ipsa solutione satis sit confirmatum, propterea quod vires evanescentes, quarum momenta se destruunt, recte negligi possunt; tamen si quem evanescentia et distantia infinita, ad quam hae vires applicatae considerantur, offendant, idem alio modo ostendisse juvabit. Sint ergo in eodem plano duae vires B$b$ et C$c$, quarum momenta respectu puncti O se destruant, ita ut ductis in earum directiones ex O perpendiculis OB et OC sit B$b$. OB $=$ C$c$. OC seu B$b$ : C$c$ $=$ OC : OB. Concurrant earum directiones in E, eaedemque vires quasi puncto E applicatae concipi possunt, tum autem dabitur una E$e$ illis aequivalens, cujus directio per ipsum punctum O necessario transit, alioquin enim inde momentum respectu O oriretur contra hypothesin. Quod etiam sic demonstratur. Sit E$e$ media directio virium B$b$ et C$c$ in E applicatarum, erit per resolutionem virium B$b$ : C$c$ $=$ fin $\nu$ : fin $\mu$ et eadem ratio valet, si E$e$ per O transeat, quoniam est fin $\nu$ : fin $\mu$ $=$ OC : OB $=$ B$b$ : C$c$. Hinc vis aequivalens E$e$ quasi in O applicata considerari potest, quae sit O$\omega$: cui ergo etiam vires O$\mathfrak{C}$ et O$\gamma$ ipsis B$b$ et C$c$ aequales aequivalebunt: sicque loco virium B$b$ et C$c$ recte substituere licet vires O$\mathfrak{C}$ et O$\gamma$ ipsis aequales et in ipso puncto O applicatas. Hac igitur demonstratione vicissim principium in solutione usurpatum extra dubium collocatur. Fig. 40.

*SCHOLION.*

379. Notatu omnino dignus est casus, quo vis corpus sollicitans nullam vim in axem gyrationis exerit, qui ergo sponte, dum vis effectum exerere incipit, in quiete manebit. Quo hunc casum accuratius cognoscamus, in recta OI ab axe O per centrum inertiae I producta Fig. 39 quaeri debet punctum H, ut sit distantia OH $= \frac{\int rr\,dM}{M.\,OI}$; tum enim

quaecunque vis $Hh$ ad OH normalis in plano proposito nullo modo axem OI afficiet. Infra autem patebit, punctum H idem esse, quod vulgo centrum oscillationis vocari solet, quemadmodum I est centrum gravitatis. Ceterum hoc problemate soluto planior reddetur solutio sequentis, ubi corpori etiam extensio secundum longitudinem axis tribuitur.

## PROBLEMA 26.

Fig. 41. 380. Si corpus rigidum circa axem fixum OA mobile a quotcunque viribus sollicitetur, quarum directiones sint in planis ad axem normalibus, invenire vires, quibus in ipso motus initio axis immediate urgetur.

## SOLUTIO.

Cum omnes vires agant in planis ad axem normalibus, quaerantur singularum momenta respectu axis OA, quorum prout in eundem sensum tendunt vel contra, aggregatum fit $Vf$, a quo corpus circa axem tempusculo $dt$ vertatur per angulum $d\omega$, ita ut particula in Z feratur in sensum $Z\zeta$. Assumtis in subsidium calculi binis directricibus OB et OC ad OA normalibus constituantur pro elemento corporis $dM$ in Z sito ternae coordinatae $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, sitque ejus ab axe distantia $XZ = \sqrt{(yy + zz)} = r$. Quibus positis supra invenimus fore $d\omega = \frac{Vfg\,dt^2}{\int rrdM}$. Praeter has autem vires, quibus corpus actu sollicitatur, axis insuper sollicitatur a viribus aequalibus et contrariis iis, ad quas supra vires elementares reduximus (vide §. 366): ubi notandum est, omnium harum virium momenta junctim sumta se mutuo tollere. Quare si loco cujusque vis substituatur una ei aequalis ipsi axi in eadem directione applicata, et alia evanescens ad distantiam infinitam applicata, cujus autem momentum sit illius momento aequale, omnium harum virium momenta se destruent, et cum eae evanescant, prorsus non in censum venient. Hinc igitur vires axem immediate sollicitantes ita se habebunt: Primo singulae vires corpus sollicitantes in planis ad axem normalibus ad ipsum axem in eadem directione applicentur; deinde ob vires elementares sumto intervallo $OP = \frac{\int xzdM}{\int zdM}$ in P secundum directionem ipsi OB parallelam axi applicetur vis $P\varrho = \frac{Vf\int zdM}{\int rrdM}$, tum vero sumto intervallo $OQ = \frac{\int xydM}{\int ydM}$ in Q secundum directionem ipsi



ipsi OC parallelam et oppositam applicetur vis $Q\sigma = \frac{Vf\int ydM}{\int rrdM}$; sicque omnes habebuntur vires, quas axis immediate sustinebit, qui ergo satis fixus esse debet, ut ne ab iis de situ suo deturbetur.

### COROLL. 1.

381. Si planum AOB ita capiatur, ut per corporis centrum inertiae transeat, erit $\int zdM = 0$, unde vis $P\varrho$ evanescet, simul vero distantia OP fiet infinita: ubi tamen notandum est, fore $P\varrho \cdot OP = \frac{Vf\int xzdM}{\int rrdM}$: ita ut hanc vim negligere non liceat.

### COROLL. 2.

382. Quoniam hoc modo omnes vires, quas axis sustinet, ipsi axi sunt applicatae, si eae se mutuo in aequilibrio teneant, axis nullam vim patietur, corpusque circa eum, etiamsi sit liber, sponte converti incipiet.

### COROLL. 3.

383. A singulis autem viribus corpus sollicitantibus oriuntur totidem vires ipsi axi applicatae; quibus deinde adjungi debent binae vires $P\varrho$ et $Q\sigma$ axi itidem applicatae; sicque omnes habentur vires axem afficientes.

## EXPLICATIO.

384. Iam ante ostendimus, si duae vires in eodem plano ad axem normali fuerint applicatae, quarum momenta se destruant, iis aequivalere duas aequales vires ipsi axi in iisdem directionibus applicatas; nunc igitur, ne ullum dubium circa hanc solutionem supersit, ex principiis staticis demonstrari oportet, idem valere, etiamsi illae vires in diversis planis ad axem normalibus fuerint applicatae. Sit igitur axi OA in Fig. 42. plano ad E normali applicata vis quaecunque in figura non expressa, tum vero in plano ad axem in F normali applicata sit vis $Nn$, cujus momentum illius momento sit aequale et contrarium, sitque recta FN ad directionem istius vis $Nn$ perpendicularis. Ducatur ex E recta EM ipsi FN aequalis et parallela, cui in M vis $Mm$ ipsi $Nn$ aequalis et parallela applicata concipiatur; tum vero in E et F aequales vires illis $F\nu$ et $E\mu$ itidem parallelae applicatae intelligantur. Atque evidens est, tres vires $Mm$, $E\mu$ et $F\nu$ aequivalere vi uni $Nn$, quoniam haec contrario me-

modo applicata cum illis tribus aequilibrium conſtitueret. Quare loco vis $Nn$ ſubſtituere licet tres vires $Mm$, $E\mu$ et $F\nu$, quarum binae poſteriores ipſi axi, prior autem in eodem plano ad axem normali, in quo vis non expreſſa agit, eſt applicata. Cum igitur hujus vis $Mm$ momentum aequale ſit et contrarium momento vis in figura non exhibitae, eae vires ad ipſum axem transferri poſſunt, ſicque loco vis $Mm$ ſubſtituetur vis $E\mathfrak{M}$ ipſi aequalis et parallela: quae cum a vi $E\mu$ deſtruatur, unica relinquitur vis $F\nu$, quae jam locum vis $Nn$ ſuſtinebit, dum etiam vis in figura non expreſſa axi in puncto E applicatur. Ex quo in genere intelligitur, loco virium, quarum momenta ſe deſtruunt, easdem vires ipſi axi applicatas ſubſtitui licere, ſi quidem directiones fuerint in planis ad axem normalibus.

### PROBLEMA. 17.

Fig. 41. 385. Si corpus rigidum circa axem fixum OA mobile a viribus quibuscunque ſollicitetur, definire vires, quibus axis in datis duobus punctis O et A ſuſtentari debet, ne de ſitu ſuo deturbetur.

### SOLUTIO.

Per alterum datorum punctorum O ſtatuantur binae directrices OB et OC tam inter ſe quam ad axem OA normales, et poſitis pro corporis elemento quovis $dM$ in Z ſito ternis coordinatis $OX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$, vocetur ejus ab axe diſtantia $XZ = \sqrt{(yy + zz)} = r$. Tum conſiderentur ſingulae vires corpus ſollicitantes, et quae fuerint obliquae, reſolvantur in binas, quarum alterae ſint axi OA parallelae, alterae vero in planis ad axem normalibus ſint ſitae. Priores, quae ad motum nihil conferunt, quantum effectum in axem exerant, ſupra (§. 372.) definivimus, unde ſimul patet, quantae vires inde in datis punctis O et A oriantur. Poſteriores vero ſimul praebeant momentum $= Vf$ ad corpus in ſenſum $Z\zeta$ convertendum; earum autem quaelibet puncto axis cui reſpondet, in ſua directione applicetur, cujusmodi una vis ſit $Ll = L$. Hujus ergo loco in O et A applicentur vires parallelae $O\lambda$ et $A\lambda$, ut ſit $O\lambda = L.\frac{AL}{OA}$ et $A\lambda = L.\frac{OL}{AO}$, quippe quae duae illi aequivalent: atque hoc modo ex ſingulis viribus tales binae vires ad puncta O et A transferantur. Deinde vero poſito intervallo $OA = a$, ob vires $P\rho$ et $Q\sigma$ puncta O et A ſuſtinebunt vires $Oo$, $Aa$ et $O\omega$, $A\omega$ illis parallelas, ita ut ſit

vis



$$\text{vis } Oo = \frac{Vff(a-x)zdM}{afrrdM}, \quad \text{vis } Aa = \frac{VffxzdM}{afrrdM}$$

$$\text{vis } O\omega = \frac{Vff(a-x)ydM}{afrrdM}; \quad \text{vis } A\omega = \frac{VffxydM}{afrrdM}.$$

Cum igitur hoc pacto omnes vires, quas axis ſuſtinet, ad puncta O et A fuerint perductae, ab his junctim ſumtis iſta axis puncta revera ſollicitabuntur; quare ea a viribus contrariis coerceantur, neceſſe eſt.

### COROLL. 1.

386. Omnes iſtae vires axi in punctis O et A applicatae ſimul ad axem ſunt normales, niſi affuerint vires axi parallelae, unde praeter normales axis etiam ſecundum ſuam longitudinem urgetur.

### COROLL. 2.

387. Quotcunque autem vires utrique termino O et A applicatae reperiuntur, pro utroque cunctas ad unam revocare licet, quam propterea axis in eo puncto ſuſtinebit: quae vires in O et A, niſi evaneſcant, axis non ſponte in ſitu ſuo permanebit.

### COROLL. 3.

388. Si nullae adſint vires axi parallelae, axis etiam nequaquam ſecundum ſuam longitudinem urgetur, ſed in punctis O et A viribus tantum ad axem normalibus erit reſiſtendum, unde ſufficiet axem intra duos annulos fixos ſuſpendiſſe.

### SCHOLION.

389. Hic autem nondum modos, quibus axis in quiete conſervari ſolet, explicare licet, quoniam in praxi axes corporum notabilem craſſitiem habent, ita ut ſuſpenſio non ad axem linearem, qualem hic poſtulamus, referatur: quare cavendum eſt, ne ea, quae hic de axe lineari ſunt demonſtrata, temere ad quovis axes craſſos extendantur. Teneatur ergo hic perpetuo, axem nobis eſſe lineam rectam, quae moto corpore ipſa non moveatur, cujusmodi motus exiſteret, ſi corpus intra duas cuſpides contineretur, circa quas tamen liberrime ſine frictione revolvi poſſet. Sin autem adſit axis materialis, qualis rotis affigi ſolet, isque vel plano vel cavitati incumbat, ejus motus utique in computum veniat neceſſe eſt, neque tum facile erit lineam illam, quae durante motu corporis ipſa maneat immota, aſſignare. Veruntamen quia hic nobis tantum de primo motus initio ſermo eſt, haud diffi-

cile est lineam, quae pro quovis suspensionis modo in quiete persistat, agnoscere.

PROBLEMA. 18.

Fig. 43 · 390. Si corpus rigidum circa axem OA fuerit mobile, invenire vires, a quibus si corpus sollicitetur, axis inde nullas plane vires sustineat.

SOLUTIO.

Hujusmodi vires applicari debent in planis ad axem normalibus, et quoniam quotquot earum fuerint, eas ad duo plana reducere licet, quaeramus vires in planis ad axem in punctis O et A normalibus applicandas, a quibus axis nullatenus afficiatur. Constitutis ut ante in O binis directricibus OB et OC tam inter se quam ad axem OA normalibus, iisdem in A parallelae statuantur AF et AH. Quod si jam solutio praecedentis problematis et formulae ibi inventae in subsidium vocentur, huic problemati satisfiet, si rectis OB, OC, AF et AH alicubi vires applicentur illis $Oo$, $O\omega$, $Aa$ et $A\alpha$, quas ibi invenimus, aequales et contrariae, quoniam hae ad axem translatae a viribus elementaribus destruuntur. Sint ergo $Ee$ et $Ff$ vires directrici OC, at $Gg$ et $Hh$ vires directrici OB parallelae, quae agant, uti figura ostendit. Quare posita distantia $OA = a$, vires istae ita esse debent comparatae:

$$\text{vis } Ee = \frac{Vff(a-x)ydM}{afrrdM}; \text{ vis } Ff = \frac{VffxydM}{afrrdM}$$

$$\text{vis } Gg = \frac{Vff(a-x)zdM}{afrrdM}; \text{ vis } Hh = \frac{VffxzdM}{afrrdM}.$$

Praeterea vero summam momentorum harum quatuor virium ipsi $Vf$ aequalem esse oportet: ex quo erit

$$OE.f(a-x)ydM + AF.fxydM + OG.f(a-x)zdM + AH.fxzdM = afrrdM.$$

Cui aequationi ita infinitis modis satisfieri potest, ut ternis distantiis pro lubitu assumtis quarta determinetur. Facilior autem reddetur solutio, si tam distantiae OE, AF, quam OG, AH aequales capiantur: statuamus ergo

$$OE = AF = m, \text{ et } OG = AH = n,$$

atque fieri oportet

$$mfydM + nfzdM = frrdM,$$

unde vel $m$ vel $n$ pro lubitu assumi potest. Deinde sufficit, ut quatuor illae vires rationem superiorum formularum teneant, ita ut sint:

vis



$$\text{vis } Ee = \frac{f(a-x)ydM}{ab}; \text{ vis } Ff = \frac{fxydM}{ab}$$

$$\text{vis } Gg = \frac{f(a-x)zdM}{ab}; \text{ vis } Hh = \frac{fxzdM}{ab}.$$

Hae ergo quatuor vires praescripto modo corpori applicatae axem plane non afficient.

COROLL. 1.

391. Si planum AOB per centrum inertiae I capiatur, erit $fzdM = o$, et $KI = \frac{fydM}{M}$, denotante M massam totius corporis. Erunt ergo vires:

$$\text{vis } Ee = \frac{Ma.KI - fxydM}{ab}; \text{ vis } Ff = \frac{fxydM}{ab}$$

$$\text{vis } Gg = \frac{-fxzdM}{ab}; \text{ vis } Hh = \frac{fxzdM}{ab}$$

earumque distantiae ab axe in genere ita debent esse comparatae, ut sit

$$Ma.KI.OE + (AF - OE)fxydM + (AH - OG)fxzdM = afrrdM$$

COROLL. 2.

392. Si etiam ipse axis OA per centrum inertiae I transeat, ut sit $KI = o$, vires ita se habebunt:

$$\text{vis } Ee = \frac{-fxydM}{ab}; \text{ vis } Ff = \frac{fxydM}{ab}$$

$$\text{vis } Gg = \frac{-fxzdM}{ab}; \text{ vis } Hh = \frac{fxzdM}{ab}$$

earumque distantiae ab axe hoc modo, ut sit

$$(AF - OE)fxydM + (AH - OG)fxzdM = afrrdM.$$

COROLL. 3.

393. Quodsi ergo valores integralium $fxydM$ et $fxzdM$ evanescant, tam vires evanescunt, quam distantiarum quaedam debent esse infinitae. At loco vis evanescentis in distantia infinita applicatae substituere licet duas in distantiis finitis applicandas.

SCHOLION. 1.

394. Vires hic investigavimus in duobus planis ad axem normalibus applicandas, a quibus axis nullam vim sustineat. His autem viribus infinitis modis aliae tam in iisdem planis quam in aliis aequivalentes

U tes

tes exhiberi possint. Veluti loco vis $Ee$ sumi possunt vires $Pp$ et $O\pi$ in directionibus parallelis, ut sit $Pp = Ee + O\pi$, et $Ee.\,IP = O\pi.\,OP$ seu $Ee = Pp - O\pi$ et $OE = \frac{OP.\,Pp}{Pp - O\pi}$. Quare ducto plano AOB per centrum inertiae I corporis, locoque vis $Ee$ introductis viribus $Pp$ et $O\pi$, quarum altera $O\pi$ maneat indefinita, reliquae ita se habebunt;

$$\text{Vis } Pp = \text{vis } O\pi + \frac{Ma.\,KI - \int xydM}{ab};\ \text{vis } Ff = \frac{\int xydM}{ab},$$

$$\text{vis } Gg = \frac{-\int xzdM}{ab} \text{ et vis } Hh = \frac{\int xzdM}{ab};$$

$$ab.\,OP.\ \text{Vis } O\pi + Ma.\,KI.\,OP - OP.\int xydM + AF.\int xydM + (AH - OG)\int xzdM = a\int rrdM.$$

Si praeterea simili modo loco vis $Ff$ binae vires $Rr$ et $A\varrho$ introducantur, cum sit $Ff = Rr - A\varrho$ et $AF = \frac{AR.\,Rr}{Rr - A\varrho}$, atque vis $A\varrho$ arbitrio nostro relinquatur; erunt vires:

$$\text{vis } Pp = \text{vis } O\pi + \frac{Ma.\,KI - \int xydM}{ab};\ \text{vis } Rr = \text{vis } A\varrho + \frac{\int xydM}{ab}$$

$$\text{vis } Gg = \frac{-\int xzdM}{ab} \text{ et vis } Hh = \frac{\int xzdM}{ab}.$$

Tum vero distantiae ita debent esse comparatae:

$$\left.\begin{array}{l} +\,ab.\,OP.\ \text{Vis } O\pi + Ma.\,KI.\,OP + (AR - OP)\int xydM \\ +\,ab.\,AR.\ \text{Vis } A\varrho \qquad\qquad + (AH - OG)\int xzdM \end{array}\right\} = a\int rrdM.$$

Si denique loco vis $Gg$ binae $Qq$ et $O\phi$; nec non loco vis $Hh$ binae $Ss$ et $A\sigma$ introducantur, ob

$$Gg = Qq - O\phi;\ OG = \frac{OQ.\,Qq}{Qq - O\phi};$$

$$Hh = Ss - A\sigma;\ AH = \frac{AS.\,Ss}{Ss - A\sigma};$$

jam in genere vires ita capiantur:

$$\text{vis } Pp = \text{vis } O\pi + \frac{Ma.\,KI - \int xydM}{ab};\ \text{vis } Rr = \text{vis } A\varrho + \frac{\int xydM}{ab}$$

$$\text{vis } Qq = \text{vis } O\phi - \frac{\int xzdM}{ab};\ \text{vis } Ss = \text{vis } A\sigma + \frac{\int xzdM}{ab}$$

earumque distantiae ab axe ita se habeant, ut sit

$$\left.\begin{array}{l} +\,ab.\,OP.\ \text{Vis } O\pi + Ma.\,KI.\,OP + (AR - OP)\int xydM \\ +\,ab.\,AR.\ \text{Vis } A\varrho \qquad\qquad + (AS - OQ)\int xzdM \\ +\,ab.\,OQ.\ \text{Vis } O\phi \\ +\,ab.\,AS.\ \text{Vis } A\sigma \end{array}\right\} = a\int rrdM$$

Nunc



Nunc igitur etiamsi intervallum KI cum integralibus $\int xydM$ et $\int xzdM$ evanescat, tamen infinitae habentur vires finitae et in distantiis finitis applicatae, quae quaesito satisfacient.

### SCHOLION. 2.

395. In hac generali solutione quatuor relinquuntur vires $O\pi$, $O\phi$, $A\varrho$ et $A\sigma$ arbitrio nostro, axi in punctis O et A secundum binas directiones OB et OC applicandae; deinde etiam quaternarum reliquarum virium $Pp$, $Qq$, $Rr$, et $Ss$ distantiae ab axe OP, OQ, AR et AS pro lubitu assumi possunt, dummodo quantitas $ab$ ita definiatur, ut sit

$$ab = \frac{a\int rrdM - Ma.\,KI.\,OP + (OP - AR)\int xydM + (OQ - AS)\int xzdM}{OP.\ \text{vis } O\pi + OQ.\ \text{vis } O\phi + AR.\ \text{vis } A\varrho + AS.\ \text{vis } A\sigma}$$

Quo valore invento vires hae posteriores ita determinantur, ut sit

$$\text{vis } Pp = \text{vi } O\pi + \frac{Ma.\,KI - \int xydM}{ab};\ \text{vis } Rr = \text{vi } A\varrho + \frac{\int xydM}{ab}$$

$$\text{vis } Qq = \text{vi } O\phi - \frac{\int xzdM}{ab};\ \text{vis } Ss = \text{vi } A\sigma + \frac{\int xzdM}{ab},$$

quae vires respectu priorum habent directiones oppositas: omnes autem momenta in eundem sensum tendentia praebere assumuntur: eritque momentum totale ex omnibus ortum $= \frac{a\int rrdM}{ab}$, quod supra vocavimus $Vf$, ex quo motus initium ita definitur, ut tempusculo $dt$ corpus vertatur per angulum $d\omega = \frac{gdt^2}{b}$. Recordandum est autem, hic $a$ designare intervallum OA, tum vero pro quolibet corporis elemento $dM$ coordinatas directricibus OA, OB, OC parallelas esse $x$, $y$, $z$, quarum prima $x$ a puncto O capiatur: praeterea vero hic planum AOB per centrum inertiae I corporis duximus, ut esset OC ad istud planum normalis.

### PROBLEMA. 19.

396. Si corpus rigidum circa axem fixum mobile sollicitetur a viribus quibuscunque, atque ad motum cieatur, definire vires, quas ipsa corporis compages sustinet.

### SOLUTIO.

Hic ejusmodi vires inveniri oportet, quae corpori applicatae id quidem in aequilibrio teneant, simul vero compagem ejus aeque afficiant, atque ea in productione motus afficitur. Primo ergo corpus ...

stinet vires, quibus actu sollicitatur, ubi eae partes, quibus singulae immediate sunt applicatae, probe notentur: quandoquidem quaelibet vis unicam tantum corporis particulam urget. Deinde ex momento omnium istarum virium colligantur vires elementares, quae in singulis elementis parem motum gignerent; ac singulis elementis his aequales et contrariae applicatae concipiantur, quarum loco hic alias ipsis aequivalentes ut supra substituere non licet, quoniam hunc ipsa rigiditatis ratio exquiritur. Tertio adjiciantur vires, quibus axis actu in quiete servatur; atque hi tres virium ordines corpus in perfecto aequilibrio continebunt: simulque in compage partium idem plane efficiunt, quod corpus in motus generatione patitur. Hincque intelligitur, quam firmo nexu singulae corporis particulae inter se colligatae esse debeant, ut nulla earum divulsio sit metuenda: et nisi compages his viribus satis resistere valeat, corpus non pro rigido esset habendum.

## SCHOLION.

397. Hic plus definire non suscipimus, quam quantis viribus singulae corporis particulae sollicitentur, quae eas a nexu cum reliquis avellere conentur; quomodo enim structura corporis huic effectui resistat, hujus loci non est inquirere, propterea quod haec ratio rigiditatis cuique corporum generi est peculiaris. Ceterum in hoc capite tantum motus initium, qui corpori rigido circa axem fixum mobili a viribus quibuscunque imprimitur, sumus contemplati, quo facilius solus virium effectus a motu jam insito separatus perspiceretur. Inprimis autem hinc ad sequentes investigationes subsidia petentur, quando, dum corpus circa quempiam axem gyratur, vires adsunt id circa alium axem convertere conantes; tum enim ex effectu momentaneo circa hunc axem producto judicare licebit, quomodo motus praecedens turbetur. Nunc igitur corpus rigidum in motu circa axem fixum considerabimus, et scrutabimur, quomodo is a viribus quibuscunque immutari debeat, postquam jam demonstravimus, ejus motum, si nullae adessent vires sollicitantes, uniformem esse futurum. Praeterea vero vires, quas axis gyrationis interea sustinet, sollicite erunt perpendendae.

CAPUT

# CAPUT IV.

## DE PERTURBATIONE MOTUS GYRATORII A VIRIBUS QUIBUSCUNQUE ORTA.

### PROBLEMA. 20.

398. Si corpus rigidum circa axem fixum gyretur celeritate quacunque angulari, invenire vires elementares, a quibus dato tempusculo motus angularis datam accelerationem adipiscatur.

### SOLUTIO.

Sit $\varepsilon$ celeritas angularis, qua scilicet, si motus gyratorius esset uniformis, singulis minutis secundis conficeret angulum $= \varepsilon$, tantam autem motus accipere debeat accelerationem, ut elapso tempusculo $dt$ celeritas angularis fiat $= \varepsilon + d\varepsilon$. Consideretur jam corporis elementum quodcunque $dM$, cujus distantia ab axe gyrationis sit $= r$, ideoque ejus celeritas $= r\varepsilon$, quae, cum distantia $r$ pro eodem elemento maneat constans, tempusculo $dt$ augmentum accipere debet $= rd\varepsilon$. Ad hoc ergo necesse est, ut massula $dM$ secundum directionem motus sollicitetur a vi quapiam, quae si tantisper ponatur $= p$, erit per motus principia supra stabilita $rd\varepsilon = \frac{2gp\,dt}{dM}$ (202.); unde vis huic elemento applicanda fit $p = \frac{r\,dM}{2g} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$. Singula ergo corporis elementa secundum ipsam motus sui directionem sollicitari debent a viribus $= \frac{d\varepsilon}{2g\,dt} \cdot r\,dM$, ubi $dM$ exprimit massam cujusque elementi, et $r$ ejus distantiam ab axe. Atque hae sunt vires elementares, quae singula corporis elementa sollicitantes motum gyratorium ita accelerant, ut celeritas angularis $\varepsilon$ tempusculo $dt$ accipiat augmentum $d\varepsilon$.

### COROLL. 1.

399. Cum $\frac{d\varepsilon}{2g\,dt}$ pro omnibus elementis corporis eundem valorem retineat, vires elementares sunt in ratione composita massarum earumque distantiarum ab axe gyrationis. Singulae autem hae vires singuli

gulis elementis secundum ipsam motus directionem applicatae sunt intelligendae.

### COROLL. 2.

400. Quia harum virium nulla obstat, quominus reliquae effectum suum plenum producant, perinde ac si singulae particulae a se invicem essent dissolutae, ab his viribus elementaribus neque compages corporis neque axis gyrationis afficitur.

### COROLL. 3.

401. Compages igitur partium atque axis gyrationis nullas alias vires sustinent, nisi quae ex motu gyratorio ipso nascuntur, quaeque hoc tempusculo perinde se habebunt, ac si motus gyratorius esset uniformis.

### SCHOLION.

402. Etsi autem vires elementares per se axem gyrationis non afficiunt, sed quasi totae in motu singulorum elementorum accelerando consumuntur; tamen quatenus ab iis motus gyratorius rapidior redditur, eatenus ob auctam vim centrifugam vires, quas axis sustinet, fiunt majores. Verum hic effectus primo instanti est infinite parvus, atque axis aliter non afficitur, ac si motus gyratorius esset uniformis. Scilicet cum celeritas angularis sit $= \varepsilon$, quaelibet particula, cujus massa $= dM$ et distantia ab axe $= r$, ab axe recedere conatur vi $= \frac{\varepsilon\varepsilon r dM}{2g}$.

Fig. 32. Ab omnibus autem istis viribus per §. 338. axis OA conjunctim ita afficitur, ut in subsidium vocatis binis directricibus OB et OC invicem et ad axem OA normalibus, quibus pro elemento $dM$ in Z sito parallelae capiantur coordinatae $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, axis in punctis E et F sustineat duas vires $Ee$ et $Ff$, quarum illa directrici OB haec vero ipsi OC sit parallela; ita ut sit

$$OE = \frac{\int xydM}{\int ydM} \text{ et vis } Ee = \frac{\varepsilon\varepsilon}{2g}\int ydM$$

$$OF = \frac{\int xzdM}{\int zdM} \text{ et vis } Ff = \frac{\varepsilon\varepsilon}{2g}\int zdM$$

Vel harum loco in datis duobus punctis O et A binae aequivalentes $Ob$, $Oc$ et $A\beta$, $A\gamma$ applicatae concipi possunt, quae ex §. 343. erunt, posito intervallo $OA = a$,

vis



$$\text{vis } Ob = \frac{\varepsilon\varepsilon}{2ag}(a\int ydM - \int xydM);\ \text{vis } A\beta = \frac{\varepsilon\varepsilon}{2ag}\int xydM$$

$$\text{vis } Oc = \frac{\varepsilon\varepsilon}{2ag}(a\int zdM - \int xzdM);\ \text{vis } A\gamma = \frac{\varepsilon\varepsilon}{2ag}\int xzdM$$

Ex quibus formulis colligitur, quantas vires axis ob solum motum gyratorium sustineat.

### PROBLEMA. 21.

403. Si dum corpus rigidum circa axem fixum gyratur, singulae ejus particulae secundum ipsam motus sui directionem sollicitentur viribus, quae sint in ratione composita massarum et distantiarum ab axe, definire incrementum celeritatis angularis dato tempusculo productum.

### SOLUTIO.

Posita celeritate angulari $= \varepsilon$, qua corpus nunc gyratur, consideremus particulam corporis quamcunque, cujus massa sit $= dM$ et distantia ab axe $= r$. Haec ergo particula secundum motus sui directionem sollicitatur vi, quae est ut $rdM$: ponatur ergo ea $= \frac{rdM}{b}$, ubi $b$ sit linea pro omnibus corporis elementis hocque instanti eadem. Iam cum hujus elementi celeritas sit $= r\varepsilon$, pro eaque sit $r$ quantitas constans, si hoc elementum extra nexum cum reliquis versaretur, foret $rd\varepsilon = 2g. \frac{rdM}{b}. dt : dM = \frac{2grdt}{b}$, incrementum scilicet celeritatis tempusculo $dt$ productum. Hinc ergo pro celeritate angulari $\varepsilon$ fiet $d\varepsilon = \frac{2gdt}{b}$: quare cum ex omnibus elementis eadem celeritatis angularis acceleratio oriatur, ea sibi mutuo nulli sunt impedimento, sed singula elementa suas accelerationes aeque recipient, ac si a reliquis essent soluta. Hinc ab istis viribus, quae cum elementaribus in praec. probl. definitis conveniunt, motus gyratorius totius corporis rigidi ita acceleratur, ut tempusculo $dt$ celeritas angularis $\varepsilon$ incrementum capiat $d\varepsilon = \frac{2gdt}{b}$.

### COROLL. 1.

404. Incrementum ergo celeritatis angularis $d\varepsilon$ non pendet ab ipsa celeritate angulari $\varepsilon$, quae sive major fuerit sive minor, ab iisdem viribus eodem tempusculo idem incrementum adipiscitur.

CO

### C O R O L L. 2.

405. Quia quaelibet vis elementaris $\frac{r\,dM}{b}$ eſt ad diſtantiam ab axe $r$ normalis in plano ad axem normali, ejus momentum reſpectu axis eſt $= \frac{rr\,dM}{b}$, ideoque ſumma omnium momentorum $= \frac{1}{b}\int rr\,dM$.

### C O R O L L. 3.

406. Si corpus praeter has vires elementares ab aliis urgeretur in ſenſum contrarium, quarum momentum reſpectu axis ibidem eſſet $= \frac{1}{b}\int rr\,dM$, ab his illarum effectus deſtrueretur, motusque nullam reciperet accelerationem.

### S C H O L I O N.

407. De his viribus, quas *elementares* voco, quoniam in ſingulis elementis mutationem ſtatus, quam ſubeunt, producunt, id praeſertim obſervandum eſt, quod ab iis axis nullam vim patiatur; propterea quod ab iis ſingula elementa perinde, ac ſi a ſe invicem eſſent diſſoluta, afficiuntur. Quanquam autem hujusmodi vires vix in mundo exiſtunt, tamen ab iis exordiendum erat, ut aliarum quarumcunque virium effectus in motu gyratorio perturbando definire poſſemus. Si enim aliae vires, quaecunque fuerint, reſpectu axis gyrationis aequale momentum habeant, eae etiam eandem motus accelerationem producere debent; quoniam ſi contrario modo eſſent applicatae, cum elementaribus in aequilibrio forent. Haec autem convenientia tantum de motus mutatione eſt intelligenda: nam longe aliter res ſe habebit, cum vires, quas axis gyrationis ſuſtinet, determinari debebunt. Verum et iam haec determinatio ope virium elementarium facile expedietur, quemadmodum jam in capite praecedente eſt oſtenſum.

### P R O B L E M A. 22.

408. Si corpus rigidum, dum circa axem fixum gyratur, ſollicitetur a viribus quibuscunque, definire mutationem momentaneam in motu gyratorio ab iis productam.

### S O L U T I O.

Sit ut hactenus $\varepsilon$ celeritas angularis, qua corpus jam gyratur; tum quaerantur ſingularum virium ſollicitantium momenta, quae collecta praebeant ſummam $= Vf$, quae tendet motum gyratorium vel accelerare vel retardare, prout in eundem ſenſum vergat, vel in contrarium. Sumamus autem hoc momentum ad accelerationem tendere, quia ſi contrarium eveniret, ipſum momentum tanquam negativum ſpectari poſſet. Quaeritur ergo, quantum incrementum celeritas angularis $\varepsilon$ tempusculo $dt$ ſit accepturum? Dabuntur autem utique vires elementares, quae par incrementum eſſent producturae. Sit igitur pro elemento $dM$ ad diſtantiam $r$ ab axe ſito vis elementaris $= \frac{r\,dM}{b}$, cujus momentum cum ſit $= \frac{rr\,dM}{b}$, effectus harum virium in motu gyratorio turbando illi, quem momento $Vf$ producitur, erit aequalis, ſi ſumma omnium illorum momentorum $\frac{1}{b}\int rr\,dM$ fuerit momento $Vf$ aequalis, unde fit $b = \frac{\int rr\,dM}{Vf}$. At ex viribus elementaribus $\frac{r\,dM}{b}$ oritur motus gyratorii acceleratio $d\varepsilon = \frac{2g\,dt}{b}$ tempusculo $dt$. Quare pro $b$ ſubſtituto valore modo invento, incrementum celeritatis angularis $\varepsilon$ a virium momento $Vf$ tempusculo $dt$ productum erit $d\varepsilon = \frac{2Vfg\,dt}{\int rr\,dM}$, ubi $\int rr\,dM$ eſt quantitas conſtans a figura et indole corporis pendens.

### C O R O L L. 1.

409. Incrementum ergo celeritatis angularis $d\varepsilon$ proportionale eſt directe momento virium ſollicitantium $Vf$ et tempusculo $dt$, reciproce autem illi quantitati, quae oritur, ſi ſingula corporis elementa per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe gyrationis multiplicentur, et in unam ſummam colligantur.

### C O R O L L. 2.

410. Si corpus adhuc motu gyratorio confecerit angulum $= \varphi$, erit nunc $\frac{d\varphi}{dt}$ celeritas angularis $\varepsilon$, ideoque ſumto elemento temporis $dt$ conſtante, erit $dd\varphi = \frac{2Vfg\,dt^2}{\int rr\,dM}$.

### C O R O L L. 3.

411. Sin autem loco tempusculi $dt$ angulum elementarem $d\varphi$ interea confectum in calculum introducere velimus, ob $dt = \frac{d\varphi}{\varepsilon}$, habebimus

bebimus hanc formulam $udu = \frac{2Vfgd\phi}{\int rrdM}$, qua incrementum quadrati celeritatis angularis definitur.

### SCHOLION.

412. Quod si ergo ad quodvis tempus noverimus vires quibus corpus sollicitatur, quarum momentum elapso tempore $t$ sit $= Vf$, ope formulae inventae si integretur, totus motus gyratorius determinari poterit. Ubi quidem observandum est, si vel nullae affuerint vires, vel ae nullum praebeant momentum respectu axis gyrationis, motum futurum esse aequabilem, dum axis has vires totas sustineat. Mutatio scilicet motus tantum a momento virium pendet, eique adeo est proportionalis: Verum videamus etiam, quantas vires ipse axis sustineat, dum motus corporis a viribus quibuscunque perturbatur: quae investigatio ex iis, quae in capite praecedente sunt exposita, facile instituetur. Exempla autem talis motus gyratorii a viribus perturbati inferius afferemus, ubi corpora a gravitate animari assumemus.

### PROBLEMA 23.

413. Si corpus rigidum, dum circa axem fixum gyratur, a viribus quibuscunque sollicitetur, definire vires, quas axis in datis duobus punctis O et A sustineat, et quibus resistere debet, ne vacillet.

### SOLUTIO.

Ex praecedentibus perspicitur, axem triplicis generis vires sustinere, primo scilicet vires, quibus corpus actu sollicitatur, secundo vires aequales et contrarias viribus elementaribus idem momentum producentibus, ac tertio vires centrifugas ex motu gyratorio natas. Has ergo triplices vires ad data duo axis puncta O et A revocari oportet.

Fig. 44. Quod ergo ad vires corpus actu sollicitantes attinet, quaelibet earum, nisi ejus directio sit in plano ad axem normali, resolvatur in duas VQ et Vv, quarum illa VQ sit axi OA parallela, altera vero Vv in plano ad axem normali, axem in T secante. Iam ob vim VQ axis primo sustinet vim aequalem secundum suam longitudinem OA: praeterea vero in O et A vires Op et Aq ad axem normales in ipso plano OAQP, quarum illa Op versus PQ est directa, haec vero Aq inde aversa: ambae autem hae vires sunt aequales et $Op = Aq = \frac{VT}{OA}$ vis VQ. Deinde



Deinde vis Vv pro punctis O et A praebet vires Or et As ipsi parallelas, quae sunt

$$\text{vis } Or = \frac{AT}{OA}.\ \text{vis } Vv, \text{ et vis } As = \frac{OT}{OA}.\ \text{vis } Vv.$$

Hocque modo singulae vires, corpus sollicitantes ad axem ejusque terminos O et A reducantur.

Pro viribus secundi generis, quae elementaribus sunt contrariae §. 385. secuti, sumamus in O duas directrices OB et OC inter se et ad axem OA normales, quibus etiam in A parallelae constituantur AE et AF, et pro corporis elemento $dM$ in Z sito ponamus coordinatas $OX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$, ut sit ejus distantia ab axe $XZ = r = \surd(yy + zz)$. Porro sit omnium virium sollicitantium momentum $= Vf$ in sensum ZZ tendens. Fig. 45.

Hinc igitur vidimus, pro utroque termino O et A geminas oriri vires, scilicet posito intervallo $OA = a$ pro termino O

$$\text{vim secundum OB} = \frac{Vf\int(a-x)zdM}{a\int rrdM}$$

$$\text{vim secundum Oc} = \frac{Vf\int(a-x)ydM}{a\int rrdM},$$

at pro altero termino A

$$\text{vim secundum AE} = \frac{Vf\int xzdM}{a\int rrdM}$$

$$\text{vim secundum Af} = \frac{Vf\int xydM}{a\int rrdM}$$

ubi Oc et Af sunt rectae OC et OF in contrariam plagam productae.

Pro viribus tertii generis, ex ipso motu gyratorio natis, ante §. 402. vidimus, cujusmodi vires inde ad utrumque terminum O et A redundent. Scilicet si celeritas angularis sit $= u$, manentibus denominationibus modo adhibitis pro termino O habentur hae duae vires:

$$\text{vis secundum OB} = \frac{uu\int(a-x)ydM}{2ag}$$

$$\text{vis secundum OC} = \frac{uu\int(a-x)zdM}{2ag},$$

similique modo pro termino altero A

$$\text{vis secundum AE} = \frac{uu\int xydM}{2ag}$$

$$\text{vis secundum AF} = \frac{uu\int xzdM}{2ag}.$$



Coll.

Colligendis ergo omnibus his viribus pro utroque termino O et A habebuntur vires, quas axis in his punctis ſuſtinet.

COROLL. 1.

414. Quia vires tertii generis quadratum celeritatis angularis involvunt, eaedem manent, ſive $\vartheta$ ſit poſitiva ſive negativa, hoc eſt ſive a viribus ſollicitantibus acceleretur, ſive retardetur.

COROLL. 2.

415. Omnes vires utrumque axis terminum ſollicitantes, quotcunque fuerint, facile ad unam reduci poſſunt, ita ut uterque terminus ab unica tantum vi urgeatur; atque ad axem retinendum neceſſe eſt, ut in his terminis a viribus aequalibus et contrariis ſuſtentetur.

COROLL. 3.

416. Si planum AOB ita capiatur, ut per centrum inertiae corporis I tranſeat, erit $\int z\,dM = 0$, et $\int y\,dM = M.\,GI$ denotante M maſſam totius corporis; ex quo ſuperiores formulae aliquanto ſimpliciores evadent.

SCHOLION.

417. Fundamentum hujus ſolutionis in ſuperioribus jam abunde eſt explicatum, unde in ſingulis rationibus afferendis minus fui ſollicitus. Cum enim, ſi corpus a ſolis viribus elementaribus ſollicitetur, ab iis axis neutiquam afficiatur, ſed ſolas vires centrifugas patiatur; quando ab aliis viribus quibuscunque ſollicitatur, primo axis ab iis perinde afficietur, ac ſi corpus quieverit, ideoque eas ipſas vires ſuſtinebit, quas jam capite praecedente determinavimus. Praeterea vero ob vires centrifugas eas patietur vires, quas tertio genere hic ſumus complexi, ita ut hoc problema non diſcrepet a problemate 17, niſi quod hic vires tertii generis ſint ſuper addendae.

PROBLEMA. 24.

418. Si corpus rigidum, dum circa axem fixum gyratur, a viribus quibuscunque ſollicitetur, definire vires, quas totius corporis compages ſuſtinet.

SOLUTIO.

Quaeritur ergo, a quibusnam viribus corpus, ſi eſſet in quiete, ſollicitari deberet, ut ejus compages perinde afficeretur, atque in ſtatu motus,



motus, quem hic conſideramus. Primum ergo corpori eaedem vires ſunt applicandae, quibus actu ſollicitatur, atque adeo in iisdem punctis, quia hic cardo rei in locis, quibus quaeque vires ſunt applicatae, verſatur. Secundo ſingulis elementis corporis vires aequales et contrariae viribus elementaribus applicari debent. Scilicet ſi momentum omnium virium ad motum accelerandum fuerit $= Vf$, tum elemento $dM$ ad diſtantiam $= r$ ab axe remoto ſecundum directionem motui ejus contrariam applicata concipiatur vis $= \frac{Vfr\,dM}{\int rr\,dM}$. Tertio ſi celeritas angularis ſit $= \vartheta$, ob motum gyratorium elemento illi quoque applicata concipiatur vis $= \frac{\vartheta\vartheta r\,dM}{2g}$, qua directe ab axe avellatur. Quarto axi applicentur ipſae illae vires, quae ad ejus ſuſtentationem requiruntur, et quae in problemate praecedente ſunt aſſignatae. Cunctae jam illae vires corpori applicatae ſe mutuo in aequilibrio ſervabunt, et ſingulas ejus partes aeque ſollicitabunt, ac fit in motu propoſito. Hincque ergo concludi poterit, quam firmiter omnia corporis elementa inter ſe cohaerere debeant, ne ab illis viribus ulla diſſolutio aut laxatio producatur, ſed corpus figuram ſuam intemeratam conſervet.

COROLL. 1.

419. Si nexus partium debilior fuerit, quam ut actioni harum virium, quas modo definivimus, reſiſtere valeat, quoniam figura corporis revera mutationem patietur, id ratione motus non pro rigido erit habendum.

COROLL. 2.

420. Aſſumimus ergo conſtanter omnes corporis particulas tam arcte inter ſe eſſe connexas, ut vires memoratas ſine ulla relaxatione aut figurae mutatione ſuſtinere valeant.

SCHOLION.

421. Haec igitur ſunt capita praecipua, ad quae omnes quaeſtiones de motu gyratorio corporum rigidorum circa axem fixum a viribus quibuscunque perturbato reduci poſſunt: praeter ipſam enim motus accelerationem vel retardationem definivimus, quantas vires cum axis gyrationis tum ipſa corporis compages ſuſtineat. Formulae autem, quas pro his determinationibus invenimus, quasdam involvunt formulas integrales, ſcilicet $\int y\,dM$, $\int z\,dM$, $\int xy\,dM$, $\int xz\,dM$ et $\int rr\,dM$, quae



attent

autem non tanquam quantitates variabiles seu indefinitae sunt spectandae; sed haec integralia per totam corporis molem extensa sunt intelligenda, ita ut obtineant valores constantes ac determinatos ab indole ac forma cujusque corporis pendentes. Ac binarum quidem priorum valores ex situ centri inertiae definiri vidimus: reliquarum vero valores ex natura corporis per notas integrationis regulas erui debent. Postrema autem imprimis est notatu digna, cum sola in accelerationem vel retardationem ingrediatur, dum reliquae tantum in expressionibus, quae vires ab axe sustentatas indicant, insunt. Cum igitur hic quaestio de ipsa motus perturbatione sit praecipua, operae pretium erit, valores formulae $\int rrdM$ pro variis corporum generibus evolvere, ac praecepta tradere, unde illi quovis casu facilius colligi queant: meretur autem haec formula utique, ut ei nomen singulare *momenti inertiae* imponamus, cujus investigationi caput sequens destinamus.

# CAPUT V.

## DE MOMENTO INERTIAE.

### DEFINITIO. 7.

422. **M**omentum *inertiae* corporis respectu cujuspiam axis est summa omnium productorum, quae oriuntur, si singula corporis elementa per quadrata distantiarum suarum ab axe multiplicentur.

### COROLL. 1.

423. Quoniam tam elementa corporis, quam quadrata distantiarum semper sunt positiva, omnia haec producta positiva sint necesse est: hinc aucta corporis massa certe ejus momentum inertiae augetur.

### COROLL. 2.

424. Momentum ergo inertiae spectari potest tanquam productum ex massa corporis in quadratum cujuspiam lineae: ita si massa corporis fuerit $= M$, ejus momentum respectu cujusvis axis habebit hujusmodi formam $Mkk$.

### COROLL. 3.

425. Invento ergo momento inertiae corporis respectu axis, circa quem id ante gyrari assumsimus, idque fuerit $= Mkk$, in formulis supra inventis loco expressionis $\int rrdM$ scribi conveniet $Mkk$. Ita si momentum virium sollicitantium sit $Vf$, et celeritas angularis $= \varepsilon$, erit $d\varepsilon = \frac{2Vfgdt}{Mkk}$.



### EXPLICATIO.

426. Ratio hujus denominationis ex similitudine motus progressivi est desumta: quemadmodum enim in motu progressivo, si a vi secundum suam directionem sollicitante acceleretur, est incrementum celeritatis ut vis sollicitans divisa per massam seu inertiam; ita in motu gyratorio, quoniam loco ipsius vis sollicitantis ejus momentum considerari oportet, eam expressionem $\int rrdM$, quae loco inertiae in calculum ingreditur, *momentum inertiae* appellemus, ut incrementum celeritatis angularis simili modo proportionale fiat momento vis sollicitantis diviso per momentum inertiae. Quae similitudo eo est perfectior, quod utrinque per elementum temporis $dt$ et duplam lineam $2g$ multiplicari oportet, ut ipsum celeritatis incrementum exprimatur.

### SCHOLION.

427. Cum idem corpus ad infinitos axes referri possit, respectu cujuslibet peculiare habebit momentum inertiae, ex quo momentum inertiae absolute definiri nequit, nisi ad determinatum axem referatur. Interim tamen non semper opus est, si ejusdem corporis momentum inertiae successive respectu plurium axium investigari debeat, ut calculus de novo ex formula $\int rrdM$ evolvatur: sed saepe evenit, ut cum momentum inertiae respectu unius axis invenerimus, ex eo facile momenta inertiae ejusdem corporis respectu infinitorum aliorum axium colligere queamus. Haec autem commoditas imprimis locum habet, quando axes fuerint paralleli, ita ut cognito momento inertiae pro uno axe, ex eo facile momentum inertiae pro quovis alio axe illi parallelo assignari possit, id quod sequente problemate ostendamus.

### PROBLEMA. 25.

428. Dato corporis cujusdam momento inertiae respectu axis OA, invenire ejusdem corporis momentum inertiae respectu alius axis $oa$ illi paralleli. Fig. 46.

### SOLUTIO.

Sit $Oo = c$ distantia horum axium, in quorum plano accipiatur directrix OB ad OA normalis, et tertia OC ad utramque perpendicularis. Conside-

Consideretur corporis, cujus tota massa $= M$, elementum quodvis $dM$ in Z, unde ad planum AOB demisso perpendiculo ZY et ex Y ducta ad OA normaliter YX, quae producta alteri axi $oa$ occurrat in $x$: ponanturque pro axe dato OA coordinatae $OX = x$; $XY = y$ et $YZ = z$. Quoniam igitur respectu hujus axis OA momentum inertiae datur, sit id $= Mkk$, eritque $\int(yy + zz)\,dM = Mkk$. Iam pro novo axe $oa$, ob $ox = x$, $xY = c + y$ et $YZ = z$, erit momentum inertiae $= \int((c+y)^2 + zz)\,dM = \int ccdM + 2\int cydM + \int(yy + zz)\,dM$. Cum igitur sit $\int(yy + zz)\,dM = Mkk$, et $\int ccdM = Mcc$, pro menbro $2\int cydM = 2c\int ydM$ consideretur centrum inertiae corporis, quod sit in I, unde ad planum axium demittatur perpendiculum IK, et ex K ad axes normalis $KGg$, eritque $\int ydM = M.GK$. Hinc erit momentum inertiae respectu axis $oa = Mkk + Mcc + 2Mc.GK$, quod ob $Gg = c$, et $cc + 2c.GK = gK^2 - GK^2$, ita exprimetur, ut sit

$$Mkk + M.gK^2 - M.GK^2,$$

sicque cognito momento inertiae respectu axis OA, quod est $= Mkk$, facile invenitur momentum inertiae respectu alius cujusque axis $oa$ illi paralleli.

### COROLL. 1.

429. Si axis $oa$ longius distat a centro inertiae I, quam axis OA, momentum inertiae respectu axis $oa$ majus est, quam respectu axis OA. Est enim momentum inertiae respectu axis $oa = Mkk + M.gI^2 - M.GI^2$.

### COROLL. 2.

430. Si igitur infiniti axes inter se paralleli concipiantur, momentum inertiae erit minimum respectu ejus axis, qui per ipsum centrum inertiae ducitur. Scilicet si centrum inertiae esset in G, axisque OA per id transiret, cujus respectu momentum inertiae fuerit $= Mkk$, erit respectu axis $oa$ momentum inertiae $= Mkk + M.Gg^2$.

### COROLL. 3.

431. Si igitur detur momentum inertiae $Mkk$ respectu cujuspiam axis per centrum inertiae corporis transeuntis, momentum inertiae respectu alius cujusvis axis illi paralleli superat illud producto ex massa in quadratum distantiae hujus axis a centro inertiae.

### SCHOLION.

432. Hinc investigatio momentorum inertiae pro quovis corpore restringitur tantum ad axes per ejus centrum inertiae ductos, quorum respe-



respectu si explorata fuerint momenta inertiae, inde pro aliis quibuscunque axibus momenta inertiae facile colliguntur. Atque haec proprietas centri inertiae, quod momenta inertiae respectu axium per id transeuntium sint minima, inter omnia respectu aliorum axium parallelorum sumta, omnino est memorabilis, cum etiam pro motu gyratorio insignem hujus centri praestantiam declaret. Verum per centrum inertiae innumerabiles axes ducere licet, quorum respectu momenta inertiae vehementer inter se discrepare possunt, neque patet, quomodo ex datis aliquibus reliqua definiri queant. Interim tamen, quoniam eorum nullum vel evanescere vel in infinitum excrescere potest, inter ea tam maximum detur quam minimum necesse est, quae investigatio omnino digna videtur, ut diligentius suscipiatur. Sed quo ea facilius succedat, conveniet in genere momentum inertiae respectu axis cujuscunque per centrum inertiae ducti calculo exprimi.

### PROBLEMA. 26.

433. Si natura corporis exprimatur aequatione inter ternas coordinatas, invenire ejus momentum inertiae respectu axis cujuscunque per centrum inertiae ducti.

### SOLUTIO.

Sit I centrum inertiae corporis, in quo simul concursus ternarum directricium IA, IB, IC inter se normalium constituatur, quibus pro elemento corporis quocunque $dM$ in Z sito coordinatae parallelae sint $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$; unde si qua directricium pro axe sumeretur, ejus respectu momentum inertiae facile assignaretur. Verum id definiendum sit respectu axis cujuscunque IG, per quem planum ad AIB normale ductum hoc secet in recta IF, ac ponatur angulus $AIF = \eta$ et angulus $FIG = \theta$; quaestio ergo huc redit, ut punctum Z per alias ternas coordinatas exprimatur, quarum una sit in ipso axe IG sumta. Mutemus ternas directrices primo ita, ut una sit IF, manente IC, dum tertia ad has sit normalis, et ducta YX' ad IF normali erunt ternae coordinatae, quas sint $x'$, $y'$, $z'$, Fig. 47.

$IX' = x' = x\cos\eta + y\sin\eta$; $X'Y = y' = y\cos\eta - x\sin\eta$; et $YZ = z' = z$.

simili modo hinc transitus fiat ad novas ternas coordinatas $x''$, $y''$, $z''$, quarum $x''$ in axe IG capiatur eritque

$$x'' = x'\cos\theta + z'\sin\theta;\; z'' = z'\cos\theta - x'\sin\theta;\; y'' = y'$$

unde valoribus substitutis habebitur