E 287

DE MOTV VIBRATORIO CORDARVM INAEQVALITER CRASSARVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quae primum a *Tayloro* circa casum vibrationum singularem, tum vero generaliter a Cel. *Alemberto* et a me sunt inuestigata, ad cordas per totam longitudinem aequaliter crassas restringuntur, ex quo etiam regulae, pro formatione soni inde petitae, vltra hoc cordarum genus extendi non possunt. Ita regula inuenta, quod tempus cuiusque vibrationis cordae, cuius longitudo $= a$, pondus $= M$, et vis tendens cordam $= F$, sit $= \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ minutorum secundorum, denotante g altitudinem, ex qua graue vno minuto secundo libere delabitur, non nisi pro cordis vniformiter crassis habet locum; quin etiam in his tantum cordis vsu venire potest, vt eadem corda vel duplo, vel triplo, vel quadruplo, plures edat vibrationes, quam haec regula continet. Denique etiam insigne illud phaenomenon, quo eadem corda subinde plures huiusmodi sonos, rationem numerorum 1, 2, 3, 4 etc. sequentes, simul edere obseruatur, cuius causam Vir Celeb. *Daniel Bernoulli* felicissime nuper explicauit, in aliis cordis, nisi quae sint aequabiliter crassae, haud deprehenditur.

2.

2. Quando autem cordae non ſunt aequabiliter craſſae, atque in aliis corporum vibrantium generibus etiamſi ſimili modo vſu venire poteſt, vt idem corpus plures ſonos ſimul edat, hi tamen ſoni vtcunque a ratione numerorum 1, 2, 3, 4 etc. diſcrepare poſſunt. Ex quo intelligere licet, quam infirmo nitatur fundamento principium illud, cui ſummus in arte muſica artifex *de Rameau* vniuerſam harmoniam ſuperſtruendam arbitratur. Ideo ſcilicet diuerſos ſonos ad harmoniam compoſitos eſſe putat, quod iidem ſoni ab eadem corda vibrante ſimul producantur. Verum praeterquam iam pridem firmiſſimis rationibus eſt demonſtratum, principium harmoniae in ſimplicitate rationum, quas numeri vibrationum eodem tempore editarum inter ſe tenent, vnice eſſe quaerendum; haec opinio etiam per cordas inaequaliter craſſas, quae ſonos vtcunque diſſonos ſimul edere poſſunt, funditus euertitur.

3. Ne igitur talibus phaenomenis, quae cordis vniformiter craſſis ſunt propria, nimium tribuatur, haud abs re fore arbitror, ſi cordarum etiam inaequaliter craſſarum motum, quantum quidem Analyſeos fines permittunt, examini ſubiecero, eiusque inueſtigationem latiſſime complexam inſtituero. Maxime autem ardua eſt haec quaeſtio, atque grauiſſimis difficultatibus inuoluta; hancque ob cauſam etiamſi in eius enodatione parum profecero, tamen ampliſſimus nobis aperietur campus, vires noſtras in analyſi exercendi, huiusque ſcientiae limites vlterius dilatandi. Hic igitur non tam ipſius quaeſtionis, quam tractandam ſuſcipio, vtilitas eſt ſpectanda, etiamſi forte non parum

parum doctrinam de vibrationibus cordarum sit illustratura, quam opportuna occasio nonnulla insignia momenta, per totam Analysin vberrimum fructum pollicentia, accuratius perpendendi. Huiusmodi autem inuestigationibus, quae per se leuis momenti videantur, praeclarissima inuenta, quibus Analysis adhuc est ditata, plerumque debemus.

4. Quo igitur facilius massam seu pondus cordae ratione inaequalis crassitiei in calculum introducere queamus, sumamus cylindri, ex pari materia confecti, cuius basis diameter sit $=b$, et altitudo $=b$, massam seu pondus esse $=M$: hinc enim cuiusque cylindri elementaris in corda concipiendi, cuius diameter est $=z$, et altitudo $=dx$, pondus erit $=\frac{Mzzdx}{bbb}$. Cordam enim tanquam rotundam, seu quasi tornatam, spectare licet, vt sit ex infinitis huiusmodi cylindrulis elementaribus composita. Praeterea vero hic cordam perfecte flexilem pono, omnique rigore, siue elatere, penitus destitutam, vt inflexioni, quam inter vibrandum patitur, nullo modo obluctetur. Denique etiam, vti in cordis aequabilis crassitiei est factum, ipsas vibrationes quasi infinite paruas spectabo, ita vt excursiones vtrinque a situ naturali recedentes prae longitudine cordae pro nihilo haberi queant. Hoc modo longitudo cordae manebit inuariata, calculoque hoc commodi assequemur, vt elementa curuae ab elementis axis non discrepent.

Tab. II. Fig. 1. 5. Sit igitur AB huiusmodi corda inaequabilis crassitiei, in punctis A et C fixa, et tensa a vi quacunque, quam exponamus pondere $=F$. Statuamus totam

totam cordae longitudinem $AB = a$, quae, dum eſt in quiete, vtique ſitum rectilineum APB tenebit; abſciſſa autem a puncto A portione quacunque $AP = x$, ſit diameter craſſitiei eius in puncto $P = z$, et, quia quaeſtionem generatim complectitur, erit z functio quaecunque ipſius x, et quidem functio cognita, ſiquidem variationem craſſitiei tanquam cognitam ſpectemus. Sumto ergo longitudinis elemento $Pp = dx$, erit maſſa ſeu pondus huius elementi cordae $Pp = \frac{Mzzdx}{bbb}$. In genere ergo problema, cuius ſolutionem aggredior, ita ſe habet:

Si haec corda a ſtatu naturali recto APB *in figuram quamcunque fuerit depulſa, ita tamen vt eius elongationes a recta* AB *pro axe aſſumtae ſint quam minimae, atque corda de hoc ſitu violento ſubito dimittatur, definire motum vibratorium, quem eſt receptura:*

Proponitur ergo in hoc problemate figura quaecunque, quae cordae initio fuerit tributa, quaeſtioque huc redit, vt ad quoduis tempus, a momento relaxationis elapſum, ſtatus cordae definiatur.

6. Ponamus ergo, ab iſto momento iam elapſum eſſe tempus $= t$, atque nunc cordam conſecutam eſſe figuram AMB, cuius termini quidem A et B cum ſtatu naturali conueniant, punctum autem P cordae iam in M eſſe translatum, vocemusque hanc applicatam $BM = y$, quae erit quantitas non ſolum ab abſciſſa $AP = x$, ſed inſuper etiam a tempore t pendens, ſeu erit functio quaedam ipſius x et ipſius t ſimul, in cuius functionis inueſtigatione tota problematis

 ſolu-

solutio versabitur. Iam autem quasdam primarias proprietates huius functionis ipsa quaestionis natura suppeditat, quarum prima est, vt, si ponatur $x = o$, ista functio y semper euanescat, quicunque valor tempori t tribuatur; deinde vero idem euenire debet in altero puncto fixo B, si ponatur $x = AB = a$. Tertio, si tempus t statuatur euanescens, functio y ita debet esse comparata, vt figuram cordae primitus impressam referat. Quarto vero, etiam posito $t = o$, motus cordae omnino euanescere debet, quod eueniet, si ratio differentialis $\frac{dy}{dt}$, dum abscissa x vt constans tractatur, in nihilum abeat.

7. Dum enim in his excursionibus minimis longitudo cordae non mutari assumitur, longitudo AM aequalis censenda est longitudini $AP = x$, vnde durante motu punctum M secundum ipsam applicatam MP mouebitur, neque extra eam vsquam diuagabitur. Quare, si ponamus $dy = p\,dx + q\,dt$, punctum M tempusculo dt per spatiolum $q\,dx$ feretur, cuius motus propterea celeritas, a recta AB secundum directionem PM recedens, erit $= \frac{q\,dt}{dt} = q$. Vtar autem hic signandi modo iam aliquoties exposito, et pro q scribam $(\frac{dy}{dt})$, vti similiter haec scriptio $(\frac{dy}{dx})$ valorem ipsius p exprimit. Vlterius autem istum signandi modum hic extendi conueniet, ita vt, quia $p = (\frac{dy}{dx})$ et $q = (\frac{dy}{dt})$ posuimus, haec formula $(\frac{ddy}{dx^2})$ idem significet, quod $(\frac{dp}{dx})$, et $(\frac{ddy}{dx\,dt})$ idem, quod $(\frac{dp}{dt})$; tum vero $(\frac{ddy}{dt^2})$ idem, quod $(\frac{dq}{dt})$, et $(\frac{ddy}{dt\,dx})$ idem, quod $(\frac{dq}{dx})$. Cum autem ex

natura

natura differentiationis fit $\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(\frac{dp}{dt}\right)$, manifestum est, hoc signandi modo fore $\left(\frac{ddy}{dt\,dx}\right) = \left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$; quae scriptionis similitudo valoris vtriusque aequalitatem commodissime declarat.

8. Dum autem corda in situ AMB versatur, singula eius elementa in motu suo vel accelerabuntur, vel retardabuntur, quae motus mutatio a vi cordam tendente F oritur, indeque est definienda. Hanc vero vim, a tensione resultantem, ex figura AMB, quam corda nunc tenet, determinari oportet, quo in negotio, quamdiu eandem cordae figuram AMB contemplamur, tempus t tanquam quantitatem constantem tractari conueniet, vnde in calculum hic tantum formulae $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ et $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ ingredientur, exclusis reliquis, variabilitatem temporis t inuoluentibus. At quia corda a situ naturali quam minime distat, tensio cordae in singulis elementis immutata manebit, eritque adhuc $= E$, vnde punctum M, seu potius elementum Mm, tam a portione antecedente MA, quam a sequente mB, vim $= F$ sustinebit, quarum virium directio tangentium in punctis M et m ducendarum directionem sequetur.

9. Resoluantur ergo hae vires more solito, atque hinc, ex vi F secundum tangentem in M antrorsum vrgente, nascetur vis secundum directionem MP sollicitans $= F\left(\frac{dy}{dx}\right)$, quia elementum curuae ipsi elemento abscissae dx aequale reputatur. Verum ex vi F secundum tangentem in m retrorsum vrgente nascetur vis secundum directionem contrariam PM sollicitans $= F\left(\frac{dy}{dx}\right) + F\,d.\left(\frac{dy}{dx}\right)$, in qua postrema differen-

tiatione tempus t adhuc vt constans spectatur: erit ergo $d.\left(\frac{dy}{dx}\right) = d.p = dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$ ideoque $d.\left(\frac{dy}{dx}\right) = dx\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. Ex his ergo duabus viribus resultat vis elementum cordae Mm ab axe AB secundum directionem PM remouens $= \mathrm{F}dx\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, si quidem haec expressio haberet valorem positiuum; quia autem semper valorem negatiuum sortitur, haec vis perpetuo cordam ad situm naturalem AB impellit, vti ex motus natura per se est manifestum. Vi ergo motrice, cuius actioni singula cordae elementa sunt subiecta, inuenta, facile erit ipsam motus mutationem elicere, vnde totus cordae motus subsecuturus sponte innotescet.

10. Inuenta ergo vis motrix $\mathrm{F}dx\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ diuidatur per massam mouendam $\frac{\mathrm{M}zzdx}{bbb}$, vt obtineatur acceleratio $= \frac{\mathrm{F}bbb}{\mathrm{M}zz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. Cum iam celeritas puncti M sit $= \left(\frac{dy}{dt}\right)$, inde acceleratio secundum directionem PM quoque definitur per $2\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, secundum eas motus leges, quas alias stabiliui, vbi celeritas per altitudinem ipsi debitam, tempus vero per spatium ad celeritatem applicatum mensuratur. Quod si autem tempus potius in minutis secundis exprimere velimus, introducta altitudine g, ex qua graue vno minuto secundo libere descendit, loco litterae t postremam formulam afficientis scribi oportet $2t\sqrt{g}$, ideoque $4g\,dt^2$ loco dt^2, ex quo acceleratio erit $= \frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, ac littera t iam numerum absolutum denotat, indicantem, quot minuta secunda a motus initio iam sint praeterlapsa. Gemina ergo accelerationis formula sequentem praebebit aequationem:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{\mathrm{F}bbb}{\mathrm{M}zz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) \text{ seu } \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2\mathrm{F}bbbg}{\mathrm{M}zz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$$

quae

quae totum motum, quo corda ciebitur, in se complectitur.

11. Hic primum obseruandum est, quantitatem z esse functionem ipsius x tantum, atque ex data cordae crassitie inaequabili definiri; hac ergo functione, tanquam cognita spectata, quaestio mechanica ad hanc quaestionem mere analyticam est reuocata; qua quaeritur, qualis functio binarum variabilium x et t pro y substitui debeat, vt conditiones in hac aequatione $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fbbbg}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ contentae adimpleantur; siue vt haec analogia locum habeat:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) : \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = 2Fbbbg : Mzz.$$

Facile autem perspicitur, huic conditioni infinitis modis satisfieri posse, ex quibus deinceps eos eligi oportet, qui simul proprietatibus ante commemoratis sint praediti; scilicet vt semper prodeat $y=0$, siue ponatur $x=0$, siue $x=a$, quemcunque valorem tempus t obtinuerit. Deinde vt, posito tempore $t=0$, aequatio inter x et y eam ipsam curuam sit exhibitura, quae primum cordae fuerit inducta. Tum vero, vt, posito $t=0$, valor quantitatis $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ euanescat pro qualibet abscissa x.

12. Vt igitur solutio has cunctas determinationes suscipere possit, facile intelligitur, aequationem inventam $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fbbbg}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ generalissime construi oportere, ita vt pro y expressio generalissima eliciatur, in qua omnes omnino valores, huic aequationi satisfacientes, sint contentae; cuiusmodi solutionem dedi pro casu cordarum aequabiliter crassarum, quo cordae

 diame-

diameter z erit conſtans $= b$, totusque ideo coefficiens $\frac{2F\,bbbg}{Mzz}$ quantitati conſtanti aequalis. Oſtendi enim pro hoc caſu, ſi breuitatis gratia ponatur $\frac{2F\,bbbg}{Mzz} = cc$, huic aequationi $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ generaliſſime ſatisfieri per hanc formam $y = \Phi(x + ct) + \psi(x - ct)$, vbi Φ et ψ ſunt ſigna, functiones quascunque quantitatum $x + ct$ et $x - ct$ indicantia. Pro noſtro ergo caſu cordarum inaequaliter craſſarum ſimilis forma generaliſſima deſideratur, quae pari modo aequationem differentio-differentialem $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2F\,bbbg}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ exhauriat; huiusmodi autem ſolutionem ob defectum analyſeos vix ſperare licet.

13. Quodſi tantum functionem particularem eruerimus, quae loco y ſubſtituta, aequationi ſatisfaciat $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2F\,bbbg}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, ea ſpeciem quandam vibrationum, quarum corda erit capax, definiet, ſiquidem ea functio ita fuerit comparata, vt, ſiue ponatur $x = 0$, ſiue $x = a$, valor ipſius y prodeat euaneſcens, quantumcunque tempus t iam fuerit elapſum. Ac ſi haec conditio locum habeat, patebit, cuiusmodi figura cordae primitus tribui debeat, vt ad hunc motum ſit accommodata. Tales igitur ſolutiones particulares vſu non carebunt, cum ſemper certam quandam ſpeciem vibrationum nobis declarent, quae ſub certis conditionibus in motu cordae locum habere queant; etiamſi ſolutio problematis, in genere propoſiti, quo figura cordae initialis eſt praeſcripta, adhuc maneat abſcondita. Ob defectum ergo ſolutionis generalis in huiusmodi ſolutionibus particularibus acquieſcere debebimus, quemadmodum etiam pro

caſu

casu vniformiter crassarum solutio *Taylori*, etsi fuerat particularis, non parum motum huiusmodi cordarum illustrauit, ac tandem etiam ad solutionem generalem perduxit.

14. Multo minus igitur pro casu cordarum inaequaliter vtcunque crassarum, solutionem completam antequam plures solutiones particulares sedulo euoluerimus. Ac primum quidem animaduerto, statim ac duae pluresue solutiones particulares fuerint inuentae, ex iis facillime infinitas alias per compositionem erui posse. Si enim P, Q, R sint eiusmodi functiones quantitatum x et t, quarum quaelibet loco y substituta aequationi inuentae satisfaciat, tum quaeuis harum aequationum $y = P$, $y = Q$, $y = R$ certam quandam speciem vibrationum exprimet, quarum cuique certus quidam sonus conueniet. Iam vero manifestum est, si singulae aequationes istae seorsim quaesito satisfaciant, tum etiam aequationem ex illis vtcunque compositam $y = \alpha P + \beta Q + \gamma R$ quaesito aeque esse satisfacturam; vnde hoc nanciscimur eximium Theorema Physico-Musicum, a Celeb. *Bernoullio* prolatum, quod quos sonos corda seorsim edere valeat, eosdem quoque simul edere possit.

15. Ponamus breuitatis gratia $\frac{2Fbbbg}{Mzz} = ss$, vt ss denotet functionem datam abscissae x, et cardo quaestionis in hac aequatione $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = ss\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ resoluenda versabitur, cuius quidem constructionem generalem, si ss esset quantitas constans, iam nouimus contentam fore in hac formula:

$$y = \Phi(x + st) + \Psi(x - st)$$

ve-

verum quia s eſt quantitas variabilis, haec formula non amplius conditioni praeſcriptae ſatisfacit. Operae pretium igitur erit, inueſtigare, quibusnam caſibus ſimiles formulae generales locum habere queant; hunc in finem fingamus huiusmodi valorem

$$y = v\,\Phi u,$$

vbi v et u ſint functiones quaecunque ipſarum t et x, etiamſi prior v ſine detrimento amplitudinis tanquam functio ſolius x ſpectari poſſit. Vtar autem in differentiatione his ſignis:

$$d.\,\Phi u = du.\,\Phi' u \text{ et } d.\,\Phi' u = du.\,\Phi'' u.$$

16. Cum igitur differentiando ſit

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right)\Phi u + v\left(\frac{du}{dt}\right)\Phi' u \text{ et}$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right)\Phi u + v\left(\frac{du}{dx}\right)\Phi' u, \text{ erit}$$
$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dt^2}\right)\Phi u + 2\left(\frac{dv}{dt}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)\Phi' u + v\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)\Phi' u + v\left(\frac{du}{dt}\right)^2\Phi'' u$$
$$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dx^2}\right)\Phi u + 2\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)\Phi' u + v\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)\Phi' u + v\left(\frac{du}{dx}\right)^2\Phi'' u$$

atque, his valoribus ſubſtitutis, in aequatione $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = ss\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ membra, quodlibet functionis genus continentia, ſeorſim aequentur, vnde ſequentes aequationes obtinebuntur:

I. $\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = ss\left(\frac{ddv}{dx^2}\right)$

II. $2\left(\frac{dv}{dt}\right)\left(\frac{du}{dt}\right) + v\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = 2ss\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) + ssv\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)$

III. $v\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = ssv\left(\frac{du}{dx}\right)^2$

quarum poſtrema ſtatim praebet $\left(\frac{du}{dt}\right) = \pm s\left(\frac{du}{dx}\right)$, cui ſatisfit ponendo $u = t \pm \int \frac{dx}{s}$. Satisfaceret quidem etiam functio quaecunque formulae $t \pm \int \frac{dx}{s}$; ſed hinc amplitudo formulae aſſumtae Φu non extenderetur.

17.

17. Ponamus ergo $u = t \pm \int \frac{dx}{s}$, quae formula est determinata ob s functionem ipsius x tantum, eritque $\left(\frac{du}{dt}\right) = 1$, et $\left(\frac{du}{dx}\right) = \pm \frac{1}{s}$, porroque $\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = 0$, et $\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) = \pm \frac{ds}{ss\,dx}$; qui valores in secunda aequatione substituti praebent:

$$2\left(\frac{dv}{dt}\right) = \pm 2s\left(\frac{dv}{dx}\right) \mp \frac{v\,ds}{dx}$$

seu $\left(\frac{dv}{dt}\right) = \pm s\left(\frac{dv}{dx}\right) \mp \frac{v\,ds}{2dx}$

Hinc vlterius more nostro differentiando consequimur:

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \pm s\left(\frac{ddv}{dx\,dt}\right) \mp \frac{ds}{2dx}\left(\frac{dv}{dt}\right) \text{ et}$$

$$\left(\frac{ddv}{dt\,dx}\right) = \pm \frac{ds}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) \pm s\left(\frac{ddv}{dx^2}\right) \mp \frac{ds}{2dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) \mp \frac{v\,dds}{2dx^2}$$

vnde fiet:

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = + \frac{s\,ds}{2dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) + ss\left(\frac{ddv}{dx^2}\right) - \frac{sv\,dds}{2dx^2} - \frac{s\,ds}{2dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{v\,ds^2}{4dx^2},$$

qui valor, cum per primam aequationem aequalis esse debeat ipsi $ss\left(\frac{ddv}{dx^2}\right)$, orietur:

$$-\frac{sv\,dds}{2dx^2} + \frac{v\,ds^2}{4dx^2} = 0, \text{ seu } 2s\,dds = ds^2,$$

cuius integrale primum est $\frac{\alpha\,ds^2}{dx^2} = s$, porroque $x = \beta + 2\sqrt{\alpha s}$, sicque obtinebimus $s = \frac{(k+nx)^2}{f}$.

18. En ergo casum eximium, pro quo solutionem generalem exhibere poterimus, qui toties locum habet, quoties diameter crassitiei cordae z ita pendeat ab abscissa x, vt sit $s = \frac{(k+nx)^2}{f}$; seu quando fuerit $\frac{2Fbbbg}{Mzz} = \frac{(k+nx)^4}{ff}$, ideoque ipse diameter crassitiei cordae $z = \frac{bf\sqrt{bg}}{(k+nx)^2}\sqrt{\frac{2F}{M}}$. Cum autem iam sit $s = \frac{(k+nx)^2}{f}$, erit $u = t + \frac{f}{n(k+nx)} + m$; et ob $\frac{ds}{dx} = \frac{2n(k+nx)}{f}$, pro valore v habebimus:

$$2\left(\frac{dv}{dt}\right) = \pm \frac{2(k+nx)^2}{f}\left(\frac{dv}{dx}\right) \mp \frac{2n(k+nx)}{f}\,v$$

Ponamus ergo, v tantum ab x pendere, vt ſit $\left(\frac{dv}{dt}\right) = 0$, eſſeque oportet $(k + nx)dv = uvdx$, ſeu $v = \alpha(k + nx)$. Quare cum pro u duplicem valorem elicuerimus, et vtriusque functionem quamcunque capere liceat, exinde obtinebitur pro y ſequens valor generalis:

$$y = (k + nx)\Phi\left(t + \alpha + \frac{f}{n(k + nx)}\right) + (k + nx)\Psi\left(t + \beta - \frac{f}{n(k + nx)}\right)$$

19. Quo hunc caſum facilius applicare queamus, ponamus, diametrum craſſitiei cordae in A eſſe $= b$, in alio autem quocunque loco P eſſe $z = \frac{b}{\left(1 + \frac{nx}{a}\right)^2}$ $= \frac{aab}{(a + nx)^2}$, ita vt in altero termino B diameter cordae futurus ſit $z = \frac{b}{(1 + n)^2}$, vbi n vel numerum poſitiuum quemcunque, vel fractionem quamcunque vnitate minorem negatiuam aſſumere licet. Quodſi iam haec forma comparetur cum praecedente $z = \frac{bf\sqrt{bg}}{(k + nx)^2} \sqrt{\frac{2F}{M}}$, habebimus $k = a$ et $f = \frac{aa}{\sqrt{bb}} \sqrt{\frac{M}{2F}} = \frac{a\sqrt{N}}{\sqrt{2Fbg}}$. In Formula autem ante inuenta ponamus $\alpha = -\frac{f}{nk}$, et $\beta = \frac{f}{nk}$, quod ſine detrimento vniuerſalitatis fieri poteſt, ſicque obtinebimus pro motu cordae determinando ſequentem aequationem generalem:

$$y = (a + nx)\Phi\left(t + \frac{ax\sqrt{M}}{(a + nx)\sqrt{2Fbg}}\right) + (a + nx)\Psi\left(t - \frac{ax\sqrt{M}}{(a + nx)\sqrt{2Fbg}}\right)$$

quam etiam hoc modo exprimere licet:

$$y = (a + nx)\Phi\left(\frac{ax}{a + nx} + t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right) + (a + nx)\Psi\left(\frac{ax}{a + nx} - t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right),$$

20. In hac expreſſione itaque M denotat pondus cordae, aequaliter craſſae, longitudinis $= b$, cuius craſſities aequalis eſt ei, quam noſtra corda habet in termino A; at F denotat vim, qua corda eſt tenſa; Φ autem

autem et Ψ ſunt ſigna, quibus functiones quaecunque indicantur. Has igitur ita comparatas eſſe oportet, vt, ſiue ponatur $x=0$, ſiue $x=a$, valor ipſius y ſemper euaneſcat; vnde fit:

$$\text{I.}\quad \Phi\left(t\sqrt{\tfrac{2Fbg}{M}}\right)+\Psi\left(-t\sqrt{\tfrac{2Fbg}{M}}\right)=0$$

$$\text{II.}\quad \Phi\left(\tfrac{a}{1+n}+t\sqrt{\tfrac{2Fbg}{M}}\right)+\Psi\left(\tfrac{a}{1+n}-t\sqrt{\tfrac{2Fbg}{M}}\right)=0$$

Cum deinde, poſito $t=0$, eſſe debeat $\left(\frac{dy}{dt}\right)=0$, quidquid ſit x, neceſſe eſt, vt ſit:

$$\text{III.}\quad \Phi'\left(\tfrac{ax}{a+nx}\right)-\Psi'\left(\tfrac{ax}{a+nx}\right)=0$$

vnde patet, ſigna Φ' et Ψ', ideoque et Φ et Ψ, ſimiles functiones denotare debere.

21. Cum igitur functio Ψ ſimilis eſſe debeat functioni Φ, haec porro eius naturae eſſe debet, vt ſit

tam $\Phi u+\Phi(-u)=0$, quam

$$\Phi\left(\tfrac{a}{1+n}+u\right)+\Phi\left(\tfrac{a}{1+n}-u\right)=0;$$

vnde, cum omnis functio per lineam curuam repraeſentari poſſit, cuius applicatae exhibeant iſtas functiones abſciſſis reſpondentes, manifeſtum eſt, pro noſtro caſu eiusmodi requiri lineam curuam, quae circa initium abſciſſarum habeat ramos alternatim aequales, ita vt, poſita abſciſſa negatiua, applicata quoque prodeat negatiua; tum vero, ſumto in axe interuallo $=\frac{a}{1+n}$, vt circa hoc punctum iterum dentur rami vtrinque alternatim aequales, ita vt, ſi alter ſupra axem extendatur, alter infra axem iaceat. Quoniam igitur huiusmodi puncta, circa quae exiſtunt rami alternatim aequales, centra lineae curuae appellare licet, patet, tam initium abſciſſa-

abſciſſarum ipſum, quam aliud punctum in axe, inde interuallo $\frac{a}{1+n}$ remotum, centri natura praedita eſſe oportere. Hinc autem ſequitur, infinita alia quoque dari centra in axe ſita, quae a ſe inuicem interuallo $\frac{a}{1+n}$ ſint remota.

Tab. II. Fig. 2. 22. Haec igitur curua, quam determinatricem motus vocabo, ita erit formata, vti in figura 2 repraeſentatur. Erit ſcilicet anguiformis, infinitos habens plexus βa, ab, $b\alpha$ inter ſe ſimiles et aequales, ita vt circa puncta β, a, b, α rami alternatim ſint aequales, atque horum punctorum interualla ſint $ab = \beta a = b\alpha = \frac{a}{1+n}$. Si iam horum punctorum quodpiam a pro abſciſſarum initio aſſumatur, capiaturque abſciſſa quaecunque $aq = u$, erit applicata $qn = \Phi u$, ſeu exhibebit eiusmodi functionem ipſius u, qualis ad motus determinationem requiritur. Quaecunque ergo curua huius formae fuerit deſcripta, ea ſemper ſpeciem quandam motus vibratorii, quem corda ſuſcipere poteſt, definiet, et cum innumerabiles curuae huius formae diuerſae deſcribi queant, innumerabiles quoque motus vibratorii ſpecies inde determinabuntur, quae ratione curuaturae, quam corda ſingulis momentis induet, erunt quidem inter ſe diuerſae; verum ſi ipſe motus vibratorius eiusque periodi ſpectentur, omnes admirabili modo inter ſe conſentient, niſi forte certis caſibus eadem corda eodem tempore, vel duplo, vel triplo, vel quadruplo etc. plures vibrationes ſit editura.

23. Ad certam autem motus ſpeciem conſtituendam non opus eſt, vt iſta curua determinatrix ſecundum

dum legem continuitatis ſit deſcripta, vt eius natura aequatione analytica comprehendi queat; ſed ad hunc vſum aeque erit accommodata, etiamſi vtcunque veluti libero manus tractu fuerit delineata, neque eius partes per legem continuitatis inter ſe connectantur, dummodo figuram habeat praeſcriptam. Ita pro lubitu ſi ſuper axe intra puncta a et b curua quaecunque, ſiue continua, ſiue non continua, fuerit deſcripta, eiusdem curvae deſcriptio vtrinque ad eundem axem infinitum repetatur, ita vt alternis vicibus ſupra et infra axem delineetur, et in ſingulis punctis a, b, α, β pares curuae anb termini inuicem iungantur. Hoc igitur modo ſemper curua ad motum quendam cordae determinandum apta obtinebitur, vbi notandum eſt, etiamſi pro curua anb linea algebraica, veluti arcus circuli, fuerit aſſumta, quae naturalem habeat continuationem, hac tamen penitus reiecta continuationem modo deſcripto inſtitui oportere.

24. Interim tamen quoque huiusmodi curuae determinatrices continuae exhiberi poſſunt, quae ſecundum totam extenſionem vna aequatione comprehendantur. Tales autem curuae, vti per ſe eſt manifeſtum, inter algebraicas non reperiuntur, ſed ex ordine tranſcendentium ſunt petendae, ex quo quidem linea ſinuum, ſeu trochois elongata, inprimis eſt notanda, quae pro noſtro inſtituto, ſi ponamus $aq = u$ et $qn = v$, hanc praebet aequationem $v = \alpha\,\text{ſin.}\frac{\pi(1+n)u}{a}$, quin etiam aequatio magis generalis ſequens aeque eſt idonea:

$$v = \alpha\,\text{ſin.}\frac{\pi(1+n)u}{a} + \beta\,\text{ſin.}\frac{2\pi(1+n)u}{a} + \gamma\,\text{ſin.}\frac{3\pi(1+n)u}{a} + \text{etc.}$$

fed hae curuae etiamfi continuae prae non continuis in hoc negotio nullam habent praerogatiuam, atque in hoc vis noftrae folutionis generalis potiffimum confiftit: quod eo magis eft notatu dignum, quod hoc modo calculum adeo ad curuas non-continuas et per calculum non explicabiles accommodauerim, quod nefcio an vllo alio cafu adhuc fit praeftitum.

25. Defcripta autem huiusmodi curua quacunque, accuratius inueftigemus, quomodo ex ea motus cordae definiri queat. Totum autem negotium huc redit, vt pro corda AMB ad datum tempus t, cuius expreffio ad minutum fecundum tanquam vnitatem refertur, applicata $PM = y$, datae abfciffae $AP = x$ conueniens, determinetur. Hunc in finem in curua determinatrice capiantur binae abfciffae

Tab. II. Fig. 1. et 2.

$$ap = \frac{ax}{a+nx} + t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}, \text{ et } aq = \frac{ax}{a+nx} - t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}$$

notatisque applicatis pm et qn, erit

$$y = m(a+nx).pm + m(a+nx).qn$$

vbi coefficiens m tam paruus accipi debet, vt applicata PM fiat quam minima. Hinc enim orietur, vt ante inuenimus,

$$y = m(a+nx)\Phi\left(\frac{ax}{a+nx} + t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right) + m(a+nx)\Phi\left(\frac{ax}{a+nx} - t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right).$$

Cum igitur hinc ad quoduis tempus ftatus et figura cordae determinetur, eius quoque motus innotefcet, fi, pofita x conftante, tantum tempus t variabile ftatuatur.

26. Si ponamus tempus $t = 0$, inueniemus cordae figuram initialem, ex qua motus hoc modo determinatus oriatur. Habebimus ergo pro hac figura initiali iftam aequationem:

$$y = 2m(a+nx)\Phi\frac{ax}{a+nx},$$

vbi

vbi manifeſtum eſt, curuam determinatricem ita aſſumi poſſe, vt data curua initialis obtineatur. Si enim y denotet applicatam curuae initialis cordae tributae, quae abſciſſae x reſpondeat, in curua determinatrice abſciſſae $ao = \frac{ax}{a+nx}$ reſpondebit applicata $ol = \Phi \frac{ax}{a+nx} = \frac{y}{2m(a+nx)}$. Quo hinc conſtructio curuae determinatricis ſimplicior euadat, ponamus $2m = \frac{1}{a}$, vt pro curua initiali cordae habeamus $y = (1 + \frac{nx}{a}) \Phi \frac{ax}{a+nx}$, ac tum pro curua determinatrice, ſumta abſciſſa $ao = \frac{ax}{a+nx}$, applicata reſpondens eſſe debet $ol = \frac{ay}{a+nx}$; vnde, data cordae figura initiali, curua determinatrix facile conſtruetur, ex qua deinceps totus cordae motus expedite definietur.

27. Quoniam igitur hunc caſum cordae inaequaliter craſſae aeque generaliter reſoluere licet, atque caſum cordarum vniformiter craſſarum; hicque adeo caſus in illo tanquam ſpecies contineatur, ex quo quippe oritur, ſi numerus n, qui inaequalitatem craſſitiei continet, euaneſcat: operae certe pretium erit, vt iſtum caſum omni diligentia articulatim exponamus. Primum igitur cordas iſtas inaequaliter craſſas, ad quas hic caſus eſt accommodatus, dilucide deſcribam, vt intelligatur, quomodo cordae inaequaliter craſſae exhiberi queant, quarum motus aeque generaliter definiri poſſit, atque cordarum vniformiter craſſarum. Deinde vero poſtquam huiusmodi corda ad figuram quamcunque fuerit diducta, indeque ſubito dimittatur, motum, quem ſit proſecutura, determinabo. Atque hic quidem ex iam expoſitis perſpicitur, motum fore ſemper ſatis regularem, omninoque ſimilem ei, quo cordae vniformiter craſſae

crassae agitantur, nisi quod tempora vibrationum aliam rationem longitudinis cordarum sequantur.

Descriptio cordarum, ad hunc casum aptarum.

28. Ad huiusmodi igitur motum regularem edendum nonnisi certa species cordarum inaequaliter crassarum est idonea, quam idcirco primum accurate describi conveniet. Cordam ergo primum in directum extensam
Fig. 3. APBO contemplemur, cuius in initio A crassitiei diameter sit $Aa = b$, tum vero in alio loco quocunque P, posito interuallo $AP = x$, diameter crassitiei supra ita est determinata, vt sit $Pp = z = \frac{b}{(1+\frac{nx}{a})^2}$. Ne autem crassities a longitudine cordae vibrantis a, quippe quae pro eadem corda vtcunque variari potest, pendere videatur, ponamus $\frac{n}{a} = \frac{1}{c}$ seu $n = \frac{a}{c}$, vt sit $Pp = z = \frac{bcc}{(c+x)^2}$ vbi c est quantitas constans, non a longitudine cordae vibrantis pendens. Sin autem alter terminus constituatur in B, vt sit $AB = a$, altero termino constanter in puncto A sumto, erit diameter crassitiei ibi $Bb = \frac{bcc}{(c+a)^2}$.

29. Linea ergo curua $apbo$, crassitiem cordae referens, erit hyperbola secundi ordinis, quae autem, si variatio crassitiei fuerit valde parua, a linea recta vix discrepabit. Euenit hoc, quando quantitas constans c prae longitudine cordae fuerit vehementer magna; tum enim erit proxime $z = b(1 - \frac{2x}{c})$; sicque huc referri poterunt cordae, quarum crassities vniformiter decrescit dum-

modo

modo decrementum totum fuerit minimum. Sin autem id ſit notabile, curuatura lineae $apbo$ negligi non poteſt. Ponamus enim in B diametrum craſſitiei $Bb = d$, erit $1 + \frac{a}{c} = \sqrt{\frac{b}{d}}$, et $\frac{1}{c} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{d}}{a\sqrt{d}}$, vnde pro loco quocunque P fiet $Pp = z = \frac{aabd}{(a\sqrt{d} + x\sqrt{b} - x\sqrt{d})^2}$; ſeu $Pp = \frac{AB^2 . Aa . Bb}{(AP . \sqrt{Aa} + BP . \sqrt{Bb})^2}$. Hinc ergo ex data craſſitie cordae, in vtroque termino A et B, cognoſcitur craſſities in quouis loco medio P, vt corda ad praeſentem vibrationum caſum fiat accommodata. In hoc enim conſiſtit indoles eius cordarum inaequaliter craſſarum ſpeciei, cuius motus ex ſuperioribus formulis in genere definiri poteſt.

30. Materia vero, ex qua corda fuerit confecta, eius pondus conſtituit, quam in calculo ita aſſumſi, vt cordae, ex eadem materia confectae, vniformiter craſſae, cuius craſſitiei diameter vtique foret $= Aa = b$, et longitudo $= b$, pondus eſſet futurum $= M$. Facta hac hypotheſi, videamus, quantum futurum ſit pondus portionis cuiuscunque noſtrae cordae AP. Cum igitur, poſita longitudinae $AP = x$, ſit $Pp = z = \frac{bcc}{(c+x)^2}$, erit pondus partis $AP = \frac{M}{bbb}\int zz\,dx = \frac{Mc^4}{b}\int\frac{dx}{(c+x)^4} = \frac{Mc^4}{b}\left(\frac{1}{3c^3} - \frac{1}{3(c+x)^3}\right)$, ita vt hoc pondus ſit $= \frac{Mcx(3cc + 3cx + xx)}{3b(c+x)^3}$. Quodſi ergo c prae x fuerit quantitas maxima, erit hoc pondus proxime $= \frac{Mx}{b}\left(1 - \frac{2x}{c}\right)$. Hactenus quidem aſſumſi, cordam ex materia vniformi eſſe ductam, ſin autem materia non fuerit homogenea, lex craſſitiei praeſcripta ita debet immutari, vt, quo leuior fuerit materia, ibi craſſities ipſa, ſeu quadratum eius diametri, in eadem ratione vltra legem datam augeatur.

Problema.

Tab. II. Fig. 4. 31. *Si iam talis corda, qualem ratione crassitiei descripsimus, primum in termino* A, *deinde in alio quocunque loco* B *figatur, et a vi quacunque, quae ponderi* F *aequipolleat, tendatur: tum vero de suo situ naturali recto* AB *ad figuram quamcunque* ALB *quam minime a recta* AB *recedentem detorqueatur, subitoque in omnibus punctis remittatur; quaeritur motus, quo haec corda deinceps agitabitur.*

Datur ergo primo longitudo cordae $AB = a$, deinde eius crassities in A, cuius diameter sit $= b$, tertio pro quouis loco intermedio P, existente $AP = x$, crassitiei diameter $z = \frac{bcc}{(c+x)^2}$, seu datur longitudo c. Quarto constat, si corda haberetur vniformiter crassa longitudinis $= b$, cuius diameter crassitiei vbique esset $= b$, eius pondus fore $= M$. Quinto denique datur linea ALB, ideoque pro quauis abscissa $AP = x$ applicata respondens PL: neque vero opus est, vt haec linea ALB per aequationem detur, sed sufficit, vt sit descripta, quocunque demum modo hoc fuerit factum.

Solutio.

32. Iam ante omnia ex data cordae figura initiali ALB construi debet linea curua determinatrix motus vibratorii, cuius constructio, per praecepta supra (26) tradita, ita est instituenda: Ob $n = \frac{a}{c}$, super axe

Fig. 5. et 4. $ab = \frac{ac}{a+c}$, pro abscissa $AP = x$, capiatur abscissa $ap = \frac{cx}{c+x}$, et in p erigatur applicata $pl = \frac{c.PL}{c+x}$; seu adiun-

adiuncta cordae AB recta $AC = c$, construantur hae proportiones:

$$CP : CA = AP : ap$$

$$\text{et } CP : CA = PL : pl.$$

Cum iam hoc modo fuerit descripta curua alb, eadem vtrinque ad axem ab productum repetatur, alternatim supra et infra axem describenda, vti figura ostendit, ita vt in singulis iuncturis a, b, α, β cognomines curuae alb termini inuicem iungantur. Atque hoc pacto habebitur curua determinatrix, ex qua motus cordae quaesitus definiri poterit.

33. Constructa autem curua determinatrice, ex ea motus cordae ita definitur, vt ad quoduis tempus a momento dimissionis elapsum cordae figura assignetur. Sit enim tempus hoc $= t$ min. sec. et pro puncto M inueniendo, in quo iam punctum L versabitur, abscissae $AP = x$ in curua determinatrice capiatur abscissa respondens $ap = \frac{cx}{c+x}$, et circa punctum p vtrinque capiantur spatia aequalia pq et pr tempori proportionalia, ita vt sit

$$pq = pr = t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}},$$

et cum in punctis q et r applicatae curuae determinatricis sint:

$$qm = \Phi\left(\frac{cx}{c+x} - t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right)$$

$$rn = \Phi\left(\frac{cx}{c+x} + t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right)$$

ob $m = \frac{1}{2a}$ et $n = \frac{a}{c}$ in §. 25, habebitur

$$PM = \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{x}{c}\right)(qm + rn).$$

Hocque modo ſitus, quem tota corda poſt tempus t habebit, definietur.

34. Ponamus iam tantum elapſum eſſe tempus t, vt ſit

$$t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}=\frac{ac}{c+a}, \quad \text{ſeu } t=\frac{ac}{c+a}\sqrt{\frac{M}{2Fbg}}$$

atque interualla pq' et pr' vtrinque a puncto p capienda erunt aequalia interuallo ab, ſicque in curuis ſimilibus adiacentibus $\beta m'a$, $bn'\alpha$ abſciſſae $\beta q'$ et br' aequales erunt abſciſſae ap; vnde ob applicatas $q'm'$ et $r'n'$ aequales, locus puncti cordae L nunc cadet infra axem AB ad diſtantiam $=\frac{1}{2}(1+\frac{x}{c})(q'm'+r'n')$ $=(1+\frac{x}{c})q'm'$. Si vlterius tempus infinite paruum dt fluat, applicatae $q'm'$ et $r'n'$ infinite parum vlterius a puncto p remoueri debent; cum igitur, quantum illa diminuitur, haec tantundem augeatur, ob tangentes in punctis m' et n' ad axem aequaliter inclinatas, diſtantia puncti L cordae per hoc momentum ab axe non mutatur, ſicque tota corda ad ſtatum quietis erit redacta, ita vt iam in maxima excurſione infra axem reperiatur. Interea temporis igitur corda vnam vibrationem confeciſſe eſt cenſenda: eritque idcirco tempus vnius vibrationis cordae $t=\frac{ac}{c+a}\sqrt{\frac{M}{2Fbg}}$ min. ſec. vbi g denotat altitudinem fere 15 pedum, per quam graue vno minuto ſecundo libere deſcendit.

35. Sin autem tempus ab initio elapſum t tantum ſtatuamus, vt fiat $t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}=\frac{2ac}{c+a}$ ſeu $t=\frac{2ac}{c+a}\sqrt{\frac{M}{2Fbg}}$, ex conſtructione manifeſto liquet cordae punctum L iterum

rum in locum primitiuum L peruenire, ibique quiete frui momentanea; vnde corda interea duas vibrationes absoluisse est existimanda: deinceps vero motus cordae iterum vti ab initio sequetur, ex quo sufficiet, motum cordae ad hoc vsque momentum determinauisse. Hinc igitur perspicuum est, tempus vniuscuiusque vibrationis esse $=\frac{ac}{c+a}\sqrt{\frac{M}{2Fbg}}$; quod ergo non amplius, vti in cordis vniformiter crassis vsu venit, longitudini cordae a est proportionale, manente scilicet eadem tensione; sed iam rationem sequitur formulae $\frac{ac}{c+a}$. Vnde si tempus vibrationis duplo longius fieri debeat, cordae longitudo a puncto A tanta sumi debebit, vt sit $=\frac{2ac}{c-a}$; ac si tempus vibrationis n vicibus maius esse debeat, cordae longitudinem esse oportet $=\frac{nac}{c-(n-1)a}$. Patet ergo, sonum huiusmodi cordarum non vltra datum gradum deprimi posse, nam si longitudo cordae etiam infinita statuatur, tempus vnius vibrationis etiam nunc erit finitum $=c\sqrt{\frac{M}{2Fbg}}$.

36. Semper autem minuenda cordae AB longitudine effici potest, vt tempus vibrationis ad medietatem reducatur, sonusque vno interuallo diapason eleuetur: eueniet hoc, si corda praeter A etiam in E figatur, vt sit $AE=\frac{ac}{2c+a}$. Sin autem tempus vibrationis ad trientem reduci debeat, longitudo cordae erit $=\frac{ac}{3c+2a}$, sin ad quadrantem, erit $=\frac{ac}{4c+3a}$, et ita porro. Si igitur cordae ab initio talis figura fuerit impressa, vt punctum E in situ naturali relinquatur, indeque curua determinatrix obtineat interualla plexuum

ab, $b\alpha$, $\alpha\beta$, vel duplo, vel triplo, vel quadruplo, minora, tum tota corda toties rapidius contremiſcet. Eo enim tempore, quod generatim vni vibrationi aſſignavimus, iam duas, vel tres, vel quatuor abſoluet vibrationes. Quin etiam euenire poteſt, vt corda ſimul duos pluresue huiusmodi motus recipiat, totidemque ſonos diuerſos edat. Omnino igitur huius generis cordarum motus ſimili modo erit comparatus, quo cordarum vniformiter craſſarum, hoc ſolo excepto, quod pro varia longitudine tempus vibrationis, non longitudinis, rationem ſequatur: hancque ob cauſam iſtud genus cordarum maxime dignum eſt viſum, cuius motus diligentius euolueretur.

37. Veriſimile eſt, praeter cordas vniformiter craſſas, et eas, quas hactenus ſum contemplatus, alias prorſus non dari, quae talis motus regularis ſint capaces, ſimulque ſonos harmonicos edere valeant. Tum etiam, ſi variatio craſſitiei aliam legem ſequatur, nulla patet via ad motum in genere definiendum, ita vt figurae cuicunque, quae cordae initio fuerit tributa, reſpondeat; interim tamen caſus exhiberi poſſunt, quibus, ſi figura initialis certis conditionibus ſit praedita, motum ſecuturum aſſignare liceat. Haec autem inueſtigatio non ſolum tantopere eſt reſtricta, vt nullum vnquam vſum habere videatur, ſed etiam diſquiſitiones ampliſſimas exigit, quae caſus aequationis *Riccatianae* conſtruibiles implicant. Longe autem difficillima videbitur quaeſtio, ſi cordae craſſities nullam legem calculo ſubiectam ſequatur: veluti ſi duae cordae vniformes qui-

quidem, ſed diuerſae craſſitiei, iungantur. Nihilo vero minus hunc caſum generatim expediri poſſe obſeruaui, qui, cum non parum doctrinam vibrationum illuſtrare videatur, eum data opera pertractabo; quia enim duplici modo a lege continuitatis abhorret, ſcilicet ratione craſſitiei et figurae initio impreſſae, methodus talem quaeſtionem ad calculum reuocandi, imprimis ad fines Analyſeos promouendos, videtur accommodata.

Problema.

38. *Si corda* ACB, *ex duabus partibus* AC *et* BC *conflata, quarum vtraque ſeorſim ſit vniformiter craſſa, ſed craſſitiem habeant diuerſam; haecque corda, in terminis* A *et* B *fixa, a vi quacunque ſit tenſa; tum vero ad figuram quamcunque* ADB *detorqueatur, quam minime a figura naturali rectilinea* ALB *recedentem: quaeritur motus, quo corda, poſtquam repente fuerit dimiſſa, agitabitur.* Tab. II. Fig. 6.

Ponamus partis AC longitudinem $AC = a$, alterius partis longitudinem $BC = b$; diametrum craſſitiei illus partis $AC = \alpha$, huius vero $= \beta$: tum vero ſit cordae AC pondus $= N$, eritque cordae BC pondus $= \frac{Nb\beta\beta}{a\alpha\alpha} = N$. Vis autem, qua tota corda intra ſuos terminos tenſa tenetur, aequiualeat ponderi F. Initio porro huic cordae inducta fuerit curua quaecunque ADB, quae ſiue ſit aequatione quapiam exprimibilis, ſiue ſecus, poſt dimiſſionem motum determinari oportet. Sufficit ergo, ex figura noſſe, quanta applicata PL initio motus cuilibet abſciſſae $AP = x$ reſpondeat,

neque

neque hic adhuc refert, siue punctum P ad partem crassiorem AC pertineat, siue ad tenuiorem BC, veluti si in Π capiatur.

Solutio.

39. Ponamus ergo, elapso tempore $= t$ minut. secund. cordam iam peruenisse in situm AMEMB, et applicatam abscissae $AP = x$ respondentem iam esse $PM = y$, quae ergo erit, certa quaedam functio temporis t et abscissae x. Hic vero imprimis est attendendum, vtrum punctum P in parte AC assumatur, an in parte BC, hoc est: vtrum sit $x < a$, an vero $x > a$. Ponamus primo, esse $x < a$, atque motus puncti M continebitur in hac aequatione: $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fag}{M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, sin autem sit $x > a$, seu si abscissa capiatur AΠ, motus puncti M hac aequatione continebitur: $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fbg}{N}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. Quamobrem determinatio motus ad resolutionem harum duarum aequationum ita reducitur, vt prior tantum locum habeat, si sit $x < a$, posterior vero, si sit $x > a$, vnde manifestum est, si sit $x = a$, ambas aequationes consentire debere.

40. Ponamus breuitatis gratia, $\frac{2Fag}{M} = mm$ et $\frac{2Fbg}{N} = nn$ et quamdiu est $x < a$, vt satisfaciendum sit aequationi $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = mm\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, nouimus in genere, fore

$$y = \Phi(x + mt) + \Psi(x - mt).$$

Sin autem sit $x > a$, vt satisfaciendum sit aequationi $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = nn\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, erit per alias quascunque functiones

$$y = \phi(x + nt) + \psi(x - nt).$$

Vel

Vel cum hic abſciſſas a termino B computare liceat, etiam ſi ibi a termino A ſint captae, hae duae aequationes diſtinctius ita exhibebuntur:

$$PM = \Phi(AP + mt) + \Psi(AP - mt)$$

$$\Pi M = \phi(B\Pi + nt) + \psi(B\Pi - nt)$$

vnde ob nexum harum partium in E neceſſe eſt, vt ſit:

$$CE = \Phi(a + mt) + \Psi(a - mt) = \phi(b + nt) + \psi(b - nt)$$

quo iam quaedam relatio inter has functiones definitur.

41. Cum iam tota quaeſtio ad naturam harum quaternarum functionum inueſtigandam ſit traducta, primum perpendendum eſt, applicatas tum in A, quam in B, ſemper euaneſcere debere, vnde eſſe oportet:

$$o = \Phi(mt) + \Psi(-mt) \text{ et } o = \phi(nt) + \psi(-nt).$$

Deinde etiam expendendum eſt, motus initio ſingulorum punctorum celeritatem per $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ expreſſam euaneſcere debere; hinc vero vtraque aequatione colligitur:

$$o = \Phi'(AP) - \Psi'(AP) \text{ et } o = \phi'(B\Pi) - \psi'(B\Pi),$$

vnde concludimus tam $\Psi' = \Phi'$ et $\psi' = \phi'$, quam $\Psi = \Phi$ et $\psi = \phi$; et vtraque functio Φ et ϕ debet eſſe impar, ſeu eiusmodi curuam refert, cuius abſciſſae, ſi negatiuae ſumantur, applicatae quoque in negatiuas abeant, quantitate autem maneant eaedem.

42. Hac igitur functionum Φ et ϕ indole inventa habebimus binas ſequentes aequationes:

$$PM = \Phi(AP + mt) + \Phi(AP - mt)$$

$$\Pi M = \phi(B\Pi + nt) + \phi(B\Pi - nt)$$

praetereaque esse oportet:

$\Phi(a+mt)+\Phi(a-mt)=\phi(b+nt)+\phi(b-nt)$.

Hinc ergo primum, posito $t=0$, esse debet $\Phi a=\phi b$. Deinde etiam perpendere debemus, si esset $m=n$, qui casus locum haberet, si tota corda esset aequaliter vbique crassa, abscissam $a+mt$, a puncto A sumtam, in idem axis punctum esse casuram, atque abscissam $b-nt$ a termino B computatam, ideoque fore $\Phi(a+mt)=\phi(b-nt)$, similique modo $\Phi(a-mt)=\phi(b+nt)$. At si m et n non sint aequales, alio modo functiones $\Phi(a+mt)$ et $\phi(b+nt)$, quae adhuc sunt incognitae, ex functionibus cognitis $\Phi(a-mt)$ et $\phi(b-nt)$ definientur, atque ab hac determinatione solutio problematis potissimum pendebit. Sunt autem functiones $\Phi(a-mt)$ et $\phi(b-nt)$ ob curuam cordae initialem datam cognitae, cum sit $PL=2\Phi.AP$ et $\Pi\Lambda=2\phi.B\Pi$, qui valores dantur, quoties fuerit $AP<a$ et $B\Pi<b$.

43. Verum ad plenam determinationem non sufficit, vt applicata CE communis sit vtrique cordae parti, motus indoles insuper postulat, vt ambae curvae in iunctura E communem habeant tangentem. Hinc autem nascitur ista aequatio differentialis:

$\Phi'(a+mt)+\Phi'(a-mt)=-\phi'(b+nt)-\phi'(b-nt)$

quae aequipollet huic integrali:

$n\Phi(a+mt)-n\Phi(a-mt)=-m\phi(b+nt)+m\phi(b-nt)$.

Cum hac coniungatur ante inuenta:

$\Phi(a+mt)+\Phi(a-mt)=\phi(b+nt)+\phi(b-nt)$

hinc-

hincque functiones incognitae ita determinabuntur, vt fit:

$$\Phi(a+mt)=\tfrac{2m}{m+n}\Phi(b-nt)-\tfrac{m+n}{m+n}\Phi(a-mt)$$

$$\phi(b+nt)=\tfrac{2n}{m+n}\Phi(a-mt)+\tfrac{m-n}{m+n}\phi(b-nt)$$

sicque ex functionibus $\Phi(a-mt)$ et $\phi(b-nt)$, quarum valor ex curua cordae initiali datur, functiones incognitae $\Phi(a+mt)$ et $\phi(b+nt)$ inueniuntur, quae autem, quomodo ad vsum sint accommodandae, iam accuratius perpendamus.

44. Reducamus functiones principales ad dimidium, vt fit:

$$PM=\tfrac{1}{2}\Phi(AP+mt)+\tfrac{1}{2}\Phi(AP-mt)$$

$$\Pi M=\tfrac{1}{2}\phi(B\Pi+nt)+\tfrac{1}{2}\phi(B\Pi-nt)$$

sicque ex curua cordae primitus impressa erit:

$$\Phi(AP)=PL \text{ et } \phi(B\Pi)=\Pi\Lambda$$

vnde, dum sint abscissae $AP<a$ et $B\Pi<b$, earum functiones, per signa Φ et ϕ indicatae, ex figura cordae initiali cognoscuntur. Tum vero etiam nouimus, si abscissae negatiuae capiantur, fore

$$\Phi(-z)=-\Phi(+z) \text{ et } \phi(-z)=-\phi(+z).$$

Functiones autem, maioribus abscissis conuenientes, ex minoribus, et generis quidem vtriusque, ita definiuntur, vt fit:

$$\Phi(a+mu)=\tfrac{2m}{m+n}\phi(b-nu)-\tfrac{m+n}{m+n}\Phi(a-mu)$$

$$\phi(b+nu)=\tfrac{2n}{m+n}\Phi(a-mu)+\tfrac{m-n}{m+n}\phi(b-nu),$$

quarum formularum ope, ex vtra curua ALD et BAD, duae curuae in infinitum extensae construi poterunt,

 qua-

quarum alterius applicatae pro ſingulis abſciſſis debitas functiones Φ, alterius vero functiones Φ exhibeant.

Fig. 7. et 8. 45. Conſtructio autem harum duarum curuarum ita commodiſſime abſoluetur: Ductis duobus axibus XY et xy, ſuper illo deſcribatur figura initialis partis ſiniſtrae cordae ALD, ſuper hoc vero figura initialis partis dextrae BAD, ſimulque tam illa vltra A infra axem in Ad, haec vero vltra B in Bd transferatur, ſicque ex figura cordae initiali illius curuae ramus DAd, huius vero ramus DBd iam deſcriptus habetur. Pro vtriusque autem continuatione, circa punctum C in vtroque axe abſcindantur vtrinque interualla aequalia $CG = CQ$ et $Cg = Cq$, ita vt illa ſint ad haec ſemper vt m et n, ſeu ſumta quantitate quacunque u, capiatur $CG = CQ = mu$, et $Cg = Cq = nu$, atque applicatae in punctis G et g erunt cognitae: in punctis vero Q et q applicatae ſtatuantur

$$QR = \frac{2m.gh + (n - m).GH}{m + n}$$

$$\text{et } qr = \frac{2n.GH - (n - m).gh}{m + n}.$$

Hoc ergo modo vtraque curua ALD et BAD, quousque libuerit, continuari poterit, prouti vero vtraque in vnam plagam continuatur, ita ſtatim ad plagam oppoſitam ſitu inuerſo transferatur.

Fig. 6. 7, 8. 46. His duabus curuis, praeſcripto modo conſtructis, prior inſeruiet motui partis cordae ALD determinando, poſterior vero partis BAD. Scilicet pro puncto quocunque L, ad partem AD pertinente, ſi quaeratur punctum M, vbi poſt tempus t min. ſec. ſit futurum, vtendum erit curua determinatrice ALDRIV (fig. 7.)

(fig. 7.), in cuius axe capiatur abscissa AP, puncto L respondens, et circa P vtrinque abscindantur interualla aequalia $PF = PG = mt$, tum applicatarum FK et GH semisumma dabit loci quaesiti M distantiam PM ab axe. Simili modo, si quaestio sit de puncto A, in altera parte cordae BC sumto, vbi sit futurum post tempus t min. sec. in fig. 8. a puncto B capiatur abscissa BΠ, puncto A conueniens, et circa Π vtrinque abscindantur aequalia interualla $\Pi g = \Pi f = nt$; quo facto applicatarum gh et fk semisumma dabit loci quaesiti M distantiam ab axe AB fig. 6. Hoc igitur modo totius cordae propositae ADB situs ad quoduis tempus determinari, eiusque propterea motus assignari poterit. Facile autem perspicitur, hunc motum maxime fore irregularem, dum neque singula eius puncta simul ad maximas ab axe elongationes peruenient, neque itus reditusque suos temporibus aequalibus absoluant, ex quo ne quaestio quidem de numero vibrationum, dato tempore factarum, neque etiam de sono, quem huiusmodi corda sit editura, locum habere poterit.

47. Neque etiam vllus casus huiusmodi cordarum ex duabus cordis diuersae crassitiei compositarum exhiberi potest, quo vibrationes fiant regulares. Casus quidem talis oriri videtur, quando fit $m = n$, tum enim ambae curuae determinatrices inter se fiunt aequales, interuallaque nodorum AI, AO, toti cordae longitudini aequalia, prorsus vti pro cordis vniformiter crassis venit. Verum, ob $mm = \frac{2Fag}{M}$, et $nn = \frac{2Fbg}{N}$, pro hoc casu habebimus $\frac{a}{M} = \frac{b}{N}$, seu $\frac{a}{b} = \frac{M}{N}$, at est $\frac{M}{N} = \frac{a\alpha\alpha}{b\beta\beta}$; vnde

vnde necessario fit $\alpha = \beta$, qui est casus cordae per totam suam longitudinem eiusdem crassitiei. Quam ob rem solutio huius problematis eo magis est notatu digna, quod non solum in inuestigatione a lege continuitatis maxime abhorrente versatur, sed etiam vibrationes a lege isochronismi, cuiusmodi adhuc a Geometris solae tractari sunt solitae, nobis cognoscendas offerat.

48. Caeterum cum constructio ac determinatio huiusmodi motus per binas curuas determinatrices perficiatur, quarum descriptio et irregularitas potissimum a ratione inaequalitatis inter quantitates m et n pendet, notari conueniet, esse in genere $mm : nn = \frac{a}{M} : \frac{b}{N} = \beta\beta : \alpha\alpha$, ideoque $m : n = \beta : \alpha$. Tenent ergo quantitates m et n, quatenus ad vtramque partem cordae AC et BC referuntur, rationem reciprocam diametrorum crassitiei vtriusque partis. Caeterum etiam circa hanc solutionem imprimis notetur, quod motum huiusmodi cordarum compositarum, vtcunque fuerit irregularis, semper definire liceat, quaecunque etiam figura curuae primitus fuerit inducta, siue aequatione quapiam includi queat, siue secus; quae circumstantia adeo pro cordis vniformiter crassis nonnullis summis Geometris vires Analyseos transcendere est visa. Pari autem methodo vis soluendi extendi poterit ad cordas, quae ex tribus pluribusue partibus diuersae crassitiei fuerint compositae; manifestum enim est, totidem semper curuis determinatricibus opus esse, quarum constructio ex figura initiali cordae simili fere modo absolui queat.

49. Datur tamen casus, quo ambae cordae partes $AC = a$ et $BC = b$ certam quandam inter se tenent rationem, si figura initialis certo modo fuerit comparata, vt motus vibratorius fiat regularis. Obtinetur autem hic casus, si primo sit $a : b = m : n$, seu $a : b = \beta : \alpha$; quo etiam fit $M : N = b : a$; deinde si figura initialis sit huiusmodi, vt sit $\phi(b-nu) = \Phi(a-mu)$, tum enim obtinebitur

$$\Phi(a+mu) = \Phi(a-mu) \text{ et } \phi(b+nu) = \phi(b-nu).$$

Manifestum enim est, aequationem $\phi(b-nu) = \Phi(a-mu)$ locum habere non posse, nisi sit $b : a = n : m$, propterea quod est, tam $\phi 0 = 0$, quam $\Phi 0 = 0$; simul autem quantitates $b-nu$ et $a-mu$ in nihilum abire nequeunt, nisi sit $a : b = m : n$. Hoc autem casu vtraque curua determinatrix per se determinari poterit, fietque similis illi, quae motui cordae vniformis definiendo inseruit, ex quo etiam hic motus aeque regularis euadit. Hunc igitur casum diligentius euoluamus.

Casus motus regularis in cordis, ex duabus partibus inaequalis crassitiei compositis.

50. Sit igitur ACB corda ex duabus partibus AC et BC composita, quarum partes $AC = a$ et $BC = b$ rationem teneant reciprocam diametrorum crassitiei α et β, vt sit $a : b = \beta : \alpha$, ideoque etiam $m : n = a : b$ et $M : N = b : a$. Haec corda sit in terminis A et B fixa et tensa vi, quae aequalis est ponderi F. Tum vero in eiusmodi figuram ADB detorquatur, vt figura Tab. III. Fig. 1.

BAD

BAD affinis sit figurae ALD, scilicet vt sumtis vtrinque abscissis AP et BΠ, ipsis AC et BC proportionalibus, applicatae PL et ΠΛ inter se fiant aequales. Iam corda dimissa quaeritur eius motus, seu status ad quoduis tempus t minut. sec. a momento dimissionis elapsum Hunc in finem construantur ambae curuae determinatrices $ADada'd'$ (fig. 10) et $BDbdb'$, (fig. 11) quarum portiones primitiuae ALD et BAD ex figura cordae initiali desumuntur, sequens autem vtriusque portio ita construitur, vt sit pro fig. 10. $\Phi(a+mu)=\Phi(a-mu)$ et pro fig. 11. $\Phi(b+nu)=\Phi(b-nu)$.

Fig. 2. 3.

51. In axe scilicet abscindantur interualla Ca, ac, ca', $a'c'$ etc. aequalia ipsi interuallo AC, iisque applicentur, vti figura indicat, figurae aD, ad, $a'd$, $a'd'$ similes et aequales figurae ALD. Simili modo pro fig. 11. curuae BAD similes et aequales statuantur figurae bD, bd, $b'd$, etc. tum vero etiam ad alteram partem punctorum A et B hae figurae simili ordine repetantur; hocque modo obtinebuntur ambae curuae determinatrices, ex quibus motus cordae promte definietur. Scilicet si distantia ab axe AB, ad quam punctum L post tempus t reperietur, ponatur $=y$, vocata abscissa $AP=x$, definietur ea ex determinatrice priori, ita vt sit

Fig. 1.

$$y=\tfrac{1}{2}\Phi(x-mt)+\tfrac{1}{2}\Phi(x+mt):$$

sin autem post idem tempus t, distantia puncti Λ ab axe AB desideretur, eaque vocetur $=z$, posita abscissa $B\Pi=u$, erit per alteram curuam determinatricem

$$z=\tfrac{1}{2}\Phi(u-nt)+\tfrac{1}{2}\Phi(u+nt).$$

52.

52. Si tempus t tantum assumatur, vt sit $mt=a$ seu $nt=b$, ob $\Phi(x-a)=-\Phi(a-x)=-\Phi(x+a)$ et $\Phi(u-b)=-\Phi(b+u)=-\Phi(b+u)$, vtraque distantia euanescit, peruenientque post hoc tempus singula cordae elementa in situm rectum AB, quod est tempus dimidiae vibrationis. Sin autem sumatur $mt=2a$, seu $nt=2b$, fiet

$$\Phi(x-2a)=-\Phi(a+(a-x))=-\Phi(a-(a-x))=-\Phi x$$
$$\Phi(x+2a)=\Phi(a+(a+x))=\Phi(a-(a+x))=-\Phi x$$

ideoque $y=-\Phi x$, sicque corda ad alteram axis partem in maxima excursione versabitur, ibique figuram, ipsi initiali omnino aequalem, habebit; vnde post elapsum aequale tempus iterum in figuram initialem reuertetur; atque hoc simili modo locum habet pro altera cordae parte BAD. Motus igitur omnino erit similis motui cordae vniformiter crassae, ac vibrationes peraget isochronas, quarum cuiusque tempus est $=\frac{2a}{m}=\frac{2b}{n}$.

53. Cum igitur sit $mm=\frac{2Fag}{M}$, et $nn=\frac{2Fbg}{N}$, erit vniuscuiusque vibrationis tempus $=2a\sqrt{\frac{M}{2Fag}}$ $=\sqrt{\frac{2Ma}{Fg}}$ min. sec. sin autem cordae huius compositae pars $AC=a$, cuius pondus $=M$, praeter A in C figeretur, eaque ab eadem vi $=F$ tenderetur, esset tempus vnius vibrationis $=a\sqrt{\frac{M}{2Fag}}$; ideoque superioris dimidium. Vnde, manente tensione F, eadem tota corda composita ACB duplo lentius vibrabit, quam vtraque pars AC, vel BC, seorsim, si in ambobus terminis esset fixa. ideoque sonum vna octaua grauiorem edet.

edet. Definiri etiam poteſt corda vniformis craſſitiei et longitudinis $AB = a + b$, quae ab eadem vi tenſa eundem eſſet editura ſonum; ponatur enim pondus huius cordae $= P$, ac tempus vnius vibrationis erit $= (a+b)\sqrt{\frac{P}{2Fg(a+b)}}$, quod tempori pro noſtra corda compoſita inuento $\sqrt{\frac{2Ma}{Fg}}$ aequale poſitum praebet $P = \frac{4Ma}{a+b} = \frac{4MN}{M+N}$; eiusque diametrum craſſitiei $= \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

Exemplum motus irregularis in cordis, ex duabus partibus diuerſae craſſitiei compoſitis.

54. Cum indoles motuum irregularium, quos ſupra in genere determinaui, luculentius ex exemplo determinato percipi queat, ponamus ambas cordae partes longitudine aequales, ſeu $b = a$, deinde ſit diameter craſſitiei partis AC duplo maior, quam partis BC, ſeu $\alpha = 2\beta$, erit illius partis pondus M huius N quadruplum, vnde fit $m : n = 1 : 2$, ſeu $n = 2m = 2\sqrt{\frac{2Fag}{M}}$,
Fig. 4. exiſtente F pondere, quo corda haec tenditur. Tribuatur autem huic cordae figura initialis ſimpliciſſima ADB, ſcilicet ſtylo iuncturae C admoto corda in ſitum ADB detrudatur, vt vtraque pars AD et BD lineam rectam referat, ac triangulum iſoſceles ADB exhibeat. Huius igitur cordae, ſi ſubito dimittatur, motus determinetur, ſeu regula inueſtigetur, cuius ope ſitus et figura cordae ad quodcunque tempus aſſignari queat.

55.

55. Construi ergo oportet ambas lineas determinatrices fig. 13 et 14, quarum partes principales ACD et BCD ex ipsa figura cordae initiali sumuntur. Sit Φ character prioris, ϕ vero posterioris, et cum posita applicata CD $=1$, habeamus ob $b=a$

$\Phi 0=0$; $\Phi a=1$. item $\phi 0=0$ et $\phi a=1$.

lineis puncta A, D et B, D iungentibus existentibus rectis, pro maioribus abscissis ob $m:n=1:2$ consequimur has formulas:

$$\phi(a+u)=\tfrac{2}{3}\phi(a-2u)+\tfrac{1}{3}\phi(a-u)$$
$$\phi(a+2u)=\tfrac{4}{3}\phi(a-u)-\tfrac{1}{3}\phi(a-2u)$$

Statuamus pro u successiue valores a, $2a$, $3a$, $4a$, etc. et, quia est $\phi(-c)=-\phi(c)$, et $\Phi(-c)=-\Phi(c)$, nostrae formulae erunt:

$$\phi(a+u)=-\tfrac{2}{3}\Phi(2u-a)-\tfrac{1}{3}\Phi(u-a)$$
$$\phi(a+2u)=-\tfrac{4}{3}\Phi(u-a)+\tfrac{1}{3}\Phi(2u-a),$$

sicque ex praecedentibus vtriusque lineae applicatis sequentes definientur, punctaque hoc modo inuenta lineis rectis iungenda esse manifestum est, vnde applicatis intermediis non erit opus.

56. Facili ergo negotio sequentes applicatae computabuntur:

Pro linea fig. 13	Pro linea fig. 14
$\phi 0=0$	$\phi 0=0$
$\phi a=1$	$\phi a=1$
$\phi 2a=-\tfrac{2}{3}\phi\,a-\tfrac{1}{3}\phi\,0=-\tfrac{2}{3}$	$\phi 3a=-\tfrac{4}{3}\phi\,0+\tfrac{1}{3}\phi\,a=+\tfrac{1}{3}$
$\phi 3a=-\tfrac{2}{3}\phi 3a-\tfrac{1}{3}\phi\,a=-\tfrac{5}{9}$	$\phi 5a=-\tfrac{4}{3}\phi\,a+\tfrac{1}{3}\phi 3a=-\tfrac{11}{9}$
$\phi 4a=-\tfrac{2}{3}\phi 5a-\tfrac{1}{3}\phi 2a=+\tfrac{28}{27}$	$\phi 7a=-\tfrac{4}{3}\phi 2a+\tfrac{1}{3}\phi 5a=-\tfrac{28}{27}$
$\phi 5a=-\tfrac{2}{3}\phi 7a-\tfrac{1}{3}\phi 3a=-\tfrac{11}{81}$	$\phi 9a=-\tfrac{4}{3}\phi 3a+\tfrac{1}{3}\phi 7a=-\tfrac{73}{81}$
$\phi 6a=-\tfrac{2}{3}\phi 9a-\tfrac{1}{3}\phi 4a=-\tfrac{230}{243}$	$\phi 11a=-\tfrac{4}{3}\phi 4a+\tfrac{1}{3}\phi 9a=-\tfrac{263}{243}$
etc.	etc.

Sum-

Sumtis ergo in vtroque axe interuallis aequalibus ipsi interuallo $AC = BC = a$, applicatae ita se habebunt:

	CD.	2. II	3 III	4. IV	5. V	6. VI	7 VII	
Fig. 13.	0,	1,	$-\frac{2}{3}$;	$-\frac{5}{9}$;	$+\frac{28}{27}$;	$-\frac{71}{81}$;	$-\frac{230}{243}$;	$+\frac{559}{729}$ etc.
Fig 14.	0,	1,	$+\frac{2}{3}$;	$+\frac{1}{3}$;	$-\frac{4}{9}$;	$-\frac{11}{9}$;	$-\frac{10}{27}$;	$+\frac{13}{27}$

e quibus valoribus ambae figurae descriptae conspiciuntur.

57. Ex his figuris porro ad quoduis tempus t min. sec. locus singulorum cordae punctorum L et Λ per regulas supra datas assignari poterit: Sit enim $AP = x$, et puncti L post tempus t ab axe AB distantia $= y$, tum $B\Pi = v$ et puncti Λ ab axe distantia $= z$ erit:

$$y = \tfrac{1}{2}\Phi(x+mt) + \tfrac{1}{2}\Phi(x-mt) = \tfrac{1}{2}\Phi(x+mt) - \tfrac{1}{2}\Phi(mt-x)$$

$$z = \tfrac{1}{2}\Phi(v+2mt) + \tfrac{1}{2}\Phi(v-2mt) = \tfrac{1}{2}\Phi(v+2mt) - \tfrac{1}{2}\Phi(2mt-v).$$

Hinc, posito $v = a$, puncti cordae medii D tempore t ab axe distantia erit $= \tfrac{1}{2}\Phi(a+2mt) - \tfrac{1}{2}\Phi(2mt-a)$: vnde sequentem tabulam construxi:

Post tempus	Distantia puncti D ab axe
$t = \frac{a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 2a - \frac{1}{2}\Phi 0 = +\frac{1}{3}$
$t = \frac{2a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 3a - \frac{1}{2}\Phi a = -\frac{1}{3}$
$t = \frac{3a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 4a - \frac{1}{2}\Phi 2a = -\frac{5}{9}$
$t = \frac{4a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 5a - \frac{1}{2}\Phi 3a = -\frac{7}{9}$
$t = \frac{5a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 6a - \frac{1}{2}\Phi 4a = +\frac{1}{27}$
$t = \frac{6a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 7a - \frac{1}{2}\Phi 5a = +\frac{23}{27}$
$t = \frac{7a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 8a - \frac{1}{2}\Phi 6a = +\frac{48}{81}$
$t = \frac{8a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 9a - \frac{1}{2}\Phi 7a = +\frac{17}{81}$
$t = \frac{9a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 10a - \frac{1}{2}\Phi 8a = -\frac{95}{243}$
$t = \frac{10a}{2n}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 11a - \frac{1}{2}\Phi 9a = -\frac{241}{243}$
$t = \frac{11a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 12a - \frac{1}{2}\Phi 10a = -\frac{197}{729}$
$t = \frac{12a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 13a - \frac{1}{2}\Phi 11a = +\frac{329}{729}$.

Ista

Ista puncti D agitatio circa punctum quietis C in figura 15 repraesentatur, vbi puncta numeris 1, 2, 3, 4, 5 etc. loca designant, vti id post tempus $\frac{a}{2m}$ min. sec. semel, bis, ter, quater, quinquies etc. elapsum sit futurum. Hinc patet, primam vibrationem tali tempore circiter quadruplo, secundam duplo, tertiam quadruplo, quartam fere triplo etc. absolui, ita vt vibrationes alternatim prodeant lentiores et citiores, neque tamen legem regularem constituant, ex quo sonus erit rudis neque ad harmoniam aptus.

De casu vibrationum isochronarum in cordis, ex duabus partibus diuersae crassitiei compositis.

58. Vti in omni motu vibratorio, si quidem est minimus, datur casus, quo isochronismus et synchronismus locum habet, et pro quo certus status initialis requiritur; ita etiam nostro casu, vtcunque longitudines $AC = a$ et $BC = b$ ratione crassitiei, cuius diametros posuimus α et β, fuerint comparatae, semper casus maxime specialis pro isochronismo assignari potest, qui euenit, si acceleratio cuiusuis elementi distantiae eius a situ naturali fuerit proportionalis. Hinc autem pro motu elementorum vtriusque partis, si post tempus t min. sec. puncta L et Λ in loca M et M peruenisse ponamus, vocemusque: Tab. II. Fig. 6.

$$AP = x;\ PM = y;\ \text{et}\ B\Pi = v;\ \Pi M = z$$

ad huiusmodi formulas perueniemus:

$$y = \alpha \sin \mu x \cos. \lambda t \quad \text{et} \quad z = \beta \sin. \nu v \cos. \lambda t$$

 vbi

vbi litterae incognitae ita sunt definiendae, vt his formulis differentio-differentialibus satisfiat:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = mm\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) \text{ et } \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = nn\left(\frac{ddz}{dv^2}\right).$$

59. Primo ergo esse debet $\alpha\lambda\lambda = \alpha\mu\mu mm$, ideoque $\mu = \frac{\lambda}{m}$, tum vero $\beta\lambda\lambda = \beta\nu\nu nn$, ideoque $\nu = \frac{\lambda}{n}$. Deinde quia, posito $x = a$ et $v = b$, fieri debet $y = z$, habebimus $\alpha \sin. \mu a = \beta \sin. \nu b$; statuamus ergo $\alpha = \frac{e}{\sin. \mu a} = \frac{e}{\sin \frac{\lambda a}{m}}$ et $\beta = \frac{e}{\sin. \nu b} = \frac{e}{\sin. \frac{\lambda b}{n}}$ eruntque nostrae aequationes:

$$y \sin. \frac{\lambda a}{m} = e \sin. \frac{\lambda x}{m} \cos. \lambda t \text{ et } z \sin. \frac{\lambda b}{n} = e \sin. \frac{\lambda v}{n} \cos. \lambda t.$$

Postremo ambas curuas in puncto iuncturae E semper communem tangentem habere oportet, seu esse debet $\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dv}\right) = 0$, posito $x = a$ et $v = b$: vnde fit $\frac{\lambda e}{m} \cot. \frac{\lambda a}{m} + \frac{\lambda e}{n} \cot. \frac{\lambda b}{n} = 0$ siue $m \operatorname{tang.} \frac{\lambda a}{m} + n \operatorname{tang.} \frac{\lambda b}{n} = 0$. Quaeri ergo debet huiusmodi numerus λ, vt huic conditioni satisfiat, id quod infinitis modis fieri potest, sicque innumerabiles obtinebuntur vibrationum isochronarum casus, qui, deinde inuicem combinati, infinitas suppeditabunt vibrationum compositarum species.

60. Cum autem sit $m = \sqrt{\frac{2Fag}{M}}$ et $n = \sqrt{\frac{2Fbg}{N}}$, denotante M pondus partis AC, et N pondus partis BC, huic formulae erit satisfaciendum: $\sqrt{\frac{a}{M}} \cdot \operatorname{tang} \lambda \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}} + \sqrt{\frac{b}{N}} \cdot \operatorname{tang} \lambda \sqrt{\frac{Nb}{2Fg}} = 0$, quod quidem in genere praestare non licet, quouis autem casu determinato valores idonei pro λ non difficulter eliciuntur. Inuento autem

tem quocunque valore ipsius λ, motus cordae vibratorius ita se habebit, vt singulae vibrationes absoluantur tempore t, existente $\lambda t = \pi$, denotante π semiperipheriam circuli radii $= 1$, seu tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi}{\lambda}$ min. sec. Quod autem ad diuersos valores ipsius λ attinet, nisi sint inter se commensurabiles, vibrationes, quae ex illarum combinatione oriuntur, nunquam fient regulares, quod ex aequationibus est manifestum:

$$y = \frac{e \sin\frac{\lambda x}{m} \cos\lambda t}{\sin\frac{\lambda a}{m}} + \frac{e' \sin\frac{\lambda' x}{m} \cos\lambda' t}{\sin\frac{\lambda' a}{m}} + \frac{e'' \sin\frac{\lambda'' x}{m} \cos\lambda'' t}{\sin\frac{\lambda'' a}{m}} \text{ etc.}$$

$$z = \frac{e \sin\frac{\lambda v}{n} \cos\lambda t}{\sin\frac{\lambda b}{n}} + \frac{e' \sin\frac{\lambda' v}{n} \cos\lambda' t}{\sin\frac{\lambda' b}{n}} + \frac{e'' \sin\frac{\lambda'' v}{n} \cos\lambda'' t}{\sin\frac{\lambda'' b}{n}} \text{ etc.}$$

Euolutio exempli specialis.

61. Ponamus esse, vti in exemplo superiori, $b = a$, et $N = \frac{1}{4}M$; vnde fit $m = \frac{2Fag}{M}$ et $n = 2m$: debet ergo resolui haec aequatio:

$$\text{tang.}\,\lambda \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}} + 2\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\lambda \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}} = 0$$

Ponatur breuitatis gratia angulus $\frac{1}{2}\lambda \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}} = \omega$, vt sit $\lambda = 2\omega \sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$; quaerique oportet angulum ω, ita vt sit

$$\text{tang.}\,2\omega + 2\,\text{tang.}\,\omega = 0, \text{ seu } \text{tang.}\,2\omega = -2\,\text{tang.}\,\omega,$$

cui aequationi primum satisfit his valoribus:

$$\omega = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ 5\pi \text{ etc.}$$

Deinde, ob tang $2\omega = \frac{2\,\text{tang.}\,\omega}{1 - \text{tang.}\,\omega^2}$, prodit tang. $\omega = \pm\sqrt{2}$; si ergo sit θ minimus angulus tangentem habens $= \sqrt{2}$,

qui

qui est $54^\circ, 44', 8'', 12'''$ praeterea quoque hi anguli satisfacient:

$$\omega = \theta;\ \pi \pm \theta;\ 2\pi \pm \theta;\ 3\pi \pm \theta;\ 4\pi \pm \theta;\ 5\pi \pm \theta \text{ etc.}$$

62. Sumto ergo horum angulorum pro ω inuentorum quocunque, ob $\lambda = 2\omega\sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$, tempus vnius vibrationis cordae erit $= \frac{\pi}{2\omega}\sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ min. sec. ac pro motu cordae eiusque partis vtriusque habebuntur hae aequationes:

$$y = \frac{e}{\sin. 2\omega}\sin.\frac{2\omega x}{a}\cos. 2\omega t\sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$$
$$z = \frac{e}{\sin.\omega}\sin.\frac{\omega v}{a}\cos. 2\omega t\sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$$

vbi euidens, valores prioris ordinis pro ω inuentos, punctum cordae medium D semper in C immotum praebere. Cum enim sit $\sin.\omega = 0$, et $\sin. 2\omega = 0$, necessario capi debet $e = 0$. Quod incommodum quo euitetur, ponamus $e = 2d\sin.\omega$, vt habeatur:

$$y = \frac{d}{\cos.\omega}\sin.\frac{2\omega x}{a}\cos. 2\omega t\sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$$
$$z = 2d\sin.\frac{\omega v}{a}\cos. 2\omega t\sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}.$$

63 Hic autem patet, quod quidem statim suspicari licuerat, valores prioris ordinis plane esse inutiles, neque ad nostrum institutum accommodatos; cum enim, posito $x = v = a$, fieri debeat $\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dv}\right) = 0$, hinc nanciscimur:

$$\frac{\cos. 2\omega}{\cos.\omega} + 2\cos.\omega = 0 \quad \text{seu} \quad \cos\omega = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

vbi factor superior inutilis $\tan g.\omega$ est exclusus. Denotante ergo θ angulum $54^\circ, 44', 8'', 12'''$, valores idonei pro ω substituendi sunt

$$\omega = \pm\theta;\ \pi \pm \theta;\ 2\pi \pm \theta;\ 3\pi \pm \theta;\ \text{etc.}$$

et

et in genere $\omega = i\pi \pm \theta$, denotante i numerum integrum quemcunque. Quocirca tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi}{2i\pi \pm 2\theta} \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ min. sec. et posito $t = 0$, pro figura initiali hae obtinentur aequationes:

$$y = \frac{e}{\sin.2(i\pi \pm \theta)} \sin. \frac{2(i\pi \pm \theta)x}{a} \text{ et } z = \frac{e}{\sin.(i\pi \pm \theta)} \sin. \frac{(i\pi \pm \theta)v}{a}.$$

64. Haec ergo corda infinitis modis ad vibratorium motum isochronum excitari potest; vnde innumerabiles sonos edet. Cum autem soni se habeant reciproce vt tempus vnius vibrationis, ob $\frac{\theta}{\pi} = 0,3040868$, hi soni, ad quos edendos eadem corda est apta, erunt vt numeri:

0,3040868; 0,6959132; 1,3040868; 1,6959132; 2,3040868 etc.

qui cum inter se sint incommensurabiles, soni erunt maxime dissoni, sicque eadem corda simul plures sonos inter se dissonos edere poterit. Dum autem corda illos sonos simplices edit, primo excepto, vnum pluresue nodos inter vibrandum formabit, seu vnum pluraue puncta eius in recta AB immota manebunt; eaque erunt vel in parte AC, vbi sumta $x < a$ fuerit sin $\frac{2\omega x}{a} = 0$; vel in parte BC, vbi, sumta $v < 0$, fuerit sin $\frac{\omega v}{a} = 0$. Sic pro sono secundo in parte AC dabitur vnus nodus circa locum fere $x = \frac{5}{7}$, in parte BC nullus: pro sono tertio dabuntur in parte AC duo nodi $x = \frac{5}{13}$ et $x = \frac{10}{13}$, in parte BC vnus $v = \frac{10}{13}$; pro sono quarto dabuntur in parte AC tres nodi $x = \frac{5}{17}$, $x = \frac{10}{17}$, $x = \frac{15}{17}$, et in parte BC vnus $v = \frac{10}{17}$, et ita porro.

Aliud Exemplum ſpeciale.

65. In praecedente exemplo ſoni ſimplices, quorum eadem corda eſt capax, etſi diſſonantes, tamen alternatim progreſſionem arithmeticam conſtituebant; qui ordo inde veniebat, quod tam quantitates m et n, quam anguli $\frac{\lambda a}{m}$ et $\frac{\lambda b}{n}$, rationem tenebant rationalem. Quando autem hoc non euenit, ne iſte quidem ordo amplius locum habebit, quod exemplo oſtendiſſe iuuabit. Ponamus igitur, eſſe quidem $b = a$, ſed $N = \frac{1}{2} M$, eritque $n = m\sqrt{2}$, exiſtente $m = \sqrt{\frac{2 F a g}{m}}$: quaeri ergo oportet numerum λ vt ſit tang. $\frac{\lambda a}{m} + \sqrt{2}$. tang. $\frac{\lambda a}{m\sqrt{2}} = 0$. Ad quam aequationem reſoluendam ponamus $\frac{\lambda a}{m\sqrt{2}} = \omega$, vt ſit $\lambda = 2\omega\sqrt{\frac{F g}{M a}}$; fierique debet $\frac{tang. \omega\sqrt{2}}{\sqrt{2}} +$ tang $\omega = 0$; quae aequatio quidem iterum infinitos praebet valores pro angulo ω, qui autem non ita ſunt comparati, vt vno cognito reliqui aſſignari queant.

66. Videamus ergo, quomodo aequatio $\frac{1}{\sqrt{2}}$tang $\omega\sqrt{2}$ $+$ tang. $\omega = 0$ commodiſſime reſolui poſſit, ac tentaminibus quibusdam inſtitutis minimus angulus ω intra limites $72°,25'$ et $72°,35'$ cadere reperitur: hos ergo valores pro ω ſubſtituamus, calculumque ſequenti modo inſtituamus:

Hypoth.

	Hypoth. I	Hypoth. II
	$\omega = 72^\circ, 25'$	$72^\circ, 35'$
seu	$\omega = 260700''$	$261300''$
hinc	$l\omega = 5,4161410$	$5,4171394$
adde	$l\sqrt{2} = 0,1505150$	$0,1505150$
	$l\omega\sqrt{2}'' = 5,5666560$	$5,5675544$
	$\omega\sqrt{2} = 1\ 368685\frac{1}{2}''$	$369534''$
seu	$\omega\sqrt{2} = 02^\circ, 24', 45\frac{1}{2}''$	$102^\circ, 38', 54''$
	$\pi - \omega\sqrt{2} = 77, 35, 14\frac{1}{2}$	$77, 21, 6$
	$l\,\text{tang}(\pi - \omega\sqrt{2}) = 10,6573889$	$10,6489532$
adde	$l\sqrt{\frac{1}{2}} = 9,8494850$	$9,8494850$
	$10,5068739$	$10,4984382$
at	$l\,\text{tang}\,\omega = 10,4990797$	$10,5034848$
	Error $+ \quad 77942$	$- \quad 50466$
	50466	
	128408	

$128408 : 10' = 77942 : 6', 4''$

vnde concluditur verus angulus $\omega = 72^\circ, 31', 4''$.

67. Inuento hoc angulo ω, erit $\lambda = 2\omega\sqrt{\frac{Fg}{Ma}}$, et tempus vnius vibrationis cordae $= \frac{\pi}{2\omega}\sqrt{\frac{Ma}{Fg}}$ min. sec. motus autem cordae ex sequentibus aequationibus innotescet; ob $\frac{\lambda}{m} = \frac{\omega\sqrt{2}}{a}$ et $\frac{\lambda}{n} = \frac{\omega}{a}$:

$$y = \frac{e}{\sin.\omega\sqrt{2}} \sin. \frac{\omega x\sqrt{2}}{a} \cos. 2\,\omega t \sqrt{\frac{Fg}{Ma}}$$

$$z = \frac{e}{\sin.\omega} \sin. \frac{\omega v}{a}. \cos. 2\,\omega t \sqrt{\frac{Fg}{Ma}}.$$

Verum pro angulo ω infinitos insuper alios valores idoneos inuestigari licet, quo in negotio methodo ante adhibita vti conueniet, vt primum per tentamina limites,

limites, intra quos verus quispiam valor continetur, colligantur, iique deinceps arctius constringantur, donec valor verus ex iis satis accurate concludi queat. Cum autem isti valores nullo certo ordine inter se cohaereant, labor vtique non parum erit molestus suscipiendus, si quis plures eruere voluerit.

Inuestigatio vibrationum regularium in cordis crassitiei vtcunque variabilis

68. Reuertamur iam tandem ad problema generale, quo cordae crassities vtcunque variabilis est assumta, ac supra (10) inuenimus omnium motuum, quos quidem corda recipere valeat, inuestigationem ad resolutionem huius aequationis differentio-differentialis reuocari: $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fbbbg}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, vbi z est diameter crassitiei cordae abscissae x respondens, ideoque functio cognita ipsius x. Ponamus ergo ad abbreuiandum $\frac{2Fbbbg}{Mzz} = uu$, vt habeamus $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = uu\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, in qua nunc u erit functio cognita ipsius x: quaeriturque, qualis functio ipsarum x et t, pro y substituta, isti aequationi satisfaciat, atque insuper his conditionibus sit consentanea, vt, siue statuatur $x = 0$, siue $x = a$, prodeat $y = 0$, tum vero vt, posito $t = 0$, fiat $\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$. Quartam conditionem, vt, posito $t = 0$, pro y prodeat data functio ipsius x, datae figurae initiali cordae conueniens, hic seponamus, quandoquidem problema isto latissimo sensu resolui nequit.

69. Euoluamus igitur primum casum illum maxime notabilem, quo corda vibrationes omnes synchronas

nas et isochronis producit, pro quo vis acceleratrix, vti constat, ipsi applicatae y esse debet proportionalis. Statuatur ergo ea $=nny$, et obtinebimus istas binas aequationes resoluendas:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=-nny \text{ et } uu\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)=-nny$$

in quarum illa abscissa x, in hac vero tempus t est constans assumtum. At ex priori aequatione oritur $y=p$ cos. nt, vt fiat $\left(\frac{dy}{dt}\right)=0$, posito $t=0$, vbi p denotat functionem quamcunque ipsius x, quae ex altera aequatione debet definiri. Obtinetur autem: $uuddp+nnpdx^2=0$, vnde valor ipsius p ita debet determinari, vt fiat $p=0$ siue ponatur $x=0$, siue $x=a$. Verum alterutra conditio inseruit numero n determinando, ex quo deinceps tempus cuiusque vibrationis innotescet $=\frac{\pi}{n}$ min. sec.

70. Verum haec aequatio, in genere considerata, $uuddp+nnpdx^2=0$ iisdem difficultatibus subiecta deprehenditur, quae in formula illa famosa *Riccatiana* occurrunt; posito enim $p=e^{\int q dx}$ seu $\frac{dp}{pdx}=q$, illa aequatio ad hanc formam reducitur: $uudq+uuqqdx+nndx=0$, cuius integratio ita est instituenda, vt, posito $x=0$, fiat $\int qdx=-\infty$. Cum igitur habeatur

$$dq+qqdx+\frac{nndx}{uu}=0$$

ex casibus integrabilitatis formulae *Riccatianae* patet, hanc aequationem ad constructionem perduci posse, si valor ipsius u sit huiusmodi potestas:

$$\frac{(k+mx)^2}{a};\ (k+x)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a};\ \frac{(k+mx)^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}};\ (k+mx)^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{a} \text{ etc.}$$

quorum casuum primum supra iam in genere expedivimus, quem speciminis loco euoluamus, ita vt haec aequatio resoluenda sit:

$$dq + qqdx + \frac{nnaadx}{(k+mx)^4} = 0.$$

71. Huic autem aequationi primum sequens valor imaginarius satisfacere deprehenditur:

$$q = \frac{na\sqrt{-1} + mk + mmx}{(k+mx)^2}$$

vnde fit $\int q\,dx = \frac{-na\sqrt{-1}}{m(k+mx)} + l(k+mx)$ et $p = \alpha(k+mx)e^{\frac{-na\sqrt{-1}}{m(k+mx)}}$. Simili vero modo quoque satisfacit $p = \beta(k+mx)e^{\frac{+na\sqrt{-1}}{m(k+mx)}}$, quibus valoribus combinandis per formulas reales obtinetur:

$p = A(k+mx)\,\mathrm{fin.}\frac{na}{m(k+mx)} + B(k+mx)\,\mathrm{cof.}\frac{na}{m(k+mx)}$
qui vt euanescat, posito $x = 0$, fiet

$$p = A(k+mx)\,\mathrm{fin.}\frac{nax}{k(k+mx)},$$

et proinde $y = A(k+mx)\,\mathrm{fin.}\frac{nax}{k(k+mx)}\,\mathrm{cof.}\,nt.$ Cum autem hic fit $uu = \frac{(k+mx)^4}{aa}$, erit $zz = \frac{2Faabbbg}{M(k+mx)^4}$ et tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi}{n}$ min. sec. Verum numerus n ita debet esse comparatus, vt posito $x = a$ fit $\mathrm{fin.}\frac{naa}{k(k+ma)} = 0$, seu $n = \frac{\lambda\pi k(k+ma)}{aa}$, ideoque tempus vibrationis $= \frac{aa}{\lambda k(k+ma)}$ min. sec.

72. Ponamus ergo secundo $u = (k+mx)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a}$, vt habeamus

$$dq + qqdx + \frac{nndx}{(k+mx)^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{aa}}$$

cui

cui aequationi particulariter satisfacit

$$q = \frac{1}{\frac{(k+mx)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a}}{n\sqrt{-1}} + \frac{m(k+mx)^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{aa}}{3nn}}$$

Sit $k+mx=s^3$, vt fiat $dx=\frac{3ss\,ds}{m}$, eritque

$$q\,dx = \frac{3s\,ds}{\frac{ms\sqrt[3]{a}}{n\sqrt{-1}} + \frac{mm\sqrt[3]{aa}}{3nn}} = \frac{3n\,ds\sqrt{-1}}{m\sqrt[3]{a}} + \frac{ds}{s-\frac{m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt{-1}}}$$

et $\int q\,dx = \frac{3ns\sqrt{-1}}{m\sqrt[3]{a}} + l\left(s-\frac{m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt{-1}}\right)$ hincque

$$p = \mathrm{A}\left(s-\frac{m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt{-1}}\right)e^{\frac{3ns\sqrt{-1}}{m\sqrt[3]{a}}} + \mathrm{B}\left(s+\frac{m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt{-1}}\right)e^{\frac{-3ns\sqrt{-1}}{m\sqrt[3]{a}}}$$

quae expressio, ad valores reales reuocata, praebet:

$$p = \alpha s\operatorname{cos.}\frac{3ns}{m\sqrt[3]{a}} + \beta s\operatorname{sin.}\frac{3ns}{m\sqrt[3]{a}} - \frac{\alpha m\sqrt[3]{a}}{3n}\operatorname{sin.}\frac{3ns}{m\sqrt[3]{a}} + \frac{\beta m\sqrt[3]{a}}{3n}\operatorname{cos.}\frac{3ns}{m\sqrt[3]{a}}$$

vel $p = \mathrm{A}s\operatorname{sin.}\left(\frac{3ns+\delta}{m\sqrt[3]{a}}\right) + \frac{\mathrm{A}m\sqrt[3]{a}}{3n}\operatorname{cos.}\left(\frac{3ns+\delta}{m\sqrt[3]{a}}\right)$.

73. Ponatur iam $x=0$, quo casu fieri debet $p=0$, et ob $s=\sqrt[3]{k}$ erit:

$\sqrt[3]{k}$.

$$\sqrt[3]{k}.\text{fin.}\frac{3n\sqrt[3]{k}+\delta}{m\sqrt[3]{a}}+\frac{m\sqrt[3]{a}}{3n}\text{cof.}\frac{3n\sqrt[3]{k}+\delta}{m\sqrt[3]{a}}=0$$

feu tang. $(\frac{3n\sqrt[3]{k}+\delta}{m\sqrt[3]{a}})=\frac{-m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt[3]{k}}$; ideoque

$$\text{fin.}\frac{3n\sqrt[3]{k}+\delta}{m\sqrt[3]{a}}=\frac{-m\sqrt[3]{a}}{\sqrt{(mm\sqrt[3]{aa}+9nn\sqrt[3]{kk})}}$$

Deinde ponatur $x=a$, et ob $s=\sqrt[3]{(k+ma)}$ fiet quoque

$$\text{tang.}\left(\frac{3n\sqrt[3]{(k+ma)}+\delta}{m\sqrt[3]{a}}\right)=-\frac{m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt[3]{(k+ma)}},$$

vnde eliminando angulo δ elicitur

$$\text{tang.}\frac{3n\sqrt[3]{(k+ma)}-3n\sqrt[3]{k}}{m\sqrt[3]{a}}=\frac{3mn\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k})}{mm\sqrt[3]{aa}+9nn\sqrt[3]{k(k+ma)}}$$

ex qua aequatione valor numeri n erui debet, quod quidem infinitis modis fieri poffe per fe patet. Si enim ponatur $\frac{3n}{m\sqrt[3]{a}}=\frac{\omega}{\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k}}$ quaeri debet angulus ω, vt fit

$$\text{tang.}\,\omega=\frac{\omega(\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k})}{(\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k})^2+\omega\omega\sqrt[3]{k(k+ma)}}$$

vel $\omega=\text{A tang.}\frac{\omega\sqrt[3]{(k+ma)}}{\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k}}-\text{A tang.}\frac{\omega\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k}}$

Tum

Tum inuento angulo ω, quaeratur angulus θ, vt fit $\text{tang.}\,\theta = \frac{\sqrt[3]{(k+ma)} - \sqrt[3]{k}}{\omega\sqrt[3]{(k+ma)}}$, prodibitque altera conftans

$$\frac{\delta}{m\sqrt[3]{a}} = \theta + \frac{\omega\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{(k+ma)} - \sqrt[3]{k}}.$$

74. Attentionem quoque meretur cafus quafi infinitefimus, quo $u = k + mx$, feu $x = \frac{b}{k+mx}\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}$: ftatim enim liquet aequationi $(k+mx)^2 ddp + nnpdx^2 = 0$ fatisfacere poteftatem quandam $p = (k+mx)^{\alpha}$, facta enim fubftitutione fit $\alpha(\alpha - 1)mm + nn = 0$, hincque $\alpha = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} - \frac{nn}{mm})}$. Sit breuitatis gratia $\sqrt{(\frac{nn}{mm} - \frac{1}{4})} = \lambda$, habebiturque $p = (A(k+mx)^{\lambda\sqrt{-1}} + B(k+mx)^{2\lambda\sqrt{-1}})\sqrt{(k+mp)}$, quae ad realitatem reuocata praebet

$$p = (C\,\text{fin.}\,\lambda l(1 + \tfrac{mx}{k}) + D\,\text{cof.}\,\lambda l(1 + \tfrac{mx}{k}))\sqrt{(k+mx)}$$

Iam quia, pofito $x = 0$, fieri debet $p = 0$, oportet effe $D = 0$, et facto $x = a$, neceffe eft fit $\lambda l(1 + \frac{ma}{k}) = i\pi$ denotante i numerum integrum quemcunque. Inuento igitur $\lambda = \frac{i\pi}{l(1 + \frac{ma}{k})}$, erit $n = m\sqrt{(\frac{1}{4} + \lambda\lambda)}$, vnde tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi}{n}$, et motus definietur per hanc aequationem:

$$y = A(k+mx)^{\frac{1}{2}}\,\text{fin.}\,i\pi\frac{l(1+\frac{mx}{k})}{l(1+\frac{ma}{k})}\,\text{cof.}\,mt\sqrt{(\tfrac{1}{4} + \frac{ii\pi\pi}{(l(1+\frac{ma}{k}))^2})}.$$

75. Sumendis pro i diuerfis numeris, oriuntur diuerfae vibrationum ifochronarum fpecies, quarum tem-

pora autem plane erunt inter se incommensurabilia. Poterunt autem vibrationes ex pluribus huiusmodi simplicibus componi, in quibus nulla amplius regularitas perspicietur. Si enim breuitatis gratia ponamus $\frac{\pi}{l(1+\frac{ma}{k})}=\mu$, sequens aequatio in infinitum adeo continuata problemati satisfaciet:

$$y=(k+mx)^{\frac{1}{2}}\begin{cases}\alpha\,\text{fin.}\,\mu l(1+\frac{mx}{k}).\,\text{cof.}\,mt\sqrt{(\frac{1}{4}+\mu\mu)}\\ +\beta\,\text{fin.}\,2\mu l(1+\frac{mx}{k}).\,\text{cof.}\,mt\sqrt{(\frac{1}{4}+4\mu\mu)}\\ +\gamma\,\text{fin.}\,3\mu l(1+\frac{mx}{k}).\,\text{cof.}\,mt\sqrt{(\frac{1}{4}+9\mu\mu)}\\ +\delta\,\text{fin.}\,4\mu l(1+\frac{mx}{k}).\,\text{cof.}\,mt\sqrt{(\frac{1}{4}+16\mu\mu)}\end{cases}$$

etc.

Neque tamen haec expressio, etsi in infinitum producta, eiusmodi solutionem generalem suppeditat, quae se ad omnes casus, quibus cordae initio figura quaecunque fuerit inducta, extendat. Verum consideratio huiusmodi solutionum particularium viam ad solutionem generalem parare debet.

Integratio generalis et completa aequationis differentio-differentialis

$$x^{2m+2}ddy+ccydx^2=0.$$

76. Ad hanc aequationem peruenimus, quoties in nostra aequatione superiori $uuddp+nnpdx^2=0$, functio u fuerit potestas ipsius x, vel ipsius $\alpha+\beta x$, scilicet $u=(\alpha+\beta x)^{m+1}$, quibus igitur casibus haec aequatio integrationem admittit, iisdem motus vibratorius cordae isochronus determinari poterit. Manifestum autem

autem eſt, hanc aequationem a celebri illa *Riccatiana* non differre. Poſito enim $y = e^{\int z dx}$, vt ſit $z = \frac{dy}{y dx}$ prodit haec ipſa forma:

$$dz + zz dx + cc x^{-2m-2} dx = 0$$

quae quibusnam caſibus exponentis m integrabilis euadat, a celeberrimis Geometris olim eſt inueſtigatum. Verum integralia ab illis exhibita non ſolum ſunt particularia, ſed etiam hoc caſu, ob coefficientem $+cc$ neceſſario poſitiuum, fiunt imaginaria, ita vt nobis nullum vſum eſſent praeſtitura.

77. Non mediocriter ergo hoc opus circa vibrationes promouebitur, ſi huius aequationis integrale completum, quod a formulis imaginariis ſit liberum, exhibuero. Hunc in finem coefficientes neceſſarii ſequenti modo definiantur:

$$A = \frac{mm-1}{8mc};\ B = \frac{9mm-1}{16mc}A;\ C = \frac{25mm-1}{24mc}B;\ D = \frac{49mm-1}{32mc}C$$

$$E = \frac{81mm-1}{40mc}D;\ F = \frac{121mm-1}{48mc}E;\ G = \frac{169mm-1}{56mc}F \text{ etc.}$$

quibus inuentis erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{m+1}{2}}(1 - Bx^{2m} + Dx^{4m} - Fx^{6m} + \text{etc.})\,\text{ſin.}\left(\frac{c}{mx^m} + \theta\right) \\ -kx^{\frac{m+1}{2}}(Ax^m - Cx^{3m} + Ex^{5m} - Gx^{7m} + \text{etc})\,\text{coſ.}\left(\frac{c}{mx^m} + \theta\right) \end{cases}$$

vbi angulus θ cum quantitate k ſunt binae illae conſtantes arbitrariae, per duplicem integrationem introductae. Pro noſtro autem caſu vibrationum, cum angulus θ, tum conſtans c, ita definiri debent, vt, ſi abſciſſae x, quae iam non amplius a puncto A computatur,

 tatur,

tatur, certi duo valores, veluti $x=d$ et $x=d+a$, tribuantur, applicata y vtroque casu euanescat.

78. In genere quidem haec expressio in infinitum excurrit; sed manifestum est, dari infinitos eiusmodi valores exponentis m, quibus ea fiat finita. Hoc scilicet euenit, si sumta littera i ad numerum imparem quemcunque significandum, fuerit $iimm-1=0$ seu $m=\pm\frac{1}{i}$, quibus casibus fit noster exponens $2m+2=2\pm\frac{2}{i}$. Quare aequatio nostra $x^{2m+2}ddy+ccydx^2=0$ sequentibus casibus integrationem absolutam admittit, si scilicet exponens $2m+2$ fuerit terminus alterutrius sequentium duarum progressionum:

$$0;\ \tfrac{4}{3};\ \tfrac{8}{5};\ \tfrac{12}{7};\ \tfrac{16}{9};\ \tfrac{20}{11};\ \tfrac{24}{13};\ \text{etc.}$$

$$4;\ \tfrac{8}{3};\ \tfrac{12}{5};\ \tfrac{16}{7};\ \tfrac{20}{9};\ \tfrac{24}{11};\ \tfrac{28}{13};\ \text{etc.}$$

qui numeri negatiue sumti dant notos illos integrabilitatis casus aequationis $dz+zzdx+ccx^{-2m-2}dx=0$, pro qua est generatim $z=\frac{dy}{ydx}$.

79. Quo haec integralia facilius assignare queamus, ponamus in genere $m=\frac{1}{i}$; eruntque nostri coefficientes:

$$A=\frac{1-ii}{8ic}$$

$$B=\frac{(1-ii)(9-ii)}{8.16\,iicc}$$

$$C=\frac{(1-ii)(9-ii)(25-ii)}{8.16.24\,i^3c^3}$$

$$D=\frac{(1-ii)(9-ii)(25-ii)(49-ii)}{8.16.24.32.\,i^4c^4}$$

$$E=\frac{(1-ii)(9-ii)(25-ii)(49-ii)(91-ii)}{8.16.24.32.40.\,i^5c^5}$$

etc.

Pro

Pro quolibet ergo casu assignato integrale completum vtriusque aequationis $x^{2m+2}ddy + ccydx^2 = 0$ et $dz + zzdx + ccx^{-2m-2}dx = 0$ non difficulter colligetur.

Casus I $(m = -1)$

$$ddy + ccydx^2 = 0 \text{ et } dz + zzdx + ccdx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = k\,\text{sin.}(\theta - cx) \text{ et } z = \frac{dy}{ydx} = \frac{-c\,\text{cos.}(\theta - cx)}{\text{sin.}(\theta - cx)}$$

Casus II $(m = +1)$

$$x^4 ddy + ccydx^2 = 0 \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-4}dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = kx\,\text{sin.}(\theta + \tfrac{c}{x}), \text{ et } z = \frac{dy}{ydx} = \frac{1}{x} - \frac{c}{xx}\text{cot.}(\theta + \tfrac{c}{x})$$

Casus III $(m = -\frac{1}{3})$

$$x^{\frac{4}{3}} ddy + ccydx^2 = 0; \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{4}{3}}dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = kx^{\frac{1}{3}}(\text{sin.}(\theta - 3cx^{\frac{1}{3}}) - \tfrac{1}{3c}x^{-\frac{1}{3}}\text{cos.}(\theta - 3cx^{\frac{1}{3}}))$$

$$\text{seu } y = k(x^{\frac{1}{3}}\text{sin.}(\theta - 3cx^{\frac{1}{3}}) - \tfrac{1}{3c}\text{cos.}(\theta - 3cx^{\frac{1}{3}}))$$

Casus IV $(m = +\frac{1}{3})$

$$x^{\frac{8}{3}} ddy + ccydx^2 = 0 \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{8}{3}}dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = kx^{\frac{2}{3}}(\text{sin.}(\theta + 3cx^{-\frac{1}{3}}) + \tfrac{1}{3c}x^{\frac{1}{3}}\text{cos.}(\theta + 3cx^{-\frac{1}{3}}))$$

Casus V $(m = -\frac{1}{5})$

$$x^{\frac{8}{5}} ddy + ccdx^2 = 0 \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{8}{5}}dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = kx^{\frac{2}{5}}((1 - \tfrac{2}{25cc}x^{-\frac{2}{5}})\,\text{sin.}(\theta - 5cx^{\frac{1}{5}}) - \tfrac{3}{5c}x^{-\frac{1}{5}}\text{cos.}(\theta - 5cx^{\frac{1}{5}}))$$

Casus VI $(m = +\frac{1}{5})$

$$x^{\frac{12}{5}} ddy + ccydx^2 = 0; \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{12}{5}} dx = 0,$$

erit integrale completum

$$y = kx^{\frac{3}{5}}\left(\left(1 + \tfrac{3}{25cc} x^{\frac{2}{5}}\right) \text{sin.}\left(\theta + 5cx^{-\frac{1}{5}}\right) + \tfrac{3}{5c} x^{\frac{1}{5}} \text{cos.}\left(\theta + 5cx^{-\frac{1}{5}}\right)\right)$$

Casus VII $(m = -\frac{1}{7})$

$$x^{\frac{12}{7}} ddy + ccydx^2 = 0; \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{12}{7}} dx = 0$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} + kx^{\frac{2}{7}}\left(1 - \frac{3\cdot 5}{7^2 cc} x^{-\frac{2}{7}}\right) \text{sin.}\left(\theta - 7cx^{\frac{1}{7}}\right) \\ - kx^{\frac{3}{7}}\left(\frac{2\cdot 3}{7c} x^{-\frac{1}{7}} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{7^3 c^3} x^{-\frac{3}{7}}\right) \text{cos.}\left(\theta - 7cx^{\frac{1}{7}}\right) \end{cases}$$

Casus VIII $(m = +\frac{1}{7})$

$$x^{\frac{16}{7}} ddy + ccydx^2 = 0; \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{16}{7}} dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} + kx^{\frac{4}{7}}\left(1 - \frac{3\cdot 5}{7^2 c^2} x^{\frac{2}{7}}\right) \text{sin.}\left(\theta + 7cx^{-\frac{1}{7}}\right) \\ + kx^{\frac{4}{7}}\left(\frac{2\cdot 3}{7c} x^{\frac{1}{7}} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{7^3 c^3} x^{\frac{3}{7}}\right) \text{cos.}\left(\theta + 7cx^{-\frac{1}{7}}\right) \end{cases}$$

Casus IX $(m = -\frac{1}{9})$

$$x^{\frac{16}{9}} ddy + ccydx^2 = 0 \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{16}{9}} dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} + kx^{\frac{4}{9}}\left(1 - \frac{9\cdot 5}{9^2 c^2} x^{-\frac{2}{9}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{9^4 c^4} x^{-\frac{4}{9}}\right) \text{sin.}\left(\theta - 9cx^{\frac{1}{9}}\right) \\ - kx^{\frac{4}{9}}\left(\frac{10}{9c} x^{-\frac{1}{9}} - \frac{3\cdot 5\cdot 7}{9^3 c^3} x^{-\frac{3}{9}}\right) \text{cos.}\left(\theta - 9cx^{\frac{1}{9}}\right) \end{cases}$$

Casus X $(m = +\frac{1}{9})$

$$x^{\frac{20}{9}} ddy + ccydx^2 = 0; \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{20}{9}} dx = 0,$$

erit

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{5}{9}}\left(1-\frac{9\cdot 5}{9^2c^2}x^{\frac{2}{9}}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{9^4c^4}x^{\frac{4}{9}}\right)\text{fin.}\left(\theta+9cx^{-\frac{1}{9}}\right) \\ +kx^{\frac{5}{9}}\left(\frac{10}{9c}x^{\frac{1}{9}}-\frac{3\cdot 5\cdot 7}{9^3c^3}x^{\frac{3}{9}}\right)\text{cof.}\left(\theta+9cx^{-\frac{1}{9}}\right) \end{cases}$$

Cafus XI $(m=-\frac{1}{11})$

$$x^{\frac{20}{11}}ddy+ccydx^2=0;\ \text{et}\ dz+zzdx+ccx^{-\frac{20}{11}}dx=0,$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{5}{11}}\left(1-\frac{21\cdot 5}{11^2c^2}x^{-\frac{2}{11}}+\frac{5\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{11^4c^4}x^{-\frac{4}{11}}\right)\text{fin.}\left(\theta-11cx^{\frac{1}{11}}\right) \\ -kx^{\frac{5}{11}}\left(\frac{15}{11c}x^{-\frac{1}{11}}-\frac{4\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{11^3c^3}x^{-\frac{3}{11}}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{11^3c^4}x^{-\frac{5}{11}}\right)\text{cof.}\left(\theta-11cx^{\frac{1}{11}}\right) \end{cases}$$

Cafus XII $(m=+\frac{1}{11})$

$$x^{\frac{24}{11}}ddy+ccydx^2=0;\ \text{et}\ dz+zzdx+ccx^{-\frac{24}{11}}dx=0,$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{6}{11}}\left(1-\frac{21\cdot 5}{11^2c^2}x^{\frac{2}{11}}+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{11^4c^4}x^{\frac{4}{11}}\right)\text{fin.}\left(\theta-11cx^{-\frac{1}{11}}\right) \\ +kx^{\frac{6}{11}}\left(\frac{15}{11c}x^{\frac{1}{11}}-\frac{4\cdot 7\cdot 5\cdot 7}{11^3c^3}x^{\frac{3}{11}}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{11^5c^5}x^{\frac{5}{11}}\right)\text{cof.}\left(\theta+11cx^{-\frac{1}{11}}\right) \end{cases}$$

Cafus XIII $(m=-\frac{1}{13})$

$$x^{\frac{24}{13}}ddy+ccydx^2=0;\ \text{et}\ dz+zzdx+ccx^{-\frac{24}{13}}dx=0,$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{6}{13}}\left(1-\frac{6\cdot 5\cdot 7}{13^2c^2}x^{-\frac{2}{13}}+\frac{5\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{13^4c^4}x^{-\frac{4}{13}}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{13^5c^5}x^{-\frac{6}{13}}\right)\text{fin}\left(\theta-13cx^{\frac{1}{13}}\right) \\ -kx^{\frac{6}{13}}\left(\frac{3\cdot 7}{13c}x^{-\frac{1}{13}}-\frac{4\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{13^3c^3}x^{-\frac{3}{13}}+\frac{5\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{13^5c^5}x^{-\frac{5}{13}}\right)\text{cof.}\left(\theta-13cx^{\frac{1}{13}}\right) \end{cases}$$

Cafus XIV $(m=+\frac{1}{13})$

$$x^{\frac{28}{13}}ddy+ccydx^2=0;\ \text{et}\ dz+zzdx+ccx^{-\frac{28}{13}}dx=0,$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{7}{13}}\left(1-\frac{6\cdot 5\cdot 7}{13^2c^2}x^{\frac{2}{13}}+\frac{5\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{13^4c^4}x^{\frac{4}{13}}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{13^5c^5}x^{\frac{6}{13}}\right)\text{fin.}\left(\theta+13cx^{-\frac{1}{13}}\right) \\ +kx^{\frac{7}{13}}\left(\frac{3\cdot 7}{13c}x^{\frac{1}{13}}-\frac{4\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{13^3c^3}x^{\frac{3}{13}}+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{13^5c^5}x^{\frac{5}{13}}\right)\text{cof.}\left(\theta+13cx^{-\frac{1}{13}}\right). \end{cases}$$

Ex

Ex his autem singulis valoribus ipsius y eruitur valor ipsius $z = \frac{dy}{y\,dx}$.

80. Quod ad ordinem coefficientium in his expressionibus attinet, is facillime perspicitur, si numeri impares pro i substituendi distinguantur, prout sint formae vel $4n+1$, vel $4n-1$:

I. Ita si sit $m = \frac{1}{4n+1}$ seu $i = 4n+1$, erit

$$A = \frac{n}{1} \cdot \frac{(2n+1)}{ic}$$

$$B = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{i^2 c^2}$$

$$C = \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{i^3 c^3}$$

$$D = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{i^4 c^4}$$

$$E = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{i^5 c^6}$$

etc.

II. Si sit $m = \frac{1}{4n-1}$ seu $i = 4n-1$, erit

$$A = \frac{n}{1} \cdot \frac{(2n-1)}{ic}$$

$$B = \frac{(n-1)n}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{i^2 c^2}$$

$$C = \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(2n-3)(2n-1)(2n+1)}{i^3 c^3}$$

$$D = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{i^4 c^4}$$

$$E = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{(2n-5)(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{i^5 c^5}$$

etc.