



INVESTIGATIO FUNCTIONVM EX DATA DIFFERENTIALIVM CONDITIONE.

A u t o r e

L. E V L E R O.

1.

Si V denotet functionem quamcunque binarum variabilium x et y , eaque differentietur, ut prodeat eius differentiale:

$$dV = P dx + Q dy$$

tum vero hae duae quantitates P et Q denuo differentientur, sicque proveniat:

$$dP = p dx + r dy \quad \text{et} \quad dq = s dx + q dy$$

notum est, semper fore $r = s$. Quam proprietatem quoque ita exprimere soleo, ut dicam, esse:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

Huiusmodi scilicet expressione $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ indico, functionem P ita differentiari, ut sola quantitas y pro variabili habeatur, et differentiale resultans per dy dividi, quo pacto, quantitas finita a differentialibus libera proveniat, necesse est.

2. Quodsi ergo formula $P dx + Q dy$ ita fuerit comparata, ut secundum hanc scribendi rationem in ea sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, hinc vicissim concludimus, istam formulam

mulam $Pdx + Qdy$ re vera oriri ex differentiatione cuiuspiam functionis V ipsarum x et y . Cum autem haec proprietas latissime pateat, plus inde concludere non licet, quam formulam $Pdx + Qdy$ esse integrabilem, neque quicquam per hanc solam conditionem in genere definitur, unde vlla peculiaris proprietas eius functionis, ex cuius differentiatione est nata, colligi possit.

3. Quando autem functio V ad certum quoddam genus refertur, tum posito $dV = Pdx + Qdy$, inter quantitates P et Q , praeter illam generalem affectionem, alia quaedam particularis relatio intercedit. Ita monimus, si V sit functio nullius dimensionis binarum variabilium x et y , tum praeter illam generalem proprietatem, qua est $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$, inuper hanc particularem locum semper habere, ut sit: $Px + Qy = 0$. Deinde simili modo demonstratum extat, si V sit functio homogenea binarum variabilium x et y , cuius dimensionum numerus sit $= n$, eius differentiale $dV = Pdx + Qdy$ semper ita esse comparatum, ut sit

$$nV = Px + Qy.$$

Quo ergo casu hoc imprimis notatu dignum occurrit, quod formulae differentialis $Pdx + Qdy$ integrale statim assignari possit, cum sit $V = \frac{1}{n}(Px + Qy)$.

4. Quae cum sint demonstrata, iam pridem in mentem mihi venit, huiusmodi quaestiones inuerto modo tractare, atque in methodum inquirere, cuius ope, si

posito $dV = Pdx + Qdy$, compertum sit, esse vel $Px + Qy = 0$, vel $Px + Qy = nV$, vicissim inueniri possit, functionem V vel esse nullius dimensionis, vel esse functionem homogeneam, in qua binae variables x et y vbique n dimensiones adimpleant. Scilicet nullo respectu, ad illas proprietates iam cognitatas habito, ex hoc solo, quod sit vel $Px + Qy = 0$, vel $Px + Qy = nV$, per legitima analyseos ratiocinia, elici oportet, functionem finitam V hac proprietate praeditam esse, vt vel sit nullius dimensionis, vel homogenea n dimensionum. Intelligendum autem est, proprietatem generalem $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$ semper locum habere debere, sine qua aequatio $dV = Pdx + Qdy$ adeo effectus absurda.

5. Hae quaestiones, quae vix adhuc tactae videntur, amplissimum aperiant campum, fines analyseos ulterius extendendi. Proposita namque aequatione: $dV = Pdx + Qdy$, quaeri potest, indoles functionis V , si relatio quaecunque inter binas quantitates P et Q vel adeo inter ternas P , Q et V proponatur. Huiusmodi autem quaestiones etiam si pene nouae videantur, tamen nullum est dubium, quin methodus eas rite resoluedi, maximam per totam mathesin allatura sit utilitatem. In problemate enim de cordis vibrantibus tota vis solutionis ad hoc genus est referenda, cum certa quadam relatione inter quantitates P et Q contineatur. Deinde etiam vniuersam motus fluidorum scientiam in huiusmodi formulis differentialibus sum complexus, vbi certa quaedam relatio inter partes differentialium praescribitur, ex qua autem ob defectum talis methodi vix quicquam concludere licet.

6. Huiusmodi autem quaestiones etiam alio modo proponi possunt, ut solius functionis V , cuius natura quaeritur, mentio occurrat. Cum enim, posito $dV = P dx + Q dy$; sit $P = \left(\frac{dV}{dx}\right)$ et $Q = \left(\frac{dV}{dy}\right)$, prior quaestio ita enunciari poterit:

Invenire indolem functionis V , ut sit:

$$x\left(\frac{dV}{dx}\right) + y\left(\frac{dV}{dy}\right) = 0$$

posterior vero hoc modo;

Invenire indolem functionis V , ut sit:

$$x\left(\frac{dV}{dx}\right) + y\left(\frac{dV}{dy}\right) = nV$$

ac priori quidem ostendi debet, V esse functionem nullius dimensionis ipsarum x et y ; posteriori vero, esse earundem functionem homogeneam n dimensionum. Hoc scribendi autem modo in genere tenendum est, esse:

$$dV = dx\left(\frac{dV}{dx}\right) + dy\left(\frac{dV}{dy}\right)$$

7. Problema igitur latius patens ita se habebit, ut proposita quacunque relatione inter quantitates V , $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ definiri debeat, qualis functio sit V ipsarum x et y . Deinde etiam huiusmodi quaestiones ad functiones trium plurimue variabilium extendi possunt; quin etiam quantitates ex duplici vel triplici differentiatione oriundae introduci possunt; cuiusmodi sunt $\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)$; $\left(\frac{d^2V}{dx dy}\right)$; $\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)$; $\left(\frac{d^3V}{dx^3}\right)$; $\left(\frac{d^3V}{dx^2 dy}\right)$ etc. quarum significatus ita se habet, ut verbi gratia $\left(\frac{d^3V}{dx^2 dy}\right)$ oriatur, si primo V differentietur sola x variabili sumpta; et differentiale per dx diuidatur, ut prodeat $\left(\frac{dV}{dx}\right)$; tum vero haec quantitas denuo differentietur, sola x variabilis

sumta, ut eius differentiale per dx diuisum praebet $(\frac{d^2V}{dx^2})$, quod denique rursus differentiatum, sumta sola y variabili, et per dy diuisum, dabit $(\frac{d^2V}{dx \cdot dy})$.

8. Dum autem hunc signandi modum recipimus, notandum est, esse:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2V}{dx \cdot dy}\right) &= \left(\frac{d^2V}{dy \cdot dx}\right) \text{ et} \\ \left(\frac{d^3V}{dx^2 \cdot dy}\right) &= \left(\frac{d^3V}{dx \cdot dy \cdot dx}\right) = \left(\frac{d^3V}{dy \cdot dx^2}\right) \end{aligned}$$

Perinde scilicet est, quoniam ordine quantitates x et y , quarum alterutra in qualibet differentiatione sola variabilis assumitur, disponantur, dummodo praescriptus differentiationum numerus instituat. Quin etiam si V sit functio trium variabilium x, y, z , similis conuenientia locum habet; erit enim:

$$\left(\frac{d^3V}{dx \cdot dy \cdot dz}\right) = \left(\frac{d^3V}{dx \cdot dz \cdot dy}\right) = \left(\frac{d^3V}{dy \cdot dx \cdot dz}\right) = \left(\frac{d^3V}{dy \cdot dz \cdot dx}\right) = \left(\frac{d^3V}{dz \cdot dx \cdot dy}\right) = \left(\frac{d^3V}{dz \cdot dy \cdot dx}\right)$$

hic autem meas inuestigationes tantum ad functiones duarum variabilium restringam.

9. Hoc modo deducimur non solum ad insolitas et etiamnum vix tractatas quaestiones, sed etiam ad nova signa, quibus adhuc parum sumus adfueri; vnde haec methodus, cuius culturam tantopere expetere debemus, non immerito tanquam noua plane Analyseos pars est spectanda. Non parum igitur mihi praestitisse videbor, si prima tantum istius methodi fundamenta constituero, neque ob rei nouitatem vix minimam aedificii iis superstruendi partem polliceri audeo. Tempore sine dubio haud exiguo et indefesso labore opus erit, antequam istam Analyseos partem, in se certe

certe difficillimam, non dicam perficere, sed tantum ad vberiore[m] vsum accommodare liceat. Quam ob rem ea, quae mihi adhuc in hoc genere sunt reperta, ordine ac dilucide exponere constitui, quo aliis, quos dignitas argumenti ad eundem laborem suscipiendum alluciet, prima quasi obstacula de via remoueam, animosque ad nouum hoc inuestigationum genus praeparem.

20. Antequam autem hoc munere fungar, principia quaedam per se perspicua praemittenda sentio. Primo scilicet, si fuerit $(\frac{dV}{dx}) = 0$, intelligitur, functionem V prorsus non ab x pendere, sed ex sola altera variabili y cum constantibus esse conflatam, sicque etiam formam $(\frac{dV}{dy})$ fore functionem ipsius y tantum. Vicissim autem si $(\frac{dV}{dy})$ fuerit functio ipsius y tantum, ipsa quantitas V erit aggregatum ex functione ipsius y tantum, et ex functione ipsius x tantum; quo ergo casu forma $(\frac{dV}{dx})$ erit functio ipsius x tantum. Deinde si fuerit $dV = R ds$, necesse est, vt R sit functio ipsius S, vel S ipsius R, vnde et V erit functio ipsius S, vel ipsius R; quia alioquin integrale $\int R ds$ non determinaretur. His igitur positis principiis primum binas quaestiones initio memoratas, quae huic inuestigationi ansam praebuerunt, resoluam, deinceps ad alias progressurus.

Problema I.

11. Existente $dV = P dx + Q dy$, si fuerit $Px + Qy = 0$, inuenire, qualis V sit functio ipsarum x et y , vt huic conditioni satisfiat.

Solutio.

Solutio.

Cum igitur inter quantitates P et Q haec conditio praescribatur, ut sit $Px + Qy = 0$, erit $Q = -P\frac{x}{y}$, qui valor in aequalitate $dV = Pdx + Qdy$ substitutus dabit :

$$dV = P\left(dx - \frac{xdy}{y}\right) = \frac{P(ydx - xdy)}{y}$$

neceffe igitur est, ut formula $\frac{P(ydx - xdy)}{y}$ sit integrabilis. Quae ut ad formam RdS perducatur, ita representetur :

$$dV = Py \cdot \frac{ydx - xdy}{yy}$$

Sumto enim $\frac{ydx - xdy}{yy} = dS$ et $S = \frac{x}{y}$, cum sit $dV = PydS$, necesse est, ut Py sit functio ipsius S , ideoque et V erit functio ipsius S , hoc est, ipsius $\frac{x}{y}$. Proprietas igitur praescripta, qua est $Px + Qy = 0$, huiusmodi indolem functionis V declarat, ut sit V functio quaecunque ipsius $\frac{x}{y}$; hinc autem manifestum est, pro V prodire functionem nullius dimensionis ipsarum x et y .

Coroll. 1.

12. Quodsi ergo ob $P = \left(\frac{dV}{dx}\right)$ et $Q = \left(\frac{dV}{dy}\right)$ haec proprietas functionis V proponitur, ut sit $x\left(\frac{dV}{dx}\right) + y\left(\frac{dV}{dy}\right) = 0$ inde certo concludimus, V esse functionem formulae $\frac{x}{y}$ seu, quod eodem redit, esse functionem nullius dimensionis ipsarum x et y .

Coroll. 2.

13. Vicissim ergo hinc id, quod quidem iam dudum constat, confirmatur, ut, quoties fuerit V functio

ctio nullius dimensionis ipsarum x et y , toties quoque fore $x(\frac{dV}{dx}) + y(\frac{dV}{dy}) = 0$. Verum vti hoc facillime ostenditur, ita eius inuersum singulari demonstratione indigebat.

Scholion.

14. Vis huius solutionis in eo est posita, quod differentiale functionis V ad istam formam $dV = R dS$ reducerim, ex qua, cum vnicum differentiale dS contineat, liquido sequebatur, V esse functionem quantitatis S tantum; erat autem $S = \frac{x}{y}$, et notum est, omnes functiones ipsius $\frac{x}{y}$ simul esse functiones nullius dimensionis et vicissim. Eodem ergo principio in solutione sequentium problematum vtendum esse intelligetur. Caeterum sine litteris P et Q problema tam proponi, quam resolui, potuisset: si scilicet quaeri debeat indoles functionis V , vt sit $x(\frac{dV}{dx}) + y(\frac{dV}{dy}) = 0$, cum sit $dV = dx(\frac{dV}{dx}) + dy(\frac{dV}{dy})$, ob $(\frac{dV}{dy}) = -\frac{x}{y}(\frac{dV}{dx})$, erit

$$dV = (dx - \frac{x dy}{y}) \cdot (\frac{dV}{dx}) = y(\frac{dV}{dx}) \cdot d \cdot \frac{x}{y}$$

manifestum est, V necessario esse debere huius vnus quantitatis $\frac{x}{y}$. Quemadmodum autem, si fuerit $dV = R dr$, recte concluditur, esse V functionem ipsius r tantum, ita porro, si fuerit $dV = R dr + S ds$, concludere debemus, V esse functionem binarum variabilium r et s ; quod principium vtilitatem habebit, in indaganda indole functionum trium variabilium, dum quaequam conditio differentialium proponitur.

Problema 2.

15. Existente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V , ut fiat $Px + Qy = nV$, denotante n numerum quemcunque.

Solutio.

Ex conditione praescripta $Px + Qy = nV$ eliciatur altera quantatum P et Q , puta $Q = \frac{nQ}{y} - \frac{Px}{y}$, qui valor in aequalitate differentiali substitutus dabit:

$$dV = Pdx + \frac{nVdy}{y} - \frac{Px dy}{y}$$

cui statim ista forma inducatur:

$$dV - \frac{nVdy}{y} = Py \frac{(y dx - x dy)}{y^2} = Py d \frac{x}{y}$$

quae, ut prius membrum integrabile reddatur, per y^{-n} multiplicetur, sicque prodibit:

$$d \cdot y^{-n} V = Py^{1-n} d \frac{x}{y}$$

vnde concludimus, esse $y^{-n} V$ functionem quantitatis $\frac{x}{y}$, seu functionem nullius dimensionis binarum variabilium x et y . Denotet ergo Z huiusmodi functionem quamcunque nullius dimensionis, et cum sit $y^{-n} V = Z$, erit $V = y^n Z$; talis autem expressio continet omnes functiones homogeneas ipsarum x et y , quarum dimensionum numerus est $= n$.

Coroll. I.

16. Quando ergo nouerimus, functionem V eius esse indolis, ut sit $nV = x \left(\frac{dV}{dx} \right) + y \left(\frac{dV}{dy} \right)$, pro certo affirmare poterimus, V esse functionem homogeneam,

in

in qua binæ variables vbique n dimensiones adimpleant.

Coroll. 2.

17. Quodsi ergo ponatur $dV = Pdx + Qdy$, erunt etiam P et Q functiones homogeneae ipsarum x et y , sed quarum dimensionum numerus est $n-1$, scilicet vno ordine inferior.

Coroll. 3.

18. Quare si P et Q fuerint functiones homogeneae binarum variabilium x et y , quarum numerus dimensionum sit idem, puta $= n-1$; ac si praeterea fuerit $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$, ita vt $Pdx + Qdy$ sit formula differentialis completa; tum eius integrale facillime assignatur. Erit quippe:

$$\int (Pdx + Qdy) = \frac{Px + Qy}{n}.$$

Dummodo ergo n non euanescat, integrale huiusmodi formularum sine vlla alia operatione exhiberi potest.

Scholion.

19. En ergo solutionem ambarum quaestionum, quas initio commemoravi; quae cum iam contineat specimen methodi, qua in hoc genere est vtendum, eandem ad solutionem aliorum similium problematum adhibere licebit. Cum igitur hic proponatur certa quaedam relatio inter functionem V et quantitates inde deriuatas $P = (\frac{dV}{dx})$ et $Q = (\frac{dV}{dy})$, ex qua indolem functionis V definiri oportet, vt ordinem quendam in huiusmodi quaestionibus seruem, quoniam tam P et Q , quam V , sunt functiones ipsarum x et y ; primum in-

dolem alterius litterarum P et Q dari assumam; deinde ad eiusmodi problemata progrediar, in quibus relatio quaedam inter P et Q praescribitur; tum vero ad talia, ubi vel inter P et V, vel inter Q et V, relatio quaedam intercedere debet. Denique vero relationem datam ad omnes tres quantitates V, P et Q extendi assumam, quemadmodum in problemate secundo est factum. Cum autem hic tantum ad quantitates V, $(\frac{dV}{dx})$, $(\frac{dV}{dy})$ respiciamus, evidens est, huiusmodi investigationes multo latius extendi posse, dum relatio praescripta alias quantitates ex V derivatas, veluti $(\frac{d^2V}{dx^2})$, $(\frac{d^2V}{dx dy})$, et $(\frac{d^2V}{dy^2})$, complectitur. Verum tantum abest, ut omnium istiusmodi problematum solutiones promittere audeam, ut potius ea tantum, quae sunt faciliora, sim euolurus. Mox enim patebit, innumerabilia eiusmodi problemata proponi posse, quorum solutiones primos hos conatus longe superent, neque antequam haec quasi nova Analyseos pars penitus fuerit exulta, sperari queant.

Problema 3.

20. Existente $dV = Pdx + Qdy$, si P fuerit functio ipsius x tantum, definite indolem functionis V.

Solutio.

Ex parte differentialis Pdx iam functionem V inuenire posse notum est, data spectata y ut constante, differentiale Pdx integratur, constans arbitraria autem adiicienda alteram variabilem y utcumque inuolueret
assumi-

assumitur. Cum igitur P sit functio ipsius x tantum, erit $\int P dx$ etiam eiusmodi functio, quae sit $=X$, et constans addenda per Y functionem quamcunque ipsius y tantum repraesentetur. Hinc ergo prodibit $V=X+Y$, seu indoles quaesita functionis V in hoc consistet, ut sit V aggregatum duarum functionum, alterius ipsius x tantum, alterius vero ipsius y tantum.

Corollarium.

21. Cum ergo hinc fiat $dV = dX + dY$, manifestum est, si P fuerit functio ipsius x tantum, tum Q fore functionem ipsius y tantum, quae quidem proprietas per se est notissima.

Problema 4.

22. Existente $dV = P dx + Q dy$, si P fuerit functio ipsius x tantum, definire indolem functionis V.

Solutio.

Cum P sit functio ipsius x tantum, ex sola parte differentialis $P dx$, spectata y ut constante, functio V ita definitur, ut sit $V = Px + Y$, denotante Y functionem quamcunque ipsius y . Quare indoles quaesita functionis V in hoc consistet, ut designantibus P et Y functiones quascunque ipsius y . forma functionis V semper sit huiusmodi $V = Px + Y$.

Coroll. 1.

23. Si ergo $P = (\frac{dV}{dx})$ sit functio ipsius x tantum, cum fiat $dV = P dx + x dP + dY$, erit $Q = \frac{x dP + dY}{dy}$, seu ob $\frac{dP}{dy} = (\frac{d^2V}{dx dy})$, fiet $Q = x(\frac{d^2V}{dx dy}) + \frac{dY}{dy}$.

Z. 3

Coroll.

Coroll. 2.

24. Quoties igitur fuerit $(\frac{dV}{dx})$ functio ipsius y tantum, toties necesse est, ut sit $(\frac{dV}{dy}) = x(\frac{d^2V}{dx dy}) + \frac{dV}{dy}$, ubi $\frac{dV}{dy}$ denotare potest functionem quamcunque ipsius y tantum. Vnde vicissim colligere licet, si fuerit $(\frac{dV}{dy}) = x(\frac{d^2V}{dx dy}) + f \cdot y$, fore $(\frac{dV}{dx})$ functionem ipsius y tantum.

Coroll. 3.

25. Simili modo ostendetur, si $Q = (\frac{dV}{dy})$ fuerit functio ipsius x tantum, fore $V = Qy + X$, denotante X functionem quamcunque ipsius x tantum: tum vero etiam, si fuerit $(\frac{dV}{dx}) = y(\frac{d^2V}{dx dy}) + f \cdot x$, fore $(\frac{dV}{dy})$ functionem ipsius x tantum.

Problema 5.

26. Existente $dV = Pdx + Qdy$, si fuerit P functio homogenea ipsarum x et y , cuius dimensionum numerus sit $= n$, definire indolem functionis V .

Solutio.

Cum P sit functio homogenea n dimensionum, si pars differentialis Pdx integretur, spectata y ut constante, integrale erit functio homogenea $n + 1$ dimensionum, sit Z talis functio homogenea quaecunque, eritque $V = Z + Y$, denotante Y functionem quamcunque ipsius y tantum, in quo consistit indoles quae sita functionis V .

Coroll.

Coroll.

27. Simili ergo modo ostendetur, si fuerit Q functio homogenea n dimensionum, fore $V = Z + X$, denotante, ut ante, Z functionem homogeneam quamcunque $n + 1$ dimensionum, et X ipsius x tantum.

Problema 6.

28. Existente $dV = P dx + Q dy$, si fuerit $Q = nP$, definire indolem functionis V .

Solutio.

Cum sit $Q = nP$, erit $dV = P(dx + ndy)$: quare, posito $x + ny = s$, fiet $dV = P ds$. Ex V valorem certum habere nequit, nisi sit P functio ipsius s , ex qua etiam V erit functio ipsius s . Consequenter si fuerit $Q = nP$, indoles quantitatis V in hoc consistet, ut sit V functio quaecunque formulae $x + ny$; seu si character Φ adhibeatur ad functionem quamcunque quantitatis, cui praefigitur, designandam, erit $V = \Phi : (x + ny)$.

Problema 7.

29. Existente $dV = P dx + Q dy$, si fuerit $Py + Qx = 0$, inuenire indolem functionis V .

Solutio.

Cum sit $Py + Qx = 0$, erit $Q = -\frac{Py}{x}$, atque hinc $dV = P dx - \frac{Py}{x} \frac{dy}{dx} = \frac{P}{x} (x dx - y dy)$. Posito ergo $xx - yy = s$, ob $x dx - y dy = \frac{1}{2} ds$, fit $dV = \frac{P}{2x} ds$. Quae
formu

formula cum per hypothesin sit integrabilis, necesse est, ut sit $\frac{P}{ax}$ functio ipsius s , unde etiam V prodibit functio ipsius $s = xx - yy$. Quocirca indoles quaesita in hoc consistet, ut V sit functio quaecunque quantitatis $xx - yy$.

Problema 8.

30. Existente $dV = Pdx + Qdy$, si fuerit $Q = Pp$, dum p exprimit functionem quamcunque datam ipsarum x et y , definire indolem functionis V .

Solutio.

Habebimus ergo $dV = Pdx + Ppdy = P(dx + pdy)$. Iam consideretur formula $dx + pdy$, quae si non fuerit per se integrabilis, dabitur multiplicator q , qui eam reddat integrabilem. Sit ergo $qdx + pqdy = ds$, eritque s functio quoque data ipsarum x et y , et ob $dx + pdy = \frac{ds}{q}$, habebitur $dV = \frac{P}{q}ds$. Necesse igitur est, ut haec formula sit integrabilis, ideoque indoles quaesita in hoc consistet, ut sit V functio quaecunque quantitatis s , quae quomodo ex x et y sit composita, ex conditione quantitatis datae p colligi debet.

Coroll. 1.

31. Problema hoc satis late patet, cum in eo ratio quaecunque inter quantitates P et Q , seu $(\frac{dy}{dx})$ et $(\frac{dx}{dy})$ proponatur. Si enim sit $P : Q = 1 : p$, quaecunque functio ipsarum x et y pro p fuerit data, qualis futura sit functio V , definiri potest.

Coroll.

Coroll. 2.

32. Quanquam autem semper multiplicator q existit, qui formulam $dx + p dy$ integrabilem reddit, tamen saepe euenire potest, vt ob defectum analyseos hic multiplicator assignari nequeat. Atque his casibus solutio problematis impeditur.

Coroll. 3.

33. Alio autem loco ostendi, huiusmodi multiplicatores semper exhiberi posse, si aequatio $dx + p dy = 0$ resolui queat. Quare nisi p eiusmodi fuerit functio ipsarum x et y , vt aequatio $dx + p dy$ resolui possit, huic analyseos defectui tribui debet, si problema resolui nequeat.

Problema 9.

34. Si sint X et Y functiones datae, illa ipsius x tantum, haec vero ipsius y tantum, tum vero p sit functio etiam data ipsarum x et y : definire indolem functionis V , vt posito $dV = P dx + Q dy$, sit $Q = (P + X)p + Y$.

Solutio.

Cum igitur sit $Q = (P + X)p + Y$, erit aequatio differentialis $dV = P dx + P p dy + X p dy + Y dy$, quae ad hanc reducitur formam:

$$dV = (P + X)(dx + p dy) - X dx + Y dy$$

vbi partes $X dx$ et $Y dy$ per se sunt integrabiles. Quaeratur ergo iterum multiplicator q formulam $dx + p dy$

integrabilem reddens, sitque $q(dx + p dy) = ds$, atque erit :

$$dV = \frac{p+x}{q} ds - X dx + Y dy$$

quae forma cum per hypothesin sit integrabilis, necesse est, ut $\frac{p+x}{q}$ sit functio ipsius s tantum, quae si ponatur $= S$, prodibit $V = \int S ds - \int X dx + \int Y dy$; quae est indoles desideratae functionis V .

Coroll. 1.

35. Cum igitur ex data functione p definiatur functio s , si pro Σ capiatur functio quaecunque huius quantitatis s , functio quaesita V ita debet esse comparata, ut sit

$$V = \Sigma - \int X dx + \int Y dy.$$

Coroll. 2.

36. Haec igitur adiectio functionum X et Y solutionem problematis non reddidit difficiliorem; dummodo X sit functio ipsius x tantum, et Y ipsius y tantum. Verum solutio, ut ante, pendet a resolutione aequationis differentialis $dx + p dy = 0$, quae si vires nostras superet, etiam problema resolvere non valemus.

Coroll. 3.

37. Possunt etiam loco X et Y aliae functiones binarum variabilium x et y , puta M et N , assumi, dummodo formula $M dx + N dy$ integrationem admittat. Si enim haec conditio proponatur, ut sit $Q - N = (P - M)p$, functio quaesita V ita prodibit expressa :

$$V = \Sigma + \int (M dx + N dy).$$

Problema

Problema 10.

38. Existente $dV = P dx + Q dy$, inuenire, qualis sit V functio ipsarum x et y , vt fiat $Q = \frac{Py}{x} + nx$.

Solutio.

Cum sit $Q = \frac{Py}{x} + nx$, erit $dV = \frac{P}{x}(x dx + y dy) + n x dy$. Statuatur $xx + yy = ss$, vt sit $x = \sqrt{ss - yy}$, ac fiet

$$dV = \frac{Ps}{x} ds + n x dy = \frac{Ps}{x} ds + n dy \sqrt{ss - yy}$$

vnde patet, V esse functionem ipsarum y et s , et quidem talem, vt posita s constante ea differentiata praebeat $n dy \sqrt{ss - yy}$. Quare vicissim functio V reperiatur, si formula $n dy \sqrt{ss - yy}$, spectato s vt constante, integretur, et insuper functio quaecunque ipsius adiaciatur. Cum igitur sit $\int n dy \sqrt{ss - yy} = \frac{1}{2} n y \sqrt{ss - yy} + \frac{1}{2} n s s A \sin. \frac{y}{s}$, erit Φ pro signo functionis cuiuscunque assumendo:

$$V = \frac{1}{2} n x y + \frac{1}{2} n (xx + yy) A \text{ tang. } \frac{y}{x} + \Phi: (xx + yy)$$

in qua forma functio quaesita V semper debet contineri.

Scholion.

39. Hoc exemplum, vtut valde particulare, tamen non continetur in problemate praecedente, neque in eius amplificatione ipsi in coroll. postremo illata, quoniam in formula reducta membrum $n x dy = n dy \sqrt{ss - yy}$ non est integrabile. Quare probe notetur artificium, quo hic sum vsus, et quod in hoc

consistit, quod valorem differentialis dV ad duas alias variables s et y , scilicet $dV = R ds + T dy$, resocavi, cuius alterum membrum $T dy$ absolute datur, unde problema ad primum genus pertinet, in quo binarum quantitatum P et Q alterutra est cognita. Huiusque artificii ope problema sequens multo latius patens resolui poterit.

Problema II.

40. Si sint p et t functiones datae quaecumque binarum variabilium x et y , definire indolem functionis V , ut posito $dV = P dx + Q dy$ sit $Q = Pp + t$.

Solutio.

Habebitur ergo, substituto pro Q isto valore:

$$dV = P(dx + p dy) + t dy$$

vbi pro formula differentiali $dx + p dy$ iterum idoneus multiplicator q quaeratur, qui eam integrabilem reddat. Sit ergo $q(dx + p dy) = ds$, et iam quantitas s tanquam nova variabilis introducatur, per quam et y altera variabilis x definiatur. Hoc modo x aequabitur cuiuspiam functioni datae ipsarum s et y , quae in t ubique loco x scribatur, sicque fiet t functio quoque data ipsarum s et y . Cum ergo ob $dx + p dy = \frac{ds}{q}$ sit $dV = \frac{P}{q} ds + t dy$, erit V eiusmodi functio ipsarum s et y , quae spectata s ut constante differentiatu praebet $t dy$, quare vicissim pro functione V invenienda integretur formula differentialis $t dy$, spectata s ut constante, sit integrale hoc modo proveniens $\int t dy = T$, quod igitur etiam datur, tum quia quantitas P non datur,

datur, erit $V = T + \Phi \cdot s$. Denique hic pro s et in T restituatur valor ipsius s vi x et y , atque patebit, quomodo functio V ex x et y sit composita.

Exemplum.

41. Quærat^rur indoles functionis V , ut posita $V = Pdx + Qdy$, sit $Px + Qy = n(xx + yy)$

Cum ergo sit $Q = -\frac{Px}{y} + \frac{n(xx + yy)}{y}$, erit $p = -\frac{x}{y}$ et $t = \frac{n(xx + yy)}{y}$, vnde $dx + pdy = dx - \frac{xdy}{y}$. Capiatur $q = \frac{x}{y}$, erit $ds = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy}$ et $s = \frac{x}{y}$; hincque $x = sy$ et $t = ny(ss + 1)$. Quare spectata s vt constante, habebitur $ft dy = \frac{1}{2}nyy(ss + 1) = \frac{1}{2}n(xx + yy) = T$; sicque tandem prodit:

$$V = \frac{1}{2}n(xx + yy) + \Phi \cdot \frac{x}{y}$$

vbi notandum est, $\Phi: \frac{x}{y}$ exprimere functionem quamcunque nullius dimensionis binarum variabilium x et y .

Scholion.

42. Feliciter igitur expediuimus casum, quo relatio inter P et Q per aequationem quamcunque primi gradus exprimitur, in qua scilicet quantitates P et Q non vltra primam dimensionem assurgunt. Ex tali enim aequatione Q semper ita definietur, vt sit $Q = Pp + t$, existentibus p et t functionibus quibuscunque datis ipsarum x et y . Verum hic iterum aqua haeret, quòries aequationem $dx + pdy = 0$ resolvere non licet, quia tum quantitas s inueniri nequit. Tum vero etiamsi haec quantitas s sit inuenta, cum fuerit imprimis transcens,

dens, ex ea plerumque difficillimum erit, variabilem x definire, ita vt tantum binæ s et y , in calculo supersint. Poterunt quidem subsidia excogitari, quibus tametsi ex functione data t variabilis x non eliminetur, tamen formulæ $t dy$ id integrale T erui queat, quod prodire debet, spectata quantitate s vt constante. Verum quantaecunque sint istae difficultates, eae non huic methodo, quam adumbrare coepi, sunt imputandae. Videamus ergo quousque nobis progredi liceat, si relatio inter P et Q per aequationem vel secundi, vel superiorum graduum detur.

Problema 12.

43 Existente $dV = P dx + Q dy$, definire indolem functionis V , vt fiat $PQ = \alpha$.

Solutio.

Cum sit $Q = \frac{\alpha}{P}$, erit $dV = P dx + \frac{\alpha dy}{P}$, quaeriturque, qualis functio debeat esse P , vt ista formula differentialis $P dx + \frac{\alpha dy}{P}$ fiat integrabilis. Adhibeamus hic transformationem integralium obuam, qua est $\int z du = zu - \int u dz$, ac reperietur:

$$V = Px + \frac{\alpha y}{P} - \int x dP + \int \frac{\alpha y dP}{PP}.$$

Quare necesse est, vt haec formula differentialis $dP(\frac{\alpha y}{PP} - x)$ integrabilis existat; id quod fieri nequit, nisi $\frac{\alpha y}{PP} - x$ sit functio ipsius P ; quo casu etiam integrale $\int dP(\frac{\alpha y}{PP} - x)$ fiet functio ipsius P . Denotet ergo Π functionem quamcunque ipsius P , ac ponatur $\frac{\alpha y}{PP} - x = \Pi$, ex cuius

ius aequationis resolutione quantitas P per x et y defini-
niri intelligitur. Inuenta autem hac functione P habebimus:

$$V = Px + \frac{\alpha y}{P} + \int \Pi dP.$$

Coroll. 1.

44. Casus ergo simplicissimus, quo huic problemati satisfacit, est si $\Pi = 0$, quo fit $P = \sqrt{\frac{\alpha y}{x}}$, et $\int \Pi dP = \text{const.}$ Habebimus ergo

$$V = 2\sqrt{\alpha xy} + \text{Const.}$$

nam ob $dV = \frac{dx\sqrt{\alpha y}}{\sqrt{x}} + \frac{dy\sqrt{\alpha x}}{\sqrt{y}}$ erit utique $PQ = \alpha$.

Coroll. 2.

45. Tum sumto $\Pi = \beta$, erit $P = \frac{\alpha y}{x + \beta}$ et $\int \Pi dP = \beta P$. Hoc ergo casu consequemur sequentem functionem satisficientem:

$$V = x\sqrt{\frac{\alpha y}{x + \beta}} + \sqrt{\alpha y(x + \beta)} + \beta\sqrt{\frac{\alpha y}{x + \beta}} = 2\sqrt{\alpha y(x + \beta)}$$

et generalius satisfacere manifestum est

$$V = 2\sqrt{\alpha(x + \beta)(y + \gamma)}.$$

Coroll. 3.

46. Si velimus functiones magis compositas, quae tamen exhiberi queant, fit $\Pi = \beta PP$, ideoque $\int \Pi dP = \frac{1}{3}\beta P^3$. At cum habeamus:

$$\frac{\alpha y}{P^2} - x = \beta PP \text{ seu } P^3 = \frac{-xP^2 + \alpha y}{\beta}, \text{ fiet}$$

$$PP = \frac{-x + \sqrt{(xx + 4\alpha\beta y)}}{2\beta}, \text{ vnde ob}$$

$$V = \frac{PPx + \alpha y + \frac{1}{3}\beta P^3}{P} = \frac{2P^2x + 4\alpha y}{3P}$$

est

et substitutione absoluta:

$$V = \sqrt{\frac{2}{9\beta}} ((xx + 4\alpha\beta y)^{\frac{3}{2}} + x(12\alpha\beta y - x^2)).$$

Scholion 1.

47. Eodem modo resolui posse patet problema, si Q debeat esse functio quaecunque ipsius P . Ponatur enim $dQ = R dP$, et fiet $V = Px + Qy - \int (x + Ry) dP$. Oportet ergo esse $x + Ry$ functionem ipsius P , cuius etiam R est functio data. Quare si ponatur, ut ante, $x + Ry = \Pi$, ex hac aequatione P per x et y definitur; quo valore deinceps in Q , R et Π substituto obtinebitur functio $V = Px + Qy - \int \Pi dP$ per solas binas variables x et y expressa.

Exemplum.

48. Quæratu'r functio V , ut posito $dV = P dx + Q dy$, sit $PP + QQ = aa$, seu $Q = \sqrt{aa - PP}$: hincque $R = \frac{-P}{\sqrt{aa - PP}}$, et $x - \frac{Py}{\sqrt{aa - PP}} = \Pi$, unde P debet defini. Sumatur autem $\Pi = 0$, fiet $P = \frac{ax}{\sqrt{xx + yy}}$, et $Q = \frac{ay}{\sqrt{xx + yy}}$, et $V = a\sqrt{xx + yy}$.

Scholion 2.

49. At si Q non solum per P detur, sed etiam variables x et y utcunque in eius determinationem ingrediantur, tum hoc modo negotium non expedire licet. Verum his casibus perpendendum est, quemadmodum P et Q ut functiones ipsarum x et y considerantur, ita quaternarum P , Q , x et y binas quasque
ut

vt functiones binarum reliquarum considerari posse. Quare quouis casu oblato non ad hanc formulam $Pdx + Qdy$ sumus adstricti, quam integrabilem reddi oporteat, sed negotium pariter conficiemus, si vel hanc $-xdP + Qdy$, vel hanc $Pdx - ydQ$, vel hanc $-xdP - ydQ$ integrabilem reddamus; quin etiam per substitutiones nouae variables introduci possunt, quo pacto methodus soluendi vehementer amplificabitur; cuius rei aliquot specimina attulisse iuuabit.

Problema 13.

50. Existente $dV = Pdx + Qdy$, si Q detur utcumque per x et P , inuenire indolem functionis V .

Solutio.

Cum Q ponatur dari per x et P , habebitur aequatio inter ternas quantitates x , P et Q , ex quo etiam P definiri poterit per x et Q , ita vt P aequetur certae cuiuspiam functioni ipsarum x et Q . Sumantur ergo x et Q pro binis variabilibus, ex quibus reliqua omnia sint determinanda, et cum sit:

$$V = Qy + f(Pdx - ydQ)$$

necesse est, vt formula differentialis $Pdx - ydQ$ sit integrabilis, cuius integrale spectetur tanquam functio ipsarum x et Q . Cum igitur P per x et Q detur, quarta autem variabilis y indefinita relinquatur, hoc integrale $f(Pdx - ydQ)$ inuenietur, si spectata Q vt constante formula Pdx integretur, et ad integrale functio quaecumque ipsius Q adiciatur. Sit igitur integra-

le hoc modo sumtum $\int P dx = R$, eritque R functio data ipsarum x et Q , vnde fiat $dR = P dx + S dQ$, vtraque scilicet quantitate x et Q pro variabili sumta. Quo posito habebimus $\int (P dx - y dQ) = R + \Phi \cdot Q$, et $V = Q y + R + \Phi \cdot Q$. Designetur iam differentiale ipsius $\Phi : Q$ per dQ . $\Phi' : Q$, eritque

$$P dx - y dQ = P dx + S dQ + dQ \cdot \Phi' : Q$$

vnde fit $y = -S - \Phi' : Q$. Denique ex hac aequatione $y = -S - \Phi' : Q$ vna cum relatione, quae inter Q , P et x intercedit, definiantur per binas variables x et y alterae binae P et Q , earumque valores restituti ostendent, qualis functio V debeat esse ipsarum x et y ; in quo id ipsum, quod quaeritur, consistit.

Coroll. 1.

51. Simili modo, si Q detur per y et P , ita, vt x non ingrediatur in hanc relationem, vtendum erit hac forma $V = Px + \int (Q dy - x dP)$, quae, cum Q considerari debeat tanquam functio data ipsarum x et P , paribus operationibus ad integrabilitatem perducetur.

Coroll. 2.

52. Quodsi autem, vel P , vel Q , per x et y determinantur, quaestio nihil habet difficultatis. Si enim sit P functio data ipsarum x et y , quaeratur integrale $\int P dx$, spectata y vt constante, positoque $\int P dx = R$, erit $V = R + \Phi : y$.

Coroll. 3.

53. Quoties ergo relatio inter quantitates P, Q, x et y per huiusmodi aequationem datur, in quam tantum ternae harum quantitatuum ingrediantur, in dotes functionis V per problemata iam tractata definiri potest.

Scholion.

54. Ex hoc ergo genere supersunt casus, quibus relatio data omnes quatuor litteras P, Q, x et y continet. At pro hoc iam eum casum euoluimus, quo erat $Q = Pp + t$, existentibus p et t functionibus quibuscunque ipsarum x et y , cuius solutio in Probl. 11 est exhibita. Quia vero loco binarum variabilium x et y , sequentia paria simili modo tractari possunt :

I. Si fit $Q = xM + N$,

existentibus M et N functionibus quibuscunque ipsarum P et y .

II. Si fit $P = yM + N$,

existentibus M et N functionibus quibuscunque ipsarum Q et x .

III. Si fit $y = xM + N$,

existentibus M et N functionibus quibuscunque ipsarum P et Q . His scilicet quoque casibus solutio per praeccepta §. 40 tradita inueniri poterit.

Exemplum.

55. Existente $dV = Pdx + Qdy$, oporteat definire functionem V , ut sit $xyPQ = a$.

B b 2

Cum

Cum ergo fit $Q = \frac{\alpha}{Pxy}$, erit

$$dV = Pdx + \frac{\alpha dy}{Pxy}$$

quī casus in nullo tractatorum continetur. Verum posito $ly = u$, cum sit $dV = Pdx + \frac{\alpha du}{Pxy}$, si u loco y spectemus, hancque formam cum $Pdx + Qdy$ comparemus, erit istud $Q = \frac{\alpha}{Pxy}$, ideoque per x et P tantum datur; ita ut hoc exemplum reductum sit ad praesens problema. Ne igitur hoc Q cum principali confundatur, cum sit $P = \frac{\alpha}{Qx}$, habebimus scribendo u loco y :

$$V = Qy + \int \left(\frac{\alpha d'x}{Qx} - y dQ \right)$$

sumta ergo Q constante, erit $\int \frac{\alpha d'x}{Qx} = R = \frac{\alpha}{Q} lx$, hincque $S = \frac{\alpha lx}{Q^2}$: unde fit $u = ly = \frac{\alpha lx}{Q^2} - \Phi' : Q$, et

$$V = Qly + \frac{\alpha lx}{Q^2} + \Phi : Q$$

existente $\Phi : Q = \int dQ \Phi' : Q$, ubi pro $\Phi' : Q$ sumi potest functio quaecunque ipsius Q .

Sit ergo pro casu simplicissimo $\Phi' : Q = 0$, eritque

$$Q = \sqrt{\frac{\alpha lx}{ly}}, \text{ et } V = 2\sqrt{\alpha lx ly} + \text{Const.}$$

Ac si sumatur $\Phi' : Q = n - \frac{\alpha m}{Q^2}$, fiet $\Phi : Q = nQ + \frac{\alpha m}{Q} + C$ et $ly + n = \frac{\alpha(lx + m)}{Q^2}$, hincque $Q = \sqrt{\alpha \frac{lx + m}{ly + n}}$, et

$$V = 2\sqrt{\alpha(lx + m)(ly + n)} + \text{Const.}$$

Problema 14.

56. Existente $dV = Pdx + Qdy$, definire integrabilem functionis V , ut fiat $PP + QQ = xx + yy$.

Solutio.

Solutio.

Hoc problema in nullo casuum hactenus tractatorum continetur; verumtamen idonea transformatione ad casum facillimum reduci potest. Ponatur enim $PP + QQ = xx + yy = tt$, sitque angulis duobus indefinitis Φ et θ introducendis :

$P = t \sin. \Phi$; $Q = t \cos. \Phi$; $x = t \sin. \theta$ et $y = t \cos. \theta$
ob $dx = dt \sin. \theta + t d\theta \cos. \theta$, et $dy = dt \cos. \theta - t d\theta \sin. \theta$, erit :
 $dV = t dt (\sin. \Phi \sin. \theta + \cos. \Phi \cos. \theta) - t d\theta (\cos. \Phi \sin. \theta - \sin. \Phi \cos. \theta)$
seu $dV = t dt \cos. (\theta - \Phi) - t d\theta \sin. (\theta - \Phi)$.

At est $\int t dt \cos. (\theta - \Phi) = \frac{1}{2} t t \cos. (\theta - \Phi) + \frac{1}{2} \int t t (d - \theta \Phi) \sin. (\theta - \Phi)$
vnde fit :

$$V = \frac{1}{2} t t \cos. (\theta - \Phi) - \frac{1}{2} \int t t (d\theta + d\Phi) \sin. (\theta - \Phi).$$

Cum igitur haec formula integrabilis esse debeat, necesse est, vt sit $t t \sin. (\theta - \Phi) = \text{funct.} (\theta + \Phi)$.

Quare cum sit $t t = xx + yy$ et $\text{tang. } \theta = \frac{x}{y}$, hinc angulus Φ per x et y determinabitur, cuius valor substitutus dabit functionem V , per x et y expressam.

Sit, vt functiones algebraicas simpliciores eliciamus,

$$t t \sin. (\theta - \Phi) = \alpha \sin. (\theta + \Phi) + \beta \cos. (\theta + \Phi), \text{ eritque}$$

$$V = \frac{1}{2} t t \cos. (\theta - \Phi) + \frac{1}{2} \alpha \cos. (\theta + \Phi) - \frac{1}{2} \beta \sin. (\theta + \Phi)$$

vnde, si eliminetur $t t$, prodit :

$$x V \sin. (\theta - \Phi) = \alpha \sin. 2\theta + \beta \cos. 2\theta = \frac{2\alpha xy - \beta(xx - yy)}{xx + yy}.$$

At euolutis illis angulis, fit :

$$t t x \cos. \Phi - t t y \sin. \Phi = \alpha x \cos. \Phi + \alpha y \sin. \Phi + \beta y \cos. \Phi - \beta x \sin. \Phi$$

$$\text{ideoque tang. } \Phi = \frac{t t x + \alpha x - \beta y}{t t y + \alpha y - \beta x} \text{ et}$$

B b 3

fec.

$$\text{féc. } \Phi = \frac{\sqrt{(t^6 - 2\alpha t(xx - yy) - 4\beta txy + \alpha\alpha t + \beta\beta t)}}{t^2y + \alpha y - \beta x}$$

$$\text{fit } T = t\sqrt{(t^4 - 2\alpha(xx - yy) - 4\beta xy + \alpha\alpha + \beta\beta)}$$

$$\text{erit si } \Phi = \frac{t^2x - \alpha x - \beta y}{T} \text{ et } \cos. \Phi = \frac{t^2y + \alpha y - \beta x}{T}$$

hincque sin. $(\theta - \Phi) = \frac{2\alpha xy - \beta(xx - yy)}{T}$, quo valore substituto, orietur $V = \frac{T}{2t}$ ideoque

$$V = \frac{1}{2} \sqrt{((xx + yy)^2 - 2\alpha(xx - yy) - 4\beta xy + \alpha\alpha + \beta\beta)}$$

quae functio etiam hoc modo repraesentari potest:

$$V = \frac{1}{2} \sqrt{(\alpha - xx + yy)^2 + (\beta - 2xy)^2}.$$

Casus simplicissimus prodit sumendo $\alpha = 0$, et $\beta = 0$, quo fit $V = \frac{1}{2}(xx + yy)$, et $dV = xdx + ydy$.

Scholion.

57. Ex hoc problemate intelligitur, quomodo huiusmodi quaestiones, quae dum omnes quatuor litterae in relationem praescriptam ingrediuntur, soluta difficillimae videntur, idonea tamen substitutione interdum ad casus iam tractatos reduci queant. Neque vero adhuc modum perspicio, quo in genere, utcumque relatio inter quatuor quantitates P , Q , x et y fuerit comparata, solutio obtineri possit; plurima autem alia huiusmodi exempla afferre possem, in quibus reductio ad casus iam tractatos perfici queat; sed quia hoc argumentum minime exhaurire confido, ad sequentia capita progredior, quando relatio praescripta praeter quantitates P , Q , x et y etiam ipsam functionem quaesitam V complectitur: ubi quidem per se est perspicuum, si relatio inter V , x et y tantum proponeretur, ne quaestionem quidem fore, cum functio V im-

media-

mediate per x et y daretur. Quare ab eiusmodi problematibus exordiar, vbi relatio praescripta praeter functionem V alterutram quantitatum P et Q vel etiam ambas implicat; dum variables x et y ipsae vel simul ingrediuntur, vel secus. Facile autem intelligitur, haec problemata multo esse difficiliora praecedentibus.

Problema 15.

58. Existente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V , vt fiat $P = nV$.

Solutio.

Cum sit $P = nV$, erit $dV = nVdx + Qdy$, seu $dV - nVdx = Qdy$. Multiplicetur prius membrum per e^{-nx} , vt fiat integrabile, eiusque integrale $e^{-nx}V = \int e^{-nx}Qdy$ aequari debet functioni cuiunque ipsius y , quae sit $= Y$. Vnde functio quaesita erit $V = e^{nx}Y$.

Aliter.

Cum V debeat esse eiusmodi functio ipsarum x et y , vt eius differentiale sit $dV = nVdx + Qdy$; perspicuum est, si functio V differentiatur posita y constante, proditurum esse $dV = nVdx$. Quare vicissim ex integratione formulae $dV = nVdx$ functio V inuenitur, si y vt constans spectetur; tum vero constans per integrationem ingressa quantitatem y vtrunque involuere poterit. At aequatio $dV = nVdx$ integrata praebet $V = nx + Y$, seu $V = e^{nx}Y$ vt ante.

Coroll.

Coroll. 1.

59. Eodem modo resolvi poterit quaestio latius patens, si P debeat esse functio quaecunque ipsius V . Consideretur enim, spectata y ut constante, haec aequatio differentialis $dV = Pdx$, quae cum duas tantum variables contineat V et x integretur, constanti autem ingressa quantitas y utcunque inuoluatur.

Coroll. 2.

60. Quia binae variables x et y sunt inter se permutabiles, eodem modo resoluitur problema, si Q debeat esse functio quaecunque ipsius V .

Problema 16.

61. Existente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V , ut P fiat functio quaecunque ipsarum V et x .

Solutio.

Cum igitur P detur per V et x , si y ut constantem spectemus, habebimus hanc aequationem $dV = Pdx$ inter duas variables x et V . Integretur itaque ea, et loco constantis in aequationem integram introducatur functio quaecunque ipsius y ; hoc modo obtinebitur aequatio inter V , x et y , qua indoles functionis V per x et y definietur.

Coroll. 1.

62. Quaecunque igitur relatio inter ternas quantitates V , P et x proponatur, siue ex ea V per x et

et P, siue P per V et x; siue x per V et P definiatur, solutio problematis semper erit in promptu.

Coroll. 2.

63. Ob permutabilitatem variabilium x et y, eodem modo problema soluetur, si relatio quaecunque inter Q, V et y proponatur: neque opus est, ut hunc casum seorsim euoluamus.

Exemplum 1.

64. Posito $dV = Pdx + Qdy$ oporteat esse $P = \frac{mV}{x}$
 ~~$+ nx^m$~~ ; spectata ergo y vt constante, erit $dV = \frac{mV}{x} dx$
 ~~$+ nx^m dx$~~ seu $dV - \frac{mV}{x} dx = nx^m dx$, cuius integralis est

$$\frac{V}{x^m} = \frac{nx^{m+1}}{m+1} + Y$$

existente Y functione quacunque ipsius y. Quare erit

$V = x^m Y + \frac{n}{m+1} x^{m+1}$
 si esset $m=2$, foret $V = xxY + nxx/x$

Exemplum 2.

65. Posito $dV = Pdx + Qdy$ oporteat esse
 $dV = P(aa - xx)$.

Cum ergo sit $P = \frac{aV}{aa - xx}$ erit, sumta y constante:

$$dV = \frac{aV dx}{aa - xx} \text{ seu } \frac{dV}{V} = \frac{a dx}{aa - xx},$$

cuius integrale est $\int V = \frac{1}{2} \int \frac{a + x}{a - x} V dx$, vnde habebitur
 $V = Y \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, denotante Y functionem quacunque ipsius y.

Problema 17.

65. Existente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V , si P fiat functio quaecunque data ipsarum x , y et V .

Solutio.

Assumo hic, relationem propositam contineri aequatione quacunque inter quatuor quantitates x , y , V et P ; ex qua idcirco P per x , y et V definire liceat. Spectetur igitur y ut quantitas constans, et cum sit $dV = Pdx$, haec aequatio iam duas tantum variables x et V inuoluet. Integretur igitur ea, et loco constantis introducatur functio quaecunque ipsius y , hocque modo prodibit aequatio, naturam functionis V ostendens.

Corollarium.

67. Simili ergo modo problema soluetur, si proponatur relatio quacunque inter quatuor quantitates x , y , Q et V , quo casu hoc tantum discrimen obseruetur, ut primam quantitas x tanquam constans spectetur.

Exemplum.

68. Posita $dV = Pdx + Qdy$, oporteat esse $V = \frac{Px}{y}$.

Cum igitur sit $P = \frac{Vy}{x}$, erit, sumta y constante:

$$dV = \frac{Vy dx}{x}, \text{ ideoque } dV = y/x + dY$$

unde prodit functio quaesita $V = x^2 Y$.

Scholion.

Scholion.

69. Quodsi ergo in relationem propositam alterutra tantum quantitatam P et Q ingrediatur, problemata sunt solutu facilia. Verum si vtraque quantitas P et Q insit, maior difficultas occurrit, quae quandoque tanta est, vt superari nullo modo queat. Quoniam igitur hoc casu solutionem generalem expectare non licet, nonnulla exempla, quae quidem satis late pateant, percurramus.

Problema 18.

70. Existente $dV = Pdx + Qdy$, inuenire indolem functionis V, vt fiat $V = mPx + nQy$.

Solutio.

Cum hinc sit $Q = \frac{V - mPx}{ny}$, erit

$$dV - \frac{Vdy}{ny} = Pdx - \frac{mPx dy}{ny} = \frac{P}{ny}(nydx - mxdy).$$

Quaeratur multiplicator, qui formulam $nydx - mxdy$ reddat integrabilem, qui cum sit $\frac{1}{xy}$, ideoque

$$dV - \frac{Vdy}{ny} = \frac{Px}{n} \left(\frac{ndx}{x} - \frac{m dy}{y} \right)$$

ponatur $nlx - mly = lz$ seu $z = \frac{x^n}{y^m}$; vnde fit $x = y^{\frac{m}{n}} z^{\frac{n}{n-m}}$,

qui valor loco x substitui concipiatur. Quare cum sit $dV = \frac{Vdy}{ny} + \frac{Px dz}{nz}$; quantitas V spectari poterit tanquam functio binarum quantitatam y et z; quae igitur talis esse debet, vt sumta z constante fiat $dV = \frac{Vdy}{ny}$. Hinc ergo integrando prodibit:

$$lV = \frac{1}{n}ly + lZ \text{ seu } V = y^{\frac{1}{n}}Z$$

C c 2

sumta

sumta pro Z functione quacunq̄ue ipsius $z = \frac{x^n}{y^m}$: sicque
 habebitur $V = y^{\frac{1}{n}} \Phi : \frac{x^n}{y^m}$.

Coroll. 1.

71. Cum sit $\frac{x^{\frac{1}{m}}}{y^{\frac{1}{n}}}$ functio ipsius $\frac{x^n}{y^m}$, erit etiam
 $V = x^{\frac{1}{m}} \Phi \frac{x^n}{y^m}$. Tum vero etiam ita exhiberi potest:
 $V = x^{\frac{1}{m}} \Phi \frac{x^{\lambda n}}{y^{\lambda m}}$; vel $V = y^{\frac{1}{n}} \Phi \frac{x^{\lambda n}}{y^{\lambda m}}$, sumto pro n nume-
 ro quocunq̄ue.

Coroll. 2.

72. Si sit $m = n$, casus habebitur functionum ho-
 mogenearum supra tractatus. Sumto enim $\lambda = \frac{1}{n}$, de-
 notabit $\Phi : \frac{x}{y}$ functionem quacunq̄ue nullius dimensio-
 nis ipsarum x et y : et V fiet earundem functio ho-
 mogenea, cuius dimensionum numerus est $= \frac{1}{n}$.

Coroll. 3.

73. Si ponamus in genere $x^{\frac{1}{m}} = t$ et $y^{\frac{1}{n}} = u$;
 tum vero capiamus $\lambda = \frac{1}{m n}$, habebimus $V = t \Phi \frac{1}{u}$,
 seu V erit functio homogenea vnius dimensionis bina-
 rum quantitatum t et u .

Scholion.

74. Si desideretur, vt sit $V = mP + nQ$, solutio
 aeque parum habebit difficultatis. Nam ob $Q = \frac{V}{n} - \frac{mP}{n}$
 erit

erit $dV - \frac{y dy}{n} = P(dx - \frac{m dy}{n})$. Statuatur $x - \frac{m y}{n} = z$,
 ut sit $dV = \frac{y dy}{n} + P dz$: iam spectata z ut constante,
 erit $V = \frac{z^n}{n} + \Phi:z$, ideoque

$$V = e^{\frac{z}{n}} \Phi: (nx - my).$$

At si debeat esse $V = mPy + nQx$, ob $Q = \frac{y - mPy}{nx}$,
 erit $dV = P(dx - \frac{m dy}{n}) + \frac{y dy}{nx}$. Statuatur $nx - my = zz$,
 ut sit $x = \sqrt{\frac{zz + my}{n}}$, et cum fiat:

$$dV = \frac{y dy}{n \sqrt{zz + my}} + \frac{y}{nx} z dz,$$

spectetur quantitas z ut constans, et ob $\frac{dy}{nV} = \frac{dy}{\sqrt{nz^2 + my}}$
 erit $V = \frac{1}{\sqrt{mn}} \int (y \sqrt{mn} + V n(zz + my)) + IZ$, ideo-
 que ob $V n(zz + my) = nx$, prodibit:

$$V = (y \sqrt{m} + x \sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{mn}}} \Phi: (nxx - myy).$$

Quare si esse debeat $V = Py + Qx$, erit:

$$V = (x + y) \Phi: (xx - yy).$$

Problema autem sequens omnes huiusmodi casus in se
 complectetur.

Problema 19.

75. Si p sit functio quaecunque data ipsarum x
 et y , at M functio quaecunque etiam data ipsarum x ,
 y et V , definire indolem functionis V , ut, posito
 $dV = Pdx + Qdy$, fiat $Q = Pp + M$.

Solutio.

Substituto hoc loco Q valore, habemus:

$$dV = Mdy + P(dx + pdy).$$

Quaeratur multiplicator q , formulam $dx + pdy$ integrabilem reddens, sitque $\int q(dx + pdy) = z$: unde valor ipsius x definiatur per y et z , isque in M , quatenus x inest, loco x substituatur, quo facto erit:

$$dV = Mdy + \frac{Pdz}{q}$$

sicque V considerari poterit: ut functio ipsarum y et z . Spectetur nunc z ut quantitas constans, et cum sit $dV = Mdy$, ubi duae tantum variables y et V inesse sunt intelligendae, integretur haec aequatio et loco constantis introducatur functio quaecunque ipsius z : in qua si loco z valor in x et y , scilicet: $\int q(dx + pdy)$ restituatur, illa aequatio $dV = Mdy$ integrata exhibebit naturam functionis V , quemadmodum ea a binis variabilibus x et y pendere debet.

Exemplum.

76. Posito $dV = Pdx + Qdy$, oportet esse $V = Pyy + Qxx$. Est ergo $Q = -\frac{Pyy}{xx} + \frac{V}{xx}$, unde fit

$$dV = \frac{Vdy}{xx} + P(dx - \frac{yydy}{xx})$$

Sumatur $q = xx$, erit $\int (xxdx - yydy) = z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ feu $x^2 = y^2 + 3z$, ideoque $xx = (y^2 + 3z)^{\frac{1}{2}}$. Sumto igitur z constante, habetur

$$\frac{dV}{V} = \frac{dy}{(y^2 + 3z)^{\frac{1}{2}}}$$

Sit itaque S integrale formulae $\frac{dy}{(y^2 + 3z)^{\frac{1}{2}}}$, dum z constans assumitur, et obtinebitur:

$$V =$$

$V = e^S \Phi : z = e^S \Phi : (x^2 - y^2),$
 Sicut in S loco z ubique eius valor $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ substi-
 tuti debet.

Problema 20.

77. Existente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V , ut sit $V = nPQ$.

Solutio.

Ergo ob $Q = \frac{V}{nP}$ erit

$$dV = Pdx + \frac{Vdy}{nP}$$

Quo iam V ex posteriori membro possit separari, ponatur $P = R\sqrt{V}$, prodibitque :

$$\frac{dV}{\sqrt{V}} = Rdx + \frac{dy}{nR}$$

unde conuertendo obtinetur :

$$2\sqrt{V} = Rx + \frac{y}{nR} - \int dR(x - \frac{y}{nR}).$$

Quare necesse est, ut $x - \frac{y}{nR}$ sit functio ipsius R tantum ; ac tali functione assumta definiripotrit R per x et y , unde etiam functio quaesita V per x et y expressa reperietur.

Aliter.

Cum sit $V = nPQ$, eliminetur V , ut habeatur haec aequatio :

$$nPdQ + nQdP = Pdx + Qdy$$

ex qua fit $dy = -\frac{Pdx}{Q} + \frac{nPdQ}{Q} + ndP,$

hincque $y = nP + \int \frac{P}{Q}(ndQ - dx).$

Necesse ergo est, ut $\frac{P}{Q}$ sit functio quantitatis $nQ - x.$

Pona-

Ponatur $nQ - x = z$; sitque $\int \frac{P}{Q} dz = \Phi : z$; erit $\frac{P}{Q} = \Phi' : z$
 et $y = nP + \Phi z = nQ\Phi' : z + \Phi : z$. At est $V = nQQ\Phi' : z$,
 vnde $Q = V \frac{y}{n\Phi' : z}$; sicque habebuntur hae aequationes:

$$V \frac{y}{\Phi' : z} = x + z \text{ et } y = \Phi z + \sqrt{nV\Phi' : z},$$

ex quibus conficitur $nV = (x + z)(y - \Phi z)$: ac si eliminetur quantitas z , orietur functio V per x et y expressa.

Coroll. 1.

78. Capiatur z constans; seu $ndQ - dx = 0$, fiet
 $Q = \frac{x+a}{n}$ et $y = nP - b$, seu $P = \frac{y+b}{n}$; vnde oritur
 $V = \frac{(x+a)(y+b)}{n}$ qui est casus simplicissimus.

Coroll. 2.

79. Si statuatur $\Phi' : z = a$; erit $\Phi z = az + b$,
 vnde fit:

$V \frac{y}{a} = x + z$ et $nV = (y - az - b)V \frac{y}{a}$ seu $\sqrt{naV} = y - b - az$,
 ex quibus coniunctis nanciscimur: $z\sqrt{naV} = ax + y - b$,
 hincque $V = \frac{(ax + y - b)^2}{4na}$; qui est alter casus simplicissimus.

Coroll. 3.

80. Sit $\Phi' : z = \frac{1}{(az+b)^2}$; vt fit $\Phi : z = -\frac{1}{a(az+b)} + c^2$
 et fiet:

$(az+b)\sqrt{nV} = x + z$ et $y - c + \frac{1}{a(az+b)} = \frac{y-nV}{az+b}$ seu
 $a(az+b)(y-c) = a\sqrt{nV} - 1$; at inde est $z = \frac{x - b\sqrt{nV}}{a\sqrt{nV} - 1}$, ideoque
 $az + b = \frac{ax - b}{a\sqrt{nV} - 1}$; hocque valore substituto:

a

$$a(ax-b)(y-c) = (a\sqrt{nv-1})^2, \text{ quae evolutio praebet:}$$

$$V = \frac{1+a(ax-b)(y-c) + 2\sqrt{a(ax-b)(y-c)}}{a^2}$$

Problema 21.

81. Existente $dV = Pdx + Qdy$, si detur V utcumque per P et Q, definire indolem functionis V, seu quemadmodum V per x et y determinetur.

Solutio.

Cum igitur fit V functio binarum quantitatum P et Q, ponatur eius differentiale $dV = M dP + N dQ$, eruntque etiam M et N functiones datae ipsarum P et Q. Quare cum fit

$$M dP + N dQ = P dx + Q dy, \text{ erit}$$

$$dy = -\frac{P dx}{Q} + \frac{M dP + N dQ}{Q}, \text{ ideoque}$$

$$y = -\frac{P x}{Q} + f(x d.\frac{P}{Q} + \frac{M dP}{Q} + \frac{N dQ}{Q}).$$

Ponatur $P = QS$, qui valor in M et N loco P substitui intelligatur, ita ut iam variables Q et S considerandae occurrant, fietque:

$$y = -Sx + f(dS(x + M) + \frac{dQ}{Q}(N + MS)).$$

Cum hic M et N sint functiones datae ipsarum Q et S, sumatur S pro constante, ac ponatur integrale:

$$\int \frac{dQ}{Q}(N + MS) = R + \Phi : S$$

erit ergo $x + M = (\frac{dR}{dS}) + \Phi' : S$, existente $\Phi S = \int dS \Phi' : S$

$$\text{et } y = MS - S(\frac{dR}{dS}) - S \Phi' : S + R + \Phi : S.$$

Quia nunc R et M dantur per Q et S, et ob $P=QS$ etiam V detur per Q et S. Si haec relatio cum his binis coniungatur:

$x = -M + \left(\frac{dR}{dS}\right) + \Phi' : S$, et $y = -Sx + R + \Phi : S$ poterunt hinc eliminari binae quantitates S et Q, quo facto prodibit aequatio, qua V determinabitur per x et y.

Exemplum I.

§2. Existente $dV = Pd x + Qdy$, oporteat esse $V = mPP + nQQ$.

Cum ergo sit $dV = 2mPdP + 2nQdQ$, erit $M = 2mP$, et $N = 2nQ$, seu $M = 2mQS$ ob $P=QS$, ita ut sit $V = QQ(mSS + n)$.

Habebimus ergo $N + MS = 2Q(mSS + n)$, ideoque spectata S ut constante:

$$R = \int \frac{dQ}{Q} (N + MS) = 2Q(mSS + n),$$

ac proinde: $\left(\frac{dR}{dS}\right) = 4mQS$,

Vnde has tres aequationes adipiscimur:

I. $V = QQ(mSS + n)$.

II. $x + 2mQS = 4mQS + \Phi' : S$ seu $x = 2mQS + \Phi' : S$

III. $y + Sx = 2Q(mSS + n) + \Phi : S$

seu $y = 2nQ + \Phi : S - S\Phi' : S$.

Quodsi ex II et III eliminetur Q, erit:

IV. $nx - mSy = (mSS + n)\Phi' : S - mS\Phi : S$

ex iisdem vero coniunctis fit $Q = \frac{Sx + y - \Phi : S}{2(mSS + n)}$, quae cum prima dat $V = 2 \sqrt{V(mSS + n)} = Sx + y - \Phi : S$.

Quare

Quare superest, ut ex IV et V eliminetur S, sicque prodibit functio V per x et y expressa.

Sit $\Phi':S=a$, erit $\Phi:S=aS+b$, et

$$\text{IV. } nx - mSy = na - mS$$

$$\text{V. } 2\sqrt{V}(mSS+n) = Sx + y - aS - b.$$

Inde est $S = \frac{n(x-a)}{m(y-b)}$, quo valore substituto, erit:

$$2\sqrt{mnV} = \sqrt{(n(x-a))^2 + m(y-b)^2}$$

$$\text{hincque } V = \frac{n(x-a)^2 + m(y-b)^2}{4mn}.$$

Exemplum 2.

33. Existente $dV = Pdx + Qdy$, oporteat esse

$$V = \frac{P}{Q}.$$

Erit ergo $M = \frac{x}{Q}$; $N = -\frac{P}{Q^2} = -\frac{S}{Q}$ ob $P = QS$ et $V = S$ atque $N + MS = 0$, unde fit $R = 0$. Quare prodit:

$$x + \frac{x}{Q} = \Phi':S \text{ et } y + Sx = \Phi:S$$

et quia est $S = V$, ita functio V per x et y determinatur, ut fit $y + Vx = \Phi:V$.

Ponatur $\Phi:V = \frac{\alpha + 2\beta V + \gamma VV}{\gamma - 2\varepsilon V}$, ut fiat:

$$2\delta y + 2\varepsilon Vy + 2\delta Vx + 2\varepsilon VVx = \alpha + 2\beta V + \gamma VV$$

hincque $VV = \frac{2V(\delta x + \varepsilon y - \beta) + 2\delta y - \alpha}{\gamma - 2\varepsilon x}$ et

$$V = \frac{\delta x + \varepsilon y - \beta + \sqrt{(\delta x - \varepsilon y)^2 + 2(\alpha\varepsilon - \beta\delta)x + 2(\gamma\delta - \beta\varepsilon)y + \beta\beta - \alpha\gamma}}{\gamma - 2\varepsilon x}$$

si fit γ et $\varepsilon = 0$, erit $V = \frac{2\delta y - \alpha}{2\beta - 2\delta x}$ seu $V = \frac{\gamma - m}{n - x}$.

Scholion.

84. Plures aliae huiusmodi quaestiones proponi ac resolui possent, sed quia earum solutio iisdem principiis, quibus hactenus sum usus, innititur, iis multiplicandis non immoror, cum allatae iam sufficere videantur, ad elementa huius nouae methodi condenda. Nonnulla adhuc adiaci possent pro casibus, quibus huiusmodi etiam formulae $(\frac{ddv}{dx^2})$, $(\frac{ddv}{dx dy})$, $(\frac{ddv}{dy^2})$ in relationem propositam ingrediuntur; item quando functio quaerenda per tres pluresue variables definire debet; verum ne haec tractatio nimis fiat longa, ea in aliam occasionem referuabo.
