TENTAMEN THEORIAE DE FRICTIONE FLVIDORVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Experientia luculenter testatur, aquam, dum per canales promouetur, non exiguam pati motus sui diminutionem, eamque eo magis esse notabilem, quo longiores fuerint, simulque arctiores, istiusmodi canales. Atque haec motus diminutio inprimis in fontibus salientibus deprehenditur, ad quos aqua per tubos, seu canales, deriuatur; cum enim, per Theoriam motus fluidorum, aqua fere ad eandem altitudinem assurgere deberet, ex qua lapsu ad orificium fontis descenderat, tamen teste experientia hanc altitudinem nunquam attingit, sed eo magis ab ea deficere solet, quo longiorem viam in tubis absoluerit, et quo arctiores fuerint isti tubi.

2. Quanquam ob hanc causam Theoria plerisque practicis non parum suspecta videri solet, tamen cum ea principiis mechanicae certissimis sit innixa, eius veritas ob hunc dissensum minime debilitatur, sed potius causam istius aberrationis in eiusmodi circumstantiis quaeri oportet, quae in Theoria non fuerint debito modo con-

consideratae. Si enim aqua in motu suo huiusmodi obstacula offendat, quorum in Theoria nulla ratio fuerit habita, mirum non est, si euentus Theoriae parum respondeat.

3. Quodsi autem hanc motus diminutionem, quam aqua in tubis patitur, attentius perpendamus, nullum plane dubium relinquitur, quin ea a frictione, seu attritu aquae ad latera tubi, proficiscatur. Cum enim corpora solida, dum super planis quantumuis politis promouentur, insignem resistentiam ob frictionem offendant; similis effectus in motu fluidorum, quatenus ad latera tuborum, per quos transeunt, atteruntur, oriri debet, vnde fluidi motus retardetur: ex quo etiam statim perspicitur, hanc retardationem eo maiorem esse debere, quo maius spatium aqua in tubis percurrere cogatur, et quo simul arctiores fuerint isti tubi.

4. Etiamsi autem nemo facile negauerit, quin motus fluidorum perinde ac solidorum frictioni sit obnoxius, atque etiam plerique Auctores, qui ante memoratum motus imminutionem animaduerterunt, eam manifesto frictioni tribuant, nullus eorum tamen, quantum mihi quidem constat, leges huius frictionis vel determinauit, vel saltem inuestigare est conatus. Quam ob rem cum haec determinatio maximi sit momenti, si Theoriam ad praxin accommodare velimus, operam dabo, vt hoc argumentum, quantum ob summas quibus inuoluitur difficultates, fieri licet, pro viribus euolvam atque illustrem.

5. Ac primo quidem cum dubium sit nullum, quin minimae fluidorum particulae pro solidis haberi

queant, eae, dum secundum tuborum latera incedunt, eaque quasi stringunt, effectum frictionis sentire debent; atque leges huius frictionis similes plane erunt earum, quae in motu corporum solidorum obseruantur, etiamsi quantitas frictionis, ob summam particularum fluidarum lubricitatem, sine dubio multo minor existat.

6. In corporibus autem solidis obseruamus, frictionem, quam in incessu super superficie quacunque patiuntur, semper datam tenere proportionem ad vim, qua ea ad superficiem apprimuntur, ita vt neque corporum figura, neque quantitas basis, qua superficiem attingunt, nihil ad frictionem, siue augendam, siue diminuendam, conferat. Ita experimentis compertum est, si corpora quaeuis super ligneis, seu metallicis, superficiebus incedant, dummodo non satis notabilis asperitas adsit, frictionem quartae ac subinde tertiae parti vis, qua ad has superficies apprimuntur, aequari.

7. Manifestum ergo videtur, in fluidis similem frictionis legem subsistere, ita, vt pro quauis fluidi portione frictio certam quandam teneat rationem, ad vim, qua ea fluidi portio ad latera tubi, per quem fluit, apprimitur: haecque ratio per experimenta erit explorandae, quae fortasse varias subire poterit mutationes, prout tubi ex alia atque alia materia fuerint confecti. In calculo ergo hanc rationem indefinite assumi conueniet, vt ea postmodum ex experimentis, ad quae Theoria applicabitur, definiri possit.

Tab. VI. Fig. 1. 8. Si igitur ponamus massam aquae per tubum ABCD transfluere, tubique parietes internos in ele-

mento

mento $MNmn$ ab aqua tanta vi premi, quanta premerentur, si sub aqua quiescente immersi essent ad altitudinem $= p$, haec altitudo statum compressionis aquae in elemento $MNmn$ exponet. Quodsi ergo u exprimat perimetrum sectionis tubi in MN factae, et ds elementi $MNmn$ altitudinem Mm, erit interna huius elementi superficies $= uds$, ideoque pressio, quam ista superficies sustinet, aequabitur ponderi voluminis aquae $= puds$.

9. Cum iam frictio, quam elementum aquae $MNmn$ in motu suo per tubum patitur, datam teneat rationem ad vim appressionis $puds$, indicetur vis frictionis per $\lambda puds$, vbi facile colligere licet, λ esse frictionem valde paruam, cuius valor per experimenta determinari debet. Hac ergo vi $= \lambda puds$ motui elementi aquae $MNmn$ resistitur, et cum massa elementi, posita tubi amplitudine in $MN = zz$, sit $= zzds$, erit ipsa retardatio a frictione oriunda $= \frac{\lambda pu}{zz}$.

10. Pendet ergo frictio tam a quantitate, quam a figura cauitatis tubi: si enim ponamus sectionem tubi in MN factam, esse rectangularem, altero latere existente $= m$, altero $= n$: erit perimeter eius $u = 2m + 2n$, et area $zz = mn$, vnde hoc casu erit retardatio $= \frac{2\lambda p(m+n)}{mn}$, et si sectio sit quadrata, seu $m = n$, erit retardatio $= \frac{4\lambda p}{m}$. Sin autem sectio sit circularis, diametrum habens $= n$, ob $u = 2\pi n$ et $zz = \pi nn$, erit retardatio $= \frac{2\lambda p}{n}$.

11. Quodsi ergo vt plerumque fieri solet, sectio tubi sit circularis, eiusque area in MN ponatur $= zz$,

erit eius diameter $n = \frac{z}{\sqrt{\pi}}$, vnde retardatio, a frictione orta, prodit $= \frac{2\lambda p \sqrt{\pi}}{z}$. Cum autem sit $\pi = 3,14159265$, hic numerus, simul in coefficiente 2λ comprehendi poterit, ita vt retardationem a frictione oriundam exprimere quaeamus per $\frac{\alpha p}{z}$: ac pro experimentis, quae quidem eiusmodi tubis instituuntur, sufficiet, valorem ipsius α nosse, neque multum refert, inde valorem ipsius $\lambda = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}$ elicere.

12. Ad effectum igitur frictionis, quouis casu determinandum, pressionem inuestigari oportet, quam aqua vbique in latera exerit: seu status compressionis aquae in singulis tubi locis definiri debet. Cum autem status compressionis a celeritate pendeat, celeritas vero a frictione diminuatur, ideoque sine ea coguosci nequeat, perspicuum est, hanc inuestigationem, more apud Analystas solito, institui debere, ita vt quantitates incognitae in calculo tanquam cognitae tractentur.

13. Hanc ergo inuestigationem ex primis mechanicae principiis repetam, quo facilius veritatem conclusionum inde deductarum perspicere liceat. Sit igitur vas superne in AB perpetuo aqua plenum, siue quod amplitudo AB sit infinita, siue quod continuo sufficiens aquae copia affluat. Infra autem hoc vas desinat in tubum, vel canalem ABMNCD, tam figurae, quam amplitudinis vtcunque variabilis, per quem aqua defluat, in eiusque orificio CD erumpat.

Tab VI. Fig. 2.

14. Etiamsi motus aquae, cum primum fluere inceperit, acceleratur, tamen mox ad motum vniformem redigetur, quo deinceps continuo fluere perget.

Hanc

Hanc ob rem assumam, motum aquae iam ad hunc statum vniformitatis peruenisse, ita vt quaestio sit, quanta celeritate aqua ex orificio CD sit eruptura; seu cum demta frictione celeritas aquae altitudini DE, qua orificium infra supremam aquae superficiem AB deprimitur, respondere deberet, quaeritur, quanto iam ob frictionem celeritas minor sit futura.

15. Sit igitur amplitudo orificii $CD = hh$, et celeritas, qua hic aqua in aërem erumpit, debita sit altitudini $= v$, erit ergo v quantitas constans. Sit praeterea profunditas huius orificii CD sub aquae libella ABE, seu altitudo $DE = a$. Tum ducta recta verticali APS, punctum tubi quoduis M referatur ad coordinatas orthogonales $AP = x$, et $PM = y$, in M vero sit amplitudo tubi $MN = zz$, eritque celeritas aquae in hac sectione MN contentae $= \frac{hh\sqrt{v}}{zz}$, seu debita altitudini $= \frac{h^4 v}{z^4}$; propterea quod celeritates aquae sunt reciproce vt tubi altitudines.

16. Ponamus, tempusculo dt quamuis aquae guttam in MN existentem, peruenire in sectionem mn, sitque elementum $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$, quod spatiolum, quia tempusculo dt a celeritate $\frac{hh\sqrt{v}}{zz}$ percurritur, erit $ds = \frac{hh\,dt\sqrt{v}}{zz}$, seu $dt = \frac{zz\,ds}{hh\sqrt{v}}$, vbi notandum est, fore s et zz functiones ipsarum coordinatarum x et y, quibus punctum tubi M determinatur. Ponamus porro, elementum Mm ad rectam verticalem inclinari angulo $= \Phi$, erit $dx = ds \cos \Phi$ et $dy = ds \sin. \Phi$.

17. Verum vt aqua hunc motum, quem assumimus, obtinere valeat, necesse est, vt quaeuis gutta aquae

aquae, in sectione MN contenta, vrgeatur a duplici vi acceleratrice, quarum altera est verticalis secundum AP $= \frac{2ddx}{dt^2}$, altera vero horizontalis secundum PM $= \frac{2ddy}{dt^2}$, sumto elemento dt constante. At est $\frac{dx}{dt} = \frac{bb\cos.\Phi.\sqrt{v}}{zz}$ et $\frac{dy}{dt} = \frac{bb\sin.\Phi.\sqrt{v}}{zz}$; vnde fit:

$$\frac{ddx}{dt} = -\frac{bbd\Phi\sin.\Phi.\sqrt{v}}{zz} - \frac{2bbdz\cos.\Phi.\sqrt{v}}{z^3} \text{ et}$$

$$\frac{ddy}{dt} = \frac{bbd\Phi\cos.\Phi.\sqrt{v}}{zz} - \frac{2bbdz\sin.\Phi\sqrt{v}}{z^3}.$$

18. Hae formulae multiplicatae per $\frac{z}{dt} = \frac{2bb\sqrt{v}}{zzds}$, dabunt vires acceleratrices quaesitas:

$$\text{Vis AP} = b^4v\left(\frac{-2d\Phi\sin.\Phi}{z^4ds} - \frac{4dz\cos.\Phi}{z^5ds}\right)$$

$$\text{Vis PM} = b^4v\left(\frac{2d\Phi\cos.\Phi}{z^4ds} - \frac{4dz\sin.\Phi}{z^5ds}\right)$$

Vnde porro eliciuntur duae aliae vires secundum directiones Mm et MS, quarum haec ad illam est normalis. Prodit autem

$$\text{Vis } Mm = \text{vi AP}\cos.\Phi + \text{vi PM}.\sin.\Phi = -\frac{4b^4vdz}{z^5ds}$$

$$\text{Vis MS} = \text{vi AP}\sin.\Phi - \text{vi PM}.\cos.\Phi = -\frac{2b^4vd\Phi}{z^4ds}.$$

19. In praesenti negotio tantum opus habemus vi priori, qua aqua secundum directionem Mm propellitur; ideoque haec vis acceleratrix aequalis esse debet ei vi, qua aqua reuera in tubo secundum hanc directionem sollicitatur. Primo autem quaelibet guttula aquae, a vi grauitatis deorsum vrgetur, quae cum vnitate exprimatur, nascetur inde vis acceleratrix secundum directionem tubi $Mm = \cos.\Phi$.

20. Deinde si status compressionis aquae in MN altitudine p exprimatur, erit ea in $mn = p + dp$: hinc cum aqua elementi MNmn, a vi p antrorsum propellatur, a vi autem $p + dp$ retrorsum repellatur, nasce-

nascetur hinc vis acceleratrix secundum directionem Mm directa $= -\frac{dp}{ds}$, existente p functione ipsius s, seu ipsarum x et y.

21. Tertio ob frictionem motui aquae resistitur vi retardatrice $= \frac{\alpha p}{z}$, vti supra §. 11. est ostensum, vnde vis acceleratrix aquae secundum directionem Mm erit $= -\frac{\alpha p}{z}$. Cum igitur aqua his tribus viribus subiiciatur, necesse est, vt sit:

$$-\frac{4h^4 v dz}{z^5 ds} = \cos.\Phi - \frac{dp}{ds} - \frac{\alpha p}{z},$$

seu $dx - dp - \frac{\alpha p ds}{z} + \frac{4h^4 v dz}{z^5} = 0$ ob $ds \cos.\Phi = dx$.

22. Peruenimus ergo ad hanc aequationem, ex qua primo p status compressionis aquae in loco quocunque tubi MN definiri debet,

$$dp + \frac{\alpha p ds}{z} = dx + \frac{4h^4 v dz}{z^5}$$

quae multiplicata per $e^{\alpha \int \frac{ds}{z}}$ denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, fit integrabilis. Habebitur enim posito breuitatis gratia $\int \frac{ds}{z} = r$:

$$e^{\alpha r} p = C + \int e^{\alpha r} dx + 4h^4 v \int \frac{e^{\alpha r} dz}{z^5}.$$

23. Valor autem huius integralis $\int \frac{ds}{z} = r$ ita sit acceptus, vt in supremo vasis loco AB, seu vbi $x = 0$, euanescat. Quo posito, cum α sit fractio vehementer parua,

erit $e^{\alpha r} = 1 + \alpha r + \frac{1}{2}\alpha^2 r^2 + \frac{1}{6}\alpha^3 r^3 + \frac{1}{24}\alpha^4 r^4 + \text{etc.}$

erit $e^{\alpha r} p = C + x + \alpha \int r dx + \frac{1}{2}\alpha^2 \int r r dx + \frac{1}{6}\alpha^3 \int r^3 dx$
$\frac{-h^4 v}{z^4} - 4\alpha h^4 v \int \frac{r dz}{z^5} - 2\alpha^2 h^4 v \int \frac{r r dz}{z^5} - \frac{2}{3}\alpha^3 h^4 v \int \frac{r^3 dz}{z^5} - \text{etc.}$

24. Cum sit $dr = \frac{ds}{z}$, integratio etiam hoc modo institui potest:

$$\int e^{\alpha r} dx = e^{\alpha r} x - \alpha \int \frac{e^{\alpha r} x ds}{z}$$

$$\int \frac{e^{\alpha r} dz}{z^5} = -\frac{e^{\alpha r}}{4z^4} + \frac{\alpha}{4} \int \frac{e^{\alpha r} ds}{z^5}$$

sicque erit:

$$p = Ce^{-\alpha r} + x - \alpha e^{-\alpha r} \int \frac{e^{\alpha r} x ds}{z} - \frac{h^4 v}{z^4} + \alpha h^4 v e^{-\alpha r} \int \frac{e^{\alpha r} ds}{z^5}$$

siue

$$\begin{aligned} p = &+ C - \alpha C r + \tfrac{1}{2}\alpha\alpha C r r - \tfrac{1}{6}\alpha^3 C r^3 \\ &+ x - \alpha \int \frac{x ds}{z} + \alpha\alpha r \int \frac{x ds}{z} - \tfrac{1}{2}\alpha^3 r r \int \frac{x ds}{z} \\ &- \frac{h^4 v}{z^4} + \alpha h^4 v \int \frac{ds}{z^5} - \alpha\alpha \int \frac{r x ds}{z} + \alpha^3 r \int \frac{r x ds}{z} \\ &+ \alpha\alpha h^4 v r \int \frac{ds}{z^5} - \tfrac{1}{2}\alpha^3 \int \frac{r r x ds}{z} \\ &+ \tfrac{1}{6}\alpha\alpha h^4 v \int \frac{r ds}{z^5} + \tfrac{1}{2}\alpha^3 h^4 v r r \int \frac{dz}{z^5} \\ &- \alpha^3 h^4 v r \int \frac{r ds}{z^5} \\ &+ \tfrac{1}{2}\alpha^3 h^4 v \int \frac{r r ds}{z^5} \end{aligned}$$

Tab. VI. Fig. 3. 25. Expediet autem hinc casus aliquot specialiores euolui, quibus effectus frictionis facilius exhiberi potest. Sit igitur supremum vas cylindricum verticale ABEF, cuius amplitudo sit $= gg$, et altitudo $AE = a$; deinde huic vasi adiunctus sit tubus cylindricus FCD, longitudinis $DF = b$, et amplitudinis $= ff$, qui cum recta verticali angulum faciat $= \zeta$; in basi autem inferiori pertusus sit foramine $CD = hh$, per quod aqua effluat, dum vas superius continuo plenum conseruatur.

26. Sumamus primo punctum indefinitum P in tubo superiori ABEF: vbi est $z = g$, $ds = dx$, et $r = \frac{x}{g}$. Hinc ita integrando, vt integralia in supremo puncto A euanescant, erit:

$\int e^{\alpha r}$

$$\int e^{\alpha r} dx = \int e^{\frac{\alpha x}{g}} dx = \frac{g}{\alpha}\left(e^{\frac{\alpha x}{g}} - 1\right)$$

$$4\int \frac{e^{\alpha r} dz}{z^5} = \frac{1 - e^{\alpha r}}{g^5} + \frac{\alpha}{g^5} \int e^{\frac{\alpha x}{g}} dx \text{ ideoque}$$

$$4\int \frac{e^{\alpha r} dz}{z^5} = -\frac{1}{g^4}\left(e^{\frac{\alpha x}{g}} - 1\right) + \frac{1}{g^4}\left(e^{\frac{\alpha x}{g}} - 1\right) = 0$$

ergo

$$e^{\frac{\alpha x}{g}} p = C + \frac{g}{\alpha}\left(e^{\frac{\alpha x}{g}} - 1\right)$$

seu $p = Ce^{\frac{-\alpha x}{g}} + \frac{g}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha x}{g}}\right)$

27. Cum autem in genere sit

$$4\int \frac{e^{\alpha r} dz}{z^5} = \frac{1}{g^4} - \frac{e^{\alpha r}}{z^4} + \alpha \int \frac{e^{\alpha r} ds}{z^5}$$

erit pro extremo vasis puncto E, vbi amplitudo subito fit $= ff$; $4\int \frac{e^{\alpha r} dz}{z^5} = \frac{1}{g^4} - \frac{1}{f^4} e^{\frac{\alpha x}{g}} + \frac{1}{g^4}\left(e^{\frac{\alpha x}{g}} - 1\right) = e^{\frac{\alpha x}{g}}\left(\frac{1}{g^4} - \frac{1}{f^4}\right)$

vnde fit pressio in $F = Ce^{\frac{-\alpha a}{g}} + \frac{g}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{\alpha a}{g}}\right) + h^4 v\left(\frac{1}{g^4} - \frac{1}{f^4}\right)$

At in suprema superficie AB pressio erit $= C$, quae cum aequalis esse debeat pressioni atmosphaerae, quae columnae aqueae altitudinis $= l$ aequatur, erit $C = l$; et pressio in $F = le^{\frac{-\alpha a}{g}} + \frac{g}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{\alpha a}{g}}\right) + h^4 v\left(\frac{1}{g^4} - \frac{1}{f^4}\right)$.

28. Inuenta pressione in F, consideremus iam alterum tubum FCD solum, pro quo est $zz = ff$, et $dx = ds \cos.\zeta$. Sit autem nunc $EP = x$, et pressio in $M = p$. Iam ob $r = \frac{s}{f}$, erit

$$\int e^{\alpha r} dx = \frac{f}{\alpha}\left(e^{\frac{\alpha s}{f}} - 1\right) \cos.\zeta \text{ et}$$

$$4\int \frac{e^{\alpha r} dz}{z^5} = \frac{1}{f^4} - \frac{e^{\frac{\alpha s}{f}}}{z^4} + \frac{1}{f^4}\left(e^{\frac{\alpha s}{f}} - 1\right)$$

 cuius

cuius valor in quouis puncto medio euanescit, in puncto autem D, vbi subito est $z = h$, et $s = b$, erit

$$4\int \frac{e^{\alpha r} dz}{z^3} = e^{\frac{\alpha b}{f}} \left(\frac{1}{f^4} - \frac{1}{h^4}\right)$$

29. In quouis ergo puncto intermedio M erit pressio

$$p = Ce^{\frac{-\alpha s}{f}} + \frac{f}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha s}{f}}\right)\cos.\zeta$$

et quia, posito $s = 0$, pressio in F prodit $= C$, necesse est, vt sit $C = le^{\frac{-\alpha a}{g}} + \frac{g}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha a}{g}}\right) + h^4 v\left(\frac{1}{g^4} - \frac{1}{f^4}\right)$

Quo valore notato orietur pressio in extremo orificio

$$CD = Ce^{\frac{-\alpha b}{f}} + \frac{f}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{f}}\right)\cos.\zeta + h^4 v\left(\frac{1}{f^4} - \frac{1}{h^4}\right)$$

30. Quoniam hic vero aqua in aërem erumpit, aliam pressionem non sustinet, praeter pondus atmosphaerae, vnde erit,

$$l = Ce^{\frac{-\alpha b}{f}} + \frac{f}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{f}}\right)\cos.\zeta + h^4 v\left(\frac{1}{f^4} - \frac{1}{h^4}\right)$$

et substituto valore ipsius C habebitur

$$l = le^{\frac{-\alpha a}{g} - \frac{\alpha b}{f}} + \frac{g}{\alpha}e^{\frac{-\alpha b}{f}}\left(1 - e^{\frac{-\alpha a}{g}}\right) + e^{\frac{-\alpha b}{f}} h^4 v\left(\frac{1}{g^4} - \frac{1}{f^4}\right)$$
$$+ \frac{f}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{f}}\right)\cos.\zeta + h^4 v\left(\frac{1}{f^4} - \frac{1}{h^4}\right).$$

31 Ex hac iam aequatione celeritas eruitur, qua aqua per orificium CD erumpit. Pprodibit enim altihuic celeritati debita

$$v = \frac{l\left(1 - e^{\frac{-\alpha a}{g} - \frac{\alpha b}{b}}\right) - \frac{g}{\alpha}e^{\frac{-\alpha b}{f}}\left(1 - e^{\frac{-\alpha a}{g}}\right) - \frac{f}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{f}}\right)\cos.\zeta}{e^{\frac{-\alpha b}{f}} \cdot \frac{h^4}{g^4} + \left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{f}}\right)\frac{h^4}{f^4} - 1}$$

vel

vel mutatis numeratoris ac denominatoris signis

$$v = \frac{\frac{g}{\alpha} e^{\frac{-\alpha b}{f}} \left(1 - e^{\frac{-\alpha a}{g}}\right) + \frac{f}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{f}}\right) \cos.\zeta - l\left(1 - e^{\frac{-\alpha a}{g} - \frac{\alpha b}{f}}\right)}{1 - \left(1 - e^{\frac{\alpha b}{f}}\right)\frac{b^4}{f^4} - e^{\frac{-\alpha b}{f}} \cdot \frac{b^4}{g^4}}$$

Quodsi ergo tubus FD sit verticalis, fiet $\cos.\zeta = 1$; sin autem hic tubus fuerit horizontalis, erit $\cos.\zeta = 0$.

32. Cum sit, ob α valde paruum,

$$e^{\frac{-\alpha a}{g}} = 1 - \frac{\alpha a}{g} + \frac{\alpha^2 a^2}{2g^2} - \frac{\alpha^3 a^3}{6g^3} + \text{etc.}$$

$$e^{\frac{-\alpha b}{f}} = 1 - \frac{\alpha b}{f} + \frac{\alpha^2 b^2}{2f^2} - \frac{\alpha^3 b^3}{6f^3} + \text{etc.}$$

erit, non vltra potestatem secundam ipsius α progrediendo:

$$v = \frac{a + b\cos.\zeta - \alpha\left(\frac{aa}{2g} + \frac{ab}{f} + \frac{bb\cos.\zeta}{2f} + \frac{al}{g} + \frac{bl}{f}\right) + \alpha\alpha\left(\frac{a^3}{6gg} + \frac{aab}{2fg} + \frac{abb}{2ff} + \frac{b^3\cos.\zeta}{6ff} + \frac{1}{2}l\left(\frac{a}{g} + \frac{b}{f}\right)^2\right)}{1 - \frac{b^4}{g^4} - \frac{\alpha b}{f}\left(\frac{b^4}{f^4} - \frac{b^4}{g^4}\right) + \frac{\alpha\alpha bb}{2ff}\left(\frac{b^4}{f^4} - \frac{b^4}{g^4}\right)}$$

vbi $a + b\cos.\zeta$ denotat totam altitudinem AG.

33. Si amplitudo vasis superioris ABEF sit quasi infinita, seu $g = \infty$, erit:

$$v = \frac{a + b\cos.\zeta - \frac{\alpha b}{f}\left(a + \frac{1}{2}b\cos.\zeta + l\right) + \frac{\alpha^2 bb}{2ff}\left(a + \frac{1}{3}b\cos.\zeta + l\right)}{1 - \frac{\alpha bb^4}{f^5} + \frac{\alpha\alpha bbb^4}{2f^6}}$$

vnde patet, celeritatem minorem esse ea, quam corpus cadendo ex altitudine AG acquirit; atque diminutionem imprimis etiam a pondere atmosphaerae l pendere, ita vt in vacuo effectus frictionis multo minor esset futurus.

34. Si canalis, per quem aqua defluit, ex pluribus tubis cylindricis vtcunque ad horizontem inclinatis constet, Tab. VI. Fig. 4.

ſtet, hinc motus aquae, ſeu celeritas effluxus, cum motus iam ad vniformitatem fuerit reductus, non difficulter colligi poterit.

Ponatur enim pro ſingulis partibus

AF $= a$; amplitudo AA $= ff$; et ang. cum verticali $= \theta$
BC $= b$; amplitudo BB $= gg$; et ang. cum verticali $= \zeta$
CD $= c$; amplitudo CC $= hh$, et ang. cum verticali $= \eta$
DE $= d$; amplitudo DD $= ii$; et ang. cum verticali $= \theta$

Denique ſit orificium EE $= kk$, quod hactenus per hh indicauimus.

35. Sit denique v altitudo debita celeritati, qua aqua per orificium EE $= kk$ effluet, ac ponatur ſtatus compreſſionis aquae

in AA $= l$ quae eſt altitudo circiter 30 pedum
in BB $= P$
in CC $= Q$
in DD $= R$
in EE $= l$, cum hic fiat effluxus.

36. Quodſi iam ratiocinium vt ante inſtituamus, reperiemus:

$$P = le^{\frac{-\alpha a}{f}} + \frac{f}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha a}{f}}\right) + k^4 v\left(\frac{1}{f^4} - \frac{1}{g^4}\right)$$

$$Q = Pe^{\frac{-\alpha b}{g}} + \frac{g}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}}\right)\cos.\zeta + k^4 v\left(\frac{1}{g^4} - \frac{1}{h^4}\right)$$

$$R = Qe^{\frac{-\alpha c}{h}} + \frac{h}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha c}{h}}\right)\cos.\eta + k^4 v\left(\frac{1}{h^4} - \frac{1}{i^4}\right)$$

$$= Re^{\frac{-\alpha d}{i}} + \frac{i}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha d}{i}}\right)\cos.\theta + k^4 v\left(\frac{1}{i^4} - \frac{1}{k^4}\right)$$

hinc-

hincque celeritas quaesita seu altitudo v definitur: ac simul lex constat, qua erit procedendum, si canalis ex pluribus partibus fuerit compositus.

37. Quo has formulas commodius euoluamus, statuamus breuitatis gratia:

$$e^{\frac{-\alpha a}{f}} = 1 - \alpha A; \quad e^{\frac{-\alpha b}{g}} = 1 - \alpha B$$
$$e^{\frac{-\alpha c}{h}} = 1 - \alpha C; \quad e^{\frac{-\alpha d}{i}} = 1 - \alpha D$$

ita vt sit:

$$A = \frac{a}{f}\left(1 - \frac{\alpha a}{2f} + \frac{\alpha^2 a^2}{6f^2} - \frac{\alpha^3 a^3}{24 f^3} + \text{etc.}\right)$$
$$B = \frac{b}{g}\left(1 - \frac{\alpha b}{2g} + \frac{\alpha^2 b^2}{6g^2} - \frac{\alpha^3 b^3}{24 g^3} + \text{etc.}\right)$$
$$C = \frac{c}{h}\left(1 - \frac{\alpha c}{2h} + \frac{\alpha^2 c^2}{6h^2} - \frac{\alpha^3 c^3}{24 h^3} + \text{etc.}\right)$$
$$D = \frac{d}{i}\left(1 - \frac{\alpha d}{2i} + \frac{\alpha^2 d^2}{6i^2} - \frac{\alpha^3 d^3}{24 i^3} + \text{etc.}\right)$$

38. Cum igitur sit

$$P = (1 - \alpha A)l + Af + k^4 v\left(\frac{1}{f^4} - \frac{1}{g^4}\right) \text{ erit}$$
$$Q = (1 - \alpha A)(1 - \alpha B)l + (1 - \alpha B)Af + (1 - \alpha B)k^4 v\left(\frac{1}{f^4} - \frac{1}{g^4}\right)$$
$$+ Bg\cos.\zeta + k^4 v\left(\frac{1}{g^4} - \frac{1}{h^4}\right)$$

siue

$$Q = (1 - \alpha A)(1 - \alpha B)l + (1 - \alpha B)Af + Bg\cos.\zeta$$
$$+ (1 - \alpha B)\frac{k^4 v}{f^4} + \alpha B\frac{k^4 v}{g^4} - \frac{k^4 v}{h^4}.$$

Hinc porro fit

$$R = (1 - \alpha A)(1 - \alpha B)(1 - \alpha C)l + A(1 - \alpha B)(1 - \alpha C)f$$
$$+ B(1 - \alpha C)g\cos.\zeta + Ch\cos.\eta + (1 - \alpha B)(1 - \alpha C)\frac{k^4 v}{f^4}$$
$$+ \alpha B(1 - \alpha C)\frac{k^4 v}{g^4} + \alpha C.\frac{k^4 v}{h^4} - \frac{k^4 v}{i^4}.$$

vnde tandem colligitur haec aequatio:

$$l - (1 - \alpha A)(1 - \alpha B)(1 - \alpha C)(1 - \alpha D)l =$$
$$A(1 - \alpha B)(1 - \alpha C)(1 - \alpha D)f + B(1 - \alpha C)(1 - \alpha D)g\cos.\zeta$$
$$+ C(1 -$$

$$+C(1-\alpha D)b\cos.\eta+Di\cos.\theta+(1-\alpha B)(1-\alpha C)(1-\alpha D)\frac{k^4 v}{f^4}$$
$$+\alpha B(1-\alpha C)(1-\alpha D)\frac{k^4 v}{g^4}+\alpha C(1-\alpha D)\frac{k^4 v}{h^4}+\alpha D.\frac{k^4 v}{i^4}-v$$

39. Ponatur porro ad abbreuiandum:

$$e^{\frac{-\alpha a}{f}}=1-\alpha A=\mathfrak{A};\quad e^{\frac{-\alpha b}{g}}=1-\alpha B=\mathfrak{B}$$
$$e^{\frac{-\alpha c}{h}}=1-\alpha C=\mathfrak{C};\quad e^{\frac{-\alpha d}{i}}=1-\alpha D=\mathfrak{D}$$

tum vero:

$$\frac{k^4}{f^4}=\mathfrak{f};\ \frac{k^4}{g^4}=\mathfrak{g};\ \frac{k^4}{h^4}=\mathfrak{h};\ \text{et}\ \frac{k^4}{i^4}=\mathfrak{i}\ \text{erit}$$

$$v=\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}f+\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}g\cos.\zeta+\mathfrak{C}\mathfrak{D}h\cos.\eta+\mathfrak{D}i\cos.\theta-l+\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{i}}{1-\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{f}-\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{g}-\alpha\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{h}-\alpha\mathfrak{D}\mathfrak{i}}$$

vbi $a+b\cos.\zeta+c\cos.\eta+d\cos.\theta$ est altitudo aquae supremae AA supra orificium EE.

40. Si omnes potestates ipsius α praeter primam negligamus, reperiemus:

$$v=\frac{\left\{\begin{array}{l} a+b\cos.\zeta+c\cos.\eta+d\cos.\theta-\alpha a\left(\frac{a}{2f}+\frac{b}{g}+\frac{c}{h}+\frac{d}{i}\right) \\ -\alpha l\left(\frac{a}{f}+\frac{b}{g}+\frac{c}{h}+\frac{d}{i}\right) \quad -\alpha b\cos.\zeta\left(\frac{b}{2g}+\frac{c}{h}+\frac{d}{i}\right) \\ \qquad -\alpha c\cos.\eta\left(\frac{c}{2h}+\frac{d}{i}\right) \\ \qquad -\alpha d\cos.\theta.\left(\frac{d}{2i}\right. \end{array}\right\}}{1-\mathfrak{f}+\alpha\mathfrak{f}\left(\frac{b}{g}+\frac{c}{h}+\frac{d}{i}\right)-\alpha\mathfrak{g}.\frac{b}{g}-\alpha\mathfrak{h}.\frac{c}{h}-\alpha\mathfrak{i}.\frac{d}{i}}$$

et si nulla plane esset frictio, seu $\alpha=0$, foret:

$$v=\frac{a+b\cos.\zeta+c\cos.\eta+d.\cos.\theta}{1-\mathfrak{f}}$$

vnde posita tota altitudine $AI=q$, erit $v=\frac{f^4}{f^4-k^4}.q$

41. In transitu hic obseruo, si amplitudo vasis supremi sit maxima prae amplitudine orificii, fore $v=q$, seu celeritatem effluxus in EE debitam esse altitudini $AI=q$, vti per consueta principia constat. Sin autem ampli-

amplitudo vasis supremi ff non multum excedat amplitudinem orificii kk, tum vtique erit $v > q$, seu aqua maiori celeritate effluereet, quam casu praecedente, quod non parum paradoxon videbitur. Verum ratio huius accelerationis in hypothesi nostra est quaerenda, qua assumsimus, vas supremum semper aqua plenum conseruari, vbi in calculo posuimus, aquam affluentem iam ea celeritate in vas illud affluere, qua aqua in eo subsidit: sicque haec aqua lapsum non a quiete incipit; vnde mirum non est, si ea per orificium maiori celeritate erumpit, quam quae conuenit altitudini $AI = q$.

42. Hinc etiam perspicitur, cur valor ipsius v, casu quo orificium kk aequale est supremae amplitudini ff, adeo fiat infinitus; hinc scilicet innotescit, hoc casu motum aquae continuo accelerari, neque vnquam ad statum vniformitatis pertingere. Quamdiu enim tantundem aquae supra affluit, quantum infra erumpit, et quidem semper tanta velocitate, quanta aqua subsidit, hic motus continuo perinde accelerabitur, atque in lapsu grauium libero euenire solet. Multo minus autem status vniformitatis locum habere potest, si fuerit $kk > ff$, praeter quam quod hoc casu aqua a lateribus tubi separatur.

43 Etiamsi igitur vas supremum aqua continuo plenum conseruetur, nisi simul aqua tanta celeritate in vas infundatur, quanta suprema superficies subsidit, calculus ex Theoria deductus locum habere nequit. Quodsi ergo calculum ad experimenta accommodare velimus, necesse erit, vas supremum amplissimum accipi, vt kk prae ff tuto reiici possit; sic enim aquam lente affun-

dendo motus aquae non turbatur, cum ſuprema ſuperficies etiam lentiſſime ſubſidet.

44. Quo autem clarius effectum frictionis cognoſcamus, caſus aliquot ſimpliciores euolui conueniet, qui deinceps cum experimentis comparari queant; vt exinde valor litterae α definiri poſſit. Hoc autem valore ſemel definito, reliqui caſus omnes, quantum vis fuerint complicati, ope formularum datarum non difficulter expedientur, atque diminutio celeritatis a frictione oriunda determinabitur: ſed ob rationem ante allegatam amplitudinem ſupremam ff prae orificio kk vehementer magnam ſtatuemus, ita vt valor literae $\mathfrak{f}$ pro nihilo haberi poſſit. Manifeſtum autem eſt, dummodo ſit $f > 3k$, fore $\mathfrak{f} < \frac{1}{81}$, qui valor ſine notabili errore reiici poterit.

CASVS I.

SI AQVA EX VASE SVPREMO PER TVBVM CYLINDRICVM VERTICALEM EFFLVAT.

Tab. VII. Fig. 1. 45. Sit vaſis ſupremi amplitudo $AA = ff$, eiusque altitudo $AB = a$, quod ſemper aqua plenum conſeruari pono. Huic vaſi verticaliter ſit infixus tubus cylindricus BBCC altitudinis $BC = b$, et amplitudinis $= gg$; cuius tubi baſis ima pertuſa ſit foramine $CC = kk$, per quod aqua effluat. Sit autem $\frac{k^4}{f^4} = \mathfrak{f} = 0$, et poſitis

$$\mathfrak{A} = e^{\frac{-\alpha a}{f}}; \ \mathfrak{B} = e^{\frac{-\alpha b}{g}} \ A = \frac{1-\mathfrak{A}}{\alpha}, \text{ et } B = \frac{1-\mathfrak{B}}{\alpha}$$

ob

ob cos. $\zeta = 1$, et $\mathfrak{g} = \frac{k^4}{g^4}$, erit celeritas, qua aqua per orificium CC effluet debita altitudini v, vt sit

$$v = \frac{A\mathfrak{B} f + B g - l(1 - \mathfrak{A}\mathfrak{B})}{1 - \alpha B \mathfrak{g}}$$

46. Quodsi ergo valoribus proxime veris vti velimus, habebimus:

$$v\left(1 - \frac{\alpha b k^4}{g^5}\left(1 - \frac{\alpha b}{2g} + \frac{\alpha^2 b^2}{6g^2} - \frac{\alpha^3 b^3}{24 g^3} + \text{etc.}\right)\right) =$$
$$a + b - \alpha a\left(\frac{a}{2f} + \frac{b}{g}\right) + \alpha^2 a\left(\frac{aa}{6ff} + \frac{ab}{2fg} + \frac{bb}{2gg}\right) - \alpha^3 a\left(\frac{a^3}{24f^3} + \frac{a^2 b}{6ffg} + \frac{ab^2}{4fgg} + \frac{b^3}{6g^3}\right)\text{etc.}$$
$$- \frac{\alpha bb}{2g} + \frac{\alpha\alpha b^3}{6gg} - \frac{\alpha^3 b^4}{24 g^4} + \text{etc.}$$
$$- \alpha l\left(\frac{a}{f} + \frac{b}{g}\right) + \tfrac{1}{2}\alpha^2\left(\frac{a}{f} + \frac{b}{g}\right)^2 - \tfrac{1}{6}\alpha^3 l\left(\frac{a}{f} + \frac{b}{g}\right)^3 + \text{etc.}$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$v\left(1 - \frac{k^4}{g^4}\left(\frac{\alpha b}{g} - \frac{\alpha^2 b^2}{2g^2} + \frac{\alpha^3 b^3}{6g^3} - \text{etc.}\right)\right) =$$
$$a + b - \alpha\left(\frac{aa}{2f} + \frac{ab}{g} + \frac{bb}{2g} + \frac{al}{f} + \frac{bl}{g}\right)$$
$$+ \alpha\alpha\left(\frac{a^3}{6ff} + \frac{aab}{2fg} + \frac{abb}{2gg} + \frac{b^3}{6gg} + \tfrac{1}{2} l\left(\frac{a}{f} + \frac{b}{g}\right)^2\right)$$
$$- \alpha^3\left(\frac{a^4}{24f^3} + \frac{a^3 b}{6ffg} + \frac{aabb}{4fgg} + \frac{ab^3}{6g^3} + \frac{b^4}{24g^3} + \tfrac{1}{6} l\left(\frac{a}{f} + \frac{b}{g}\right)^3\right)$$
etc.

47. Si altitudo vasis supremi $AB = a$ fuerit valde exigua, amplitudo autem ff multo maior quam amplitudo tubi gg, simulque longitudo huius tubi $BC = b$ satis sit ingens, patet fractionem $\frac{b}{g}$ maxime superare fractionem $\frac{a}{f}$; hac igitur prae illa neglecta, erit

$$v\left(1 - \frac{k^4}{g^4}\left(\frac{\alpha b}{g} - \frac{\alpha^2 b^2}{2gg} + \frac{\alpha^3 b^3}{6g^3} - \text{etc.}\right)\right) =$$
$$a + b - \frac{\alpha b}{g}\left(a + \tfrac{1}{2} b + l\right) + \frac{\alpha\alpha bb}{gg}\left(\tfrac{1}{2} a + \tfrac{1}{6} b + \tfrac{1}{2} l\right)$$
$$- \frac{\alpha^3 b^3}{g^3}\left(\tfrac{1}{6} a + \tfrac{1}{24} b + \tfrac{1}{6} l\right) \text{ etc.}$$

atque haec series eo magis conuergit, quo minor fuerit fractio $\frac{\alpha b}{g}$.

48. Quantum autem ex crassis quibusdam experimentis obiter tantum colligere licuit, valor ipsius α prodiit circiter $= \frac{1}{4000}$. Hinc dummodo numerus $\frac{b}{g}$ notabiliter fuerit minor, quam 4000, sufficiet in primis terminis subsitisse, ita vt sit

$$v\left(1 - \frac{\alpha b}{g} \cdot \frac{k^4}{g^4}\right) = a + b - \frac{\alpha b}{g}\left(a + \tfrac{1}{2}b + l\right), \text{ seu}$$

$$v = a + b - \frac{\alpha b}{g}\left(a + \tfrac{1}{2}b + l - \frac{k^4}{g^4}(a + b)\right)$$

49. Si orificium $CC = kk$ fuerit minimum, ita vt $\frac{k^4}{g^4}$ pro nihilo haberi possit, erit

$$v = a + b - \frac{\alpha b}{g}\left(a + \tfrac{1}{2}b + l\right)$$

sin autem tubus infra plane sit apertus, seu $gg = kk$, habebitur

$$v = a + b - \frac{\alpha b}{g}\left(l - \tfrac{1}{2}b\right)$$

Illo ergo casu celeritas effluxus est minima, atque a frictione maxime impeditur; hoc autem casu videtur fieri posse, vt fiat $v = a + b$, perinde ac si nulla frictio adesset.

50. Hoc scilicet euenire deberet, si $b = 2l$, seu cum sit l triginta pedum, si $b = 60$ pedum: atque adeo, si esset $b > 60$ pedum, calculus noster praeberet $v > a + b$. Interim tamen certissimum est, frictionem in causa esse non posse, vt aqua maiori celeritate exsiliat, quam si nulla adesset frictio. Dico igitur, huiusmodi casus ideo locum habere non posse, propterea quod aqua tubo non vbique adhaereat; sed vacuum relinquat, ita, vt calculus ad eos accommodari nequeat.

51. Quod

51. Quod quo clarius perſpiciatur, notandum eſt, aquam eatenus tantum vbique tubi cauitatem explere, quatenus ad eius latera apprimitur: ſin igitur eueniat, vt preſſio aquae intra tubum alicubi vel euaneſcat, vel adeo fiat negatiua, ibi reuera latera tubi deſeret, vacuumque relinquet, ita vt motus aquae longe aliter ſit futurus, ac per calculum eſt definitus. Calculus enim locum habere nequit, niſi ſtatus compreſſionis aquae in tubo vbique ſit affirmatiuus.

52. Ponamus ergo ſtatum compreſſionis aquae in ſectione BB eſſe $=R$, atque ex §. 36. habebimus

$$l = Re^{\frac{-\alpha b}{g}} + \frac{g}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{\alpha b}{g}}\right) + \frac{k^4}{g^4}v - v$$

ideoque $R = e^{\frac{-\alpha b}{g}} l - \frac{g}{\alpha}\left(e^{\frac{\alpha b}{g}} - 1\right) + v\left(1 - \frac{k^4}{g^4}\right)e^{\frac{\alpha b}{g}}$

Iam ob $e^{\frac{\alpha b}{g}} = 1 + \frac{\alpha b}{g} + \frac{\alpha^2 b^2}{g^2}$, erit

$$R = l + \frac{\alpha b l}{g} - b - \frac{\alpha b b}{g} + \left(1 + \frac{\alpha b}{g}\right)v\left(1 - \frac{k^4}{g^4}\right)$$

et ſubſtituto pro v valore ante inuento, habebitur neglectis terminis per α multiplicatis

$$R = l + a - \frac{k^4}{g^4}(a + b).$$

53. Niſi ergo ſit $l + a > \frac{k^4}{g^4}(a + b)$, hypotheſis in calculo aſſumta locum habere nequit; ideoque tubi BC longitudo b minor eſſe debet, quam $\frac{g^4}{k^4}(l + a) - a$. Quare ſi tubus BC infra ſit plane apertus, ſeu $gg = kk$, neceſſe eſt, vt ſit $b < l$: vnde hypotheſis euertitur, ſi eſſet $b = 2l$. Caſu $gg = kk$, longitudo tubi $BC = b$ triginta pedes ſuperare nequit, vnde poſito $b = l$, maxima celeritas effluxus, ſeu quae minime a frictione impeditur,

peditur, debita est altitudini $v = a + l - \frac{\alpha l l}{2g}$: ideoque minor est, quam si nulla adesset frictio.

54. In genere autem, si sit $\frac{a}{f}$ tam paruum, vt prae $\frac{b}{g}$ pro nihilo reputari possit, erit $\mathfrak{A} = 1$, $A = \frac{a}{f}$; vnde fit $v = \dfrac{a e^{\frac{-\alpha b}{g}} + \frac{g}{\alpha}(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}}) - l(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}})}{1 - \frac{k^4}{g^4}(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}})}$

vnde si tubus BC infra penitus sit apertus, seu $\frac{k^4}{g^4} = 1$ erit $v = a + \frac{g}{\alpha}(e^{\frac{\alpha b}{g}} - 1) - l(e^{\frac{\alpha b}{g}} - 1)$

55. Si ergo tubus BC sit tam gracilis, vt sit $g = \alpha l$, aqua in CC maiori celeritate non effluet, quam tubo remoto in BB effluueret. Atque si tubus BC adhuc sit gracilior, seu $g < \alpha l$, puta $g = \frac{1}{2}\alpha l$, fiet

$$v = a - \tfrac{1}{2} l(e^{\frac{2b}{l}} - 1)$$

et si altitudo b valde sit parua prae l, erit

$$v = a - b - \frac{bb}{l},$$

nisi ergo sit $a > b + \frac{bb}{l}$, aqua plane non effluet, hoc est nisi sit $a > b$.

56. Tubus igitur BC tam gracilis esse potest, vt frictio effluxum aquae per eius orificium CC penitus arceat, atque hinc commodissime valor liiterae α per experimenta explorari poterit. Infigatur enim vasi satis amplo AB, in quo aqua altitudinem $AB = a$ non nimis magnam occupat, tubus, vt vocari solet, capillaris, cuius amplitudine existente $= gg$, ponatur $g = \frac{1}{n}\alpha l$, et cum sit $v = a - \frac{(n-1)}{n} l(e^{\frac{nb}{l}} - 1) = a - (n-1)b$;

pono

pono hunc tubum initio tam fuiſſe longum, vt nulla aqua effluereet; deinde eius longitudo ſucceſſiue diminuatur, donec aqua effluere incipiat: qua longitudine notata, quae ſit $=b$, cum ſit $a-(n-1)b=0$, erit $n=\frac{a+b}{b}$; ideoque $\alpha=\frac{a+b}{b}.\frac{g}{l}$.

57. Idem experimentum etiam ita inſtitui poteſt, vt longitudo tubi capillaris BC data aſſumatur, quae autem tanta ſit, vt ſi minimum aquae in vas ſuperius infundatur, nihil effluat; tum vero continuo augeatur altitudo aquae in vaſe eousque, donec aqua per tubulum capillarem effluere incipiat. Quod cum euenerit, notetur iſta altitudo $=a$, et quia tam longitudo tubuli b, quam eius amplitudo gg, iam cognita ponitur, elicietur vt ante $\alpha=\frac{a+b}{b}.\frac{g}{l}$.

58. Perſpicuum autem eſt, tubulum, quo vti volumus, tam arctum eſſe debere, vt ſit $g<\alpha l$; ſi enim fuerit $g>\alpha l$, hic caſus nunquam vſu veniet, vt effluxus aquae impediatur. Quodſi ergo ſit, vti ſuſpicari licuit, $\alpha=\frac{1}{4000}$, ob $l=30$ ped. deberet eſſe $g>\frac{3}{400}$ ped. ſeu $g<0,0075$ ped. ſicque diameter tubuli minor eſſe deberet, quam $\frac{85}{10000}$ ped. ſeu quam $\frac{1}{118}$ ped. Hinc limes, infra quem diameter tubuli capi deberet, eſſet circiter vnius lineae.

59. Si fuerit $g=\alpha l$, ſeu $g<\alpha l$, et $a=0$, tum ſi eiusmodi tubulus, cuiuscunque fuerit longitudinis, aqua impleatur, nihil ex eo effluet, etiamſi in ſitu verticali detineatur. Hinc cum l ſit longitudo 30 pedum, facile per experimenta valor litterae α explorari poterit. Parentur ſcilicet plures tubuli, quorum amplitudi-

nes

nes gg sint diuersae, iique aqua repleantur; tum ex amplioribus quidem aqua effluet, ex arctioribus vero secus; tantum igitur opus est, vt eius tubuli, qui aquam non amplius eiicit, amplitudo gg mensuretur, eritque tum $\alpha = \frac{g}{l}$. Hic autem effluxus verus spectari debet, quo aqua continuo tractu effluit; si enim guttatim tantum decidit, idem erit, ac si aqua non effluueret. Cum enim frictio demum in vero motu cernatur, quamdiu aqua quiescit, ob grauitatem guttae sensim auellentur ac decident, id quod frictio impedire non valet.

60. Patet ergo gracilitatem huiusmodi tubulorum, qui aquam contentam, etiamsi vtrinque sint aperti, non effluere sinunt, a pondere atmosphaerae l pendere, quoniam hoc euenit, si $g < \alpha l$. Hinc videmus, in vacuo, vbi $l = 0$, istos tubulos aquam omnino effundere, nisi quatenus, ob naturam, quae tubulis capillaribus propria est, aqua in iis ad certam altitudinem retineatur, reliqua autem aqua effluet in vacuo, quae in aere guttatim tantum decidebat.

61. Generatim autem intelligitur, ob pressionem atmosphaerae effluxum aquae semper retardari, et quidem frictionem huius retardationis esse causam: vidimus enim (54), quo minor sit pressio atmosphaerae l, eo maiori celeritate aquam exilire. Quodsi ergo a causa quacunque pressio atmosphaerae imminuatur, aqua velocius ex vase effluet; quam propterea causam esse existimo, quod ab electricitate effluxus aquae accelerari obseruetur.

62. Prae-

62. Praeterire hic nequeo phaenomenon, explicatu alias facillimum, quod scilicet, si vas superius sit infinite angustum, seu eius amplitudo ff plane euanescat, ita vt tubus BC supra omnino sit clausus, aqua per orificium CC non effluat, nisi tubus fuerit vehementer longus. Nam hoc phaenomenum, neglecta frictione, ex theoria non sequitur, cum valor ipsius v non euanescat, etiamsi ponatur $f=0$.

63. Frictione autem in computum ducta, cum, ob $f=0$, fiat $\mathfrak{A}=0$, erit fractionis, quae valorem ipsius v praebet, numerator $=Bg-l=(1-e^{\frac{-\alpha b}{g}})\frac{g}{\alpha}-l$, ad denominatorem enim attendi non est opus, qui fractionem $\frac{k^4}{f^4}=f$ inuolueret, quem §. 45. omisimus. Ex numeratore autem intelligitur, quoties fuerit $1-e^{\frac{-\alpha b}{g}} < \frac{\alpha l}{g}$, nullum effluxum locum habere posse. Hoc ergo euenit, si $e^{\frac{-\alpha b}{g}} > 1-\frac{\alpha l}{g}$, seu $1-\frac{\alpha b}{g}+\frac{\alpha^2 b^2}{2g^2}-\frac{\alpha^3 b^3}{6g^3}$ etc. $< 1-\frac{\alpha l}{g}$, ideoque, si $l > b-\frac{\alpha bb}{2g}+\frac{\alpha^2 b^3}{6gg}$ etc. Vel aqua non effluet, quoties erit $\frac{\alpha b}{g} < -\log.(1-\frac{\alpha l}{g})$, seu $b < l+\frac{\alpha ll}{2g}+\frac{\alpha^2 l^3}{3gg}+\frac{\alpha^3 l^4}{4g^3}+$ etc. Nisi ergo longitudo tubi b hoc valore fuerit maior, aqua effluere nequit.

64. Videamus autem pro casu quodam determinato, quantus futurus sit effectus frictionis, posito valore $\alpha=\frac{1}{4000}$, qui a veritate non multum abhorrere videtur. Sit ergo vasis supremi amplissimi altitudo $AB=a=\frac{1}{3}$ ped. longitudo tubi annexi $BC=b=4$ pedum, eius amplitudo $gg=\frac{1}{2500}$ ped. seu $g=\frac{1}{50}$ ped. et hic tubus infra plane sit apertus, vt fiat $kk=gg$; hinc

 erit

erit $\frac{\alpha b}{g} = \frac{1}{20}$ et $e^{\frac{\alpha b}{g}} - 1 = 0,051127$: atque $\frac{g}{\alpha} - l = 50$. Vnde fit:

$$v = \tfrac{1}{3} + 2,563 = 2,896 \text{ pedum.}$$

Hoc ergo casu altitudo celeritati, qua aqua effluit, debita tantum est 2,896 pedum, cum frictione sublata ea futura esset $= 4\frac{1}{3}$ pedum.

65. Si effectus frictionis minor esset, quam assumsi, celeritas aquae etiam magis accederet ad altitudinem $4\frac{1}{3}$ pedum. Quod quo clarius appareat, ponamus $\alpha = \frac{1}{6000}$, erit $\frac{\alpha b}{g} = \frac{1}{30}$, et $e^{\frac{\alpha b}{g}} - 1 = 0,033894$, atque $\frac{g}{\alpha} - l = 90$, vnde fiet:

$$v = \tfrac{1}{3} + 3,05046 = 3,38379 \text{ ped.}$$

Altitudo ergo celeritati debita iam foret 3,38379, ideoque propius ad $4\frac{1}{3}$ ped. accederet.

66. Vase autem huiusmodi constructo, per experimentum explorari potest, quanta aquae copia certo tempore effluet. Ponamus enim minuto primo effluere copiam aquae, quae sit m ped. cub. atque pariter in pedibus erit $v = 100000\, mm$, qui valor comparetur cum iis, quos pro v ex hypothesibus $\alpha = \frac{1}{4000}$ et $\alpha = \frac{1}{6000}$ determinauimus, vel si hae hypotheses minus congruant, aliae calculo euoluantur, sicque innotescet verus valor ipsius α. Expediet autem plura huiusmodi instituisse experimenta, antequam de vero ipsius α valore plane certi esse queamus.

CASVS

CASVS II.

SI AQVA EX VASE SVPREMO PER TVBVM VERTICALEM EX DVABVS PARTIBVS CYLINDRICIS COMPOSITVM EFFLVIT.

67. Sit vasis supremi amplitudo $AA = ff$, quae sit valde magna, eiusque altitudo $AB = a$, quod vas iugiter aqua plenum conseruari pono. Ex hoc vase aqua primum in tubum BC fluat, cuius amplitudo sit $BB = gg$ et altitudo $BC = b$: cui tubo in CC annexus sit insuper tubus verticalis CD, amplitudinis $= hh$ et longitudinis $CD = c$: cuius basis infima pertusa sit foramine $DD = kk$, per quod aqua in aerem effluat. Significet autem l altitudinem columnae aqueae atmosphaerae aequiponderantem: sit autem kk prae ff tam paruum, vt valor $f = \frac{k^4}{f^4}$ pro nihilo haberi possit. Tab. VII. Fig. 2.

68. His positis sit breuitatis gratia $\mathfrak{A} = e^{\frac{-\alpha a}{f}}$; $A = \frac{1-\mathfrak{A}}{\alpha}$; $\mathfrak{B} = e^{\frac{-\alpha b}{g}}$; $B = \frac{1-\mathfrak{B}}{\alpha}$; $\mathfrak{C} = e^{\frac{-\alpha c}{h}}$; $C = \frac{1-\mathfrak{C}}{\alpha}$; tum vero $\mathfrak{f} = \frac{k^4}{f^4}$ et $\mathfrak{g} = \frac{k^4}{g^4}$. Iam aqua per orificium $DD = kk$ effluere inuenta est celeritate debita altitudini v, vt sit

$$v = \frac{A\mathfrak{B}\mathfrak{C}f + B\mathfrak{C}g + Ch - (1-\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})l}{1-(1-\mathfrak{B})\mathfrak{C}\mathfrak{g} - (1-\mathfrak{C})\mathfrak{h}}$$

vnde, vt iam supra notauimus, sequitur, si frictio euanesceret, fore $v = a + b + c$, ita vt altitudo celeritati effluxus debita esset aequalis toti altitudini AD.

69. Si amplitudo tubi medii BC aequalis esset amplitudini infimi CD, casus ad praecedentem rediret;

ſin autem amplior eſſet, tanquam pars vaſis ſupremi ſpectari poſſet, ſicque pariter ad caſum primum reuocaretur. Quare ſi phaenomena, quae huic caſui ſunt propria, euoluere velimus, tubum medium BC multo arctiorem ſtatui conueniet, quam vel vas ſuperius, vel tubum infimum CD. Experimentis autem conſtat, ob gracilitatem huiusmodi meatus medii BC celeritatem effluxus non mediocriter imminui, vnde huius diminutionis cauſa aperte frictioni eſt tribuenda, cum ſublata frictione amplitudo huius tubi *gg* celeritatem effluxus non afficeret.

70. At ſi amplitudo tubi BC multo minor eſt, quam ſuperioris et inferioris, euidens eſt, venam aquae, quae ex vaſe ſuperiori in eum intrat, iam ante contrahi, ſimilique modo, cum inde in tubum ampliorem CD egreditur, etiam nunc poſt egreſſum contractiorem manere; ſicque aqua perinde mouebitur, ac ſi per tubum figurae βBBCCγ transflueret, ita vt tam vas ſuperius, quam tubus inferior, ex aliqua parte coarctari ſit cenſendus. Quae circumſtantia in calculum inducetur, ſi longitudo tubi gracilioris BC aliquanto maior aeſtimetur, quam reuera eſt; atque tantumdem de altitudine tuborum contiguorum dematur.

71. Aſſumam ergo, hanc mutationem in deſignatione altitudinum *a*,*b*,*c* iam eſſe factam, ita vt quantitas *b* aliquanto maior, *a* vero et *c* aliquanto minores ſint, quam re vera deprehenduntur. Hinc ergo altitudo *b* eo maior eſt cenſenda, quo minor fuerit amplitudo huius tubi, prae amplitudine tam ſuperioris, quam inferioris. Hanc ob rem, ſi tubus BC fuerit arctiſſimus,

ſeu

ſeu gg minimum, etiamſi eius altitudo BC ſit minima, tamen litterae b valor notabilis tribui debebit; ac ſi BC quaſi euaneſcat, quod euenit, ſi fundus vaſis ſuperioris foramine exiguo fuerit pertuſus, nihilominus in calculo littera b modicum valorem ſortietur.

72. Sit igitur amplitudo tubuli BC quaſi euaneſcens, ſeu g fere nihilo aequalis, ita vt valor ipſius b mediocrem nanciſcatur magnitudinem, etiamſi forte ipſa altitudo BC ſit minima; eritque $\frac{b}{g}$ numerus admodum magnus, ex quo valor ipſius $\mathfrak{B} = e^{\frac{-\alpha b}{g}}$ in fractionem abibit vnitate multo minorem, ita vt ſi eſſet $g = 0$, omnino fuerit $\mathfrak{B} = 0$. Praeterea vero euadet $\mathfrak{G} = \frac{k^4}{g^4}$ quantitas maxima. Quoniam vero amplitudines ff et bb non admodum paruae ſtatuuntur, erit $\mathfrak{A} = 1 - \frac{\alpha a}{f} + \frac{\alpha\alpha aa}{2ff}$; $\mathfrak{C} = 1 - \frac{\alpha c}{b} + \frac{\alpha^2 cc}{2bb}$ et $A = \frac{a}{f} - \frac{\alpha aa}{2ff}$ et $C = \frac{c}{b} + \frac{\alpha cc}{2bb}$.

73. Antequam autem ipſum effluxum definire queamus, videndum eſt, vtrum aqua in hoc vaſe continua manere, atque lateribus vaſis adhaerere queat; quem in finem quaeramus ſtatum compreſſionis aquae in CC, qui altitudine R exprimatur, eritque $l = R\mathfrak{C} + Cb + \mathfrak{H}v - v$, vnde reperitur:

$$R = \frac{l - Cb + (1 - \mathfrak{H})v}{\mathfrak{C}}$$

quae quantitas ſi fuerit negatiua, aqua continua non manet, ideoque effluxus calculo aduerſabitur.

74. Cum igitur sit posito $\mathfrak{B}$ valde paruo, ideoque $B = \frac{1}{\alpha}$

$$v = \frac{a\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \frac{g}{\alpha}\mathfrak{C} + Cb - l}{1 - \mathfrak{C}\mathfrak{g} - \alpha C\mathfrak{h}} = \frac{\frac{g}{\alpha}\mathfrak{C} + Cb - l}{1 - \mathfrak{C}\mathfrak{g}}$$

neglectis terminis minimis, erit

$$R = \frac{l - Cb}{\mathfrak{C}} + \frac{(1 - \mathfrak{h})\frac{g}{\alpha}}{1 - \mathfrak{C}\mathfrak{g}} - \frac{(1 - \mathfrak{h})(l - Cb)}{\mathfrak{C}(1 - \mathfrak{C}\mathfrak{g})}, \text{ siue}$$

$$R = \frac{(1 - \mathfrak{h})\frac{g}{\alpha}}{1 - \mathfrak{C}\mathfrak{g}} - \frac{(\mathfrak{C}\mathfrak{g} - \mathfrak{h})(l - Cb)}{\mathfrak{C}(1 - \mathfrak{C}\mathfrak{g})}$$

At cum sit proxime $\mathfrak{C} = 1$ et $Cb = c$, erit

$$v = \frac{\frac{g}{\alpha} + c - l}{1 - \mathfrak{g}} \text{ et } R = \frac{\frac{g}{\alpha}(1 - \mathfrak{h}) - (\mathfrak{g} - \mathfrak{h})(l - c)}{1 - \mathfrak{g}}$$

75. Hinc primo patet, si fuerit $\mathfrak{g} = 1$ vel $\mathfrak{g} > 1$, effluxum nunquam ad statum vniformitatis reduci, ideoque motum ex his formulis, quae ad hunc statum sunt accommodatae, definiri omnino non posse; statim ergo ab initio calculus ita adornari debuisset, vt altitudo v, tanquam variabilis, esset introducta. Quodsi autem fuerit $\mathfrak{g} < 1$, seu $kk < gg$, effluxus quidem vniformis euadet, et aqua effluet, si fuerit $\frac{g}{\alpha} + c > l$, simulque $\frac{g}{\alpha}(1 - \mathfrak{h}) > (\mathfrak{g} - \mathfrak{h})(l - c)$; sin autem sit $\frac{g}{\alpha} + c = l$, seu $\frac{g}{\alpha} + c < l$, aqua plane non effluet, existente, vti assumimus, $kk < gg$. At si sit $\frac{g}{\alpha} + c > l$, puta $\frac{g}{\alpha} + c = l + \gamma$, effluxus ad vniformitatem perueniet, quoties fuerit $c < l$. Casibus autem, quibus $c > l$, hoc multo magis eueniet, quia, ob $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$, tum valor ipsius R semper est affirmatiuus.

CASVS

CASVS III.

SI AQVA EX VASE CONSTANTER PLENO PER TVBVM HORIZONTALEM EFFLVIT.

76. Sit vasis amplitudo $AA = ff$, et altitudo $AB = a$, tubi vero horizontaliter infixi longitudo $BC = b$, amplitudo $BB = gg$, et lumen, per quod aqua effluit, $CC = kk$. Ponatur breuitatis ergo $\mathfrak{A} = e^{\frac{-\alpha a}{f}}$; $A = \frac{1-\mathfrak{A}}{\alpha}$; $\mathfrak{B} = e^{\frac{-\alpha b}{g}}$; $B = \frac{1-\mathfrak{B}}{\alpha}$; $\mathfrak{f} = \frac{k^4}{f^4}$; et $\mathfrak{g} = \frac{k^4}{g^4}$; erit altitudo celeritati effluxus debita, ob $\zeta = 90°$, et cos. $\zeta = 0$, denotante l altitudinem 30 pedum, Tab. VII. Fig. 3.

$$v = \frac{A\mathfrak{B}f - (1 - \mathfrak{A}\mathfrak{B})l}{1 - \mathfrak{B}\mathfrak{f} - \alpha B\mathfrak{g}}$$

77. Si vas AB fuerit valde amplum, erit $\mathfrak{f} = 0$, $\mathfrak{A} = 1 - \frac{\alpha a}{f}$ et $A = \frac{a}{f} - \frac{\alpha a^2}{2ff}$, vnde celeritas effluxus debita erit altitudini

$$v = \frac{a\mathfrak{B}(1 - \frac{\alpha a}{2f}) - (1 - \mathfrak{B} + \frac{\alpha a}{f}\mathfrak{B})l}{1 - (1 - \mathfrak{B})\mathfrak{g}}$$

vnde cum $\mathfrak{g} = \frac{k^4}{g^4}$ vnitatem superare nequeat, denominator semper erit quantitas affirmatiua $> \mathfrak{B}\mathfrak{g}$: quod indicio est, aquae effluxum certo ad statum vniformitatis peruenire.

78. Vt autem aqua actu effluat, necesse est, vt sit $a\mathfrak{B}(1 - \frac{\alpha a}{2f}) > (1 - \mathfrak{B} + \frac{\alpha a}{f}\mathfrak{B})l$, seu $\mathfrak{B} > \frac{fl}{f(a+l) - \alpha a(\frac{1}{2}a + l)}$; ideoque $e^{\frac{-\alpha b}{g}} < 1 + \frac{a}{l} - \frac{\alpha a a}{2fl}$

$-\frac{\alpha aa}{2fl} - \frac{\alpha a}{f}$; hinc logarithmis sumendis oportet sit $\frac{\alpha b}{g} < \log.(1+\frac{a}{l}) - \frac{\alpha a(a+2f)}{2f(a+l)}$, vbi $\log.(1+\frac{a}{l})$ denotat logarithmum hyperbolicum numeri $1+\frac{a}{l}$. Ergo effluxus cessabit si sit $b > \frac{g}{\alpha}\log.(1+\frac{a}{l}) - \frac{ag(a+2f)}{2f(a+l)}$.

79. Quo longior ergo fuerit tubus horizontalis BC, eo lentius aqua effluet, atque eius longitudo eousque excrescere potest, vt aqua per eum plane non effluat; quod scilicet eueniet, si fuerit $b > \frac{g}{\alpha}\log.(1+\frac{a}{l}) - \frac{ag(a+2f)}{2f(a+l)}$. Hoc autem intelligendum est, si foramen CC in parte superiori extremitatis tubi BC fiat. Si enim esset in parte inferiori, ob ipsam aquae grauitatem in tubo horizontali, quam in calculo non sum contemplatus, vtique effluueret.

80. Si altitudo a multo, sit minor, quam l, erit proxime $\log.(1+\frac{a}{l}) = \frac{a}{l}$. Cum primum ergo longitudo tubi b superauerit hanc quantitatem $\frac{ga}{\alpha l} - \frac{ag(a+2f)}{2f(a+l)}$, effluxus aquae per orificium CC cessabit. Et quia terminus secundus minimus est respectu primi, aqua non amplius effluet, quando fuerit $b > \frac{ga}{\alpha l}$; Hinc vt aqua effluat oportet sit $b < \frac{ga}{\alpha l}$.

81. Si ergo altitudo vasis $AB = a$ fuerit vnius pedis, ob $l = 30$ ped. effluxus aquae coercebitur, si tubi BC longitudo maior sit, quam $\frac{g}{30\alpha}$. Hinc nouus colligitur modus valorem litterae α determinandi: cum enim per experimenta explorata fuerit longitudo tubi horizontalis b, cuius amplitudo gg sit nota, vbi effluxus cessat, erit $\alpha = \frac{ga}{bl}$.

82. Hu-

82. Huiusmodi ergo experimenta institui poterunt tubis non adeo angustis, vti modo ante exposito, vnde hic modus anteferri videtur. Cum enim tubi arctissimi, qui capillares vocari solent, singularibus proprietatibus sint praediti, semper dubium relinqueretur, vtrum, ob has proprietates, effluxus aquae per huiusmodi tubos non peculiarem patiatur perturbationem, qua valor ipsius α inde collectus incertus redderetur.

83. Vt exemplum huiusmodi experimentorum exhibeam, ponamus esse vas AAB amplissimum, tubi vero horizontalis BC longitudinem esse $b = 2$ pedum, et amplitudinem $gg = \frac{1}{625}$ pedis quadrati, ideoque $g = \frac{1}{25}$ ped. lumen autem eius kk tam esse exiguum, vt $\mathfrak{g} = \frac{k^4}{g^4}$ pro nihilo haberi possit. Hinc ob vas AAB amplissimum, negligi poterit fractio $\frac{\alpha a}{\mathfrak{f}}$, et habebitur $\mathfrak{B} = e^{\frac{-\alpha b}{g}} = 1 - \frac{1}{80}$, sumto $\alpha = \frac{1}{4000}$. Atque obtinebitur $v = a - \frac{a-30}{80} = \frac{79a-30}{80}$. Vt igitur aqua hoc casu actu effluat, necesse est, vt sit $a > \frac{30}{79}$ pedis.

84. Si posuissemus $\alpha = \frac{1}{8000}$, prodiisset $\mathfrak{B} = 1 - \frac{1}{160}$, et $v = a - \frac{a-30}{160} = \frac{159a-30}{160}$, aqua ergo effluere inciperet statim atque aquae in vase AB altitudo a superaret $\frac{30}{159}$ ped. Cum igitur posito α incognito sit $\mathfrak{B} = 1 - 50\alpha$, et $v = a(1 - 50\alpha) - 1500\alpha$, augeatur sensim altitudo aquae in vase AB, donec aqua per orificium CC effluere incipiat, et notetur tum altitudo $AB = a$ in pedibus, erit $\alpha = \frac{a}{50a + 1500}$.

85. Si idem experimentum alio tubo horizontali instituatur, cuius tam longitudo b, quam amplitudo gg,

 sit

sit quaecunque, verumtamen eiusmodi, vt $\frac{\alpha b}{g}$ maneat fractio admodum parua, sitque satis exacte $\mathfrak{B} = 1 - \frac{\alpha b}{g}$, et $v = a(1 - \frac{\alpha b}{g}) - \frac{\alpha b l}{g}$, atque altitudo aquae in vase AB notetur, vbi aqua per orificium CC primum effluere incipit, inde colligetur $\alpha = \frac{ag}{b(a+l)}$ hicque certissimus videtur modus, verum valorem ipsius α explorandi.

86. Spectemus autem valorem ipsius α, tanquam cognitum, scilicet $\alpha = \frac{1}{4000}$, et videamus in aliquo exemplo, quanta debilitatio in fontibus salientibus ob frictionem oriri debeat. Sit igitur vas AB admodum altum, scilicet $a = 100$ ped. eiusque amplitudo $ff = 1$ pes quadratus, seu $f = 1$. Tum sit amplitudo tubi horizontalis $gg = \frac{1}{100}$, seu $g = \frac{1}{10}$, eiusque longitudo $b = 100$; et lumen $kk = \frac{1}{10000}$: erit $\mathfrak{f} = 0$, et $\mathfrak{g} = \frac{1}{10000}$, tum vero $\mathfrak{A} = 1 - \frac{1}{40} + \frac{1}{2.1600}$ - etc. seu $\mathfrak{A} = 0,97531$, et $\mathfrak{B} = 0,77880$, et $A = 98,760$.

87. His positis valoribus, prodibit altitudo celeritati effluxus debita:

$v = 69,701$ ped.

Quodsi ergo lumen in dorso tubi circa cc constituatur, vt per id aqua verticaliter erumpat, fons saliens tantum ad altitudinem $69\frac{2}{3}$ pedum assurget, ideoque 30 pedibus deficiet ab altitudine aquae in vase. Verum hic saltus etiam ob resistentiam aëris aliquantum diminuetur, ita vt fons ne quidem ad hanc altitudinem $69\frac{2}{3}$ pedum sit ascensurus.

CASVS

CASVS IV.

SI AQVA EX VASE CONSTANTER PLENO PER TVBVM CYLINDRICVM INCLINATVM DEFLVAT.

88. Sit vasis amplitudo $AA = ff$, eiusque altitudo $AB = a$. Tubi inclinati longitudo $BC = b$, amplitudo $BB = gg$, et angulus, quo ad rectam verticalem inclinatur, $= \zeta$, ita vt $\cos.\zeta$ exprimat sinum inclinationis eius ad horizontem; effluat vero aqua per lumen $CC = kk$, quod prae ff sit minimum, vt sit $\frac{k^4}{f^4} = \mathfrak{f} = 0$. Porro ponatur $\frac{k^4}{g^4} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{A} = e^{\frac{-\alpha a}{f}}$, $A = \frac{1-\mathfrak{A}}{\alpha}$, $\mathfrak{B} = e^{\frac{-\alpha b}{g}}$, et $B = \frac{1-\mathfrak{B}}{\alpha}$; quibus positis erit altitudo celeritati, qua aqua per CC effluit, debita Tab. VII. Fig. 4.

$$v = \frac{A\mathfrak{B}f + Bg\cos.\zeta - (1-\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,l}{1-\alpha B\mathfrak{g}}$$

89. Cum altitudo vasis $AB = a$ non sit admodum magna, et eius amplitudo ff ingens erit $Af = a$, et $\mathfrak{A} = 1$, proxime, vnde habebitur

$$v = \frac{a\mathfrak{B} + \frac{1}{\alpha}(1-\mathfrak{B})g\cos.\zeta - (1-\mathfrak{B})\,l}{1-(1-\mathfrak{B})\,\mathfrak{g}}$$

vbi, cum $\mathfrak{g}$ vnitatem superare nequeat, et sit $\mathfrak{B} < 1$, denominator erit quantitas positiua; vnde motus ad vniformitatem perueniet. At si numerator fuerit vel $= 0$, vel quantitas negatiua, aqua plane non effluet, sed in quiete perseuerabit.

90. Si altitudo vasis $AB = a$ sit quam minima, patet effluxum non dari, nisi sit $g \cos. \zeta < \alpha l$, seu, nisi sinus decliuitatis tubi maior sit, quam $\frac{\alpha l}{g}$. Quodsi ergo ponatur $g = n\alpha l = 0,0075\,n$ pedum, vt aqua per tubum BC defluat, necesse est, vt sit $\cos. \zeta > \frac{1}{n}$. Si ergo sit vel $n = 1$, vel $n < 1$, aqua per istiusmodi tubum plane non defluet; quare, vt aqua defluat, necesse est, vt sit $n > 1$, seu $g > \alpha l$, ac tum sinus decliuitatis maior esse debet, quam $\frac{1}{n}$.

91. Hinc pro fluminibus decliuitas alueï assignari potest, vt aqua decurrat, ita vt si decliuitas minor esset, aqua esset stagnatura. Pendet autem haec decliuitas a littera g, qua profunditas fluuii indicatur. Vt igitur hanc decliuitatem pro quauis fluminis profunditate definiamus, sit pro distantia mille pedum altitudo, per quam alueus subsidit, $= z$ ped. eritque $\frac{z}{1000}$ sinus decliuitatis. Quare si fluuii profunditas sit g pedum, ob $g = \frac{3}{400} n$, et $n = \frac{400}{3} g$, fiet $\frac{z}{1000} > \frac{3}{400g}$: vt ergo aqua in alueo defluat, oportet sit $z > \frac{30}{4g}$, seu $z > \frac{1000\alpha l}{g}$.

92. Pro quauis ergo fluminis profunditate g definire poterimus decliuitatem alueï, quae distantiae mille pedum conueniat, vbi aqua primum fluxum consequatur: ita vt, si decliuitas esset minor, aqua esset stagnatura, vti sequens tabella habet.

Pro-

Profunditas fluminis	Decliuitas ad dist. 1000 ped.	Profunditas fluminis	Decliuitas ad dist 1000 ped.
0, 5 ped.	15, 00 ped.	5 ped.	1, 50 ped.
1, 0	7, 50	6	1, 25
1, 5	5, 00	7	1, 07
2, 0	3, 75	8	0, 94
2, 5	3, 00	9	0, 83
3, 0	2. 50	10	0, 75
3, 5	2, 14	11	0, 68
4, 0	1, 87	12	0, 62
4, 5	1, 67	13	0, 58
5, 0	1, 50	14	0, 53½
		15	0, 50

93. Si ergo decliuitas pro data profunditate maior fuerit, quam haec tabula indicat, aqua in alueo decurret; eiusque celeritas proxime innotescet, si ponatur $g = 1$, vnde fiet:

$$v = a + (e^{\frac{\alpha b}{E}} - 1)(\tfrac{1}{\alpha} g \cos. \zeta - l)$$

Patet ergo, manente eadem decliuitate, ita tamen, vt $\cos. \zeta > \frac{\alpha l}{g}$, celeritatem fluminis eo fore maiorem, quo longior fuerit fluuii tractus. Notari etiam conuenit, cursum fluuii eiusdem accelerari, si pondus atmosphaerae diminuatur.

94. Quoniam ante (86, 87) casum euoluimus, quo aqua ex vase, centum pedes alto, ad distantiam centum pedum per tubum horizontalem, cuius amplitudo $gg = \frac{1}{100}$ ped. erat deriuata; ponamus nunc eiusdem vasis altitudinem esse minimam, ex eoque aquam

der tubum, angulo semirecto, ad horizontem inclinatum, ad eundem locum C deduci, esseque vt ante $gg = \frac{1}{100}$, seu $g = \frac{1}{10}$ ped. erit cos. $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $b = 100\sqrt{2} = 14,14$ ped.

95. Cum igitur fit $\frac{ab}{g} = 0,3536$, erit $\mathfrak{B} = 0,7021$. Statuamus, vt ibi orificium kk minimum, et ob a quantitatem minimam, erit

$$v = 0,2979\left(\frac{100}{\sqrt{2}} - 30\right) = 75,309 \text{ pedum.}$$

Quae quantitas cum sit maior, quam casu praecedente, $5\frac{2}{3}$ pedibus, sequitur aquam hoc casu ad altitudinem maiorem esse ascensuram, quam casu praecedente.

CASVS V.

SI AQVA EX VASE *AB* VEL PER TVBVM CYLINDRICVM INCLINATVM *BE*, VEL PER INFLEXVM *bcE* DEFLVAT ET INDE PER TVBVM VERTICALEM *CD* ERVMPAT.

96. Sit vasis AB altitudo a minima, amplitudo vero ff maxima: tum, quia hic duos casus euoluere constitui, sit pro vtroque casu amplitudo tubi deferentis $BB = bb = cc = gg$, tubuli verticalis CD altitudo $= c$, et amplitudo $CC = hh$, et lumen in $DD = kk$. Tum pro casu priori sit longitudo tubi $BE = b$, eiusque ad verticalem inclinatio $= \zeta$; erit pro casu altero $bc = b\cos.\zeta$, et $cE = b\sin.\zeta$. Ponatur autem $\frac{k^4}{g^4} = \mathfrak{g}$ et $\frac{k^4}{h^4} = \mathfrak{h}$.

67. His

97. His positis pro primo casu habebimus:

$\mathfrak{A}=1$; $A=\frac{a}{f}$; $\mathfrak{B}=e^{\frac{-\alpha b}{g}}$, $B=\frac{1-\mathfrak{B}}{\alpha}$; $\mathfrak{C}=e^{\frac{-\alpha c}{h}}$ et $C=\frac{1-\mathfrak{C}}{\alpha}$;

vnde celeritas effluxus debita erit altitudinis v, vt sit

$$v=\frac{a\mathfrak{B}\mathfrak{C}+\frac{1}{\alpha}(1-\mathfrak{B})\mathfrak{C}g\cos.\zeta-\frac{1}{\alpha}(1-\mathfrak{C})h-(1-\mathfrak{B}\mathfrak{C})l}{1-(1-\mathfrak{B})\mathfrak{C}g-(1-\mathfrak{C})\mathfrak{h}}$$

seu substitutis valoribus assumtis:

$$v=\frac{e^{\frac{-\alpha b}{g}-\frac{\alpha c}{h}}a+\frac{1}{\alpha}(1-e^{\frac{-\alpha b}{g}})e^{\frac{\alpha b}{h}}g\cos.\zeta-\frac{1}{\alpha}(1-e^{\frac{-\alpha c}{h}})h-(1-e^{\frac{-\alpha b}{g}-\frac{c}{h}})l}{1-(1-e^{\frac{-\alpha b}{g}})e^{\frac{-\alpha c}{h}}\mathfrak{g}-(1-e^{\frac{-\alpha c}{h}})\mathfrak{h}}$$

siue

$$v=\frac{e^{\frac{-\alpha b}{g}-\frac{\alpha c}{h}}(a-\frac{1}{\alpha}g\cos.\zeta+l)+e^{\frac{-\alpha c}{h}}(\frac{1}{\alpha}g\cos.\zeta+\frac{1}{\alpha}h)-\frac{1}{\alpha}h-l}{1-\mathfrak{h}-e^{\frac{-\alpha c}{h}}(\mathfrak{g}-\mathfrak{h})+e^{\frac{-\alpha b}{g}-\frac{\alpha c}{h}}\mathfrak{g}}$$

98. Pro altero vero casu, ad §. 39. relato, habebimus:

$\mathfrak{A}=1$; $Af=a$; $\mathfrak{B}=e^{\frac{-\alpha b\cos.\zeta}{g}}$; $\cos.\zeta=1$; $g=g$; $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$; et $B=\frac{1-\mathfrak{B}}{\alpha}$

Tum $\mathfrak{C}=e^{\frac{-\alpha b\sin.\zeta}{g}}$; $\cos.\eta=0$; $h=g$; $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}$; et $C=\frac{1-\mathfrak{C}}{\alpha}$;

atque $\mathfrak{D}=e^{\frac{-1}{h}c}$; $\cos.\theta=-1$; $i=h$; $\mathfrak{i}=\mathfrak{h}$; et $D=\frac{1-\mathfrak{D}}{\alpha}$;

quibus valoribus substitutis prodibit altitudo celeritati effluxus debita:

$$v=\frac{(l+a)e^{\frac{-\alpha b\cos.\zeta}{g}-\frac{\alpha b\sin.\zeta}{g}-\frac{\alpha c}{h}}+\frac{1}{\alpha}(1-e^{\frac{-\alpha b\cos.\zeta}{g}})e^{-\frac{\alpha b\sin.\zeta}{g}-\frac{\alpha c}{h}}g-\frac{1}{\alpha}(1-e^{\frac{-\alpha c}{h}})h-l}{1-(1-e^{\frac{-\alpha b\cos.\zeta}{g}})e^{\frac{-\alpha b\sin.\zeta}{g}-\frac{\alpha c}{h}}\mathfrak{g}-(1-e^{\frac{-\alpha b\sin.\zeta}{g}})e^{-\frac{\alpha c}{h}}\mathfrak{g}-(1-e^{\frac{-\alpha c}{h}})\mathfrak{h}}$$

siue

ſiue

$$v = \frac{e^{\frac{-\alpha b\cos.\zeta - \alpha b\sin.\zeta}{g} - \frac{\alpha c}{b}}(a - \frac{1}{\alpha}g + l) + e^{\frac{-\alpha b\sin.\zeta}{g} - \frac{\alpha c}{b}}\frac{1}{\alpha}g + e^{\frac{-\alpha c}{b}}\frac{1}{\alpha}h - \frac{1}{\alpha}h - l}{1 - \mathfrak{h} - e^{\frac{-\alpha c}{b}}(\mathfrak{g} - \mathfrak{h}) + e^{\frac{-\alpha b\cos.\zeta}{g} - \frac{\alpha b\sin.\zeta}{g} - \frac{\alpha c}{b}}}$$

99. Notandum autem eſt, quantumuis altitudo tubuli $CD = c$ fuerit exigua, tamen eam ob rationes ante expoſitas maiorem capi debere, et quo minor fuerit eius amplitudo hh, eo magis altitudo vera c augeri debebit. Etiamſi ergo tubulus CD fuerit breviſſimus, ſeu quaſi foraminulum per laminam pertuſum, fractio $\frac{\alpha c}{b}$ eo maiorem habebit valorem, quo minus fuerit foraminulum, ſeu quo minus fuerit h. Cum igitur hoc caſu $e^{\frac{-\alpha c}{b}}$ fiat numerus valde paruus, perſpicuum eſt, foraminulum tam paruum fieri poſſe, vt aqua per id plane non effluat.

100. Si tubulus DC in DD penitus ſit apertus, erit $\mathfrak{h} = 1$ et caſu priori habebitur:

$$v = \frac{e^{\frac{-\alpha b}{g}}(a + l - \frac{1}{\alpha}g\cos.\zeta) + \frac{1}{\alpha}(g\cos.\zeta + h) - e^{\frac{\alpha c}{b}}(l + \frac{1}{\alpha}h)}{1 + (e^{\frac{-\alpha b}{g}} - 1)\mathfrak{g}}$$

Pro caſu autem poſteriori habebitur:

$$v = \frac{e^{\frac{-\alpha b\cos.\zeta - \alpha b\sin.\zeta}{g}}(a + l - \frac{1}{\alpha}g) + \frac{1}{\alpha}e^{\frac{-\alpha b\sin.\zeta}{g}}g + \frac{1}{\alpha}h - e^{\frac{\alpha c}{b}}(l + \frac{1}{\alpha}h)}{1 + (e^{\frac{-\alpha b\cos.\zeta - \alpha b\sin.\zeta}{g}} - 1)\mathfrak{g}}$$

quoties ergo eſt $\mathfrak{g} < 1$, aquae motus ſemper ad ſtatum vniformitatis pertinget.

101. Ca-

101. Casus prior potissimum inseruit retardationi aquae per aquaeductus a frictione ortae determinandae. Cuius motus, vt exemplum exhibeamus, sit altitudo aquae in receptaculo a valde parua, longitudo aquaeductus BE $= b = 2000$ ped. amplitudo $gg = \frac{16}{25}$, seu $g = \frac{4}{5}$ ped. altitudo bc, seu $b \cos. \zeta = 150$ ped. foramen autem kk tam paruum, vt $g = \frac{k^4}{g_4}$ pro nihilo haberi possit. Denique sit tubuli CD altitudo $c = \frac{1}{10}$ ped. et $h = \frac{1}{100}$ ped.

102. His positis sumto $\alpha = \frac{1}{4000}$ erit $\frac{\alpha b}{g} = -\frac{5}{8}$, ideoque $e^{\frac{-\alpha b}{g}} = 0,535255$ et $e^{\frac{\alpha c}{h}} = 1,002503$. Hinc ergo erit

$$v = \tfrac{7}{2}a + 97,42124 \text{ pedum.}$$

Hoc ergo casu, dummodo fuerit altitudo vasis AB sex pedum, aqua per lumen DD exsiliet ad altitudinem 100 pedum, sicque frictio 50 pedes a iactu absumit.

103. Si reliquis manentibus iisdem, sit $gg = 1$ et $g = 1$, erit $\frac{\alpha b}{g} = \frac{1}{2}$ et $e^{\frac{-\alpha b}{g}} = 0,606531$, hincque reperitur

$$v = \tfrac{5}{2}a + 106,24 \text{ pedum,}$$

ita vt aqua ad nouem pedes altius sit ascensura, quam casu praecedente, ob auctam tubi BE amplitudinem. Sin autem amplitudo tubi diminuatur, vt sit $gg = \frac{9}{25}$, seu $g = \frac{3}{5}$ ped. ob $\frac{\alpha b}{g} = \frac{5}{6}$ erit $e^{\frac{-\alpha b}{g}} = 0,43460$, ideoque altitudo celeritati effluxus debita

$$v = \tfrac{5}{7}a + 84,8110 \text{ pedum}$$

sicque vltra 12 pedes deficit ab altitudine §. praecedentis. At si sit $gg = \frac{1}{4}$, seu $g = \frac{1}{2}$, vt habeatur $\frac{\alpha b}{g} = 1$, erit $e^{\frac{-\alpha b}{g}} = 0,36788$, ideoque

$$v = \tfrac{1}{3}a + 75,854 \text{ pedum};$$

altitudo ergo iactus nunc 9 pedibus minor est, quam ante.

104. Patet ergo in fontibus salientibus altitudinem iactus non solum ab altitudine receptaculi, seu castelli, pendere, vt vulgo Auctores hydraulici perhibent, sed etiam potissimum ab amplitudine et longitudine canalium, per quos aqua e castello ad fontes salientes deriuatur. Quo ampliores enim et breuiores fuerint canales, eo propius fons saliens altitudinem castelli attingit, arctioribus autem ac nimis longis canalibus adhibendis fieri adeo potest, vt aqua plane ad nullam altitudinem ascendat. Causa igitur huius debilitationis est frictio, littera α hic contenta, cuius valorem hic posui $\alpha = \frac{1}{4000}$, consultis autem quibusdam experimentis, videtur poni debere $\alpha = \frac{1}{4549}$.

APPEN-

APPENDIX

DE FONTIBVS SALIENTIBVS.

105. Hinc ergo ſatis accurate definiri poterit altitudo, ad quam aqua in fontibus ſalientibus ſurſum proiicietur. Ponatur enim primo altitudo aquae in caſtello, ſeu AB $= a$, tam parua, vt prae ipſius elevatione ſupra orificium fontis DD pro nihilo reputari poſſit. Tum vero tubulus CD neque nimis longus, neque nimis anguſtus capiatur, ita vt $\frac{at}{b}$ ſit fractio quam minima; huc enim plerumque redeunt omnes caſus fontium ſalientium. Quibus poſitis erit altitudo debita celeritati, qua aqua per orificium DD exſiliet, Tab. VII Fig. 5.

$$v = \frac{g \cos.\zeta}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}}\right) - l\left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}}\right)$$

106. In hac expreſſione denotat l altitudinem columnae aquae preſſioni atmoſphaerae aequiponderantis, eritque ergo propemodum $l = 30$ pedum. Deinde b exprimit longitudinem totius aquaeductus BE, per quem aqua a caſtello vsque ad fontem DG deriuatur; qui ſi ponatur ſecundum lineam rectam diſpoſitus, vti fere fieri ſolet, erit $b \cos.\zeta$ altitudo aquae in caſtello ſupra fontem. Quare ſi haec altitudo CF dicatur $= q$, erit $\cos.\zeta = \frac{q}{b}$: ſicque erit $v = \left(\frac{gg}{\alpha b} - l\right)\left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}}\right)$

107. Aſſumimus porro totum aquaeductum cylindricum, ita vt eius altitudo ſit vbique eadem, $= gg$;

si ergo diameter huius aquae ductus sit $= d$, erit $gg = \frac{1}{4}\pi dd$, et $g = \frac{1}{2} d\sqrt{\pi}$. Cum ergo collegerim ex experimentis esse $\alpha = \frac{1}{4540}$, erit $\frac{g}{\alpha} = 2270 d\sqrt{\pi} = 4023 d$. Calculus ergo satis exacte se habebit, si posito canalis diametro $= d$, sumamus $\frac{g}{\alpha} = 4000 d$.

108. Cum igitur sit $v = \frac{g}{\alpha b}(q - \frac{\alpha b l}{g})(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}})$, ob

$$1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}} = \frac{\alpha b}{g} - \frac{\alpha^2 b^2}{2 g^2} + \frac{\alpha^3 b^3}{6 g^3} - \frac{\alpha^4 b^4}{24 g^4} - \text{etc.}$$

habebitur altitudo iactus verticalis:

$$v = (q - \frac{\alpha b l}{g})(1 - \frac{\alpha b}{2 g} + \frac{\alpha^2 b^2}{6 g^2} - \frac{\alpha^3 b^3}{24 g^3} + \text{etc.})$$

vbi est $\frac{\alpha b}{g} = \frac{b}{4000 d}$.

109. En ergo sequentem regulam pro altitudine iactus, in quouis fonte saliente inuenienda: *Diuidatur tota canalis longitudo per diametrum amplitudinis eiusdem canalis, et quotus ponatur $= n$, tum sit*

$$N = 1 - \frac{n}{2 \cdot 4000} + \frac{n^2}{6 \cdot 4000^2} - \frac{n^3}{24 \cdot 4000^3} + \frac{n^4}{120 \cdot 4000^4} - \text{etc.}$$

Tum sit q eleuatio aquae in castello supra fontem, eritque altitudo iactus

$$v = Nq - \frac{3}{400} Nn \text{ pedum.}$$

Vel posito $\frac{3}{400} Nn = M$, erit altitudo iactus in pedibus expressa $v = Nq - M$.

110. Ex dato ergo numero n, qui prodit, si longitudo canalis per eius diametrum diuidatur, colligantur valores litterarum N et M; tum prior numerus N multiplicetur per eleuationem aquae in castello supra fontem, quae altitudo in pedibus sit expressa, et ab hoc producto

ducto subtrahatur numerus posterior M, residuumque exhibebit altitudinem iactus in pedibus expressam.

111. Hoc autem modo prodibit non tam ipsa iactus altitudo, quam altitudo celeritati, qua aqua exsilit, debita; constat enim hanc altitudinem ob resistentiam aëris insuper aliquantum diminui, ita vt, si fons verticaliter exsiliat, eius altitudo aliquanto minor sit futura, quam per regulam datam reperitur. Huius vero diminutionis, quae ex alio fonte originem trahit, hic nullam rationem habebo.

112. Quo igitur, quouis casu oblato, altitudo iactus ob frictionem solam imminuta facilius colligi queat, conueniet tabulam construi, quae pro quouis valore ipsius n, seu quoti ex diuisione longitudinis canalis per eius diametrum orti, exhibeat valores litterarum N et M. His enim inuentis, si insuper altitudo castelli supra orificium fontis q in calculum trahatur, sine negotio altitudo iactus v inde colligetur, cum sit

$$v = Nq - M \text{ pedum.}$$

TABVLA

exhibens valores litterarum N et M pro singulis valoribus litterae *n*.

n	N	M	*n*	N	M
100	0,9876	0,7407	2200	0,7692	12,6912
200	0,9756	1,4634	2300	0,7605	13,1185
300	0,9635	2,1678	2400	0,7519	13,5354
400	0,9516	2,8548	2500	0,7435	13,9419
500	0,9400	3,5250	2600	0,7353	14,3385
600	0,9286	4,1787	2700	0,7271	14,7250
700	0,9174	4,8162	2800	0,7191	15,1020
800	0,9064	5,4381	2900	0,7112	15,4698
900	0,8955	6,0444	3000	0,7035	15,8286
1000	0,8848	6,6357	3100	0,6958	16,1784
1100	0,8743	7,2129	3200	0,6883	16,5198
1200	0,8639	7,7754	3300	0,6809	16,8525
1300	0,8537	8,3239	3400	0,6738	17,1771
1400	0,8437	8,8590	3500	0,6664	17,4936
1500	0,8339	9,3810	3600	0,6593	17,8026
1600	0,8242	9,8901	3700	0,6523	18,1036
1700	0,8146	10,3866	3800	0,6455	18,3975
1800	0,8052	10,8708	3900	0,6387	18,6837
1900	0,7960	11,3431	4000	0,6321	18,9633
2000	0,7869	11,8038	4100	0,6255	19,2356
2100	0,7780	12,2530	4200	0,6191	19,5015

n	N	M	n	N	M
4300	0,6127	19,7605	6700	0,4852	24,3804
4400	0,6065	20,0136	6800	0,4808	24,5192
4500	0,6003	20,2600	6900	0,4765	24,6554
4600	0,5942	20,5005	7000	0,4721	24,7866
4700	0,5882	20,7351	7100	0,4679	24,9151
4800	0,5823	20,9640	7200	0,4638	25,0406
4900	0,5765	21,1869	7300	0,4597	25,1631
5000	0,5708	21,4044	7400	0,4556	25,2829
5100	0,5651	21,6164	7500	0,4515	25,3989
5200	0,5595	21,8234	7600	0,4475	25,5125
5300	0,5540	22,0254	7700	0,4436	25,6234
5400	0,5486	22,2224	7800	0,4398	25,7316
5500	0,5434	2,24145	7900	0,4360	25,8371
5600	0,5382	22,6017	8000	0,4323	25,9398
5700	0,5330	22,7844	8100	0,4286	26,0399
5800	0,5279	22,9627	8200	0,4250	26,1377
5900	0,5229	23,1366	8300	0,4214	26,2331
6000	0,5179	23,3058	8400	0,4179	26,3261
6100	0,5130	23,4709	8500	0,4144	26,4168
6200	0,5082	23,6321	8600	0,4109	26,5052
6300	0,5035	23,7894	8700	0,4075	26,5915
6400	0,4989	23,9428	8800	0,4041	26,6757
6500	0,4942	24,0924	8900	0,4008	26,7578
6600	0,4897	24,2381	9000	0,3976	26,8377

n	N	M	n	N	M
9100	0,3944	26,9156	26000	0,1536	29,9547
9200	0,3913	26,9917	27000	0,1479	29,9649
9300	0,3882	27,0660	28000	0,1427	29,9727
9400	0,3850	27,1385	29000	0,1378	29,9787
9500	0,3819	27,2094	30000	0,1332	29,9838
9600	0,3789	27,2782	31000	0,1290	29,9874
9700	0,3760	27,3454	32000	0,1250	29,9901
9800	0,3732	27,4110	33000	0,1212	29,9925
9900	0,3702	27,4750	34000	0,1176	29,9973
10000	0,3672	27,5373	35000	0,1143	29,9952
11000	0,3404	28,0821	36000	1,1111	29,9964
12000	0,3167	28,5063	37000	0,1081	29,9937
13000	0,2958	28,8363	38000	0,1053	29,9979
14000	0,2771	29,0940	39000	0,1025	29,9983
15000	0,2604	29,2944	40000	0,10[illegible]0	29,9987
16000	0,2454	29,4404	41000	0,0976	29,9990
17000	0,2319	29,5728	42000	0,0952	29,9992
18000	0,2197	29,6664	43000	0,0930	29,9994
19000	0,2086	29,7405	44000	0,0909	29,9995
20000	0,1986	29,7978	45000	0,0889	29,9996
21000	0,1895	29,8425	50000	0,0800	29,9999
22000	0,1811	29,8773	55000	0,0727	30,0000
23000	0,1734	29,9046	60000	0,0666	30,0000
24000	0,1663	29,9256	65000	0,0615	30,0000
25000	0,1597	29,9421	70000	0,0571	30,0000

75000

n	N	M	n	N	M
75000	0,0533	30,0000	140000	0,0286	30
80000	0,0500	30,0000	150000	0,0267	30
85000	0,0470	30,0000	160000	0 0250	30
90000	0,0444	30,0000	170000	0,0235	30
95000	0,0421	30,0000	180000	0,0222	30
100000	0,0400	30,0000	190000	0,0211	30
110000	0,0364	30	200000	0,0200	30
120000	0,0333	30	300000	0,0133	30
130000	0,0308	30			

113. Non opus eſt, vt haec tabula vlterius continuetur; ſi enim fuerit n numerus maior, quam 50000, erit iuſte $N = \frac{4000}{n}$, et $M = 30$ ped. Quaecunque ergo fuerit diſtantia, ſeu longitudo, canalis, eiusque diameter, ex quoto n, qui ex diuiſione longitudinis per diametrum reſultat, ope huius tabulae facile excerpuntur valores N et M, quibus inuentis, ſi eleuatio aquae in caſtello ſupra fontem ponatur $= q$, erit altitudo fontis $v = Nq - M$ ped.

114. Si nulla eſſet frictio, altitudo fontis v aequalis eſſet altitudini caſtelli q, ſeu $v = q$. Vnde patet, ob frictionem hanc altitudinem q duplici modo diminui: primum enim multiplicari debet per N, qui eſt numerus vnitate minor; tum vero inſuper ab hoc producto ſubtrahi debet altitudo M, quae 30 pedes ſuperare nequit, atque haec poſtrema diminutio preſſioni

atmosphaerae debetur, quae si maior minorue esset, numeri M in eadem ratione augeri, vel diminui, deberent.

115. Hinc ergo statim elucet, si altitudo castelli q minor fuerit, quam $\frac{M}{N}$, aquam ex orificio DD non esse egressuram, sed eius motum a frictione penitus compesci. Ita si sit $n = 100000$, saliens fons non dabitur, nisi sit $q > \frac{3000}{4}$, seu $q > 750$ ped. Vicissim autem, si altitudo q detur, vt aqua saltem effluat, debet esse $\frac{M}{N} < q$; cum igitur crescente n valor $\frac{M}{N}$ crescat, hinc innotescet limes, infra quem valor ipsius n subsistere debet.

116. Si locus castelli vna cum loco fontis sit datus, et quaeratur is aquae ductus, quo fons ad maximam altitudinem assiliat; primo canalis a castello quantum fieri potest secundum lineam rectam dirigi debet; deinde vero desiderio potissimum satisfiet, si canali maxima tribuatur amplitudo, quam circumstantiae permittunt. Ex tabula enim apparet, altitudinem iactus inprimis ab amplitudine canalis pendere.

117. Quod quo exemplo perspiciatur, sit altitudo castelli $q = 130$ ped. et distantia eius a fonte $b = 2500$ ped. et pro variis canalis diametris altitudo iactus se ita habebit:

Diam. canalis	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
numerus n	2500	5000	7500	10000	12500	15000
N	0,7435	0,5708	0,4515	0,3672	0,3062	0,2604
M	13,941	21,404	25,399	27,537	28,660	29,294
alt. iactus v	82,71	52,80	33,29	20,19	11,19	4,56

Si

Si ergo diameter canalis minor esset, quam $\frac{7}{8}$ ped. aqua plane non exsiliret.

118. Patet etiam aquam de loco valde remoto aduehi non posse, nisi iste locus admodum sit eleuatus: propterea quod canales non nimis amplos confici licet. Ita si aqua ex distantia vnius milliaris sit arcessenda, ita vt sit $b = 25000$, et canalium diameter sit $\frac{1}{4}$ pedis, erit $n = 100000$, hoc praestari nequit, nisi receptaculum vltra 750 pedes eleuatum sit supra locum fontis. Ponamus ergo hanc eleuationem esse $q = 1000$ ped. et aqua ex fonte non vltra altitudinem 10 pedum ascendet: sin esset $q = 2000$ ped. altitudo iactus prodiret 50 ped. et pro singulis millenis pedibus, quibus altitudo q augetur, altitudo saltus tantum quadragenis pedibus crescit.

119. Si atmosphaera nullam exerceret pressionem, quantitas M omitti deberet; atque hoc casu aqua per orificium DD erumperet, dummodo aqua in castello magis fuerit eleuata. Foret autem $v = Nq$, seu ob frictionem se haberet CG ad CF, vti numerus N ad vnitatem; at est $N < 1$, nisi $n = 0$, et praecipui valores ipsius N sequentibus valoribus ipsius n respondebunt:

$N =$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
$n =$	0	2400	3500	6300	11300	15700	19860	24000	28000	32000	36000

Hinc si sit $N = \frac{1}{\nu}$ et $\nu > 5$, erit $n = 4000\nu$.

120. Ob pressionem autem atmosphaerae altitudo fontis CG adhuc magis diminuitur, et ab altitudine iam imminuta Nq insuper subtrahi debet altitudo M, ita vt prodeat $v = Nq - M$. Ex tabula autem annexa patet, si fuerit quotus $\frac{b}{d} = n$, numerus maior quam 50000, fore $v = \frac{1000\,d}{b} q - 30$ pedum. Cum igitur pressio atmosphaerae sit variabilis, et altitudini mercurii in Barometro proportionalis, sequitur fontes salientes ad eo maiorem altitudinem ascendere debere, quo minus mercurius in Barometro fuerit eleuatus.

EXPLI-

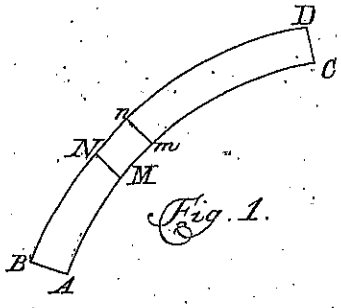

Fig. 1.

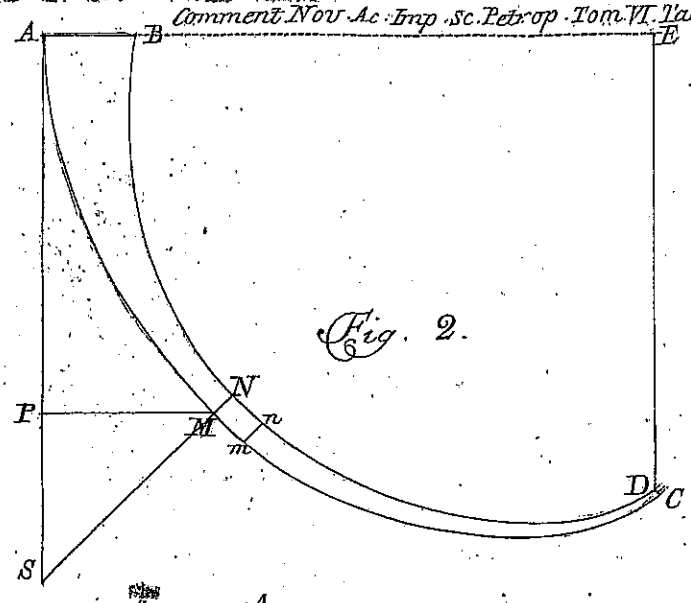

Fig. 2.

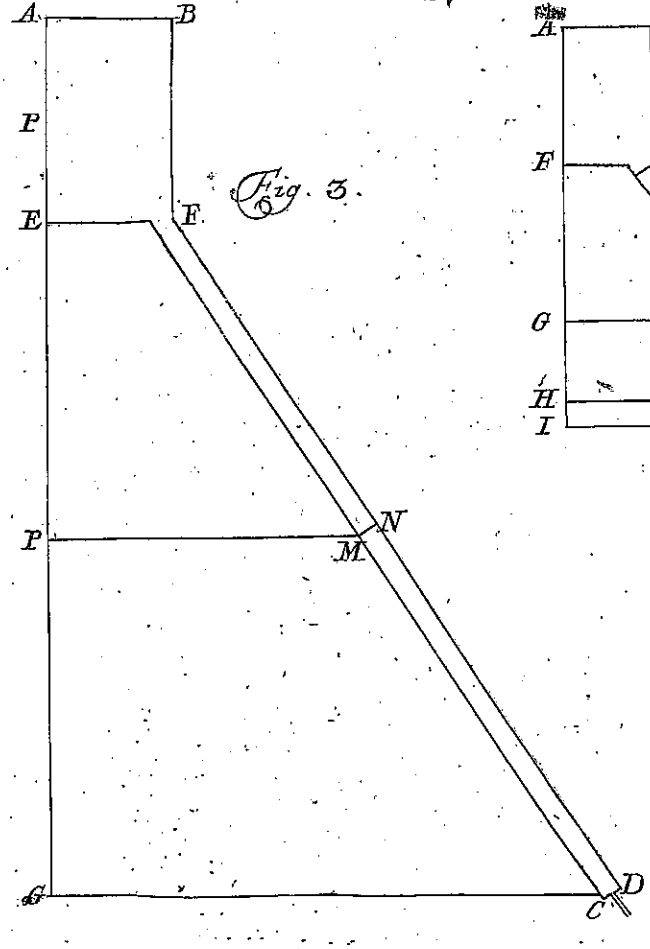

Fig. 3.

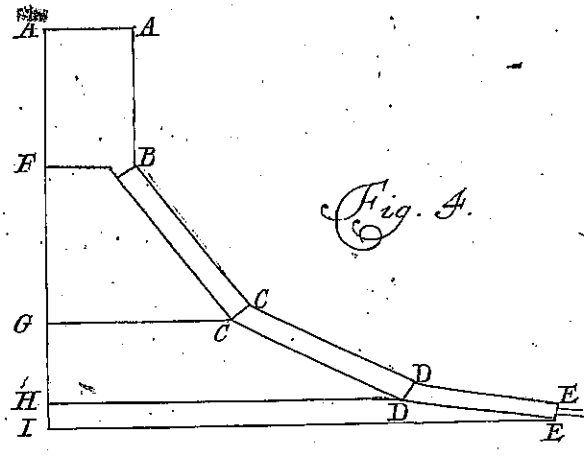

Fig. 4.

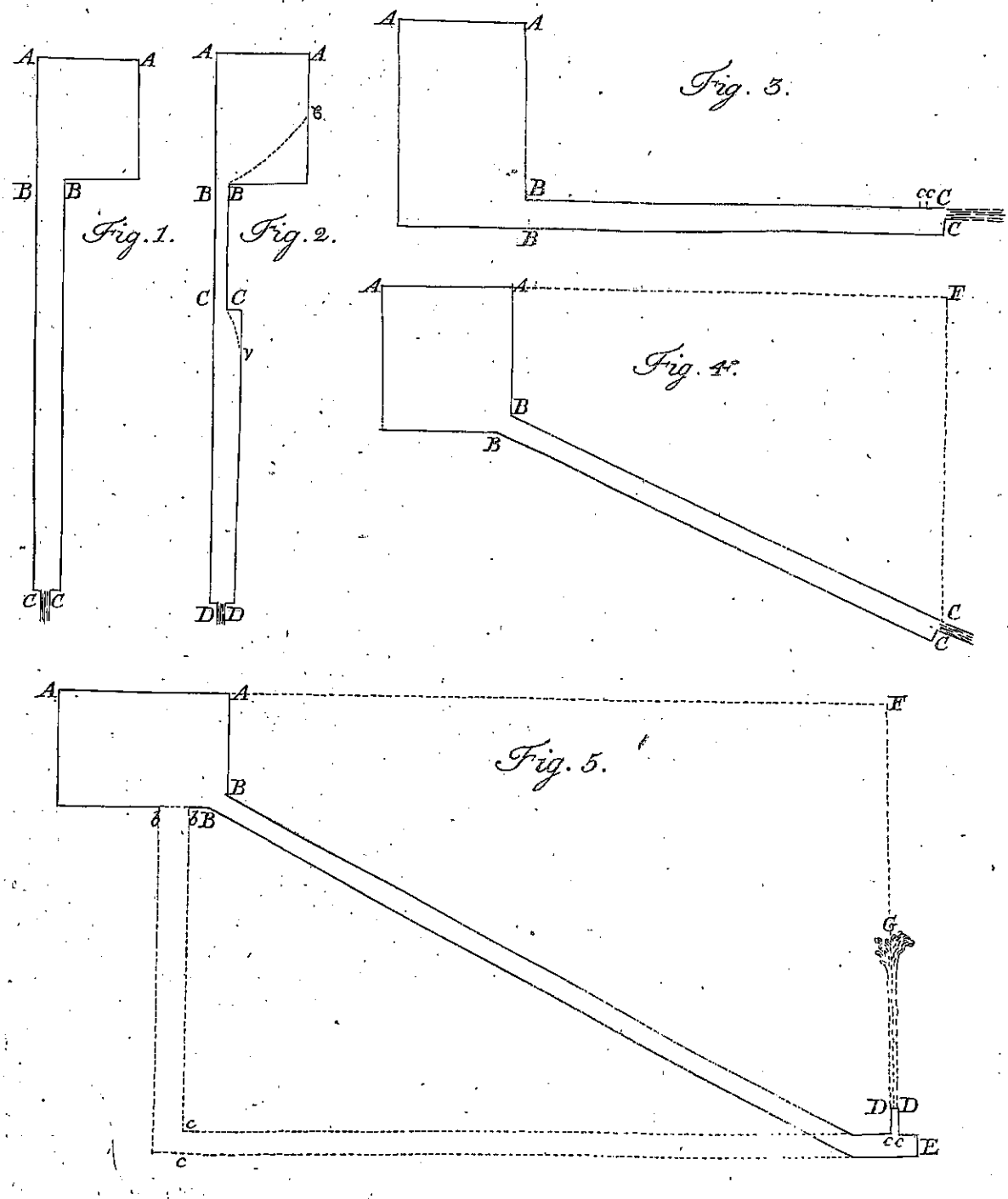
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
A
B
C
D
E
F
G
c
cc
b
v