PRINCIPIA MOTVS FLVIDORVM.

Auctore

L. EVLERO.

PARS PRIOR.

1.

Cum corpora fluida a ſolidis hoc potiſſimum differant, quod eorum particulae a ſe inuicem omnino ſint diſſolutae, hae etiam diuerſiſſimos motus recipere poſſunt, neque motus, quo vnaquaeque fluidi particula fertur, a motu reliquarum particularum ita determinatur, vt alio motu progredi non poſſit. Longe aliter autem res ſe habet in corporibus ſolidis, quae, ſi fuerint inflexibilia, nullamque figurae ſua mutationem patiantur, vtcunque moueantur, ſingulae eorum particulae perpetuo eundem inter ſe ſitum ac diſtantiam ſeruant; vnde fit, vt, cognito motu duarum triumue tantum particularum, ſtatim alius cuiuscunque particulae motus definiri queat; neque etiam duarum triumue huiusmodi corporum particularum motus ad lubitum fingi poteſt, ſed is ita comparatus eſſe debet, vt hae particulae eundem perpetuo ſitum relatiuum inter ſe obtineant.

2. Quodſi autem corpora ſolida fuerint flexibilia, ſingularum particularum motus minus determinatur: cum

cum ob flexuras tam distantia, quam situs relatiuus diversarum particularum, mutationes admittat. Interim tamen ipsa flexurae ratio legem quandam, quam diversae huiusmodi corporum particulae in motu suo sequi debent, constituit: quippe qua caueri oportet, ne partes, quae circa se inuicem tantum inflecti se patiuntur, vel a se penitus diuellantur, vel in se inuicem intrudantur; quod quidem posterius inpenetrabilitas omnibus corporibus communis exigit.

3. In corporibus autem fluidis, quorum particulae nullo nexu inter se vniuntur, motus quoque diversarum particularum multo minus restringitur: neque ex motu quotcunque particularum motus reliquarum determinatur. Si enim vel centum particularum motus, tanquam cognitus assumatur, manifestum est, motus quorum reliquae particulae capaces sint futurae, adhuc in infinitum variari posse. Ex quo concludendum videtur, motum cuiusque particulae fluidi plane non a motu reliquarum pendere, nisi forte his ita fuerit interclusa, vt eas necessario sequi cogatur.

4. Interim tamen fieri non potest, vt motus omnium fluidi particularum nullis omnino legibus adstringatur; neque adeo pro lubitu motum, qui singulis particulis inesse concipitur, fingere licet. Cum enim particulae sint impenetrabiles, statim patet, eiusmodi motum subsistere non posse, quo aliae particulae per alias transirent, sicque se mutuo penetrarent: atque, ob hanc causam, talis motus, ne cogitatione quidem in fluido inesse concipi potest. Quoniam igitur infinitos

motus

motus excludi oportet, quorum pacto reliqui ſint comparati, et quanam proprietate ab illis diſtinguantur operae pretium videtur, accuratius definire.

5. Antequam enim motus, quo fluidum quodpiam actu agitatur, aſſignari queat, neceſſarium videtur, vt omnes motus, qui quidem in hoc fluido ſubſiſtere poſſent, dignoſcantur: quos motus hic poſſibiles vocabo, vt a motibus impoſſibilibus, qui ne locum quidem habere poſſunt, diſtinguam. In hunc finem nobis conſtituendus erit character, motibus poſſibilibus conueniens, eosque ab impoſſibilibus ſegregans; quo facto ex motibus poſſibilibus quouis caſu eum determinari oportebit, qui actu ineſſe debebit. Tum ſcilicet ad vires, quibus aqua ſollicitatur, erit reſpiciendum, vt motus, qui illis ſit conformis, ex mechanicae principiis definiri poſſit.

6. In characterem igitur motuum poſſibilium, quicunque ſcilicet ſalua impenetrabilitate in fluido ineſſe poſſunt, inquirere hic conſtitui. Fluidum autem eius indolis aſſumo, vt neque in arctius ſpatium compelli ſe patiatur, neque eius continuitas interrumpi posſit: ſtatuo nimirum in medio fluidi durante motu nullum ſpatium a fluido vacuum relinqui, ſed continuitatem in eo iugiter conſeruari. Theoria enim ad fluida huius naturae accommodata, non adeo difficile erit, eam ad fluida quoque, quorum denſitas eſt variabilis, et quae ne continuitatem quidem neceſſario requirunt, extendere.

7. Si igitur in huiusmodi fluido conſideretur portio quaecunque, motus, quo ſingulae eius particulae

ſeruntur, ita debet eſſe comparatus, vt omni tempore aequale ſpatium adimpleant. Hoc enim ſi in ſingulis portionibus eueniat, omnis vel expanſio in maius ſpatium, vel coarctatio in minus ſpatium praepedietur; atque huiusmodi motus, ſi ad hanc ſolam indolem reſpiciamus, qua fluidum neque expanſionis, neque condenſationis, capax ſtatuitur, omnino pro poſſibili erit habendus. Quod autem hic de qualibet fluidi portione dictum eſt, de ſingulis eius elementis eſt intelligendum; ita vt cuiusque elementi volumen perpetuo eiusdem quantitatis manere debeat.

8. Quo ergo huic conditioni ſatisfiat, in ſingulis fluidi punctis motus quicunque ineſſe concipiatur; tum ſumto quocunque fluidi elemento inueſtigetur translatio momentanea ſingulorum eius terminorum, ſicque innoteſcet ſpatiolum, in quo hoc elementum elapſo tempuſculo minimo continebitur. Deinde hoc ſpatiolum illi, quod ante occupauerat, aequale ſtatuatur, haecque aequatio rationem motus, quatenus erit poſſibilis, indicabit. Quodſi enim ſingula elementa ſingulis tempuſculis aequalia ſpatiola occupent, neque vlla fluidi compreſſio, neque expanſio, orietur; motusque ita erit comparatus, vt pro poſſibili ſit habendus.

9. Cum autem hic non ſolum celeritas motus, qui ſingulis fluidi punctis ineſſe concipitur, ſpectari debeat, ſed etiam eius directio, haec vtraque conſideratio commodiſſime inſtituetur, ſi motus cuiusque puncti ſecundum directiones fixas reſoluatur. Haec autem reſolutio vel ſecundum binas, vel ternas directiones

fieri

fieri solet: priori enim resolutione vti licet, si singulorum punctorum motus in eodem plano absoluatur; sin autem eorum motus non in eodem plano contineatur, tum motum secundum ternos axes fixos resolui oportet. Quoniam igitur hic posterior casus plus difficultatis habet quam prior, inuestigationem motuum possibilium a casu priori incipi conueniet, qua expedita casus posterior facilius expedietur.

10. Primum igitur fluido duas tantum dimensiones tribuam, ita vt singulae eius particulae non solum nunc quidem in eodem plano reperiantur, sed etiam earum motus in eodem plano absoluatur. Hoc itaque planum plano tabulae repraesentetur, et consideretur, fluidi quodcunque punctum l, cuius situs per coordinatas orthogonales $AL = x$ et $Ll = y$ referatur, tum vero eius motus, quo nunc quidem fertur, secundum easdem directiones resolutus praebeat celeritatem secundum axem AL, vel secundum $lm = u$, et secundum alterum axem AB, vel secundum $ln = v$: ita vt vera huius puncti celeritas futura sit $= \sqrt{(uu + vv)}$, eiusque directio ad axem AL inclinata sit angulo, cuius tangens $= \frac{v}{u}$. Tab. IV. Fig. 1.

11. Cum statum motus praesentem tantum, qui singulis fluidi punctis conueniat, euoluere sit propositum, celeritates u et v a situ puncti l vnice pendebunt, eruntque idcirco tanquam functiones coordinatarum x et y spectandae. Ponamus igitur esse differentiatione instituta:

$$du = L\,dx + l\,dy \quad \text{et} \quad dv = M\,dx + m\,dy$$

 quae

quae formulae differentiales, cum ſint completae, conſtat fore $\frac{dL}{dy} = \frac{dl}{dx}$ et $\frac{dM}{dy} = \frac{dm}{dx}$: vbi notandum eſt, in huiusmodi expreſſione $\frac{dL}{dy}$; differentiale ipſius L, ſeu dL, tantum ex variabilitate ipſius y capiendum eſſe, ſimilique modo in expreſſione $\frac{dl}{dx}$, pro dl id differentiale ipſius l ſumi debet, quod oritur ſi tantum x pro variabili habeatur.

12. Probe ergo cauendum eſt, ne in huiusmodi expreſſionibus fractis $\frac{dL}{dy}$, $\frac{dl}{dx}$, $\frac{dM}{dy}$, et $\frac{dm}{dx}$, numeratores dL, dl, dM et dm differentialia completa functionum L, l, M et m deſignare putentur; ſed perpetuo ea tantum earum differentialia denotant, quae ex variabilitate vnicae coordinatae, eius ſcilicet, cuius differentiale in denominatore exhibetur, oriuntur; ſicque huiusmodi expreſſiones ſemper quantitates finitas ac determinatas repraeſentabunt. Simili autem modo intelligitur, fore $L = \frac{du}{dx}$, $l = \frac{du}{dy}$; $M = \frac{dv}{dx}$ et $m = \frac{dv}{dy}$; qua notandi ratione primum Clar. *Fontaine* vſus eſt, et quia non contemnendum calculi compendium largitur, eam hic quoque adhibebo.

13. Cum igitur ſit $du = L dx + l dy$ et $dv = M dx + m dy$, hinc geminas celeritates cuiusque alius puncti, quod quidem infinite parum a puncto l diſtat, aſſignare licebit; ſi enim talis puncti a puncto l diſtantia ſecundum axem AL ſit $= dx$, et ſecundum axem AB $= dy$, tum huius puncti celeritas ſecundum axem AL erit $= u + L dx + l dy$; celeritas autem ſecundum alterum axem AB $= v + M dx + m dy$. Tempuſculo ergo infinite paruo dt hoc punctum proferetur ſecundum

dum directionem axis AL per ſpatiolum $= dt(u + L\,dx + l\,dy)$ et ſecundum directionem alterius axis AB per ſpatiolum $= dt(v + M\,dx + m\,dy)$.

14. His notatis conſideremus elementum aquae triangulare lmn, et quaeramus ſitum, in quem id ob motum, quem ipſi inſitum concipimus, tempuſculo dt transferatur. Sit autem huius elementi triangularis lmn latus lm axi AL, latus vero ln axi AB, parallelum: ac ponatur $lm = dx$, et $ln = dy$; ſeu ſint pro puncto m coordinatae $x + dx$ et y; pro puncto n autem ſint coordinatae x et $y + dy$. Patet autem, quoniam relationem inter differentialia dx et dy non definimus, eaque tam negatiue, quam affirmatiue, accipi poſſunt, totam fluidi maſſam in huiusmodi elementa cogitatione diuidi poſſe, ita vt, quod de vno in genere definiemus, id aeque ad omnia pateat.

15. Vt igitur pateat, quotum elementum hoc lmn, ob motum inſitum, tempuſculo dt transferatur, quaeramus puncta p, q et r, in quae eius anguli, ſeu puncta l, m et n, tempuſculo dt transferentur. Cum igitur ſit

	puncti l	puncti m	puncti n
Celeritas ſecundum AL =	u	$u + L\,dx$	$u + l\,dy$
Celeritas ſecundum AB =	v	$v + M\,dx$	$v + m\,dy$

punctum l perueniet tempuſculo dt in p, vt ſit:

$$AP - AL = u\,dt, \quad \text{et} \quad Pp - Ll = v\,dt.$$

Punctum autem m perueniet in q, vt ſit:

$$AQ - AM = (u + L\,dx)\,dt \quad \text{et} \quad Qq - Mm = (v + M\,dx)\,dt.$$

Mm 3 At

At punctum n feretur in r, vt ſit:

$$AR - AL = (u + l dy) dt \text{ et } Rr - Ln = (v + m dy) dt.$$

16. Cum igitur puncta l, m et n tempuſculo dt in puncta p, q et r transferantur, iunctis lineolis rectis pq, pr et qr triangulum lmn, in ſitum, quem triangulum pqr refert, peruenire cenſendum eſt. Quoniam enim triangulum lmn ſtatuitur infinite paruum, eius latera per motum curuaturam recipere nequeunt, ideoque elementum aquae lmn poſt translationem tempuſculo dt factam, etiamnum figuram triangularem pqr, et quidem rectilineam, retinebit. Cum igitur hoc elementum lmn per motum, neque in maius ſpatium extendi, neque in minus compingi, debeat, motum ita comparatum eſſe oportet, vt area trianguli pqr aequalis areae trianguli lmn reddatur.

17. Trianguli autem lmn, cum ſit ad l rectangulum, area eſt $= \frac{1}{2} dx dy$, cui propterea area trianguli pqr aequalis eſt ſtatuenda. Ad hanc autem aream inueniendam conſiderandae ſunt punctorum p, q, r binae coordinatae, quae ſunt:

$$AP = x + u dt;\ AQ = x + dx + (u + L dx) dt;\ AR = x + (u + l dy) dt$$

$$Pp = y + v dt;\ Qq = y + (v + M dx) dt,\ Rr = y + dy + (v + m dy) dt$$

Tum vero area trianguli pqr ex areis ſequentium trapeziorum ita reperitur, vt ſit:

$$pqr = PprR + RrqQ - PpqQ.$$

Cum autem haec trapezia bina latera parallela baſique AQ perpendicularia habeant, eorum areae facile aſſignantur.

18. Erit

18. Erit enim vti ex elementis conſtat:

$PprR = \frac{1}{2}PR(Pp + Rr)$

$RrqQ = \frac{1}{2}RQ(Rr + Qq)$

$PpqQ = \frac{1}{2}PQ(Pp + Qq)$

His igitur colligendis reperietur:

$\Delta pqr = \frac{1}{2}PQ.Rr - \frac{1}{2}RQ.Pp - \frac{1}{2}PR.Qq$

Ponatur breuitatis gratia

$AQ = AP + Q$; $AR = AP + R$; $Qq = Pp + q$ et $Rr = Pp + r$

vt ſit $PQ = Q$; $PR = R$ et $RQ = Q - R$,

eritque $\Delta pqr = \frac{1}{2}Q(Pp + r) - \frac{1}{2}(Q - R)Pp - \frac{1}{2}R(Pp + q)$

ſiue $\Delta pqr = \frac{1}{2}Q.r - \frac{1}{2}R.q$.

19. Eſt vero ex valoribus coordinatarum ante exhibitis

$Q = dx + Ldxdt$: $q = Mdxdt$

$R = \phantom{dx+{}} ldydt$; $r = dy + mdydt$;

quibus valoribus ſubſtitutis, orietur area trianguli

$pqr = \frac{1}{2}dxdy(1 + Ldt)(1 + mdt) - \frac{1}{2}Mldxdydt^2$, ſiue

$pqr = \frac{1}{2}dxdy(1 + Ldt + mdt + Lmdt^2 - Mldt^2)$

quae cum aequalis eſſe debeat areae trianguli lmn, quae eſt $= \frac{1}{2}dxdy$, haec naſcetur aequatio:

$Ldt + mdt + Lmdt^2 - Mldt^2 = 0$ ſiue

$L + m + Lmdt - Mldt = 0$.

20. Cum igitur termini $Lmdt$ et $Mldt$ prae finitis L et m euaneſcant, habebitur haec aequatio $L + m = 0$. Quam ob rem, vt motus ſit poſſibilis, celeritates u et v puncti cuiuscunque l, ita debent eſſe comparatae, vt poſitis earum differentialibus

$du = Ldx + ldy$, et $dv = Mdx + mdy$

ſit

ſit $L+m=0$. Seu cum ſit $L=\frac{du}{dx}$ et $m=\frac{dv}{dy}$, celeritates u et v, quae puncto l ſecundum directiones axium AL et AB ineſſe concipiuntur, eiusmodi functiones coordinatarum x et y eſſe debent, vt ſit $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}=0$, ſicque motuum poſſibilium criterium in hoc conſiſtit, vt ſit $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}=0$; niſi enim haec conditio locum habeat, motus fluidi ſubſiſtere nequit.

21. Eodem modo erit procedendum, ſi motus fluidi non abſoluatur in eodem plano. Ponamus igitur, vt quaeſtionem latiſſimo ſenſu acceptam expediamus, ſingulas fluidi particulas motu quocunque inter ſe agitari, hac ſolum lege obſeruata, vt neque condenſatio, neque expanſio partium vsquam eueniat: quaeritur igitur ſimili modo, quaenam hinc determinatio ad celeritates, quas ſingulis punctis ineſſe concipimus, accedat, vt motus poſſibilis reddatur: ſeu quod eodem redit, omnes motus, qui hisce conditionibus aduerſantur, a poſſibilibus remouere oportet, quo ipſo criterium motuum poſſibilium conſtituetur.

22. Conſideremus igitur punctum fluidi quodcunque λ; ad cuius ſitum repraeſentandum vtamur tribus axibus fixis AL, AB et AC inter ſe normalibus.
Tab. IV. Fig. 2. Sint igitur ternae puncti λ coordinatae his axibus parallelae, $AL=x$, $Ll=y$ et $l\lambda=z$; quae obtinentur, ſi primum a puncto λ ad planum duobus axibus AL et AB determinatum demittatur perpendiculum λl; tum vero ex puncto l ad axem AL perpendicularis lL agatur. Hoc itaque modo ſitus puncti λ per ternas iſtas coordinatas generaliſſime exprimitur, atque ad omnia fluidi puncta accommodari poteſt.

23. Qui-

23. Quicunque porro fit motus puncti λ, is fecundum ternas directiones $\lambda\mu$, $\lambda\nu$ et λo axibus AL AB et AC parallelas refolui poterit Sit igitur puncti λ

celeritas fecundum directionem $\lambda\mu = u$

celeritas fecundum directionem $\lambda\nu = v$

celeritas fecundum directionem $\lambda o = w$

et cum hae celeritates pro vario puncti λ fitu vtcunque variare poffint, erunt eae tanquam functiones ternarum coordinatarum x, y et z confiderandae. Iis igitur differentiatis, ponamus prodire:

$$du = L\,dx + l\,dy + \lambda\,dz$$
$$dv = M\,dx + m\,dy + \mu\,dz$$
$$dw = N\,dx + n\,dy + \nu\,dz$$

eruntque porro quantitates L, l, λ, M, m, μ, N, n, ν, functiones coordinatarum x, y et z.

24. Quoniam hae formulae differentiales funt completae, fequitur, fimili modo, vt fupra, fore:

$$\frac{dL}{dy} = \frac{dl}{dx};\quad \frac{dL}{dz} = \frac{d\lambda}{dx};\quad \frac{dl}{dz} = \frac{d\lambda}{dy}$$
$$\frac{dM}{dy} = \frac{dm}{dx};\quad \frac{dM}{dz} = \frac{d\mu}{dx};\quad \frac{dm}{dz} = \frac{d\mu}{dy}$$
$$\frac{dN}{dy} = \frac{dn}{dx};\quad \frac{dN}{dz} = \frac{d\nu}{dx};\quad \frac{dn}{dz} = \frac{d\nu}{dy}$$

fiquidem in numeratoribus ea tantum coordinatarum, cuius differentiale in denominatore exhibetur, pro variabili affumatur.

25. Triplici ergo motu hoc, quem in puncto X ineffe concipimus, hoc punctum λ tempufculo dt ita mouebitur, vt

fecundum directionem axis AL per fpatiolum $= u\,dt$
fecundum directionem axis AB per fpatiolum $= v\,dt$
fecundum directionem axis AC per fpatiolum $= w\,dt$

promoueatur. Sin autem puncti λ vera celeritas, quae scilicet ex compositione huius triplicis motus oritur, dicatur $= V$, erit ob normalitatem trium directionum $V = \sqrt{(uu + vv + ww)}$, et spatiolum, quod tempusculo dt motu suo vero conficit, erit $= V\,dt$.

26. Consideremus iam fluidi elementum quodpiam solidum, vt videamus, quorsum id tempusculo dt proferatur; et quoniam perinde est, cuiusmodi figuram isti elemento tribuamus, dummodo ita generatim definiatur, tota fluidi massa, in eiusmodi elementa diuisa concipi queat; sit, vt calculo consulatur, eius figura pyramis triangularis rectangula, terminata quatuor angulis solidis λ, μ, ν et o, ita vt pro singulis sint ternae coordinatae:

	puncti λ	puncti μ	puncti ν	puncti o
secundum AL	x	$x + dx$	x	x
secundum AB	y	y	$y + dy$	y.
secundum AC	z	z	z	$z + dz$

et cum basis huius pyramidis sit $\lambda\mu\nu = lmn = \frac{1}{2}dx\,dy$, altitudo vero $\lambda o = dz$, erit eius solliditas $= \frac{1}{6}dx\,dy\,dz$.

27. Inuestigemus iam, quorsum singuli isti pyramidis anguli λ, μ, ν et o tempusculo dt transferantur: ad quod eorum ternas celeritates secundum directiones ternorum axium contemplari oportet, quae ex celeritatum u, v, w valoribus differentialibus erunt:

Celeritas secundum	puncti λ	puncti μ	puncti ν	puncti o
directionem AL	u	$u + L\,dx$	$u + l\,dy$	$u + \lambda\,dz$
directionem AB	v	$v + M\,dx$	$v + m\,dy$	$v + \mu\,dz$
directionem AC	w	$w + N\,dx$	$w + n\,dy$	$w + \nu\,dz$

28. Quodsi ergo puncta λ, μ, ν et o tempusculo dt in puncta π, Φ, ϱ et σ transferri ponamus,

horum-

horumque punctorum ternas coordinatas axibus parallelas constituamus, erunt translationes momentaneae secundum hos axes:

$AP - AL = udt$	$Pp - Ll = vdt$	$p\pi - l\lambda = wdt$
$AQ - AM = (u + Ldx)dt$	$Qq - Mm = (v + Mdx)dt$	$q\Phi\ m\mu = (w + Ndx)dt$
$AR - AL = (u + ldy)dt$	$Rr - Ln = (v + mdy)dt$	$r\varrho - n\nu = (w + ndy)dt$
$AS - AL = (u + \lambda dz)dt$	$Ss - Ll = (v + \mu dz)dt$	$s\sigma - lo = (w + \nu dz)dt$

Hinc ergo ternae coordinatae pro his quatuor punctis π, Φ, ϱ et σ erunt:

$$AP = x + udt;\quad Pp = y + vdt;\quad p\pi = z + wdt$$
$$RQ = x + dx + (u + Ldx)dt;\ Qq = y + (v + Mdx)dt;\ q\Phi = z + (w + Ndx)dt$$
$$AR = x + (u + ldy)dt;\ Rr = y + dy + (v + mdy)dt;\ r\varrho = z + (w + ndy)dt$$
$$AS = x + (u + \lambda dz)dt;\quad Ss = y + (v + \mu dz)dt;\ s\sigma = z + dz + (w + \nu dz)dt$$

29. Cum igitur elapso tempusculo dt anguli pyramidis λ, μ, ν et o in puncta π, Φ, ϱ et σ sint translati, ipsa pyramis nunc pyramidem pariter triangularem $\pi\Phi\varrho\sigma$ constituet; ideoque ob indolem fluidi efficiendum est, vt soliditas pyramidis $\pi\Phi\varrho\sigma$ aequalis sit soliditati pyramidis propositae $\lambda\mu\nu o$, seu $= \frac{1}{6}dxdydz$. Totum ergo negotium huc redit, vt soliditas pyramidis $\pi\Phi\varrho\sigma$ determinetur. Perspicuum autem est, hanc pyramidem relinqui, si a solido $prq\pi\Phi\varrho\sigma$ auferatur solidum $pqr\pi\Phi\varrho$; quod posterius solidum est prisma basi triangulari pqr normaliter insistens, et superne sectione obliqua $\pi\varrho\Phi$ truncatum.

30. In huiusmodi autem prismata truncata tria quoque alterum solidum $pqr\pi\Phi\varrho\sigma$ resolui potest, quae sunt:

I. $pqs\pi\Phi\sigma$; II. $prs\pi\varrho\sigma$; III. $qrs\Phi\varrho\sigma$

Nn 2 sicque

ſicque effici debet, vt ſit

$$\tfrac{1}{6}dx\,dy\,dz = pqs\pi\Phi\sigma + prs\pi\varrho\sigma + qrs\Phi\varrho\sigma - pqr\pi\Phi\varrho.$$

Cum autem huiusmodi prisma baſi ſuae inferiori normaliter inſiſtat, tres autem altitudines habeat inaequales, eius ſoliditas reperietur, ſi baſis multiplicetur per trientem ſummae trium iſtarum altitudinum.

31. Hinc ergo ſoliditates horum prismatum truncatorum erunt:

$$pqs\pi\Phi\sigma = \tfrac{1}{3}pqs(p\pi + q\Phi + s\sigma)$$
$$prs\pi\varrho\sigma = \tfrac{1}{3}prs(p\pi + r\varrho + s\sigma)$$
$$qrs\Phi\varrho\sigma = \tfrac{1}{3}qrs(q\Phi + r\varrho + s\sigma)$$
$$pqr\pi\Phi\varrho = \tfrac{1}{3}pqr(p\pi + q\Phi + r\varrho).$$

Cum autem ſit $pqr = pqs + prs + qrs$, erit ſumma trium priorum prismatum poſtremo minuta, ſiue

$$\tfrac{1}{6}dx\,dy\,dz = -\tfrac{1}{3}p\pi.qrs - \tfrac{1}{3}q\Phi.prs - -\tfrac{1}{3}r\varrho.pqs + \tfrac{1}{3}s\sigma.pqr;$$

ſiue

$$dx\,dy\,dz = 2pqr.s\sigma - 2pqs.r\varrho - 2prs.q\Phi - 2qrs.p\pi.$$

32. Supereſt igitur, vt horum prismatum baſes definiantur: verum antequam hoc faciamus, ponamus ad ſequentem calculum contrahendum:

$$AQ = AP + Q;\ Qq = Pp + q;\ q\Phi = p\pi + \Phi$$
$$AR = AP + R;\ Rr = Pp + r;\ r\varrho = p\pi + \varrho$$
$$AS = AP + S;\ Ss = Pp + s;\ s\sigma = p\pi + \sigma$$

atque his poſtremis valoribus ſubſtitutis, termini $p\pi$ continentes ſe mutuo deſtruent, eritque

$$dx\,dy\,dz = 2pqr.\sigma - 2pqs.\varrho - 2prs.\Phi$$

ſicque

ſicque numerus baſium inueſtigandarum, vnitate eſt imminutus.

33. Iam triangulum pqr reperitur, ſi a figura $PprqQ$, ſeu a ſumma trapeziorum $PprR + RrqQ$ auferatur trapezium $PpqQ$; vnde erit

$$\Delta pqr = \tfrac{1}{2}PR(Pp + Rr) + \tfrac{1}{2}RQ(Rr + Qq) - \tfrac{1}{2}PQ(Pp + Qq);$$

ſiue ob $PR = R$; $RQ = Q - R$; et $PQ = Q$ erit.

$$\Delta pqr = \tfrac{1}{2}R(Pp - Qq) + \tfrac{1}{2}Q(Rr - Pp) = \tfrac{1}{2}Qr - \tfrac{1}{2}Rq.$$

Simili modo erit:

$$\Delta pqs = \tfrac{1}{2}PS(Pp + Ss) + \tfrac{1}{2}SQ(Ss + Qq) - \tfrac{1}{2}PQ(Pp + Qq), \text{ ſeu}$$

$$\Delta pqs = \tfrac{1}{2}S(Pp + Ss) + \tfrac{1}{2}(Q - S)(Ss + Qq) - \tfrac{1}{2}Q(Pp + Qq)$$

vnde fit:

$$\Delta pqs = \tfrac{1}{2}S(Pp - Qq) + \tfrac{1}{2}Q(Ss - Pp) = \tfrac{1}{2}Qs - \tfrac{1}{2}Sq.$$

Ac denique

$$\Delta prs = \tfrac{1}{2}PR(Pp + Rr) + \tfrac{1}{2}RS(Rr + Ss) - \tfrac{1}{2}PS(Pp + Ss) \text{ ſeu}$$

$$\Delta prs = \tfrac{1}{2}R(Pp + Rr) + \tfrac{1}{2}(S - R)(Rr + Ss) - \tfrac{1}{2}S(Pp + Ss)$$

vnde fit:

$$\Delta prs = \tfrac{1}{2}R(Pp - Ss) + \tfrac{1}{2}S(Rr - Pp) = \tfrac{1}{2}Sr - \tfrac{1}{2}Rs.$$

34. His igitur valoribus ſubſtitutis, obtinebimus

$$dx\,dy\,dz = (Qr - Rq)\sigma + (Sq - Qs)\varrho + (Rs - Sr)\Phi$$

ſiue pyramidis $\pi\Phi\varrho\sigma$ ſoliditas erit

$$\tfrac{1}{6}(Qr - Rq)\sigma + \tfrac{1}{6}(Sq - Qs)\varrho + \tfrac{1}{6}(Rs - Sr)\Phi$$

Eſt autem ex coordinatarum valoribus ſupra §. 28 exhibitis

$$\begin{array}{lll} Q = dx + L\,dx\,dt & q = M\,dx\,dt & \Phi = N\,dx\,dt \\ R = l\,dy\,dt & r = dy + m\,dy\,dt & \varrho = n\,dy\,dt \\ S = \lambda\,dz\,dt & s = \mu\,dz\,dt & \sigma = dz + \nu\,dz\,dt. \end{array}$$

35. Cum igitur hinc fiat

$$Qr - Rq = dxdy(1 + Ldt + mdt + Lmdt^2 - Mldt^2)$$
$$Sq - Qs = dxdz(-\mu dt - L\mu dt^2 + M\lambda dt^2)$$
$$Rs - Sr = dydz(-\lambda dt - m\lambda dt^2 + l\mu dt^2)$$

reperietur soliditas pyramidis $\pi\Phi\varrho\sigma$ ita expressa

$$\tfrac{1}{6}dxdydz \left\{ \begin{array}{llll} & +L\,dt & +Lmdt^2 & +Lm\nu dt^3 \\ & +mdt & -Mldt^2 & -Ml\nu dt^3 \\ 1 & +\nu dt & +L\nu dt^2 & -Ln\mu dt^3 \\ & & +m\nu dt^2 & +Mn\lambda dt^3 \\ & & -n\mu dt^2 & -Nm\lambda dt^3 \\ & & -N\lambda dt^2 & +Nl\mu dt^3 \end{array} \right\}$$

quae cum debeat esse aequalis pyramidi $\lambda\mu\nu o = \tfrac{1}{6}dxdydz$ habebitur, diuisione per dt instituta, haec aequatio:

$$o = L + m + \nu + dt(Lm + L\nu + m\nu - Ml - N\lambda - n\mu)$$
$$+ dt^2(Lm\nu + Mn\lambda + Nl\mu - Ln\mu - Ml\nu - Nl\mu)$$

36. Reiectis igitur terminis infinite paruis habebitur haec aequatio: $L + m + \nu = o$, qua ratio celeritatum u, v, w determinatur, vt motus fluidi fiat possibilis. Cum igitur sit $L = \frac{du}{dx}$, $m = \frac{dv}{dy}$ et $\nu = \frac{dw}{dz}$: criterium motus possibilis, si puncto fluidi cuicunque λ, cuius situs ternis coordinatis x, y et z definitur, eiusmodi celeritates u, v et w secundum easdem coordinatas directae tribuantur, vt sit:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = o.$$

Hac scilicet conditione id obtinetur, vt nulla fluidi pars in motu, neque in magis, neque in minus spatium, transferatur, ac perpetuo cum fluidi continuitas, tum eadem densitas, conseruetur.

37. Haec autem proprietas ita eſt interpretanda, vt pro eodem temporis momento ad omnia fluidi puncta extendatur: eodem ſcilicet momento omnium punctorum ternae celeritates u, v, w tales eſſe debent functiones ternarum coordinatarum x, y et z, vt ſit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$: ſicque natura iſtarum functionum motum ſingulorum fluidi punctorum ad inſtans propoſitum definiet. Alio autem tempore eorundem punctorum motus vtcunque diuerſus eſſe poterit, dummodo pro quouis temporis puncto inuenta proprietas per totum fluidum locum habeat. Tempus ſcilicet hactenus tanquam quantitatem conſtantem ſum contemplatus.

38. Sin autem tempus quoque variabile ſpectare velimus, ita vt motus puncti λ, cuius ſitus ternis coordinatis $AL = x$, $Ll = y$ et $l\lambda = z$ indicatur, elapſo tempore t definiri debeat, manifeſtum eſt, ternas celeritates u, v et w non ſolum a coordinatis x, y et z, ſed inſuper etiam a tempore t pendere, ſeu functiones fore quatuor harum quantitatum x, y, z et t; ita vt earum differentialia huiusmodi formas ſint habitura:

$$du = L\,dx + l\,dy + \lambda\,dz + \mathfrak{L}\,dt;\quad dv = M\,dx + m\,dy + \mu\,dz + \mathfrak{M}\,dt;\quad dw = N\,dx + n\,dy + \nu\,dz + \mathfrak{N}\,dt.$$

Interim tamen ſemper erit $L + m + \nu = 0$, propterea, quod quouis inſtanti tempus t pro conſtanti habetur, ſeu ſit $dt = 0$. Vtcunque igitur functiones u, v, et w cum tempore t mutantur, neceſſe eſt, vt pro omni temporis momento ſit:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Cum enim hac conditione efficiatur, vt quaeuis fluidi portio tempuſculo dt in ſpatium ſibi aequale transferatur,

tur, idem etiam per eandem conditionem in elemento temporis ſequenti, omnibus ergo ſequentibus temporis elementis euenire debebit.

PARS ALTERA.

39. Expoſitis ergo iis, quae ad motum tantum poſſibilem attinent, inueſtigemus nunc etiam indolem eius motus, qui re vera in fluido ſubſiſtere poteſt. Hic igitur, praeter fluidi continuitatem, eiusdemque denſitatis permanentiam, ratio quoque erit habenda virium, quibus ſingula fluidi elementa actu ſollicitantur. Quando enim cuiusuis elementi motus, vel non eſt vniformis, vel non in directum porrigitur, motus immutatio viribus hoc elementum ſollicitantibus conformis eſſe debet. Quare cum ex cognitis his viribus motus mutatio innoteſcat, praecedentes autem formulae etiam hanc motus mutationem contineant, hinc nouae deducentur determinationes, quibus motus hactenus tantum poſſibilis ad motum actualem reſtringitur.

40. Inſtituamus quoque hanc inueſtigationem bipartito; ac primo concipiamus totum fluidi motum in eodem plano fieri. Sint ergo, vt ante, coordinatae ſitum puncti cuiusuis l definientes $AL = x$, $Ll = y$; ac
Tab. IV. Fig. 1. nunc quidem elapſo tempore t ſint puncti l binae celeritates ſecundum directiones axibus AL et AB parallelas u et v: erunt u et v, quoniam nunc variabilitatis temporis ratio haberi debet, functiones ipſarum x, y et t, quo circa ponatur

$$du = L\,dx + l\,dy + \mathfrak{L}\,dt \text{ et } dv = M\,dx + m\,dy + \mathfrak{M}\,dt$$

atque

atque ob priorem conditionem iam supra inuenimus, esse debere $L + m = 0$.

41. Cum igitur elapso tempusculo $= dt$ punctum l transferatur in p, absoluto secundum axem AL spatiolo $= udt$, secundum alterum axem AB autem spatiolo $= vdt$; vt incrementa celeritatum u et v puncti l, quae tempusculo dt ipsi inducuntur, obtineamus, pro dx et dy scribi oportet spatiola udt et vdt, vnde haec vera celeritatum incrementa prodibunt:

$$du = Ludt + lvdt + \mathfrak{L}dt \text{ et } dv = Mudt + mvdt + \mathfrak{M}dt$$

Ex quo vires acceleratrices, quae has accelerationes producere valent, erunt:

Vis accel. secundum $AL = 2(Lu + lv + \mathfrak{L})$

Vis accel. secundum $AB = 2(Mu + mv + \mathfrak{M})$

quibus ergo vires actu in aquae particulam l agentis aequales esse debebunt.

42. Inter vires autem, quae aquae particulas actu sollicitant, primum consideranda venit grauitas; cuius autem effectus, si planum, in quo fit motus, est horizontale, pro nihilo erit habendus. Sin autem fuerit decliue, axisque AL decliuitatem sequatur, altero AB existente horizontali, a grauitate orietur vis acceleratrix secundum AL constans, quae sit $= \alpha$. Deinde non praetermittenda est frictio, qua saepe motus aquae non mediocriter impeditur; quanquam autem eius leges nondum sunt satis exploratae, tamen frictionem corporum solidorum sequentes non multum fortasse a scopo aberrabimus, si frictionem vbique pressioni, qua aquae particulae se inuicem premunt, proportionalem statuerimus.

 43. In-

43. Inprimis autem in computum eſt ducenda preſſio, qua particulae aquae vbique in ſe mutuo agunt, qua fit, vt quaelibet particula vndique ab adiacentibus comprimatur, et quatenus haec preſſio vndequaque non fuerit aequalis, eatenus particulae motus afficiatur. Vbique ſcilicet aqua in certo quodam ſtatu compreſſionis verſabitur, qui ſimilis erit ei, in quo aqua ſtagnans ad certam profunditatem exiſtit. Haec ergo profunditas, ad quam in aqua ſtagnante aqua in pari compreſſionis ſtatu reperitur, commodiſſime adhibebitur ad preſſionem in quouis fluidi puncto l exprimendam. Sit igitur p iſta altitudo, ſeu profunditas, ſtatum compreſſionis in l exprimens, eritque p functio quaedam coordinatarum x et y, ac ſi preſſio cum tempore in l quoque varietur, tempus quoque t in functionem p ingredietur.

Tab. IV. Fig. 3. 44. Ponamus ergo $dp = R\,dx + r\,dy + \mathfrak{R}\,dt$, et conſideremus elementum aquae quadrangulare rectangulum $lmno$, cuius latera ſint $lm = no = dx$ et $ln = mo = dy$; areaque $= dx\,dy$. Cum iam preſſio in l ſit $= p$; preſſio in m erit $= p + R\,dx$, in $n = p + r\,dy$ et in $o = p + R\,dx + r\,dy$. Hinc latus lm premitur vi $= dx(p + \frac{1}{2}R\,dx)$, latus vero no contra premetur vi $= dx(p + \frac{1}{2}R\,dx + r\,dy)$; ab his ergo duabus viribus elementum $lmno$ ſecundum directionem ln vrgebitur vi $= -r\,dx\,dy$. Simili autem modo ex viribus $dy(p + \frac{1}{2}r\,dy)$ et $dy(p + R\,dx + \frac{1}{2}r\,dy)$, quae agunt in latera ln et mo, reſultabit vis elementum vrgens ſecundum directionem $lm = -R\,dx\,dy$.

45. Hinc

45. Hinc igitur orietur vis acceleratrix ſecundum $lm = -R$, et vis acceleratrix ſecundum $ln = -r$, quarum illa cum vi a grauitate orta α praebet $\alpha - R$. Frictione ergo adhuc ſemota, has habebimus aequationes:

$$\alpha - R = 2Lu + 2lv + 2\mathfrak{L} \text{ ſeu } R = \alpha - 2Lu - 2lv - 2\mathfrak{L}$$

$$-r = 2Mu + 2mv + 2\mathfrak{M} \text{ et } r = -2Mu - 2mv - 2\mathfrak{M}$$

vnde colligimus fore

$$dp = \alpha dx - 2(Lu + lv + \mathfrak{L})dx - 2(Mu + mv + \mathfrak{M})dy + \mathfrak{N}dt$$

quod differentiale oportet eſſe completum, ſeu integrabile.

46. Quia terminus αdx per ſe eſt integrabilis, et pro $\mathfrak{N}$ nihil eſt definitum, ex natura differentialium completorum neceſſe eſt, vt ſit ſignandi modo iam ſupra adhibito:

$$\frac{d.(Lu + lv + \mathfrak{L})}{dy} = \frac{d.(Mu + mv + \mathfrak{M})}{dx}$$

vnde ob $\frac{du}{dx} = L$, $\frac{du}{dy} = l$; $\frac{dv}{dx} = M$, et $\frac{dv}{dy} = m$, orietur

$$Ll + \frac{udL}{dy} + lm + \frac{vdl}{dy} + \frac{d\mathfrak{L}}{dy} = ML + \frac{udM}{dx} + mM + \frac{vdm}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dx}$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$(L + m)(l - M) + u\left(\frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}\right) + v\left(\frac{dl}{dy} - \frac{dm}{dx}\right) + \frac{d\mathfrak{L}}{dx} - \frac{d\mathfrak{M}}{dx} = 0$$

47. Verum ob differentialia $Ldx + ldy + \mathfrak{L}dt$ et $Mdx + mdy + \mathfrak{M}dt$ completa nouimus eſſe

$$\frac{dL}{dy} = \frac{dl}{dx};\ \frac{dm}{dx} = \frac{dM}{dy};\ \frac{d\mathfrak{L}}{dy} = \frac{dl}{dt} \text{ et } \frac{d\mathfrak{M}}{dx} = \frac{dM}{dt}$$

quibus valoribus ſubſtitutis habebimus iſtam aequationem:

$$(L + m)(l - M) + u\left(\frac{dl - dM}{dx}\right) + \left(\frac{dl - dM}{dy}\right) + \frac{dl - dM}{dt} = 0$$

cui aperte ſatisfacit $l = M$: ita vt ſit $\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}$. Cum igitur haec conditio requirat, vt ſit $\frac{du}{dy} = \frac{du}{dx}$, viciſſim apparet, formulam differentialem hanc $udx + vdy$ eſſe debere completam in quo ergo criterium motus actualis conſiſtit.

 48. Cri-

48. Criterium hoc independens est a praecedente, quod continuitas fluidi eiusque constans densitas vniformis suppeditauit. Quare etiamsi fluidum in motu densitatem suam mutaret, vti in motu fluidorum elasticorum, veluti aëris euenire solet, haec proprietas nihilominus locum habere debet, vt sit $udx + vdy$ differentiale completum. Siue celeritates u et v semper eiusmodi debent esse functiones coordinatarum x et y, praeter tempus t, vt posito tempore constante formula $udx + vdy$ integrationem admittat.

49. Hinc autem porro ipsam pressionem p definire poterimus, id quod absolute est necessarium, ad motum fluidi perfecte determinandum. Cum enim invenerimus $M = l$, erit

$$dp = \alpha dx - 2u(Ldx + ldy) - 2v(ldx + mdy) - 2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy + \mathfrak{N}dt.$$

At est $Ldx + ldy = du - \mathfrak{L}dt$; $ldx + mdy = dv - \mathfrak{M}dt$, vnde fit:

$$dp = \alpha dx - 2udu - 2vdv + 2\mathfrak{L}udt + 2\mathfrak{M}vdt - 2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy + \mathfrak{N}dt.$$

Quodsi ergo pressionem in singulis fluidi punctis pro tempore praesente definire velimus, nullo respectu ad eius mutationem cum tempore oriundam habito, ista nobis consideranda erit aequatio:

$$dp = \alpha dx - 2udu - 2vdv - 2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy$$

estque nostro designandi modo $\mathfrak{L} = \frac{du}{dt}$ et $\mathfrak{M} = \frac{dv}{dt}$; hincque

$$dp = \alpha dx - 2udu - 2vdv - 2\frac{du}{dt}.dx - 2\frac{dv}{dt}.dy$$

in cuius aequationis integratione tempus t pro constanti est habendum.

50. Haec

50. Haec autem aequatio per hypothesin est integrabilis, atque reuera talis deprehenditur, si ad criterium huius motus attendamus, quo vidimus, esse debere $u\,dx + v\,dy$ differentiale completum, si quidem tempus t constans assumamus. Sit igitur S eius integrale, quod ergo eiusmodi erit functio ipsarum x, y et t, vt posito $dt = 0$, prodeat $dS = u\,dx + v\,dy$: sumto autem quoque tempore t variabili ponamus haberi

$$dS = u\,dx + v\,dy + U\,dt$$

eritque propterea $\frac{du}{dt} = \frac{dU}{dx}$ et $\frac{dv}{dt} = \frac{dU}{dy}$. Tum vero est $U = \frac{dS}{dt}$.

51. His valoribus introductis habebitur:

$$\frac{du}{dt} \cdot dx + \frac{dv}{dt} \cdot dy = \frac{dU}{dx} \cdot dx + \frac{dU}{dy} \cdot dy$$

huiusque formulae cum tempus t constans sumatur integrale manifesto est $= U$. Quod quo clarius appareat, ponamus $dU = K\,dx + k\,dy$, erit $\frac{dU}{dx} = K$ et $\frac{dU}{dy} = k$, vnde $\frac{dU}{dx} \cdot dx + \frac{dU}{dy} \cdot dy = K\,dx + k\,dy = dU$. Cum igitur huius integrale sit $= U = \frac{dS}{dt}$: erit

$$dp = \alpha\,dx - 2u\,du - 2v\,dv - 2\,dU$$

vnde integrando prodit:

$$p = \text{Const.} + \alpha x - uu - vv - \frac{2\,dS}{dt}.$$

existente S functione ipsarum x, y et t, cuius differentiale posito $dt = 0$, est $u\,dx + v\,dy$.

52. Quo indoles huius formulae melius intelligatur, consideremus puncti l celeritatem veram, quae sit $= V = \sqrt{(uu + vv)}$. Atque erit pressio: $p = \text{Const.} + \alpha x - VV - \frac{2\,dS}{dt}$: in quo postremo termino dS denotat,

notat differentiale ipsius $S = \int(udx + vdy)$, si tantum tempus t vt variabile spectetur.

53. Si iam frictionis quoque rationem habere velimus, eamque pressioni p proportionalem statuamus, dum punctum l elementum ds percurrit, erit vis retardatrix a frictione oriunda $= \frac{p}{f}$; vnde posito $\frac{dS}{dt} = U$, aequatio nostra differentialis, posito t constante, erit:

$$dp = \alpha dx - \frac{p}{f}ds - 2VdV - 2dU$$

vnde integrando oritur, sumto e pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$,

$$p = e^{\frac{-s}{f}} \int e^{\frac{s}{f}} (\alpha dx - 2VdV - 2dV) \text{ siue}$$

$$p = \alpha x - VV - 2U - \tfrac{1}{f} e^{\frac{-s}{f}} \int e^{\frac{s}{f}} (\alpha x - VV - 2U) ds$$

54. Cum igitur criterium motus, quo fluidum re vera mouetur, in hoc consistat, vt posito tempore constante, differentiale $udx + vdy$ sit completum: continuitas autem et constans vniformis densitas exigat, vt sit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$, hinc sequitur quoque hoc differentiale $udy + vdx$ fore completum. Quare vtrinque coniunctim celeritates u et v eiusmodi debent esse functiones coordinatarum x et y cum tempore t, vt hae ambae formulae $udx + vdy$ et $udy + vdx$ sint differentialia completa.

55. Instituamus iam eandem inuestigationem in genere, positisque puncti λ ternis celeritatibus secundum axes AL, AB, AC directis, u, v, w sint eae eiusmodi functiones cum coordinatarum x, y, z, tum temporis t, vt differentiatione instituta fiat:

$du =$

$$du = \mathrm{L}\,dx + l\,dy + \lambda\,dz + \mathfrak{L}\,dt$$
$$dv = \mathrm{M}\,dx + m\,dy + \mu\,dz + \mathfrak{M}\,dt$$
$$dw = \mathrm{N}\,dx + n\,dy + \nu\,dz + \mathfrak{N}\,dt$$

et quanquam hic quoque tempus t variabile eſt aſſumtum, tamen, vt motus ſit poſſibilis, per conditionem praecedentem oportet eſſe $\mathrm{L} + m + \nu = 0$, ſiue quod eodem redit:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

a qua proprietate quidem praeſens examen non pendet.

56. Elapſo autem tempuſculo dt, punctum λ transfertur in π, et ſecundum axem AL percurrit ſpatiolum $= u\,dt$, ſecundum axem AB ſpatiolum $= v\,dt$ et ſecundum axem AC ſpatiolum $w\,dt$. Quare nunc puncti λ in π exiſtentis ternae celeritates erunt:

ſecund. $\mathrm{AL} = u + \mathrm{L}u\,dt + l v\,dt + \lambda w\,dt + \mathfrak{L}\,dt$
ſecund. $\mathrm{AB} = v + \mathrm{M}u\,dt + m v\,dt + \mu w\,dt + \mathfrak{M}\,dt$
ſecund. $\mathrm{AC} = w + \mathrm{N}u\,dt + n v\,dt + \nu w\,dt + \mathfrak{N}\,dt$

hincque accelerationes ſecundum easdem directiones erunt:

ſec. $\mathrm{AL} = 2(\mathrm{L}u + lv + \lambda w + \mathfrak{L})$
ſec. $\mathrm{AB} = 2(\mathrm{M}u + mv + \mu w + \mathfrak{M})$
ſec. $\mathrm{AC} = 2(\mathrm{N}u + nv + \nu w + \mathfrak{N})$

57. Si axem AC verticalem ſtatuamus, ita vt reliqui bini AL et AB ſint horizontales, ob grauitatem vis acceleratrix oritur ſecundum Axem $\mathrm{AC} = -1$. Tum vero poſita preſſione in $\lambda = p$, eiusque differentiali, ſumto tempore conſtante,

$$dp = \mathrm{R}\,dx + r\,dy + \varrho\,dz$$

hinc

hinc orientur ternae vires acceleratrices

ſec. $AL = -R$; ſec. $AB = -r$ et ſec. $AC = -\varrho$

quippe quae facile ſimili modo colliguntur, quo ante §. 44 et 45. ſumus vſi, ita vt ſuperfluum foret, idem ratiocinium repetere. Quam ob rem habebimus has aequationes:

$$R = -2(Lu + lv + \lambda w + \mathfrak{L})$$
$$r = -2(Mu + mv + \mu w + \mathfrak{M})$$
$$\varrho = -1 - 2(Nu + nv + \nu w + \mathfrak{N})$$

58. Cum autem formula $dp = R\,dx + r\,dy + \varrho\,dz$ debeat eſſe differentiale completum, erit

$$\frac{dR}{dy} = \frac{dr}{dx};\quad \frac{dR}{dz} = \frac{d\varrho}{dx};\quad \frac{dr}{dz} = \frac{d\varrho}{dy}.$$

at differentiatione peracta obtinebuntur per -2 diuidendo tres ſequentes aequationes

$$\text{I}\ \begin{cases} \frac{u\,dL}{dy} + \frac{v\,dl}{dy} + \frac{w\,d\lambda}{dy} + \frac{d\mathfrak{L}}{dy} + Ll + lm + \lambda n = \\ \frac{u\,dM}{dx} + \frac{v\,dm}{dx} + \frac{w\,d\mu}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + ML + mM + \mu N \end{cases}$$

$$\text{II}\ \begin{cases} \frac{u\,dL}{dz} + \frac{v\,dl}{dz} + \frac{w\,d\lambda}{dz} + \frac{d\mathfrak{L}}{dz} + \mathfrak{L}\lambda + l\mu + \lambda\nu = \\ \frac{u\,dN}{dx} + \frac{v\,dn}{dx} + \frac{w\,d\nu}{dx} + \frac{d\mathfrak{N}}{dx} + NL + nM + \nu N \end{cases}$$

$$\text{III}\ \begin{cases} \frac{u\,dM}{dz} + \frac{v\,dm}{dz} + \frac{w\,d\mu}{dz} + \frac{d\mathfrak{M}}{dz} + M\lambda + m\mu + \mu\nu = \\ \frac{v\,dN}{dy} + \frac{v\,dn}{dy} + \frac{w\,d\nu}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dy} + Nl + nm + \nu n \end{cases}$$

59. Eſt autem ex natura differentialium completorum

$$\frac{dL}{dy} = \frac{dl}{dx};\quad \frac{dm}{dx} = \frac{dM}{dy};\quad \frac{d\lambda}{dy} = \frac{dl}{dz};\quad \frac{d\mu}{dx} = \frac{dM}{dz};\quad \frac{d\mathfrak{L}}{dy} = \frac{dl}{dt};\quad \frac{d\mathfrak{M}}{dx} = \frac{dM}{dt}$$
$$\frac{dL}{dz} = \frac{d\lambda}{dx};\quad \frac{dl}{dz} = \frac{d\lambda}{dy};\quad \frac{dn}{dx} = \frac{dN}{dy};\quad \frac{d\nu}{dx} = \frac{dN}{dz};\quad \frac{d\mathfrak{L}}{dz} = \frac{d\lambda}{dt};\quad \frac{d\mathfrak{N}}{dx} = \frac{dN}{dt}$$
$$\frac{dM}{dz} = \frac{d\mu}{dx};\quad \frac{dN}{dy} = \frac{dn}{dx};\quad \frac{dm}{dz} = \frac{d\mu}{dy};\quad \frac{d\nu}{dy} = \frac{dn}{dz};\quad \frac{d\mathfrak{M}}{dz} = \frac{d\mu}{dt};\quad \frac{d\mathfrak{N}}{dy} = \frac{dn}{dt}$$

quibus

quibus valoribus ſubſtitutis tres illae aequationes abibunt in has:

$$\left(\frac{dl-dM}{dt}\right)+u\left(\frac{dl-dM}{dx}\right)+v\left(\frac{dl-dM}{dy}\right)+w\left(\frac{dl-dM}{dz}\right)+(l-M(L+m)+\lambda n-\mu N=0$$
$$\left(\frac{d\lambda-dN}{dt}\right)+u\left(\frac{d\lambda-dN}{dx}\right)+v\left(\frac{d\lambda-dN}{dy}\right)+w\left(\frac{d\lambda-dN}{dz}\right)+(\lambda-N)(L+\nu)+l\mu-nM=0$$
$$\left(\frac{d\mu-dn}{dt}\right)+u\left(\frac{d\mu-dn}{dx}\right)+v\left(\frac{d\mu-dn}{dn}\right)+w\left(\frac{d\mu-dn}{dz}\right)+(\mu-n)(m+\nu)+M\lambda-Nl=0$$

60. Manifeſtum iam eſt, his tribus aequationibus ſatisfieri ſequentibus tribus valoribus:

$$l=M;\quad \lambda=N;\quad \mu=n$$

quibus continetur criterium, quod conſideratio ſollicitationum ſuppeditat. Hinc ergo ſequitur fore recepto deſignandi modo

$$\frac{du}{dy}=\frac{dv}{dx};\quad \frac{du}{dz}=\frac{dw}{dx};\quad \frac{dv}{dz}=\frac{dw}{dy}.$$

hae autem ipſae ſunt illae conditiones, quae requiruntur, vt haec formula $udx+vdy+wdz$ ſit differentiale completum. Ex quo hoc criterium in eo conſiſtit, vt ternae celeritates u, v et w eiusmodi eſſe debeant functiones ipſarum x, y et z vna cum t, vt poſito tempore conſtante formula $udx+vdy+wdz$ integrationem admittat.

61. Cum ergo poſito tempore t conſtante, ſeu $dt=0$, ſit

$$du=Ldx+Mdy+Ndz$$
$$dv=Mdx+mdy+ndz$$
$$dw=Ndx+ndy+\nu dz$$

valores autem pro R, r et ϱ fiant:

$$R=-2(Lu+Mv+Nw+\mathfrak{L})$$
$$r=-2(Mu+mv+nw+\mathfrak{M})$$
$$\varrho=-1-2(Nu+nv+\nu w+\mathfrak{N})$$

 pro

pro statu pressionis p haec habebitur aequatio:

$$\begin{aligned} dp = -dz - 2u(Ldx + Mdy + Ndz) &= -dz - 2udu - 2vdv - 2wdw \\ -2v(Mdx + mdy + ndz) \quad & -2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy - 2\mathfrak{N}dz \\ -2w(Ndx + ndy + vdz) \quad & \\ -2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy - 2\mathfrak{N}dz & \end{aligned}$$

62. Quia vero est $\mathfrak{L} = \frac{du}{dt}$; $\mathfrak{M} = \frac{dv}{dt}$; $\mathfrak{N} = \frac{dw}{dt}$; erit integrando:

$$p = C - z - uu - vv - ww - 2\int\left(\frac{du}{dt}.dx + \frac{dv}{dt}.dy + \frac{dw}{dt}.dz\right)$$

Cum autem per conditionem inuentam sit $udx + vdy + wdz$ integrabile, ponatur eius integrale $= S$, quod, quoniam etiam tempus t inuoluere potest, sit sumto quoque t variabili:

$$dS = udx + vdy + wdz + Udt$$

eritque $\frac{du}{dt} = \frac{dU}{dx}$; $\frac{dv}{dt} = \frac{dU}{dy}$; $\frac{dw}{dt} = \frac{dU}{dz}$; Quare cum sit in genere sumto tempore t constante, vti id quidem in superiori integrali assumitur,

$$\frac{dU}{dx}.dx + \frac{dU}{dy}.dy + \frac{dU}{dz}.dz = dU$$

habebimus:

$$p = C - z - uu - vv - ww - 2U, \text{ siue}$$

$$p = C - z - uu - vv - ww - 2.\frac{dS}{dt}$$

63. Perspicuum hic est, $uu + vv + ww$ exprimere quadratum verae puncti λ celeritatis ita, vt, si celeritas huius puncti vera dicatur $= V$, habeatur pro pressione ista aequatio:

$$p = C - z - VV - \frac{2dS}{dt}.$$

ad quam ergo inueniendam, primum formulae $udx + vdy + wdz$, quam completam esse oportet, quaeratur integrale S, hocque denuo differentietur, posito solo tempore

pore t variabili, quod differentiale per dt diuisum, dabit valorem formulae $\frac{ds}{dt}$, quae in expressionem pro statu pressionis p inuentam ingreditur.

64. Quodsi iam prius criterium, quo motus saltem possibilis continetur, hic adiungamus, ternae celeritates u, v, w eiusmodi functiones ternarum coordinatarum x, y et z vna cum tempore t esse debent, vt primo sit $udx + vdy + wdz$ differentiale completum; deinde vero, vt sit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$. Hisque duabus conditionibus omnis fluidorum motus, siquidem densitate inuariabili sint praeditae, subiicitur. Praeterea vero, si sumto etiam tempore t variabili, haec formula $udx + vdy + wdz + Udt$ fuerit differentiale completum, status pressionis in puncto quocunque λ exprimitur, altitudine p, vt sit:

$$p = C - z - uu - vv - ww - 2U$$

siquidem fluidum grauitate naturali gaudeat, et planum BAL fuerit horizontale.

65. Si grauitati aliam directionem tribuissemus, siue etiam vires vtcunque variabiles assumsissemus, quibus singulae fluidi particulae sollicitarentur, inde tantum discrimen in valorem pressionis p esset ingressum, neque inde lex, quam ternae cuiusque puncti fluidi celeritates sequi debent, vllam mutationem esset passa. Semper ergo, quaecunque fuerint vires sollicitantes, ternae celeritates $u, v,$ et w ita debent esse comparatae, vt formula $udx + vdy + wdz$ fiat differentiale completum, atque vt insuper sit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$. Infinitis igitur modis constitui poterunt ternae celeritates

u, v et w, vt his duabus conditionibus satisfiat; atque tum pressio fluidi in singulis punctis poterit assignari.

66. Multo difficilior autem foret quaestio, si, datis viribus sollicitantibus, vna cum pressione in quibusdam locis, ipse motus fluidi in singulis punctis determinari deberet. Tum enim haberentur aliquot aequationes formae $p = C - z - uu - vv - ww - 2U$, ex quibus, cum constans C, tum vero ratio functionum u, v et w ita definiri deberet, vt non solum his casibus istis aequationibus satisfieret, sed etiam ante allatae regulae obseruarentur, quod opus vtique maximam calculi vim requireret. Conueniet igitur in genere in naturam functionum idonearum inquiri, quae vtrique criterio futurae sint conformes.

67. Commodissime igitur incipiemus ab ipsa quantitate integrali, cuius differentiale esse oportet formulam $udx + vdy + wdz$ posito tempore constante. Sit ergo S hoc integrale, quod erit functio ipsarum x, y et z, tempore t in quantitatibus constantibus involuto; atque si haec quantitas S differentietur, coefficientes differentialium dx, dy et dz statim praebebunt celeritates u, v et w, quae quidem praesenti tempore conveniant puncto fluidi λ, cuius coordinatae sunt x, y et z. Quaestio autem huc redit: vt definiatur, quales functiones ipsarum x, y et z, pro S assumi debeant, vt etiam fiat $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$; seu cum sit $u = \frac{dS}{dx}$, $v = \frac{dS}{dy}$ et $w = \frac{dS}{dz}$, vt sit $\frac{ddS}{dx^2} + \frac{ddS}{dy^2} + \frac{ddS}{dz^2} = 0$.

68. Quo-

68. Quoniam non patet, quomodo hoc generaliter praeſtari poſſit, caſus quosdam generaliores contemplabor. Sit igitur

$$S = (Ax + By + Cz)^n$$

eritque:

$\frac{dS}{dx} = nA(Ax+By+Cz)^{n-1}$ et $\frac{ddS}{dx^2} = n(n-1)AA(Ax+By+Cz)^{n-2}$ ſimilesque erunt formae pro $\frac{ddS}{dy^2}$ et $\frac{ddS}{dz^2}$, vnde effici debet, vt ſit

$$n(n-1)(Ax + By + Cz)^{n-2}(AA + BB + CC) = 0$$

cui primo ſatisfit, ſi vel $n = 0$, vel $n = 1$; ex quo iam duo valores idonei obtinentur, ſcilicet $S = \text{Conſt.}$ et $S = Ax + By + Cz$, vbi conſtantes A, B, C etiam tempus vtcunque in ſe complecti poſſunt.

69. Sin autem n neque $= 0$, neque $= 1$, neceſſe eſt, vt ſit: $AA + BB + CC = 0$: tumque pro S valor idoneus erit

$$S = (Ax + By + Cz)^n$$

quicunque numerus pro exponente n ſumatur, quin etiam ipſum tempus t in n poterit ingredi. Patet etiam aggregatum quotcunque huiusmodi formularum idoneum valorem pro S praebere, ita, vt ſit:

$$S = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta z + \varepsilon(Ax + By + Cz)^n + \zeta(A'x + B'y + C'z)^{n'}$$
$$+ \eta(A''x + B''y + C''z)^{n''} + \theta(A'''x + B'''y + C'''z)^{n'''} \text{ etc.}$$

dummodo fuerit:

$$AA + BB + CC = 0;\ A'A' + B'B' + C'C' = 0;\ A''A''$$
$$+ B''B'' + C''C'' = 0 \text{ etc.}$$

70. Hinc valores idonei pro S ex inferioribus ordinibus, vbi coordinatae x, y, z, vel vnam, vel

 duas,

duas, vel tres, vel quatuor habent dimensiones, erunt sequentes.

I. $S = A$

II. $S = Ax + By + Cz$

III. $S = Axx + Byy + Czz + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$
existente $A + B + C = 0$

IV. $S = Ax^3 + By^3 + Cz^3 + 3Dxxy + 3Fxxz + 3Hyyz + 6Kxyz$
$+ 3Exyy + 3Gxzz + 3Iyzz$

existente $A + E + G = 0$; $B + D + I = 0$; $C + F + H = 0$

$$\text{V. } S = \begin{array}{l} + Ax^4 + 6Dxxyy + 4Gx^3y + 4Hxy^3 + 12Nxxyz \\ + By^4 + 6Exxzz + 4Ix^3z + 4Kxz^3 + 12Oxyyz \\ + Cz^4 + 6Fyyzz + 4Ly^3z + 4Myz^3 + 12Pxyzz \end{array}$$

existente $A + D + E = 0 \quad G + H + P = 0$
$B + D + F = 0 \quad I + K + O = 0$
$C + E + F = 0 \quad L + M + N = 0$

71. Hinc perspicuum est, quomodo hae formulae pro quolibet ordine se sint habiturae: singulis scilicet terminis primo iidem dentur coefficientes numerici, qui iisdem terminis ex lege permutationum conveniunt, seu, qui oriuntur, si trinomium $x + y + z$ ad potestatem eiusdem ordinis eleuetur. Numericis autem coefficientibus adiungantur litterales indefiniti A, B, C, etc. Tum reiectis numericis dispiciatur, quoties eiusmodi terni termini occurrunt $LZxx + MZyy + NZzz$, qui scilicet factorem communem Z ex variabilibus formatum habeant, totiesque summa coefficientium litteralium $L + M + N$ statuatur nihilo aequalis. Ita cum pro potestate quinta habeatur.

$$S = \begin{array}{l} + Ax^5 + 5Dx^4y + 5\mathfrak{D}x^4z + 10Gx^3yy + 10\mathfrak{G}x^3zz + 20Kx^3yz + 30Nxyyzz \\ + By^5 + 5Exy^4 + 5\mathfrak{E}y^4z + 10Hx^2y^3 + 10\mathfrak{H}y^3zz + 20Lxy^3z + 30Oxxyzz \\ + Cz^5 + 5Fxz^4 + 5\mathfrak{F}yz^4 + 10Ixxz^3 + 10\mathfrak{I}yyz^3 + 20Mxyz^3 + 30Pxxyyz \end{array}$$

sequen-

sequentes habebuntur coefficientium litteralium determinationes:

$A+G+\mathfrak{G}=0$; $D+H+O=0$; $\mathfrak{D}+I+P=0$
$B+H+\mathfrak{H}=0$; $E+G+N=0$; $\mathfrak{E}+\mathfrak{I}+P=0$; $K+L+M=0$
$C+I+\mathfrak{I}=0$; $F+\mathfrak{G}+N=0$; $\mathfrak{F}+\mathfrak{H}+O=0$

Simili modo pro ordine sexto huiusmodi determinationes prodibunt 15, pro septimo 21, pro octauo 28 et ita porro.

72. Iam formula prima $S=A$, quoniam coordinatas x, y et z plane non in se complectitur, ternas celeritates u, v, et w nihilo aequales praebebit, sicque statum fluidi quietum exhibebit. Pressio tamen in quouis puncto pro variis temporibus vtcunque poterit esse variabilis. Cum enim A sit functio quaecunque temporis, ad datum tempus t pressio in puncto λ erit $p=C-\frac{2\,dA}{dt}-z$: qua formula eiusmodi fluidi status indicatur, vbi fluidum quouis momento a viribus quibuscunque sollicitatur, quae tamen se semper in aequilibrio teneant, vt ab illis nullus motus in fluido oriri queat: vbi euenit, si fluidum vasi fuerit inclusum, ex quo nusquam erumpere queat, atque in eo a viribus quibuscunque comprimatur.

73. Formula autem secunda $S=Ax+By+Cz$ differentiata, has praebebit puncti λ ternas celeritates:

$$u=A;\ v=B \text{ et } w=C.$$

Eodem ergo tempore omnia fluidi puncta pari motu feruntur secundum eandem directionem. Ex quo totum fluidum, perinde ac corpus solidum, mouebitur, quod solo motu progressiuo fertur. Diuerso autem tempore

pore huius motus tam celeritas, quam directio, vtcunque variari poterit, prout vires extrinsecus vrgentes exegerint. Pressio ergo in puncto λ ad tempus t, cuius A, B, C sunt functiones, erit $p = C - z - AA - CC - 2x.\frac{dA}{dt} - 2y.\frac{dB}{dt} - z\frac{dC}{dt}$.

74. Formula tertia $S = Axx + Byy + Czz + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$, vbi est $A + B + C = 0$, has praebebit ternas puncti λ celeritates: $u = 2Ax + 2Dy + 2Ez$; $v = 2By + 2Dx + 2Fz$; $w = 2Cz + 2Ex + 2Fy$, seu $w = 2Ex + 2Fy - 2(A + B)z$. Hoc ergo casu etiam eodem temporis momento diuersa fluidi puncta diuerso motu feruntur; successu autem temporis etiam eiusdem puncti motus quomodocunque variabilis existere potest, quia pro A, B, D, E, F functiones quascunque temporis t assumere licet. Multo maior autem varietas locum habebit, si functioni S valores magis compositi tribuantur.

75. Quia casu secundo motus fluidi conueniebat cum motu corporis solidi progressiuo, quo scilicet vnoquoque momento singulae partes motu aequali sibique parallelo feruntur: suspicari liceat, in aliis casibus motum fluidi, quoque cum motu corporis solidi, siue rotatorio, siue vtcunque anomalo conuenire posse. Satis igitur erit ostendisse huiusmodi conuenientiam, praeter
Tab. IV. casum secundum, nunquam locum habere posse. Vt
Fig. 2. enim hoc eueniret, necesse esset, vt pyramis $\pi\phi\varrho\sigma$ non solum aequalis, sed etiam similis fieret pyramidi $\lambda\mu\nu o$; seu vt foret:

$\pi\phi =$

$$\pi\phi = \lambda\mu = dx = \sqrt{(QQ+qq+\phi\phi)}$$
$$\pi\varrho = \lambda\nu = dy = \sqrt{(RR+rr+\varrho\varrho)}$$
$$\pi\sigma = \lambda o = dz = \sqrt{(SS+ss+\sigma\sigma)}$$
$$\phi\varrho = \mu\nu = \sqrt{(dx^2+dy^2)} = \sqrt{((Q-R)^2+(q-r)^2+(\phi-\varrho)^2)}$$
$$\phi\sigma = \mu o = \sqrt{(dx^2+dz^2)} = \sqrt{((Q-S)^2+(q-s)^2+(\phi-\sigma)^2)}$$
$$\varrho\sigma = \nu o = \sqrt{(dy^2+dz^2)} = \sqrt{((R-S)^2+(r-s)^2+(\varrho-\sigma)^2)}$$

adhibitis valoribus in §. 32. vſurpatis.

76. Ternae autem poſteriores aequationes, cum prioribus coniunctae, reducentur ad has:

$$QR+qr+\phi\varrho=0;\ QS+qs+\phi\sigma=0 \text{ et } RS+rs+\varrho\sigma=0$$

ternae autem priores, ſi pro litteris Q, R, S, q, r, s, ϕ, ϱ, σ valores in §. 34. aſſignati ſubſtituantur, terminique prae reliquis euaneſcentes praetermittantur, dabunt has aequationes:

$$1 = 1+2L\,dt;\ l+M=0$$
$$1 = 1+2m\,dt;\ \lambda+N=0$$
$$1 = 1+2\nu\,dt;\ \mu+n=0$$

vnde fit $L=0$, $m=0$, et $\nu=0$, $M=-l$; $N=-\lambda$ et $n=-\mu$.

77. Celeritates ergo ternae cuiusque puncti λ eſſe deberent ita comparatae, vt foret

$$du = l\,dy+\lambda\,dz$$
$$dv = l\,dx+\mu\,dz$$
$$dw = \lambda\,dx+\mu\,dy$$

Verum ſecunda conditio motus fluidorum poſtulat, vt ſit $l=M$, $\lambda=N$ et $n=\mu$; vnde omnes coefficien-

 tes

tes l, λ et μ euanescent, celeritatesque u, v et w pro eodem tempore in omnibus fluidi punctis eaedem, seu constantes, prodibunt. Patet igitur, non nisi hoc casu fluidi motum cum motu corporis solidi conuenire posse.

78. Vt autem effectus virium, quae extrinsecus in fluidum agunt, definiri possit, primum eae vires determinari debent, quae ad motum, quem fluido inesse assumimus, efficiendum requiruntur: his enim viribus eae, quae actu fluidum sollicitant, aequiualentes statui debent; supra autem §. 56. vidimus, in puncto λ ternas vires acceleratrices requiri, quae ibi sunt relatae. Quare si fluidi elementum ibi concipiatur, cuius volumen, seu massa, sit $= dx\,dy\,dz$, vires motrices ad motum requisitae erunt:

$$\text{sec. AL} = 2\,dx\,dy\,dz(\mathrm{L}u + lv + \lambda w + \mathfrak{L}) = 2\,dx\,dy\,dz\left(u.\frac{du}{dx} + v.\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} + \frac{du}{dt}\right)$$

$$\text{sec. AB} = 2\,dx\,dy\,dz(\mathrm{M}u + mv + \mu w + \mathfrak{M}) = 2\,dx\,dy\,dz\left(u\frac{dv}{dx} + v.\frac{dv}{dy} + w.\frac{dv}{dz} + \frac{dv}{dt}\right)$$

$$\text{sec. AC} = 2\,dx\,dy\,dz(\mathrm{N}u + nv + \nu w + \mathfrak{N}) = 2\,dx\,dy\,dz\left(u.\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w.\frac{dw}{dz} + \frac{dw}{dt}\right)$$

vnde per triplicem integrationem vires totales, quae totam fluidi massam secundum easdem directiones sollicitare debent, colligentur.

79. Cum autem secunda conditio postulet, vt sit $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ differentiale completum, cuius integrale sit $= \mathrm{S}$; ponatur posito quoque tempore variabili, vt ante: $dS = u\,dx + v\,dy + w\,dz + \mathrm{U}\,dt$, vnde ob $\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}$; $\frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx}$; $\frac{du}{dt} = \frac{d\mathrm{U}}{dx}$ etc. tres illae vires motrices euadent:

$$\text{sec. AL} = 2\,dx\,dy\,dz\left(\frac{u\,du + v\,dv + w\,dw + d\mathrm{U}}{dx}\right)$$

$$\text{sec. AB} = 2\,dx\,dy\,dz\left(\frac{u\,du + v\,dv + w\,dw\,d\mathrm{U}}{dy}\right)$$

$$\text{sec. AC} = 2\,dx\,dy\,dz\left(\frac{u\,du + v\,dv + w\,dw + d\mathrm{U}}{dz}\right).$$

80. Po-

80. Ponatur nunc $uu + vv + ww + 2U = T$, eritque T functio coordinatarum x, y, z; ponatur ergo posito tempore constante,

$$dT = K dx + k dy + u dz$$

eruntque tres illae vires motrices elementi $dx\,dy\,dz$

$$\text{sec. } AL = K\,dx\,dy\,dz$$

$$\text{sec. } AB = k\,dx\,dy\,dz$$

$$\text{sec. } AC = k\,dx\,dy\,dz$$

triplici ergo integratione hae formulae per totam fluidi massam sunt extendendae, vt inde vires omnibus aequiualentes earumque mediae directiones obtineantur. Verum haec discussio est altioris indaginis, cui hic non immoror.

81. Quantitas autem haec $T = uu + vv + ww + 2U$, cuius in hoc calculo ratio est habenda, etiam simpliciorem formulam pro altitudine p pressionem exprimente suppeditat; est enim $p = C - z - T$: siquidem singulae fluidi particulae a sola grauitate vrgeantur. Sin autem quaelibet particula λ a ternis viribus acceleratricibus sollicitetur, quae sint Q, q et Φ, secundum directiones axium AF, AB et AC respectiue agentes, et calculo, vt supra, subducto reperietur pressio:

$$p = C + \int (Q dx + q dy + \Phi dz) - T$$

vnde patet differentiale $Q dx + q dy + \Phi dz$ completum esse debere, alioquin status aequilibrii, vel saltem possibilis, non daretur. Hanc autem conditionem in vires sollicitantes Q, q et Φ competere oportere, a Cel. D[no]. *Clairaut* iam praeclare est demonstratum.

82. En ergo principia vniuersae doctrinae de motu fluidorum, quae etsi primo intuitu non admodum foecunda videantur, tamen fere omnia, quae adhuc tam in hydrostatica, quam in hydraulica sunt tradita, in se complectuntur, ita vt haec principia latissime patere sint censenda. Quod quo clarius appareat, operae pretium erit ostendere, quomodo cognita hydrostaticae et hydraulicae praecepta ex hactenus traditis principiis plane ac dilucide consequantur.

83. Consideremus igitur primo fluidum in statu quietis, ita vt sit $u=0$; $v=0$ et $w=0$, eritque pressio in quouis fluido puncto λ, ob $T=2U$,

$$p=C+\int(Q\,dx+q\,dy+\Phi\,dz)-2U$$

vbi, cum U sit functio ipsius temporis t, quod constans assumimus, quia pressionem ad datum tempus inuestigamus, haec quantitas U in ipsa constante C comprehendi poterit, ita vt sit:

$$p=C+\int(Q\,dx+q\,dy+\Phi\,dz)$$

vbi Q, q et Φ sunt vires particulam aquae λ secundum axes AL, AB et AC sollicitantes.

84. Quoniam pressio p non nisi a situ puncti λ, hoc est a coordinatis x, y et z, pendere potest, necesse est, vt $\int(Q\,dx+q\,dy+\Phi\,dz)$ sit earum functio determinata, quae ergo integrationem admittat. Vnde primo patet, quod modo innui, fluidum in aequilibrio subsistere non posse, nisi vires, singula fluidi elementa sollicitantes, ita fuerint comparatae, vt formula $Q\,dx+q\,dy+\Phi\,dz$ sit differentiale completum. Cuius ergo integrale si ponatur $=P$, erit pressio in λ, $p=$

$C+P$;

$C+P$: Ita si sola adsit grauitas secundum directionem CA vrgens, erit $p=C-z$, vnde si pressio in vno puncto λ constet, vnde constans C colligi queat, pro eodem tempore inde pressio in omnibus omnino punctis definietur.

85. Interim tamen tempore fluente pressio in eodem loco variari poterit, id quod scilicet eueniet, si vires aquam extrinsecus vrgentes, quarum ratio nondum est habita in iis viribus, quae in singula elementa singulatim agere assumuntur, fuerint variabiles, ita tamen, vt se mutuo in aequilibrio seruent, nullumque motum producant. Quod si autem hae vires nulli mutationi sint obnoxiae, littera C denotabit quantitatem reuera constantem, neque a tempore t pendentem; eodemque in loco λ perpetuo eadem pressio $p=C+P$ reperietur.

86. In huiusmodi ergo fluidi statu permanente eius extrema figura, quae nullis viribus est exposita, determinari poterit. In hac enim extremitate, qua fluidum sibi est relictum, neque a parietibus vasis, cui forte est inclusum, continetur, necesse est, vt pressio sit nulla. Habebitur ergo haec aequatio: $P=$ const. qua figura extremae superficiei fluidi per relationem inter ternas coordinatas x, y et z, exprimetur. Atque si pro extremitate fuerit $P=E$, ob $C=-E$, in quouis alio loco λ interno erit pressio $p=P-E$. Ita si particulae fluidi a sola grauitate vrgeantur, ob $p=C-z$, pro extremitate superficiei habebitur $z=C$, qua intelligitur, extremam superficiem liberam esse horizontalem.

87. De-

87. Deinde etiam omnia, quae adhuc de motu fluidi per tubos sunt eruta, ex his principiis facile deducuntur. Tubi autem vel angustissimi considerari solent, vel tales assumuntur, vt per quamlibet sectionem ad tubum normalem fluidum aequali motu transfluat: vnde haec regula nascitur, vt celeritas fluidi in quouis tubi loco sit eius amplitudini reciproce proportionalis.
Tab. IV. Fig. 2. Sit igitur λ punctum quodcunque huiusmodi tubi, cuius figura per geminam aequationem inter ternas coordinatas x, y et z exprimetur, ita vt inde pro quauis abscissa x, ambae reliquae y et z definiri queant.

88. Sit praeterea huius tubi amplitudo in $\lambda = rr$, in alio autem tubi loco fixo, vbi amplitudo sit $= ff$, sit tempore praesente fluidi celeritas $= \mathfrak{v}$, de hinc autem elapso tempusculo dt euadat ea $= \mathfrak{v} + d\mathfrak{v}$ eritque ergo $\mathfrak{v}$ functio tempus t tantum, pariter ac $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$. Hinc ergo vera fluidi celeritas in λ erit tempore praesenti $V = \frac{ff\mathfrak{v}}{rr}$. Cum nunc ex figura tubi dentur y et z per x, sit $dy = \eta dx$ et $dz = \theta dx$; vnde ternae puncti fluidi in λ celeritates erunt secundum directiones AL, AB et AC sequentes:

$$u = \frac{ff\mathfrak{v}}{rr} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+\eta\eta+\theta\theta)}};\ v = \frac{ff\mathfrak{v}}{rr} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{(1+\eta\eta+\theta\theta)}};\ w = \frac{ff\mathfrak{v}}{rr} \cdot \frac{\theta}{\sqrt{(1+\eta\eta+\theta\theta)}}$$

hincque fit $uu + vv + ww = VV = \frac{f^4 \mathfrak{v}\mathfrak{v}}{r^4}$: estque rr functio ipsius x, indeque pendentium y et z.

89. Cum nunc $u dx + v dy + w dz$ debeat esse differentiale completum, cuius integrale posuimus $= S$, erit:

$$dS = \frac{ff\mathfrak{v}}{rr} \cdot \frac{dx (1+\eta\eta+\theta\theta)}{\sqrt{(1+\eta\eta+\theta\theta)}} = \frac{ff\mathfrak{v}}{rr} \cdot dx \sqrt{(1+\eta\eta+\theta\theta)}.$$

At $dx \sqrt{(1+\eta\eta+\theta\theta)}$ exprimit elementum ipsius tubi, bii, quod si ponamus $= ds$, erit $dS = \frac{ffv\,ds}{rr}$: vnde cum hic tempus t constans sit assumtum, cuius functio est v; quantitates autem s et rr non a tempore t, sed tantum a figura tubi, pendeant, erit $S = v\int\frac{ff\,ds}{rr}$.

90. Ad pressionem iam p, quae nunc in tubi puncto λ locum habet, inueniendam, considerari debet quantitas U, quae ex differentiatione quantitatis S oritur, si solum tempus t, vt variabile, tractetur, ita vt sit $U = \frac{dS}{dt}$. Cum igitur formula integralis $\int\frac{ff\,ds}{rr}$ tempus t non inuoluat, erit vtique $\frac{dS}{dt} = U = \frac{dv}{dt}\int\frac{ff\,ds}{rr}$; sicque erit ex §. 80:

$$T = \frac{f^4 vv}{r^4} + \frac{2\,dv}{dt}\int\frac{ff\,ds}{rr}$$

Quare positis quibuscunque viribus sollicitantibus Q, q et Φ, erit pressio in λ:

$$p = C + \int(Q\,dx + q\,dy + \Phi\,dz) - \frac{f^4 vv}{r^4} - \frac{2\,dv}{dt}\int\frac{ff\,ds}{rr}.$$

quae est ea ipsa formula, quae vulgo pro motu fluidi per tubos erui solet; atque adeo multo latius patens, quia vires quaecunque fluidum sollicitantes hic sunt assumtae, dum vulgo haec formula ad solam grauitatem adstringitur. Interim hic probe est recordandum, ternas vires Q, q, et Φ necessario ita comparatas esse oportere, vt formula: $Q\,dx + q\,dy + \Phi\,dz$ sit differentiale completum, seu integrationem admittat.

DE

Fig: 1.

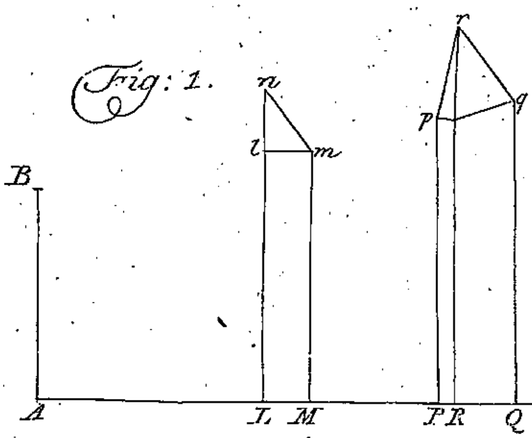

Fig: 3.

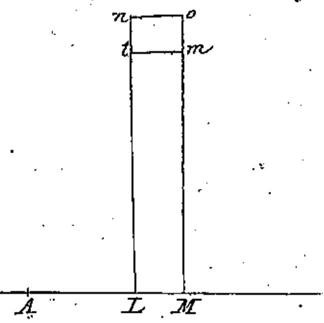

Fig: 2.