OBSERVATIO
DE SVMMIS DIVISORVM.

Auctore L. EVLERO.

§. 1.

Proposito quocunque numero n denotet haec formula $\int n$ summam omnium diuisorum numeri n. Ita cum vnitas praeter se ipsam alium non habeat diuisorem, erit $\int 1 = 1$; atque cum numerus primus duos tantum habeat diuisores, vnitatem et se ipsum, si n fuerit numerus primus, erit $\int n = 1 + n$. Deinde cum numerus perfectus aequalis sit summae suarum partium aliquotarum, partes aliquotae autem sint diuisores eius praeter ipsum numerum, manifestum est numeri perfecti summam diuisorum se ipso esse duplo maiorem, hinc si n sit numerus perfectus, erit $\int n = 2n$. Porro quoniam numerus redundans appellari solet is, cuius summa partium aliquotarum ipso est maior, si n sit numerus redundans, erit $\int n > 2n$; ac si n sit numerus deficiens, seu talis, cuius summa partium aliquotarum ipso est minor, erit $\int n < 2n$.

§. 2. Hoc igitur modo indoles numerorum, quatenus summa partium aliquotarum, vel diuisorum, continetur, facile signis exprimitur. Si enim fuerit $\int n = 1 + n$, erit n numerus primus, si sit $\int n = 2n$ erit n numerus perfectus, ac si sit vel $\int n > 2n$, vel $\int n < 2n$, numerus n erit vel redundans, vel deficiens. Huc etiam referri potest quaestio de numeris, qui amicabiles

vocari solent, quorum alter summae partium aliquotarum alterius aequatur. Si enim sint m et n numeri amicabiles, cum numeri m sit summa partium aliquotarum $= \int m - m$, et numeri $n = \int n - n$, erit ex natura horum numerorum $n = \int m - m$ et $m = \int n - n$: sicque habebitur $\int m = \int n = m + n$. Duo ergo numeri amicabiles eandem diuisorum summam habent, quae simul summae amborum numerorum est aequalis.

§. 3. Quo summa diuisorum cuiusque numeri propositi facilius inueniri possit, id commodissime fiet hunc numerum in duos factores, qui inter se sint primi, resoluendo. Si enim sint p et q numeri inter se primi, seu qui praeter vnitatem nullum habeant diuisorem communem, tum summa diuisorum producti pq, aequale erit producto ex summis diuisorum vtriusque seu erit $\int pq = \int p . \int q$. Hinc inuentis summis diuisorum numerorum minorum, inuentio summae diuisorum non difficulter ad numeros maiores extenditur.

§. 4. Si sint a, b, c, d, etc. numeri primi, omnis numerus, quantuscunque fuerit, semper ad huiusmodi formam $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ etc. reducitur: qua forma inventa erit huius numeri summa diuisorum seu

$\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ etc. $= \int a^\alpha . \int b^\beta . \int c^\gamma . \int d^\delta$. etc.

At ob a, b, c, d, etc. numeros primos erit

$$\int a^\alpha = 1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}, \text{ ideoque}$$

$$\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \text{etc.} = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} . \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} . \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} . \frac{d^{\delta+1} - 1}{d - 1} . \text{etc.}$$

Sufficiet ergo singularum potestatum numerorum primorum tantum summas diuisorum inuenisse. §. 5.

§. 5. Hanc autem indagationem vlterius non persequor; sed, vt ad id, quod hic tractare institui, propius accedam, numerorum secundum ordinem naturalem progredientium summas diuisorum hic conspectui exponam.

$\int 1 = 1$	$\int 26 = 42$	$\int 51 = 72$	$\int 76 = 140$
$\int 2 = 3$	$\int 27 = 40$	$\int 52 = 98$	$\int 77 = 96$
$\int 3 = 4$	$\int 28 = 56$	$\int 53 = 54$	$\int 78 = 168$
$\int 4 = 7$	$\int 29 = 30$	$\int 54 = 120$	$\int 79 = 80$
$\int 5 = 6$	$\int 30 = 72$	$\int 55 = 72$	$\int 80 = 186$
$\int 6 = 12$	$\int 31 = 32$	$\int 56 = 120$	$\int 81 = 121$
$\int 7 = 8$	$\int 32 = 63$	$\int 57 = 80$	$\int 82 = 126$
$\int 8 = 15$	$\int 33 = 48$	$\int 58 = 90$	$\int 83 = 84$
$\int 9 = 13$	$\int 34 = 54$	$\int 59 = 60$	$\int 84 = 224$
$\int 10 = 18$	$\int 35 = 48$	$\int 60 = 168$	$\int 85 = 108$
$\int 11 = 12$	$\int 36 = 91$	$\int 61 = 62$	$\int 86 = 132$
$\int 12 = 28$	$\int 37 = 38$	$\int 62 = 96$	$\int 87 = 120$
$\int 13 = 14$	$\int 38 = 60$	$\int 63 = 104$	$\int 88 = 180$
$\int 14 = 24$	$\int 39 = 56$	$\int 64 = 127$	$\int 89 = 90$
$\int 15 = 24$	$\int 40 = 90$	$\int 65 = 84$	$\int 90 = 234$
$\int 16 = 31$	$\int 41 = 42$	$\int 66 = 144$	$\int 91 = 112$
$\int 17 = 18$	$\int 42 = 96$	$\int 67 = 68$	$\int 92 = 168$
$\int 18 = 39$	$\int 43 = 44$	$\int 68 = 126$	$\int 93 = 128$
$\int 19 = 20$	$\int 44 = 84$	$\int 69 = 96$	$\int 94 = 144$
$\int 20 = 42$	$\int 45 = 78$	$\int 70 = 144$	$\int 95 = 120$
$\int 21 = 32$	$\int 46 = 72$	$\int 71 = 72$	$\int 96 = 252$
$\int 22 = 36$	$\int 47 = 48$	$\int 72 = 195$	$\int 97 = 98$
$\int 23 = 24$	$\int 48 = 124$	$\int 73 = 74$	$\int 98 = 171$
$\int 24 = 60$	$\int 49 = 57$	$\int 74 = 114$	$\int 99 = 156$
$\int 25 = 31$	$\int 50 = 93$	$\int 75 = 124$	$\int 100 = 217$

§. 6. Si iam contemplemur feriem horum numerorum 1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, 15, 13, 18, 12, 28 etc. quam fummae diuiforum numeris naturali ordine procedentibus refpondentes conftituunt, non folum nulla lex progreffionis patet, fed ordo horum numerorum tantopere eft perturbatus, vt nulli prorfus legi adftrictus videatur. Quin etiam haec feries ordinem numerorum primorum manifefto implicat, cum terminus indicis n feu $\int n$ toties fit $= n + 1$, quoties n eft numerus primus; conftat autem, numeros primos nullo adhuc modo ad certam quandam progreffionis legem reuocari potuiffe. Cum autem noftra feries non folum numerorum primorum, fed etiam omnium reliquorum numerorum, quatenus ex primis funt compofiti, rationem complectatur, eius lex multo etiam difficilior inuentu videtur, quam ipfius feriei numerorum primorum.

§. 7. Quae cum ita fint, non parum equidem mihi fcientiam numerorum promouiffe videor, dum certam atque conftantem legem detexi, fecundum quam termini feriei propofitae 1, 3, 4, 7, 6, etc. progrediantur, ita vt per hanc legem quilibet iftius feriei terminus ex praecedentibus definiri poffit, inueni enim, quod magis mirum videatur, hanc feriem ad id genus progreffionum pertinere, quae recurrentes vocari folent; et quarum natura ita eft comparata, vt quilibet terminus ex praecedentibus fecundum certam quandam relationis rationem determinetur. Quis autem vnquam crediderit hanc feriem tantopore perturbatam, et quae cum feriebus recurrentibus nihil plane commune habere videtur,

videtur, nihilominus in hoc ſerierum genere contineri eiusque ſcalam relationis aſſignari poſſe?

§. 8. Cum huius ſeriei terminus indici n reſpondens, qui indicat ſummam diuiſorum numeri n ſit $= \int n$, eius termini antecedentes ordine retrogrado erunt $\int(n-1)$, $\int(n-2)$, $\int(n-3)$, $\int(n-4)$, $\int(n-5)$ etc. Quilibet autem terminus iſtius ſeriei ſcilicet $\int n$ ita ex aliquot antecedentium conflatur, vt ſit:

$$\begin{aligned}\int n = {} & \int(n-1)+\int(n-2)-\int(n-5)-\int(n-7)+\int(n-12)+\int(n-15)\\ & -\int(n-22)-\int(n-26)+\int(n-35)+\int(n-40)-\int(n-51)-\int(n-57)\\ & +\int(n-70)+\int(n-77)-\int(n-92)-\int(n-100)+\int(n-117)+\int(n-126)-\text{etc.}\end{aligned}$$

Vel cum ſigna $+$ et $-$ alternatim binos terminos afficiant, haec ſeries commode in duas diuellitur, hoc modo:

$$\int n = \begin{aligned}&\int(n-1)-\int(n-5)+\int(n-12)-\int(n-22)+\int(n-35)-\int(n-51)+\text{etc.}\\ &\int(n-2)-\int(n-7)+\int(n-15)-\int(n-26)+\int(n-40)-\int(n-57)+\text{etc.}\end{aligned}$$

§. 9. Ex hac poſteriori forma ordo numerorum, qui in vtraque ſerie ſucceſſiue a numero n ſubtrahuntur, facile perſpicitur, vtraque enim ſeries eſt ſecundi ordinis, differentias ſecundas habens conſtantes. Namque prioris ſeriei numeri cum ſuis differentiis tam primis, quam ſecundis, ſunt:

	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92,	117, etc.
diff. 1.		4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25, etc.
diff. 2.			3,	3,	3,	3,	3,	3,	3, etc.

Vnde illius ſeriei terminus generalis eſt $= \frac{3xx-x}{2}$, continetque adeo omnes numeros pentagonales. Altera ſeries eſt

2, 7,

2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, 126, etc.
diff. 1: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 etc.
diff. 2: 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, etc.
ideoque terminum generalem habet $\frac{3xx+x}{2}$, ac feriem numerorum pentagonalium retro continuatam continet.

§. 10. Omnino hic notatu eft dignum, feriem numerorum pentagonalium tam ipfam, quam retro continuatam, ad ordinem feriei fummarum diuiforum potisfimum adhiberi, cum fane nullum nexum inter numeros pentagonales et fummas diuiforum ne fufpicari quidem liceat. Si enim feries numerorum pentagonalium tam antrorfum, quam retrorfum, continuata exponatur hoc modo:

etc. 77, 57, 40, 26, 15, 7, 2, 0, 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, etc.

formula noftra ordinem fummarum diuiforum complectens fignis alternantibus hoc modo ordinata exhibere poterit:

$$\text{etc.} - \int(n-15) + \int(n-7) - \int(n-2) + \int(n-0) - \int(n-1) + \int(n-5) - \int(n-12) + \int(n-22) - \text{etc.} = 0$$

quae feries vtrinque quidem in infinitum excurrit, fed quouis cafu, fiquidem ad vfum noftrum rite adhibeatur, determinato terminorum numero conftat.

§. 11. Si enim ope formulae noftrae primum exhibitae

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \int(n-22) - \int(n-26) + \int(n-35) + \int(n-40) - \int(n-51) - \int(n-57) + \int(n-70) + \int(n-77) - \int(n-92) - \int(n-100) + \text{etc.}$$

Summam diuiforum numeri n inuenire velimus ex cognitis diuiforum fummis numerorum minorum, plures termi-

terminos huius formulae accipere non oportet, quam quoad ad summas diuisorum numerorum negatiuorum perueniatur. Omnes scilicet termini, qui post signum $\int$ numeros negatiuos continent, sunt reiiciendi; vnde patet si n sit numerus exiguus, paucissimos terminos sufficere, quo maior autem fuerit numerus n, eo plures terminos ex formula nostra generali ad vsum adhiberi debere.

§. 12. Summa igitur diuisorum numeri propositi n ex summis diuisorum aliquot numerorum minorum, quas cognitas esse assumo, conflatur; quoniam quouis casu summae numerorum negatiuorum reiiciuntur. Quae cautio cum eo sit facilior, quod numerorum negatiuorum summa diuisorum ne concipi quidem possit, insuper moneri oportet, quomodo operatio sit dirigenda iis casibus, quibus formula nostra praebet terminum $\int(n-n)$ seu $\int 0$, qui cum cyphra per omnes numeros sit diuisibilis, vel infinitus vel indeterminatus videtur. Casus hic autem toties occurrit, quoties n est numerus ex serie numerorum pentagonalium vel ipsa, vel retro continuata; his igitur casibus tenendum est, semper pro termino $\int(n-n)$ seu $\int 0$ ipsum illum numerum n, qui proponitur, esse scribendum, et quidem cum eo signo, quo terminus $(n-n)$ in formula nostra afficitur.

§. 13. His expositis praeceptis, quae ad vsum formulae nostrae obseruari debent, exempla a numeris minimis inchoando apponam, quo facilius vis formulae nostrae perspiciatur, simulque eius veritas agnoscatur.

$\int 1$

$\int 1 = \int 0$ seu
$\int 1 = 1 = 1$

$\int 2 = \int 1 + \int 0$ seu
$\int 2 = 1 + 2 = 3$

$\int 3 = \int 2 + \int 1$ seu
$\int 3 = 3 + 1 = 4$

$\int 4 = \int 3 + \int 2$ seu
$\int 4 = 4 + 3 = 7$

$\int 5 = \int 4 + \int 3 - \int 0$ seu
$\int 5 = 7 + 4 - 5 = 6$

$\int 6 = \int 5 + \int 4 - \int 1$ seu
$\int 6 = 6 + 7 - 1 = 12$

$\int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - \int 0$ seu
$\int 7 = 12 + 6 - 3 - 7 = 8$

$\int 8 = \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1$ seu
$\int 8 = 8 + 12 - 4 - 1 = 15$

$\int 9 = \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2$ seu
$\int 9 = 15 + 8 - 7 - 3 = 13$

$\int 10 = \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3$ seu
$\int 10 = 13 + 15 - 6 - 4 = 18$

$\int 11 = \int 10 + \int 9 - \int 6 - \int 4$ seu
$\int 11 = 18 + 13 - 12 - 7 = 12$

$\int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + \int 0$ seu
$\int 12 = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28$

§. 14. Exempla haec attentius inſpicienti, atque etiam ad numeros maiores progredienti, non ſine admiratione patebit, quemadmodum ſemper quaſi praeter expecta-

expectationem ad veram diuisorum summam numeri propositi perueniatur; et quo hic consensus facilius deprehendatur, supra iam omnium numerorum centenario non maiorum summas diuisorum exhibui; vnde veritas nostrae formulae in numeris maioribus explorari poterit. Imprimis autem non sine delectatione reperiemus, quoties numerus propositus fuerit primus, ex formula nostra pro eius diuisorum summa inueniri numerum vnitate maiorem. Euoluamus in hunc finem exemplum, quo numerus propositus $n = 101$, quasi ignorantes exploraturi, vtrum hic numerus sit primus nec ne? atque operatio ita constabit:

$$\begin{aligned}\int 101 = \int 100 + \int 99 - \int 96 - \int 94 + \int 89 + \int 86 - \int 79 - \int 75 \\ 217 + 156 - 252 - 144 + 90 + 132 - 80 - 124 \\ + \int 66 + \int 61 - \int 50 - \int 44 + \int 31 + \int 24 - \int 9 - \int 1 \\ + 144 + 62 - 93 - 84 + 32 + 60 - 13 - 1\end{aligned}$$

Colligendis ergo binis terminis erit

$$\begin{aligned}\int 101 = &+ 373 - 396 \\ &+ 222 - 204 \\ &+ 206 - 177 \\ &+ 92 - 14 \\ \text{seu } \int 101 = &+ 893 - 791 = 102\end{aligned}$$

Reperitur ergo summa diuisorum numeri 101 vnitae maior scilicet 102, vnde, etiamsi id aliunde non constaret, sequitur manifesto, numerum 101 esse primum. Hoc autem merito eo mirabilius videtur, cum nulla operatio sit instituta, quae ad rationem diuisorum vllo modo referri queat; quin etiam diuisores, quorum summa

per hanc regulam reperitur, ipsi manent incogniti, etiamsi saepe ex consideratione ipsius summae concludi possint.

§. 15. Insignis haec proprietas, qua summae diuisorum sunt praeditae, non minus foret memorabilis, etiamsi eius demonstratio esset obuia et quasi in aprico posita. Sin autem demonstratio admodum esset abstrusa, atque numerorum proprietatibus maxime reconditis inniteretur, inde non mediocriter certe pretium huius legis progressionis repertae augeretur, siquidem earum veritatum inuestigatio eo magis est laudanda, quo magis eae fuerint absconditae. Verum dum fateri cogor, me non solum nullam huius veritatis demonstrationem proferre posse, sed etiam propemodum pro desperato habere, nescio an non ob hanc ipsam causam cognitio talis veritatis multo magis sit aestimanda, cuius demonstratio nobis est imperscrutabilis. Atque hanc ob rem istam veritatem pluribus exemplis confirmare visum est, quod mihi quidem eius demonstrationem exhibere non liceat.

§. 16. Eximium igitur hic eiusmodi propositionum habemus exemplum, de quarum veritate nullo modo dubitare possumus, etiamsi eas demonstrare non valeamus, quod plerisque eo magis mirum videbitur, quod in mathesi vulgo nullae aliae propositiones admitti putantur, nisi quarum veritas ex indubitatis principiis euinci queat. Interim tamen non fortuito et quasi divinando ad cognitionem huius veritatis perueni; cui enim in mentem venire potuisset, ordinem, qui forte in summis diuisorum locum habuerit, ex natura serierum

recur-

securrentium ac numerorum pentagonalium per solam coniecturam elicere velle? Hanc ob rem non abs re fore arbitror, si modum, quo ad cognitionem huius ordinis pertigerim, dilucide exposuero, praesertim cum is admodum sit reconditus ac longe multasque per ambages conquisitus.

§. 17. Deductus autem sum ad hanc obseruationem per considerationem istius formulae infinitae

$$s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)\text{etc.}$$

cuius valorem, si multiplicatione singulorum factorum actu instituta euoluatur, ac secundum potestates ipsius x disponatur, deprehendi in sequentem seriem conuerti:

$$s = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+x^{57}-\text{etc.}$$

vbi in exponentibus ipsius x iidem numeri occurrunt quos supra descripsi, numeri scilicet pentagonales cum ipsi, tum retro continuati. Vnde, quo ordo facilius perspiciatur, haec series ita exhiberi poterit, vt vtrinque in infinitum excurrat:

$$s = \text{etc.}+x^{26}-x^{15}+x^7-x^2+x^0-x^1+x^5-x^{12}+x^{22}-x^{35}+x^{51}-\text{etc.}$$

§. 18. Aequalitas harum duarum formularum pro s exhibitarum iam est id ipsum, quod solida demonstratione confirmare non possum; verum tamen, qui opus euolutionis formulae prioris $s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ etc. in se suscipere, hosque factores successiue in se multiplicare voluerit, statim ad terminos primores alterius seriei $s = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+$ etc. perueniet, neque difficulter perspiciet, bina signa $+$ et $-$ geminata se inuicem excipere, et exponentes potestatum ipsius x eam legem sequi, quam iam satis exposui.

Conceſſa autem hac aequalitate inter binas iſtas formulas infinitas proprietas ſummarum diuiſorum, quam ante indicaui, rigide inde demonſtrari poteſt; atque viciſſim ſi haec proprietas pro vera agnoſcatur, ex ea veritas conſenſus duarum harum formularum euincetur.

§. 19. Quodſi enim pro demonſtrato aſſumamus, poſito $s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ etc. fore $s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} -$ etc. erit logarithmis ſumendis

$$ls = l(1-x) + l(1-x^2) + l(1-x^3) + l(1-x^4) + l(1-x^5) + \text{etc.}$$

$$\text{et } ls = l(1 - x - xx + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.})$$

Sumantur vtriusque formae differentialia, eritque

$$\frac{ds}{s} = \frac{-dx}{1-x} - \frac{2xdx}{1-xx} - \frac{3xxdx}{1-x^3} - \frac{4x^3dx}{1-x^4} - \frac{5x^4dx}{1-x^5} \text{ etc.}$$

$$\text{et } \frac{ds}{s} = \frac{-dx - 2xdx + 5x^4dx + 7x^6dx - 12x^{11}dx - 15x^{14}dx + \text{etc.}}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}}$$

Multiplicetur vtraque per $\frac{-x}{dx}$, vt habeatur

$$\text{I. } -\frac{xds}{sdx} = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-xx} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \text{etc.}$$

$$\text{II. } -\frac{xds}{sdx} = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - 22x^{22} - 26x^{26} + \text{etc.}}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} - x^{26} + \text{etc.}}$$

§. 20. Harum expreſſionum inter ſe aequalium contemplemur primo priorem, ac ſingulos terminos more conſueto in progreſſiones geometricas conuertamus; quo facto prodibit, infinitas has progreſſiones geometricas ſecundum poteſtates ipſius x diſponendo:

$$-\frac{xds}{sdx} = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} \text{ etc.}$$

$$\begin{array}{l}
\quad +2 \;.\; +2 \;.\; +2 \;.\; +2 \;.\; +2 \;.\; +2 \\
\qquad +3 \;.\; +3 \;.\; +3 \;.\; +3 \\
\qquad\quad +4 \;.\; +4 \;.\; +4 \\
\qquad\qquad +5 \;.\; +5 \\
\qquad\qquad\quad +6 \;.\; +6 \\
\qquad\qquad\qquad +7 \\
\qquad\qquad\qquad\quad +8 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +9 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +10 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +11 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +12
\end{array}$$

§. 21. Si iam singularum potestatum ipsius x coefficientes colligantur, habebitur:

$$-\frac{xds}{sdx} = x^1 + x^2(1+2) + x^3(1+3) + x^4(1+2+4) + x^5(1+5) + x^6(1+2+3+6) \text{ etc.}$$

vbi manifestum est, cuiusque potestatis ipsius x coefficientem esse aggregatum omnium numerorum, per quos exponens illius potestatis est diuisibilis. Scilicet potestatis x^n coefficiens erit summa omnium diuisorum numeri n, erit ergo is secundum modum signandi supra receptum $= \int n$. Hinc itaque seriei ipsi $-\frac{xds}{sdx}$ aequalis inuenta ita exhibebitur, vt sit

$$-\frac{xds}{sdx} = x\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4 + x^5\int 5 + x^6\int 6 + x^7\int 7 + \text{etc.}$$

sicque posito $x = 1$ prodit progressio summarum diuisorum, qui singulis numeris ordine naturali progredientibus conueniunt.

§. 22.

§. 22. Designemus iam hanc seriem per t vt sit

$$t = x^1\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4 + x^5\int 5 + x^6\int 6 + x^7\int 7 + \text{etc.}$$

et ob $t = -\frac{xds}{sdx}$ erit quoque

$$t = \frac{x^1 + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - 22x^{22} - 26x^{26} + \text{etc.}}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}}$$

Necesse igitur est, vt ex euolutione huius fractionis pro t series obtineatur aequalis illi, quam prior forma suppeditauit: vnde manifestum est, seriem illam pro t inuentam esse recurrentem, cuius singuli termini per praecedentes determinentur, secundum scalam relationis, quam denominator $1 - x - x^2 + x^5 + x^7$ etc. indicat.

§. 23. Quo nunc facilius indoles huius seriei recurrentis cognoscatur, binos istos valores pro t inuentos inter se coaequemus, atque ad fractionem tollendam vterque per denominatorem $1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} +$ etc. multiplicetur, quo facto orietur terminis secundum potestates ipsius x disponendis:

$$\begin{array}{lllllllllllll}
x^1\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4 + x^5\int 5 + x^6\int 6 + x^7\int 7 + x^8\int 8 + x^9\int 9 + x^{10}\int 10 + x^{11}\int 11 + x^{12}\int 12 & \text{etc} \\
- \int 1 - & \int 2 - & \int 3 - & \int 4 - & \int 5 - & \int 6 - & \int 7 - & \int 8 - & \int 9 - & \int 10 - & \int 11 \\
- & \int 1 - & \int 2 - & \int 3 - & \int 4 - & \int 5 - & \int 6 - & \int 7 - & \int 8 - & \int 9 - & \int 10 \\
 & & & + \int 1 + & \int 2 + & \int 3 + & \int 4 + & \int 5 + & \int 6 + & & \int 7 \\
 & & & & + \int 1 + & \int 2 + & \int 3 + & \int 4 + & & & \int 5 \\
 & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & \vdots \\
\text{aequale} & & & & & & & & & & \vdots \\
x^1 + 2x^2 & * & * - 5x^5 & * - 7x^7 & * & * & * & * & + 12x^{12} & \text{etc.}
\end{array}$$

§. 24. Cum iam singularum potestatum ipsius x coefficientes se mutuo destruere debeant, hinc sequentes eliciemus aequalitates:

$$\int 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \int 1 &= 1 \\ \int 2 &= \int 1 + 2 \\ \int 3 &= \int 2 + \int 1 \\ \int 4 &= \int 3 + \int 2 \\ \int 5 &= \int 4 + \int 3 - 5 \\ \int 6 &= \int 5 + \int 4 - \int 1 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \int 7 &= \int 6 + \int 5 - \int 2 - 7 \\ \int 8 &= \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1 \\ \int 9 &= \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2 \\ \int 10 &= \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3 \\ \int 11 &= \int 10 + \int 9 - \int 6 - \int 4 \\ \int 12 &= \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + 12 \end{aligned} \right.$$

etc.

quae manifesto redeunt ad istas:

$$\begin{aligned} \int 1 &= 1 \\ \int 2 &= \int(2-1) + 2 \\ \int 3 &= \int(3-1) + \int(3-2) \\ \int 4 &= \int(4-1) + \int(4-2) \\ \int 5 &= \int(5-1) + \int(5-2) - 5 \\ \int 6 &= \int(6-1) + \int(6-2) - \int(6-5) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \int 7 &= \int(7-1) + \int(7-2) - \int(7-5) - 7 \\ \int 8 &= \int(8-1) + \int(8-2) - \int(8-5) - \int(8-7) \\ \int 9 &= \int(9-1) + \int(9-2) - \int(9-5) - \int(9-7) \\ \int 10 &= \int(10-1) + \int(10-2) - \int(10-5) - \int(10-7) \\ \int 11 &= \int(11-1) + \int(11-2) - \int(11-5) - \int(11-7) \\ \int 12 &= \int(12-1) + \int(12-2) - \int(12-5) - \int(12-7) + 12 \end{aligned} \right.$$

§. 25. Hic perspicuum est, numeros, qui continuo a numero proposito, cuius diuisorum summa quaeritur, subtrahi debent, esse ipsos numeros seriei 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, etc. ex quibus tot quouis casu sunt sumendi, quoad numerum propositum non excedant: atque etiam signa eam tenere rationem, quae supra est descripta. Hinc ergo proposito numero quocunque n manifestum est, fore

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \text{etc.}$$

hos terminos eousque continuando, donec numeri signum $\int$ praefixum habentes, fiant negatiui. Simul ergo ex origine seriei huius recurrentis ratio patet, cur ista progressio quouis casu vlterius continuari non debeat.

§. 26. Quod porro ad numeros absolutos attinet, qui in formularum inuentarum aliquibus sub finem annectuntur, manifestum est, eos ex numeratore fractionis, qua valor ipsius t expressus est inuentus (§. 22) oriri, atque iis tantum casibus legem continuitatis interrumpere, quibus numerus n est terminus huius seriei 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26 etc. quanquam ne hoc

quidem casu lex signorum perturbatur. His autem casibus numerus absolutus insuper cum signo suo adiiciendus ipsi numero proposito est aequalis; atque si legem ante descriptam consideremus, hunc numerum vtique deprehendemus respondere termino $\int(n-n)$: vnde ratio patet, cur quoties in applicatione formae

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \text{etc.}$$

peruenitur ad terminum $\int(n-n)$, is non omitti, sed pro eius valore ipse numerus n scribi debeat. Hinc igitur regula supra exposita in omnibus partibus confirmatur.

DEMON-