



PRINCIPES GÉNÉRAUX  
DE L'ÉTAT D'ÉQUILIBRE DES FLUIDES.  
PAR. M. EULER.



I.

Je me propose ici de développer les principes, sur lesquels toute l'Hydrostatique, ou la Science de l'équilibre des fluides, est fondée. Pour leur donner la plus grande étendue dont ils sont susceptibles, je renfermerai dans mes recherches non seulement les fluides, qui ont partout le même degré de densité, tels que sont l'eau, & les autres corps liquides, dont on dit, qu'ils ne reçoivent aucune compression; mais aussi ces fluides, qui sont composés de particules d'une densité différente, soit que cette différence leur convienne en vertu de leur propre nature, soit qu'elle résulte des forces, dont les particules se pressent mutuellement. On voit bien qu'à cette dernière espèce, il faut rapporter l'air, & les autres corps fluides, qu'on nomme élastiques. Outre cela je ne bornerai pas mes recherches à la seule force de gravité; mais je les étendrai à des forces quelconques, dont chaque particule du fluide puisse être sollicitée.

II. Voilà le plan, que je me suis proposé d'exécuter, d'où il est d'abord clair, que les principes communs de l'Hydrostatique, qu'on trouve expliqués dans les élémens, ne sont qu'un cas très particulier de ceux, que je m'en vais établir ici. Car d'un côté on ne regarde communément que la gravité, à l'action de laquelle les particules du fluide sont assujetties; & de l'autre côté on ne considère que les flui-



des de la premiere espece, où toutes les parties gardent partout le même degré de densité. Et quoiqu'on n'ait pas négligé d'approfondir l'état d'équilibre des fluides élastiques, & en particulier de l'air, les principes qu'on en a établis, semblent si différens des premiers, qu'à peine les sauroit-on ramener à une origine commune, fondée dans la nature générale des fluides.

III. Quoique j'envisage ici une si grande généralité, tant par rapport à la nature du fluide, qu'aux forces qui agissent sur chacune de ses particules, je ne crains point les reproches, qu'on a souvent faits avec raison à ceux qui ont entrepris de porter à une plus grande généralité les recherches des autres. Je conviens qu'une trop grande généralité obscurcit souvent plutôt, qu'elle n'éclaire, & qu'elle mene quelquefois à des calculs si embrouillés, qu'il est extrêmement difficile d'en déduire des conséquences pour les cas les plus simples. Quand les généralisations sont assujetties à cet inconvenient, il est bien certain qu'il vaudroit infiniment mieux s'en abstenir entièrement, & borner ses recherches à des cas particuliers.

IV. Mais, dans le sujet que je me propose d'expliquer, il arrive précisément le contraire: la généralité que j'embrasse, au lieu d'éblouir nos lumieres, nous découvrira plutôt les véritables loix de la Nature dans tout leur éclat, & on y trouvera des raisons encore plus fortes, d'en admirer la beauté & la simplicité. Ce sera une instruction importante d'apprendre que des principes, qu'on aura cru attachés à quelque cas particulier, ont une beaucoup plus grande étendue. Ensuite ces recherches ne demanderont presque point un calcul plus embarrassant; & il sera aisé d'en faire l'application à tous les cas particuliers, qu'on puisse se proposer.

V. Or tout revient à bien fixer la premiere idée, sur laquelle doivent être fondés tous les raisonnemens, que nous aurons à faire pour parvenir à notre but: c'est l'idée de la nature de la fluidité en général. Car les loix d'équilibre des fluides ne sauroient différer de celles  
les



les des corps solides, qu'entant que la nature des fluides est différente de celle des solides. Il s'agit donc de connoître la différence véritable & essentielle, qui distingue les fluides des solides; ce qui est une question bien agitée entre les Philosophes & les Physiciens: mais de tout ce qu'ils en ont dit nous ne saurions rien déduire, qui fût propre à notre dessein. Que les moindres particules d'un fluide n'aient aucune liaison entr'elles, & qu'elles se trouvent dans un mouvement continu, est peut-être vrai; mais cette vérité seroit absolument stérile par rapport aux recherches dont il est question; il faut pour cet effet approfondir bien davantage la nature des corps fluides.

VI. Entant que cette propriété essentielle des fluides doit fournir les principes de l'Hydrostatique, je ne la trouve que dans cette qualité, par laquelle nous savons, qu'une masse fluide ne sauroit être en équilibre, à moins qu'elle ne soit sollicitée en tous les points de sa surface par des forces égales & perpendiculaires à la surface. Je suppose ici que les particules intérieures de la masse fluide ne soient sollicitées par aucunes forces; car, s'il y en avoit, les forces externes les devroient contrebalancer, outre qu'elles seroient égales entr'elles. Je considère donc une masse fluide, qui n'est assujettie à aucune force; & il n'y a nul doute, qu'elle ne soit en équilibre. Qu'on conçoive maintenant des forces, qui agissent extérieurement sur la surface; & pour maintenir la masse en équilibre, il faut que ces forces y soient perpendiculaires, égales entr'elles, & qu'elles agissent sur tous les élémens de la surface. Si le fluide est élastique, il faut outre cela que l'élasticité soit égale à ces forces sollicitantes, pour empêcher que la masse ne s'étende dans un plus grand volume, ou qu'elle ne soit réduite dans un plus petit.

VII. Cette propriété distingue le plus essentiellement les corps fluides des solides. Un corps solide peut être tenu en équilibre étant sollicité par deux forces égales & contraires; & les parties qui sont à côté, n'en reçoivent aucun effort pour échaper. Or un amas de plusieurs corps solides déliés entr'eux approche déjà davantage de la

Fig. 4



nature du fluide, comme on peut voir par le cas de 4 sphères  $a, b, c, d$ , qui se touchent mutuellement; car, quoique les deux opposées  $a$  &  $b$  soient pressées par des forces égales & contraires  $\alpha A$  &  $\epsilon B$ , il n'y aura point d'équilibre: mais les deux autres en seront poussées selon les directions  $C \gamma$  &  $D \delta$  par des forces, qui sont à celles-là, comme la distance  $c d$  à la distance  $a b$ . Donc, pour conserver ces quatre sphères en équilibre, il faut ajouter aux forces  $\alpha A$  &  $\epsilon B$  encore les forces  $\gamma C$  &  $\delta D$ . S'il y avoit plusieurs sphères, ou autres corps solides, le maintien de l'équilibre demanderoit encore plusieurs forces, selon leur nombre & situation mutuelle.

VIII. Qu'on conçoive ces sphères infiniment petites, & leur nombre infiniment grand, & il pourra arriver, que l'état d'équilibre demandera une infinité de forces, qui agissent de tous côtés sur cet amas, de sorte que si une en manquoit, l'équilibre seroit détruit. On pourroit aussi concevoir un tel arrangement parmi ces corpuscules, que toutes les forces requises pour l'équilibre devinssent égales entr'elles; ce qui représenteroit exactement le cas d'un fluide. Mais, outre que ce cas seroit, pour ainsi dire, moralement impossible, aussi-tôt qu'il y arriveroit le moindre changement, les forces requises pour l'équilibre ne manqueroient pas de devenir extrêmement inégales entr'elles; au lieu que dans un fluide l'égalité de ces forces subsiste toujours & nécessairement, quelque changement que subisse le fluide. D'où il est clair que la fluidité ne sauroit être expliquée par un amas de corpuscules solides, quand même on les supposeroit infiniment petits, entièrement déliés entr'eux, & leur nombre infiniment grand: & il paroît encore fort douteux, si un mouvement intestin seroit capable de suppléer à ce défaut.

IX. Voilà donc en quoi consiste la nature de la fluidité, c'est qu'une masse fluide ne sauroit être en équilibre, à moins qu'elle ne fût pressée de toutes parts par des forces égales & perpendiculaires à sa surface. Ainsi, lorsqu'une masse fluide,  $ABCDEF$ , est pressée dans un endroit  $AB$ , par une force quelconque  $PM$ , dont la direction est per-



perpendiculaire à la portion de la surface  $AB$  sur laquelle elle agit, & que nous concevions une autre portion quelconque  $CD$ , pour que le fluide soit maintenu en équilibre, il faut que cette portion  $CD$  soit aussi pressée perpendiculairement par une force  $QN$ , qui tienne à celle-là  $PM$  la même raison, que celle qui subsiste entre les surfaces  $CD$  &  $AB$ . Si une de ces forces étoit moindre que selon cette raison, elle ne seroit pas suffisante à résister à l'action de l'autre, & partant l'équilibre seroit troublé. Il en est de même de toute autre portion de la surface du fluide, faisant abstraction de la gravité, & de toute autre force, qui pourroit agir immédiatement sur les particules du fluide.

X. De là il s'ensuit, que si l'on connoit la pression par un endroit de la surface du fluide, on aura en même tems les pressions sur toutes les parties de la surface, qui sont requises pour l'équilibre. Ainsi, posant la base  $AB = aa$ , & la force dont elle est pressée  $= P$ , une autre base quelconque  $CD = cc$  sera pressée par la force  $= \frac{cc}{aa} P$ .

Cette règle devient plus simple, si nous exprimons la force  $P$  par le poids d'un cylindre d'une matière homogène grave, dont la base est  $= aa$ , c'est à dire à celle sur laquelle cette force agit; ce cylindre aura donc une certaine hauteur, qui soit  $= p$ : & partant la force  $P$  sera égale au poids d'une masse de ladite matière homogène, dont le volume est  $= aap$ , ou bien on pourra mettre  $P = aap$ : de là la force qui doit agir sur la base  $CD = cc$ , étant  $= \frac{cc}{aa} P$  deviendra  $= ccp$ , ou sera égale au poids d'un cylindre de la même matière homogène, dont la base est  $= cc$ , & la hauteur la même qu'auparavant  $= p$ . Par la même raison toute autre portion de la surface  $= ff$  de cette masse fluide, soutiendra une force  $= ffp$ .

XI. Donc, pour connoître l'état des pressions, par lesquelles une masse fluide est maintenue en équilibre, il suffit de connoître cette hau-



teur  $p$ , qui est commune à tous les cylindres formés de cette manière grave homogène, par les poids desquels nous exprimons ici les forces sollicitantes. Car cette hauteur  $p$  étant connue, on assignera aisément la force, par laquelle chaque portion de la surface du fluide est pressée: ainsi prenant une portion  $= aa$ , cette force sera exprimée par le poids  $= aap$ . Comme cette force agit partout perpendiculairement sur la surface, il est évident qu'on n'en sauroit conclure immédiatement la force, que soutient une portion convexe ou concave de la surface; il faudra donc recourir à des élémens de la surface infiniment petits, & posant un tel élément  $= ds^2$ , la force dont il est pressé sera  $= pds^2$ , & sa direction perpendiculaire à l'élément, qu'on peut toujours regarder comme plan.

XII. Pour mieux comprendre la force de cette pression, qu'on conçoive le fluide renfermé dans un vaisseau, qui ait en  $AB$  une ouverture  $= aa$ , remplie par un piston, sur lequel agit perpendiculairement une force  $PM = aap$ ; cela posé, le fluide pressera partout également sur les parois du vaisseau, de sorte que s'il y avoit quelque part une ouverture  $Ee$ , le fluide y échapperoit actuellement. Or, pour empêcher la sortie du fluide, si l'on bouche ce trou  $Ee$ , dont l'amplitude soit  $= ee$ , il y faut appliquer perpendiculairement une force  $= eep$ , d'où l'on connoit les forces, que chaque élément de la surface intérieure du vaisseau soutient de la part de la pression  $PM = aap$ , qui agit sur la base  $AB = aa$ . Si cette base étoit moindre, & que la force pressante le fût aussi dans la même raison, la pression demeureroit néanmoins la même sur le vaisseau; d'où l'on voit que la plus petite force  $PM$  est capable de produire une aussi grande pression dans le vaisseau, qu'on voudra; pourvu qu'on rende la base  $AB = aa$  assez petite, afin que dans l'expression de la force  $aap$  la hauteur  $p$  devienne aussi grande qu'on le souhaite.

XIII. Mais le fluide se trouvant dans un tel état de pression par l'action de quelque force  $PM = aap$ , non seulement tous les élémens



mens des vaisseaux soutiennent des pressions, qui répondent à la même hauteur  $p$ , mais aussi tous les élémens du fluide même se trouveront dans le même état de pression. Qu'on conçoive dans l'intérieur du fluide un diaphragme immatériel  $E J i F$ , qui retranche de la masse du fluide une portion quelconque  $A E F B$ ; & , puisque cette portion est en équilibre, toutes les particules du diaphragme soutiendront aussi des forces, qui répondent à la même hauteur  $p$ . D'où il s'ensuit, que chaque élément de la masse fluide  $I K k i$  fera de toutes parts pressé par de pareilles forces; ou bien toutes les particules du fluide seront pressées les unes contre les autres par des forces qui répondent toutes à la même hauteur  $p$ ; c'est donc l'égalité de toutes ces forces, qui constitue l'état d'équilibre, supposant toujours, qu'il n'y ait point de forces particulieres, comme la gravité, qui agissent sur les particules du fluide.

XIV. Par là on est en état de se former une juste idée de ce que je nomme l'état de pression d'un fluide; & cette pression ne sauroit être mieux représentée que par une certaine hauteur, qui se rapporte à la gravité d'une matiere homogene, qu'on jugera la plus convenable pour employer à cette mesure. Ainsi, quand je dis que l'état de pression de l'élément du fluide  $J K k i$  est exprimé par la hauteur  $p$ , il faut entendre que chaque face de cet élément, qui soit  $= ds^2$ , est pressée par une force, qui est égale au poids d'un cylindre de ladite matiere homogene, dont la base est  $= ds^2$ , & la hauteur  $= p$ . Cette hauteur  $p$  exprime donc la force, dont les élémens voisins du fluide agissent de toutes parts sur l'élément  $J K k i$ , & dont par conséquent cet élément réagit sur ceux-là. C'est donc aussi par cette même force, que l'élément  $J K k i$  résiste à la compression, par laquelle il seroit réduit à un moindre volume, de sorte que si la résistance étoit plus petite, il y seroit réduit actuellement.

XV. Cette considération nous mene à la distinction des fluides en élastiques & non-élastiques, ou compressibles & non-compressibles, quoique l'état d'équilibre, que nous venons d'expliquer, s'étende également



ment aux uns & aux autres. Car, si le fluide renfermé dans le vaisseau A B C D E F est élastique ou compressible, la force  $P = aap$ , qui agit sur le piston AB réduira le fluide à un tel degré de compression, où elle se trouvera en équilibre ; & alors on comprend que l'élasticité du fluide est précisément égale à la force comprimante, ou bien la hauteur  $p$  servira aussi de mesure à l'élasticité du fluide. Si l'élasticité étoit plus grande que la hauteur  $p$ , le piston seroit repoussé, jusqu'à l'état d'équilibre ; & si elle étoit plus petite, le piston entreroit plus profondément : comme le fluide ne sauroit, ni s'étendre à l'infini, ni se réduire dans un espace évanouissant, il y aura toujours un cas, où l'équilibre doit avoir lieu.

XVI. De là on entend, que lorsque un fluide compressible est réduit dans un moindre volume, son élasticité doit devenir plus grande, puisqu'il faut employer une d'autant plus grande force, plus qu'on veut comprimer le fluide. L'élasticité dépend donc nécessairement en sorte de la densité du fluide, que plus la densité est augmentée, plus aussi l'élasticité devienne plus grande : quoiqu'il ne soit pas nécessaire, que l'élasticité suive précisément la raison de la densité ; comme on remarque aussi dans l'air, que l'élasticité n'est pas exactement proportionnelle à la densité. Cependant, lorsque les changemens ne sont pas considérables, & fort éloignés tant du plus grand volume que du plus petit, auquel le fluide peut être réduit, on peut supposer, que l'élasticité soit parfaitement en raison de la densité. Or il peut arriver qu'outre la densité concoure encore une autre qualité à déterminer l'élasticité, comme par exemple la chaleur, qui sous le même degré de densité augmente le ressort de l'air. Mais, s'il y a de la différence entre la chaleur, on en peut comprendre l'effet dans la proportion qui subsiste entre l'élasticité & la densité, & laquelle deviendra par là variable.

XVII. Donc, si une masse fluide se trouve en équilibre, & que la pression y soit exprimée par la hauteur  $p$ , cette même hauteur mesurera  
aussi



l'élasticité : & par le rapport qui subsiste entre la densité & l'élasticité, on connoitra aussi la densité, & réciproquement. Ainsi si la densité du fluide est  $= q$ , & que  $Q$  en marque la fonction à laquelle l'élasticité seroit proportionnelle, & la chaleur, ou toute autre qualité qui influë sur le ressort, étoit invariable; ce fluide ne sauroit être en équilibre, à moins que la pression  $p$  ne fut comme  $Q$ . Supposant maintenant la chaleur, ou autre quantité variable  $= r$ , où  $r$  marqueroit le ressort sous une densité donnée, la pression requise pour l'équilibre seroit comme  $Qr$ , ou plus généralement comme une certaine fonction de  $q$  &  $r$ . Soit  $\Pi$  cette fonction, dont la valeur devienne  $= \Gamma$  dans un cas déterminé, où  $q = g$ , &  $r = h$ : donc, si dans ce cas l'élasticité est exprimée par la hauteur  $f$ , la proportion  $f:p = \Gamma:\Pi$ , donnera pour tout autre cas la pression ou l'élasticité  $p = \frac{f\Pi}{\Gamma}$ : expression qui par la généralité s'étend à tous les cas imaginables.

XVIII. Il peut arriver qu'un très petit changement dans la densité en produise un très grand dans l'élasticité; de sorte que, soit qu'on augmente ou diminue la pression  $p$  très considérablement, le fluide ne change pas sensiblement de volume, & qu'il conserve presque la même densité : & lorsque ce petit changement évanouit entièrement, nous aurons précisément le cas d'un fluide non-compressible, qui, sans changer de volume ou de densité, peut soutenir toute pression, quelque grande qu'elle soit. Dans ce cas il faut donc, que la fonction  $\Pi$  évanouisse, de même que la valeur déterminée  $\Gamma$ , afin que la fraction  $\frac{f\Pi}{\Gamma}$  devienne indéterminée. Ou bien, la densité  $q$  pouvant en général être considérée comme une fonction de l'élasticité  $p$ , deviendra dans ce cas une quantité constante. On comprend de là, que c'est fort mal à propos, qu'on nomme ces fluides non-élastiques, puisqu'ils renferment plutôt tous les degrés possibles de l'élasticité sous la même densité: pendant que les fluides nommés élastiques renferment aussi tous les degrés possibles, mais chacun sous une densité différente.



XIX. La seule idée de la pression, que je viens d'établir & de représenter par une hauteur, renferme tout ce qui appartient à la connoissance de l'équilibre des fluides. Car on en connoit premièrement les forces, dont le fluide agit sur le vaisseau qui le contient ; & s'il arrive que quelque part ces forces évanouissent, l'équilibre subsistera sans que le fluide soit renfermé dans cet espace. En second lieu, un corps solide étant plongé dans le fluide, on pourra déterminer les forces, dont ce corps est pressé de tous côtés, & partant aussi les efforts, que le corps soutient de la part du fluide. En troisième lieu, si les parties du fluide sont susceptibles de compression, & qu'on connoisse le rapport entre la densité & l'élasticité, puisque celle-cy est partout égale à la pression, on sera en état d'assigner en chaque endroit la densité du fluide. Or toutes les questions, qu'on peut former sur l'équilibre des fluides, se réduisent aisément à ces trois articles, qui en fourniront les solutions.

XX. Nous venons de voir, que si les particules du fluide ne sont, ni pesantes, ni sollicitées par aucune force étrangère, l'équilibre ne sauroit subsister, à moins que la pression ne fut la même dans tous les points du fluide. Donc un tel fluide étant renfermé dans le vaisseau A B C D E F, si dans un endroit la pression est représentée par la hauteur  $p$ , cette même hauteur exprimera aussi la pression dans tous les points, tant au dedans de la masse fluide, que là où il touche les parois du vaisseau. L'élasticité sera donc aussi par tout la même ; d'où l'on connoitra par conséquent la densité à chaque endroit, pourvu qu'on sache partout le rapport, qui régne entre l'élasticité & la densité. Un corps solide, comme J K  $k i$ , étant plongé dans ce fluide, soutiendra de tous côtés des pressions égales, lesquelles se détruisant mutuellement, le corps n'en souffrira aucun effort. Enfin à moins que la pression  $p$  n'évanouisse, il faut absolument que le fluide soit renfermé dans un vaisseau, dont les parois soient assez fortes pour soutenir les pressions.



XXI. Or si les particules du fluide sont sollicitées par la gravité, ou d'autres forces quelconques, le maintien de l'équilibre exige que l'action de ces forces soit détruite par les pressions du fluide, d'où la hauteur  $p$ , qui exprime la pression à chaque endroit, deviendra une quantité variable. Donc toute la Théorie de l'équilibre des fluides sera contenue dans ce seul problème :

*Les forces, dont tous les élémens du fluide sont sollicitées, étant données avec le rapport qui subsiste à chaque endroit entre la densité & l'élasticité du fluide ; trouver les pressions qui auront lieu dans tous les points de la masse fluide, pour qu'elle se trouve en équilibre.*

La solution de ce problème fournira tout ce qu'on peut desirer sur l'état de l'équilibre de tous les fluides tant compressibles que non-compressibles. Voilà donc en peu de mots le sujet, sur lequel rouleront les recherches de ce Mémoire.

XXII. Je commence donc par considérer un point quelconque  $Z$  dans la masse fluide, dont je rapporterai la position à trois axes fixes  $OA$ ,  $OB$ , &  $OC$ , perpendiculaires entr'eux au point  $O$ , & pris à volonté : ce qui se fera par les trois coordonnées  $OX$ ,  $OY$ , &  $OZ$ , parallèles à ces axes, & partant perpendiculaires entr'elles. Je nomme ces coordonnées :  $OX = x$ ,  $OY = y$ , &  $OZ = z$ ,

Fig. 1.

dont la première  $OX$  est prise sur l'axe même  $OA$ , la seconde  $OY$  est parallèle à l'axe  $OB$ ; & la troisième  $OZ$  à l'axe  $OC$ . Les valeurs de ces trois coordonnées détermineront donc la situation du point  $Z$ , & par leur variabilité elles comprendront tous les points possibles, qu'on sauroit imaginer dans la masse fluide.

XXIII. Pour les forces, qui agissent sur les particules du fluide, je les regarde semblables à la gravité, entant qu'elles agissent proportionnellement aux masses, de sorte que s'il y avoit en  $Z$  une masse dou-



ble, la force sollicitante feroit aussi double. Il y aura donc en Z une certaine force accélératrice, qui ne dépend pas de la masse qui s'y trouve. Si le fluide étoit assujetti à la seule quantité, cette force accélératrice feroit partout la même, & la direction tendroit verticalement en bas. Or, quelle que soit la force accélératrice qui agit au point Z, on la peut toujours décomposer suivant les directions des trois axes : soient ces forces accélératrices en Z :

celle qui agit selon ZL, parallèle à OA = P

celle qui agit selon ZM, parallèle à OB = Q

celle qui agit selon Zz, parallèle à OC = R

où je considère ces quantités P, Q, R, comme des fonctions quelconques des trois variables  $x$ ,  $y$ , &  $z$ , & pour leur donner des valeurs déterminées, j'exprime par l'unité la force accélératrice de la gravité, de sorte que les lettres P, Q, R, me marquent toujours des nombres absolus, & variables selon une loi quelconque.

XXIV. Pour tenir compte des masses, qui dépendent du volume & de la densité conjointement, l'unité m'exprimera aussi la densité de la matière homogène, par le poids de laquelle je me propose de représenter les forces. Soit donc par rapport à cette unité la densité du fluide en Z =  $q$ , qui sera aussi un nombre absolu exprimé par une fonction quelconque des trois variables  $x$ ,  $y$ , &  $z$ ; cette quantité appartient donc aux inconnues, que notre recherche renferme, à moins que le fluide ne soit pas incompressible, auquel cas la quantité  $q$  feroit constante, comme cela arrive dans l'eau. Or, si nous appliquons nos recherches à l'air, ou à quelqu'autre fluide susceptible de compression, nous devons regarder cette quantité  $q$  comme variable selon une loi quelconque, qui nous est encore inconnue, & dont il faut chercher la détermination par le principe établi de l'équilibre des fluides. Or ce principe porte, que le fluide ne sauroit être en équilibre, à moins que les forces, qui agissent sur chacun de ses élémens, ne se détruisent mutuellement; ce qui est le principe général de tout équilibre, tant des corps solides que fluides.



XXV. Connoissant la densité au point Z, il sera aisé de déterminer la masse d'un élément quelconque du fluide, qui est placé en Z. Donnons à cet élément la figure d'un parallépipede rectangle ZLMN  $\approx lmn$ , formé par les différentiels

$ZL = YK = Xx = dx$ ;  $ZM = Yy = dy$ , &  $Zz = dz$ , de nos trois variables  $x, y$ , &  $z$ , de sorte que le volume de cet élément soit  $= dx dy dz$ . La densité de cet élément étant  $= q$ , sa masse fera à la masse d'un égal volume de notre matiere homogene comme  $q$  à 1; elle fera donc  $= q dx dy dz$ : & si la seule force de gravité agissoit sur cet élément, son poids seroit  $= q dx dy dz$ . Mais étant sollicité par les trois forces accélératrices P, Q, & R, il en sera poussé par les forces motrices suivantes :

- I. Suivant la direction  $ZL = P q dx dy dz$
- II. Suivant la direction  $ZM = Q q dx dy dz$
- III. Suivant la direction  $Zz = R q dx dy dz$ .

XXVI. Outre ces forces qui agissent immédiatement sur cet élément, il est aussi sollicité par la pression du fluide dont il est environné; ce qui est l'article principal auquel nous nous devons attacher. Soit donc la pression du fluide en Z exprimée par la hauteur  $p$ , qui se rapporte, comme j'ai déjà remarqué à une matiere homogene grave, dont la densité est supposée  $= 1$ . Cette hauteur  $p$  doit donc être considérée comme une fonction inconnue des trois variables  $x, y$ , &  $z$ , & partant son différentiel aura une telle forme :

$$dp = L dx + M dy + N dz,$$

où par la nature des différentiels réels de plusieurs variables, les quantités L, M, & N auront un tel rapport entr'elles qu'il soit :

$$\left(\frac{dL}{dy}\right) = \left(\frac{dM}{dx}\right); \left(\frac{dL}{dz}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right), \text{ \& } \left(\frac{dM}{dz}\right) = \left(\frac{dN}{dy}\right),$$



où il faut se souvenir, que dans une telle formule  $\left(\frac{dL}{dy}\right)$  le différentiel de  $L$  doit être pris en supposant la seule quantité  $y$  variable, dont le différentiel se trouve au dénominateur.

XXVII. Donc, quelle que soit la pression sur la face  $Z M z m$  de l'élément, la pression sur la face opposée  $L N l n$  la surpassera par l'incrément de la hauteur  $dp = Ldx$ , puisque ces deux faces sont éloignées entr'elles du différentiel  $dx$ . Donc l'aire de chacune de ces faces étant  $= dydz$ , l'élément du fluide sera poussé suivant la direction  $LZ$  par la force  $= Ldx dydz$ . De même la pression sur la face  $Z L z l$  dont l'aire  $= dx dz$ , est surpassée de la pression sur la face opposée  $M N m n$  par l'incrément de la hauteur  $dp = Mdy$ , qui convient au différentiel  $dy$ , d'où l'élément sera poussé dans la direction  $MZ$  par la force  $= Mdx dydz$ . Et enfin on verra que de la même pression résulte sur l'élément une force  $= Ndx dydz$  suivant la direction  $zZ$ . Si nous joignons ces trois forces aux trois précédentes, nous aurons toutes les forces, qui agissent sur l'élément du fluide  $Z L M N z l m n$ .

XXVIII. Ces trois forces étant contraires aux forces précédentes, l'état d'équilibre exige qu'elles soient égales entr'elles, ce qui nous fournit ces équations :

$$\begin{aligned} Pq dx dy dz &= Ldx dy dz & \text{ou} & \quad L = Pq \\ Qq dx dy dz &= Mdx dy dz & \text{ou} & \quad M = Qq \\ Rq dx dy dz &= Ndx dy dz & \text{ou} & \quad N = Rq \end{aligned}$$

d'où nous tirons pour la hauteur  $p$ , qui exprime la pression en  $Z$ , cette équation différentielle  $dp = q(Pdx + Qdy + Rdz)$ .

Cette formule devant être intégrable, il faut qu'il soit :

$$\left(\frac{d.Pq}{dy}\right) = \left(\frac{d.Qq}{dx}\right) \quad \left(\frac{d.Pq}{dz}\right) = \left(\frac{d.Rq}{dx}\right) ; \quad \left(\frac{d.Qq}{dz}\right) = \left(\frac{d.Rq}{dy}\right)$$

Sans



Sans ces conditions il est impossible, que la masse fluide puisse jamais être réduite en équilibre par les forces sollicitantes  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ . Si de tels cas étoient d'ailleurs possibles, ils seroient bien remarquables, puisque le fluide ne pouvant jamais atteindre à l'équilibre, devroit se trouver dans une agitation continuelle, & par conséquent renfermer un véritable mouvement perpétuel.

XXIX. Mais nous n'avons pas encore tenu compte du rapport qui peut subsister entre la densité  $q$  & l'élasticité ; qui s'exprime toujours par la hauteur de la pression  $p$ . Si le fluide n'est pas compressible, la quantité  $q$  ne dépendra pas de la hauteur  $p$ , elle sera ou constante, si tout le fluide est homogène, ou variable, si le fluide est composé de particules d'une densité différente, mais qui ne sont susceptibles d'aucune compression. Dans ce cas la densité  $q$  dépendra du lieu  $Z$ , & sera par conséquent une certaine fonction des trois variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , qui montre de quelle manière les différentes particules du fluide sont disposées entr'elles. On verra par là, si une telle disposition, qu'on aura imaginée, puisse subsister avec l'état d'équilibre, ou non ? Car l'équilibre sera possible, si la formule  $q(Pdx + Qdy + Rdz)$  admet l'intégration ; en cas que cela n'arrive point, le fluide sera agité, & la disposition de ses particules changée, jusqu'à ce que la fonction  $q$  obtienne une telle valeur, qui rende cette formule intégrable ; ce sera le seul cas, où l'équilibre puisse avoir lieu.

XXX. Si les parties du fluides sont compressibles, l'élasticité  $p$  dépendra de la densité  $q$ , ou uniquement, ou encore d'une autre qualité, qui concourt à augmenter ou à diminuer l'élasticité pour le même degré de densité. Donc, pour donner à nos recherches la plus grande étendue, on doit considérer  $p$  comme une fonction de la densité  $q$ , & encore des quantités  $x$ ,  $y$ , &  $z$ , qui déterminent le lieu du point  $Z$ , dont il est question. La nature de cette fonction servira aussi à déterminer  $q$  par une certaine fonction de la hauteur  $p$ , & des trois variables  $x$ ,  $y$ , &  $z$  ; laquelle étant substituée pour  $q$  dans l'équation

$$dp = q(Pdx + Qdy + Rdz) \quad \text{fera}$$



fera voir, si cette équation est possible, ou non ? Dans le premier cas l'équilibre sera possible, & on pourra assigner pour chaque endroit tant l'élasticité que la densité du fluide ; or dans l'autre cas le fluide sera agité, ou bien sous la disposition supposée des particules, d'où dépend en partie la nature de la fonction  $q$ , on pourra assurer, que l'équilibre est impossible.

XXXI. Voilà donc une solution complète du problème que nous nous sommes proposés, & qui renferme toute la Théorie de l'équilibre des fluides. On voit par là d'abord si l'équilibre sera possible, ou non, dans l'état du fluide, qu'on aura supposé ? & s'il est possible, on déterminera pour chaque point tant la pression ou l'élasticité  $p$ , que la densité du fluide, en cas qu'elle soit variable. Mais, pour faire l'application de la formule générale trouvée :

$$dp = q (P dx + Q dy + R dz)$$

qui contient toute la solution, je remarque d'abord, que lorsque les forces  $P$ ,  $Q$ , &  $R$  sont réelles, soit qu'elles comprennent la gravité naturelle, ou des forces dirigées à des centres fixes, dont chacune soit proportionnelle à une fonction quelconque de la distance à son centre ; dans tous ces cas je remarque, que la formule  $P dx + Q dy + R dz$ , exprime un différentiel réel, qui résulte de la différentiation d'une quantité finie, fonction des  $x$ ,  $y$ , &  $z$ .

XXXII. Or, si l'on examine bien la formule  $P dx + Q dy + R dz$ , entant qu'elle peut résulter d'une, ou de plusieurs forces centrales, on s'apercevra aisément, qu'elle exprime le différentiel de ce, que j'ai nommé autrefois l'effort, ou l'efficace des forces sollicitantes, qu'on trouve si l'on multiplie chaque force centrale par le différentiel de la distance. Il est bien remarquable, que cette même idée de l'effort entre ici si naturellement dans la détermination de l'équilibre des fluides, après que j'en ai démontré le plus heureux usage dans tous les cas d'équilibre. C'est aussi sur cette même idée, qu'est fondé le grand principe de la moindre action de M. de *Maupertuis*, notre digne Président ; principe, que  
plus



plus on y fait réflexion, & plus on est forcé d'en reconnoître l'excellence. La seule envie, ou l'ignorance, est capable d'obscurcir l'éclat de ce principe, qui, malgré toutes les oppositions, ne manquera pas d'être reconnu un jour universellement pour le principal fondement de toutes nos connoissances sur l'équilibre & le mouvement des corps.

XXXIII. Qu'on multiplie donc chaque force accélératrice, qui agit au point  $Z$ , par l'élément de sa direction, & l'intégrale étant l'effort de cette force, soit  $s$  la somme de tous ces efforts pour le point  $Z$ , &  $s$  fera l'intégrale de la formule  $Pdx + Qdy + Rdz$ . Donc, introduisant l'effort  $s$  dans le calcul, la nature de l'équilibre sera renfermée dans cette formule:  $dp = qds$ , de sorte que les trois variables  $x$ ,  $y$ , &  $z$ , sont réunies dans la seule  $s$ . Maintenant il est clair que cette équation  $dp = qds$  ne sauroit être réelle, que lorsque  $q$  est, ou fonction de la seule quantité  $s$ , ou de la seule  $p$ , ou des deux quantités  $p$  &  $s$  ensemble; afin que l'équation ne renferme que les deux variables  $p$  &  $s$ . Dans tous les autres cas, où la densité  $q$  ne depend point des deux seules quantités  $p$  &  $s$ , mais qu'il y entre encore une autre variable dans sa détermination, l'équilibre est impossible, & les parties d'un tel fluide seront nécessairement mises en mouvement. Or les principes que nous venons d'établir ici, ne sont pas suffisans pour déterminer ce mouvement.

XXXIV. Il est évident que la lettre  $s = \int (Pdx + Qdy + Rdz)$  exprimera dans chaque cas une certaine ligne, dont la grandeur sera déterminée par les trois variables  $x$ ,  $y$ , &  $z$ ; puisque  $P$ ,  $Q$ , &  $R$ , sont des nombres absolus, & que les quantités linéaires  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , avec des lignes constantes y obtiendront une seule dimension. Il répondra donc à chaque point  $Z$  une telle ligne  $s$ , dont la quantité sera toujours connue par les forces, qu'on suppose agir sur le fluide. Donc, si le fluide n'est pas compressible, ou que  $q$  ne dépende point de  $p$ , l'équilibre sera possible dans ces deux cas :



1°. Lorsque  $q$  est une quantité constante; c'est à dire, lorsque le fluide est homogène, ou que toutes les particules ont la même densité, sans être susceptibles de compression.

2°. Lorsque  $q$  est bien variable, mais dépendante de la seule quantité  $s$ : C'est le cas où les particules du fluide sont hétérogènes, ou d'une densité différente, mais tellement disposées, que partout où la quantité  $s$  est la même, la densité soit aussi la même. Dans tous les autres cas, où les parties hétérogènes seroient disposées autrement, l'équilibre ne sauroit jamais avoir lieu.

XXXV. Or, si le fluide est compressible, on a aussi deux cas à considérer; l'un où l'élasticité dépend uniquement de la densité, comme il arrive dans l'air, lorsqu'il régné partout le même degré de chaleur. Dans ce cas la quantité  $q$  étant fonction de la seule  $p$ , l'équation  $\nabla p = q \nabla s$  est toujours possible, ou intégrable, puisqu'elle se réduit à celle-cy  $\frac{dp}{q} = ds$ , où les deux variables sont séparées; & partant aussi l'état d'équilibre y pourra avoir lieu. Mais, si l'élasticité  $p$  dépend outre cela encore d'une autre qualité du fluide, comme de la chaleur; & que celle-ci soit différente dans les diverses particules, l'équilibre ne sauroit avoir lieu, à moins que la chaleur ne dépende uniquement de la quantité  $s$ : il faut donc qu'il se trouve le même degré de chaleur dans toutes les particules du fluide, auxquelles répond la même valeur de  $s$ . Si dans ces endroits la chaleur, ou autre qualité, qui concourt à déterminer l'élasticité, étoit différente, l'équilibre seroit absolument impossible.

XXXVI. Pour éclaircir mieux les conditions sous lesquelles l'équilibre peut avoir lieu, il conviendra de distinguer toute la masse fluide par des couches, dont chacune passe par tous les points, où la quantité  $s$ , ou l'effort total des forces sollicitantes, est la même. Il est évident, qu'au cas de la gravité naturelle ces couches seront parallèles entr'elles & horizontales: & lorsque les forces sollicitantes sont dirigées

gées



gées vers un centre fixe, ces couches deviendront sphériques & concentriques entr'elles autour du même centre de force : si les forces sont dirigées vers plusieurs centres, la figure des couches deviendra plus irrégulière. Or, ayant établi toutes ces couches, la formule  $dp = q ds$  fait voir, que l'équilibre ne sauroit avoir lieu, à moins que dans chaque couche le fluide n'eût partout, & la même densité, & la même chaleur : ou bien il faut que les particules de chaque couche soient parfaitement homogènes entr'elles. Et alors l'élasticité  $p$  se trouvera aussi la même par toute l'étendue de chaque couche.

XXXVII. Examinons plus en détail les principaux cas, que fournit la diverse nature des fluides, quelle que soit la figure des couches, laquelle dépend uniquement des forces sollicitantes accélératrices, comme nous venons de voir. Soit donc premièrement toute la masse fluide homogène & non compressible : & la densité  $q$  étant constante, notre formule  $dp = q ds$  aura pour intégrale  $p = q(s \pm a)$ , où la constante  $a$  doit être déterminée par quelque état donné du fluide, par lequel on fait la pression dans une certaine couche : & de là on connoitra la pression, qui aura lieu dans toute autre couche, puisque par toute l'étendue de chaque couche la pression est la même. Donc, s'il y a une telle couche, où la pression évanouît, on la pourra regarder comme la dernière, ou plus haute surface, à laquelle le fluide se trouve à niveau, & où le fluide n'a pas besoin d'être retenu par le vaisseau. Quand on aura trouvé pour toute autre couche la pression, on en pourra déterminer les forces, qu'un corps solide plongé dans le fluide soutiendra des pressions du fluide : & toute l'hydrostatique vulgaire ne contient que le cas très particulier de cette formule  $p = q(s \pm a)$ , où la seule gravité agit sur le fluide.

XXXVIII. Soit pour le second cas le fluide encore incompressible, mais composé de particules d'une densité différente ; & pour que le fluide puisse arriver à l'état d'équilibre, il faut que chaque couche contienne des particules de la même densité, de sorte que partout,



où la valeur de  $s$  est la même, les particules du fluide soient également denses. Sans un tel arrangement on ne sauroit jamais atteindre à l'équilibre. Or, étant parvenu à cet état, la densité  $q$  sera exprimée par une certaine fonction de  $s$ , & l'intégrale de notre formule  $p = \int q ds$  montrera la pression du fluide à chaque couche. L'intégrale  $\int q ds$  renferme une constante, qui se détermine par la pression connue dans une couche. Ordinairement on connoit la dernière couche, ou la plus haute surface, où la pression est nulle, & le fluide de niveau; & alors il faut déterminer la constante en sorte, que la pression  $p$  s'évanouisse dans cette couche. On comprend par là, que la figure du niveau se règle toujours sur la figure des couches.

XXXIX. Soit en troisième lieu le fluide élastique & compressible, mais en sorte que l'élasticité dépende uniquement de la densité; la densité  $q$  sera donc exprimée par une certaine fonction de l'élasticité  $p$ , & partant notre formule  $dp = q ds$  toujours possible, ayant pour intégrale  $\int \frac{dp}{q} = s$ . On réduira cette formule à des mesures absolues, si l'on connoit l'élasticité qui convient à une certaine densité. De là on voit que par toute l'étendue de chaque couche tant l'élasticité que la densité sera la même; & la constante renfermée dans l'intégrale  $\int \frac{dp}{q}$  doit être déterminée par l'élasticité, ou densité, qu'on suppose connue dans une certaine couche. Si l'élasticité  $p$  est proportionnelle à la densité  $q$ , & qu'on sache qu'à la densité  $g$  convient l'élasticité exprimée par la hauteur  $h$ , on aura  $q = \frac{gp}{h}$ , & partant  $\frac{h}{g} \int \frac{p}{a} = s$ : ou bien  $p = a e^{gs:h}$ , &  $q = \frac{ag}{h} e^{gs:h}$ , d'où l'on tirera pour chaque couche tant la densité  $q$ , que l'élasticité  $p$ .

XL. Soit en quatrième lieu le fluide élastique, mais que l'élasticité  $p$  dépende, outre la densité, encore de la chaleur du fluide, qui soit



soit variable: il est d'abord évident, que quelle que soit cette dépendance, l'équilibre ne sauroit avoir lieu, à moins que par toute l'étendue de chaque couche la chaleur ne fut la même. Soit donc  $r$  le degré de chaleur en  $Z$ , qui sera par conséquent une certaine fonction de  $s$ ; & que l'élasticité  $p$  soit en raison composée de la densité  $q$ , & de la chaleur  $r$ ; dans ce cas on aura  $p = \alpha q r$ , & partant  $q = \frac{p}{\alpha r}$ , où il est aisé de déterminer  $\alpha$  par les mesures absolues. Notre équation étant donc  $dp = \frac{p ds}{\alpha r}$ , se changera en celle-ci  $\frac{\alpha dp}{p} = \frac{ds}{r}$ , qui, puisque  $r$  est fonction de  $s$ , aura pour intégrale  $\alpha \int \frac{p}{\alpha} = \int \frac{ds}{r}$ , d'où l'on tire :

$$p = \alpha e^{\int \frac{ds}{\alpha r}}, \quad \& \quad q = \frac{\alpha}{\alpha r} e^{\int \frac{ds}{\alpha r}}.$$

Si l'élasticité dépendoit autrement de la densité  $q$ , & de la chaleur  $r$ , l'évolution de la formule  $dp = q ds$  montreroit également l'élasticité & la densité du fluide dans chaque couche.

XLI. Or un fluide quelconque étant en équilibre, il est aisé d'assigner les forces, dont un corps solide qui y est plongé, sera poussé, sans qu'on ait besoin de sommer toutes les forces élémentaires. On n'a qu'à considérer, que ce corps soutient de la pression du fluide les mêmes forces, que soutiendrait un égal volume fluide, qui en occuperait la place, & qui seroit en équilibre avec le reste. Or les conditions requises pour l'équilibre nous donnent la masse de ce volume, d'où l'on conclura la grandeur & la direction des forces sollicitantes qui y agissent, & qui le mettroient actuellement en mouvement, s'il n'étoit pas retenu par les pressions du fluide environnant. Donc, l'effet de ces pressions est égal & contraire à celui des forces sollicitantes, d'où il s'ensuit, qu'un corps solide plongé dans le fluide en éprouve les mêmes



forces, mais dans un sens contraire, qu'éprouveroit cet égal volume de fluide dont il occupe la place. On voit donc que la règle vulgaire sur les corps plongés dans l'eau, est la plus générale, & s'étend tant aux fluides de toutes les especes, qu'à des forces quelconques, dont ils puissent être sollicités.

XLII. Voilà donc en'général, comme tout ce qui regarde l'équilibre des fluides se déduit aussi aisément que naturellement de notre formule  $dp = q ds$ , qu'on aura donc droit de regarder comme l'unique fondement de toute la Théorie de l'équilibre des fluides. Mais, puisque ce que je viens d'exposer éblouit presque par la trop grande généralité à l'égard des forces, dont je suppose le fluide sollicité, il sera bon de développer aussi à cet égard quelques cas particuliers. Dans cette vue je considérerai premièrement les fluides, qui sont sollicités par la seule gravité, où les forces sollicitantes sont partout égales & parallèles entr'elles; & c'est ici que j'aurai occasion de traiter non seulement toute l'hydrostatique ordinaire, mais aussi la théorie de l'état de l'atmosphère, qu'on comprend sous le nom d'aërometrie. Ensuite, je supposerai les forces sollicitantes dirigées vers un centre fixe; où j'ajouterai quelques reflexions sur la force centrifuge, qui résulte du mouvement diurne de la terre; quoique, à cause de ce mouvement les fluides qui environnent la terre, ne puissent être proprement regardés comme étant en équilibre.

*De l'équilibre des fluides dans l'hypothese de la gravité naturelle.*

XLIII. La force accélératrice de la gravité étant posée  $= 1$ , si nous supposons le plan A O B horizontal, & l'axe O C vertical, les forces accélératrices, qui agissoient sur le point Z, deviendront  $P = 0$ ,  $Q = 0$ , &  $R = -1$ , la droite ZY étant dirigée en bas. Donc, puisque  $ds = P dx + Q dy + R dz$ , nous aurons  $ds = -dz$ , &  $s = a - z$ ; & notre formule pour l'état d'équilibre



libre de toutes sortes de fluides fera  $dp = q dz$ . Ensuite, tous les points, auxquels répond la même valeur de  $s = a - z$ , étant disposés dans le même plan horizontal, les couches, par lesquelles le fluide doit être distingué, seront horizontales. D'où l'on voit que dans tout état d'équilibre chaque couche, ou plan horizontal, doit contenir des particules fluides tant de la même densité que de la même chaleur, ou autre qualité dont dépend l'élasticité : & de plus, l'élasticité sera aussi la même par toute l'étendue de chaque couche.

XLIV. Si le fluide dont il s'agit n'est pas susceptible de compression, & qu'il soit homogène, ou de la même densité par tout, rien n'empêche que nous ne le posions le même que cette matière homogène, à laquelle se rapporte la hauteur  $p$ , qui nous sert de mesure de la pression, ou de l'élasticité. Soit donc  $q = 1$ , & ayant  $dp = -dz$ , nous aurons  $p = a - z$ . Prenons donc  $CD$  pour la base horizontale, d'où nous mesurons en haut la hauteur  $CM = DN = z$ , de la couche  $MN$ , & la pression par toute cette couche sera  $= a - z$ . Soit  $CA = DB = a$ , & la pression évanouira par la couche  $AB$ , qui sera donc la plus haute, ou celle qui est à niveau : d'où l'on voit que dans toute autre couche plus basse  $MN$ , la pression sera exprimée par la hauteur  $AM$ . S'il y avoit du fluide au dessus de la couche  $AB$ , la pression y feroit négative, & partant le fluide ne sauroit demeurer continu. Ainsi l'état d'équilibre exclut entièrement l'existence d'un fluide continu au dessus de la couche, où la pression est nulle. Le cas très connu, où un tuyau recourbé comme  $fkh$  demeure plein d'eau, & où il semble que la pression en  $k$  soit négative, ne peut avoir lieu, que lorsque la surface  $AB$  soutient la pression de l'atmosphère. Or alors la pression en  $AB$  n'est nulle, comme on suppose, mais égale à la pression de l'atmosphère, & la pression en  $k$ , qui en est moindre de la hauteur  $gk$ , est encore positive. Aussi fait-on, que quand la hauteur  $gk$  est plus grande que celle qui répond à la pression de l'atmosphère, l'eau n'y demeure plus continuë.

Fig. 4.



Fig. 5. XLV. Si le fluide est incompressible, mais composé de parties d'une densité différente, l'équilibre ne sauroit avoir lieu, à moins que ces diverses parties ne soient séparées par des plans horizontaux. Que le vaisseau A A D D contienne donc trois fluides différens, dont le premier & plus haut occupe l'espace A A B B, sa densité étant  $A a = l$ ; le second l'espace B B C C, sa densité étant  $= m$ , le troisième l'espace C C D D, sa densité étant  $= n$ ; & pourvu que les surfaces A A, B B, C C, qui terminent ces différens fluides, soient horizontales, l'équilibre aura lieu. Dans ce cas notre formule nous fait voir, que supposant la pression en A A nulle, la pression en M M sera  $= l . A B + m . B M$ , & la pression N N  $= l . A B + m . B C + n . C N$ , la droite A D étant verticale. Il n'importe laquelle de ces parties soit la plus dense, mais il faut remarquer, que si une supérieure B B C C étoit plus dense que l'inférieure C C D D, aussi-tôt que par quelque accident la situation horizontale de la surface C C seroit troublée, l'équilibre seroit détruit, & la partie plus pesante B B C C tomberoit pour occuper les couches les plus basses. Puisqu'un tel accident ne sauroit être évité, il est clair que des fluides différens ne sauroient être en équilibre, à moins que les plus denses ne soient les plus profonds.

XLVI. Considérons maintenant aussi les conditions, sous lesquelles l'équilibre peut subsister dans notre atmosphère, ou l'air, qui est un fluide compressible, dont l'élasticité dépend tant de sa densité, que du degré de chaleur qui y régne. Où je remarque d'abord, que l'équilibre ne sauroit avoir lieu, à moins qu'il n'y eut le même degré de chaleur par toute l'étendue de chaque couche horizontale de l'atmosphère. Donc, toutes les fois qu'il y a un parfait calme dans l'air, nous pouvons sûrement conclure, qu'il se trouve par une étendue assez considérable, à la même hauteur de l'atmosphère, le même degré de chaleur, ou que chaque couche horizontale contient un air également tempéré, quoique dans des couches différentes la chaleur puisse varier d'une manière quelconque. De là nous apprenons de plus, que lorsque par quelque cause que ce soit, il arrive, qu'à égales hauteurs de l'at-



l'atmosphère la chaleur y est différente, l'équilibre ne sauroit en aucune manière avoir lieu. Dans ces cas il en naîtra donc nécessairement un vent; & il n'y a aucun doute que la diversité de chaleur à égales hauteurs de l'atmosphère ne soit une des principales causes des vents.

XVII. Mais, supposons que l'atmosphère se trouve en équilibre, & soit A M E une ligne verticale, sur laquelle nous prenons les hauteurs. A un point donné comme en A, regardons l'état de l'air comme connu: que le degré de chaleur y soit exprimé par l'ordonnée  $AB = c$ , la densité y soit  $= g$ , & l'élasticité exprimée par la hauteur  $= h$ . Puisqu'on est accoutumé de mesurer l'élasticité de l'air, ou ce qui revient au même, la pression de l'atmosphère par la hauteur du barometre, l'unité nous marquera la densité du vif argent, &  $g$  fera une fraction, qui exprime le rapport de la densité de l'air en A à celle du vif argent; &  $h$  fera la hauteur même du barometre lorsqu'il est placé en A. Ensuite, à une hauteur quelconque  $AM = s$ , à laquelle répond la valeur de  $s = a - z$ , soit le degré de chaleur  $= r$ , la densité de l'air  $= q$ , & l'élasticité, ou la hauteur du barometre  $= p$ . Je regarde la chaleur  $r$  comme connue, & exprimée par l'appliquée MN d'une courbe donnée B N F, qui est l'échelle des chaleurs.

XLVIII. Puisqu'on n'a pas encore établi des mesures fixes pour la chaleur, par lesquelles on pourroit dire, qu'une chaleur est double d'une autre; il semble que l'influence même de la chaleur sur l'élasticité de l'air fournit le moyen le plus convenable pour régler ces mesures. Disons donc que la chaleur devient double, lorsque l'élasticité d'une masse d'air, dont la densité est donnée, en devient deux fois plus grande; ou qu'en général la chaleur soit proportionnelle à l'élasticité, la densité demeurant la même. On pourroit douter, si la même chaleur, qui double le ressort de l'air d'une certaine densité, le doubleroit aussi, si la densité étoit différente; c'est sur quoi la seule expérience nous peut éclaircir. Cependant il semble que nous ne nous écarterons pas sensiblement de la vérité, en supposant que ce rapport ait lieu dans toutes



tes les densités différentes, ou du moins dans celles qui se rencontrent dans l'atmosphère. Cela posé, quelques expériences suffiront à réduire les degrés de chaleur marqués par quelque thermomètre à ces mesures plus fixes; & ensuite il sera aisé de changer l'échelle du thermomètre en forte, qu'elle nous donne d'abord les vraies mesures de la chaleur, que nous venons de marquer par les lettres  $c$  &  $r$ .

XLIX. Pour la densité nous nous tromperons encore moins, si nous la supposons proportionnelle à l'élasticité, la chaleur demeurant la même. Car ce n'est que dans de fort grandes densités, qu'on a remarqué que l'élasticité croît dans une plus grande raison que la densité: or un tel degré de densité ne se trouve pas dans l'atmosphère. L'élasticité  $p$  sera donc proportionnelle au produit de la chaleur  $r$  par la densité  $q$ , ou bien on aura cette proportion  $p : q r = h : g c$ , d'où l'on tire  $q = \frac{g c p}{h r}$ : où il faut remarquer, que  $r$  est donné par une certaine fonction de la hauteur  $A M = z$ , qui convient à l'échelle des chaleurs B N F. De là notre équation  $d p = q d s$  à cause de  $d s = -d z$ , se changera en  $d p = -\frac{g c p d z}{h r}$ , dont l'intégrale est

$$l p = \text{Const.} - \frac{g c}{h} \int \frac{d z}{r}.$$

L. Supposons que l'intégrale  $\int \frac{d z}{r}$  soit prise en forte, qu'elle évanouisse au point A où  $z = 0$ , & puisque dans cette couche il devient  $r = c$ ,  $q = g$ , &  $p = h$ , la constante doit être  $= l h$ , & notre équation qui renferme la nature de l'équilibre de l'atmosphère, sera

$$l \frac{p}{h} = -\frac{g c}{h} \int \frac{d z}{r}, \quad \text{ou} \quad p = h e^{-\frac{g c}{h} \int \frac{d z}{r}}$$

prenant  $e$  pour le nombre dont le logarithme hyperbolique est  $= 1$ . Cette formule nous montre donc à chaque hauteur la pression de l'atmos-



mosphère, ou bien la hauteur que le barometre y marqueroit ; & de là on connoitra aussi la densité  $q = \frac{gcp}{hr}$ , qui se trouvera à la même hauteur, de sorte que ces deux formules nous découvriront l'état de l'air à la hauteur  $AM = z$  :

$$p = h e^{-\frac{gc}{h} \int \frac{dz}{r}}, \quad \& \quad q = \frac{gc}{r} e^{-\frac{gc}{h} \int \frac{dz}{r}}$$

d'où l'on voit que ni l'élasticité, ni la densité, ne sauroit entièrement évanouir à aucune hauteur.

LI. Développons d'abord le cas, où la chaleur est la même par toute la hauteur de l'atmosphère : Soit donc  $MN = AB$  ou  $r = c$ , & nos formules pour la densité & l'élasticité de l'air en M seront :

$$p = h e^{-\frac{gz}{h}}, \quad \& \quad q = g e^{-\frac{gz}{h}}$$

ou bien par des series :

$$p = h \left( 1 - \frac{gz}{h} + \frac{g^2 z^2}{2h^2} - \frac{g^3 z^3}{6h^3} + \frac{g^4 z^4}{24h^4} - \&c. \right)$$

$$q = g \left( 1 - \frac{gz}{h} + \frac{g^2 z^2}{2h^2} - \frac{g^3 z^3}{6h^3} + \frac{g^4 z^4}{24h^4} - \&c. \right)$$

d'où l'on connoitra à chaque hauteur donnée  $AM = z$ , l'état de l'air, sachant celui en A. Puisque l'unité marque la densité du mercure, si le point A est pris à la surface de la terre, on fait par les expériences que la valeur de  $g$ , fera une fraction entre  $\frac{1}{10000}$  &  $\frac{1}{12000}$  environ,

&  $h$  ; à peu près de  $2\frac{2}{3}$  pieds de Rhin. Donc, prenant  $g = \frac{1}{11000}$ ,



& exprimant la hauteur  $AM = z$  en pieds de Rhin, à cause de  $\frac{g}{h} = \frac{1}{25000}$  à peu près, nous aurons :

$$p = h \left( 1 - \frac{z}{25000} + \frac{zz}{125000000} - \&c. \right)$$

A la hauteur donc  $AM$  de 1000 pieds, on aura  $p = 0,96079h = \frac{24}{25}h$ .

LII. On peut aussi déterminer la hauteur  $z$ , à laquelle le barometre sera diminué d'une partie donnée de toute sa hauteur  $h$ .

Soit la hauteur du barometre en  $M = \left( 1 - \frac{n}{1000} \right) h$ , & posant

$p = \left( 1 - \frac{n}{1000} \right) h$ , nous aurons  $l \left( 1 - \frac{n}{1000} \right) = -\frac{gz}{h}$ , ou bien :

$$z = \frac{h}{g} \left( \frac{n}{1000} + \frac{nn}{2000000} + \frac{n^3}{3000000000} + \&c. \right)$$

La somme de cette serie se peut exprimer à très peu près de cette maniere :

$$z = \frac{2nh}{g(2000-n)}, \text{ ou plus exactement } z = \frac{nh}{1000g} \frac{(6000-n)}{(6000-4n)}$$

Si l'on veut savoir la hauteur, à laquelle le barometre baisse de  $n$  lignes, ou parties cent quarante quatrièmes du pied de Londres, prenant

$g = \frac{1}{11000}$ , & la hauteur  $h$  de  $2\frac{1}{2}$  pieds de Londres, on aura en

même mesure la hauteur, où cela arrive,  $AM = z = \frac{76n(2160-n)}{2160-4n}$

LIII. Mais on fait par l'expérience que, plus on monte dans l'atmosphère, & plus le degré de chaleur y diminuë. La courbe  $BNF$  approchera donc de plus en plus de la verticale  $AME$ ; & partant la quantité  $r$  sera telle fonction de  $z$ , que lorsque  $z = 0$ ; il devi-



devienne  $r = c$ , & si  $z = \infty$ , on ait  $r = 0$ . On pourra donc prendre pour  $r$  une telle expression :

$$r = \frac{c}{1 + \frac{az}{h} + \frac{\epsilon z^2}{hh} + \frac{\gamma z^3}{h^3}}$$

où les coefficients  $a$ ,  $\epsilon$ ,  $\gamma$ , &c. doivent être déterminés par quelques observations sur la chaleur de l'atmosphère à quelques hauteurs différentes. De là nous aurons :

$$\frac{cdz}{r} = dz \left( 1 + \frac{az}{h} + \frac{\epsilon z^2}{h^2} + \frac{\gamma z^3}{h^3} + \&c. \right), \text{ \& partant}$$

$$cf \frac{dz}{r} = z + \frac{az^2}{2h} + \frac{\epsilon z^3}{3h^2} + \frac{\gamma z^4}{4h^3} + \&c. \text{ d'où nous tirons:}$$

$$l \frac{p}{h} = -g \left( \frac{z}{h} + \frac{az^2}{2h^2} + \frac{\epsilon z^3}{3h^3} + \frac{\gamma z^4}{4h^4} + \&c. \right)$$

$$\& \quad q = \frac{gp}{h} \left( 1 + \frac{az}{h} + \frac{\epsilon z^2}{h^2} + \frac{\gamma z^3}{h^3} + \&c. \right).$$

LVI. De ces formules on connoitra pour chaque hauteur  $AM = z$ , tant la hauteur du barometre  $p$ , que la densité de l'air  $q$ . On posera pour cet effet :

$$g \left( \frac{z}{h} + \frac{az^2}{2h^2} + \frac{\epsilon z^3}{3h^3} + \frac{\gamma z^4}{4h^4} + \&c. \right) = u, \text{ \& on aura :}$$

$$p = h e^{-u} = h \left( 1 - u + \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{6} u^3 + \frac{1}{24} u^4 - \&c. \right)$$

ou bien par des approximations :

$$p = \frac{2-u}{2+u} h, \text{ ou } p = \frac{12-6u+uu}{12+6u+uu} h.$$



Or, si l'on peut savoir à quelle hauteur  $z$ , le barometre descendra de sa partie  $\frac{1}{v} h$ ; posant  $p = \left(1 - \frac{1}{v}\right) h$ , on aura :

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{2v^2} + \frac{1}{3v^3} + \frac{1}{4v^4} + \&c. = u = \frac{6v-1}{v(6v-4)}, \text{ à peu près,}$$

& puisque les coefficients  $\alpha$ ,  $\epsilon$ ,  $\gamma$ , &c. iront fort en diminuant, & qu'ils seront très petits d'eux mêmes, ayant trouvé la valeur de  $u$ , on obtiendra fort à peu près :

$$z = h \left( \frac{u}{g} - \frac{\alpha u^2}{2gg} + \frac{(3\alpha\alpha - 2\epsilon)u^3}{6g^3} - \frac{(15\alpha^3 - 20\alpha\epsilon + 6\gamma)u^4}{24g^4} + \&c. \right)$$

$$\text{ou } z = \frac{6\alpha g + (3\alpha\alpha - 4\epsilon)u}{6\alpha g + (6\alpha\alpha - 4\epsilon)u} \cdot \frac{hu}{g}.$$

LV. De là nous voyons, qu'à cause de la diminution de la chaleur, le barometre en l'élevant baisse plutôt d'une quantité donnée, que si la chaleur étoit partout la même. Or, si on savoit exactement en A, le rapport de la densité de l'air à celle du mercure, ou la fraction  $g$ , & la hauteur du barometre  $h$ , on trouveroit par le calcul précédent la hauteur, où le barometre devoit baisser d'une ligne, si la chaleur étoit partout la même. Car, prenant  $\frac{1}{v} h = 1$  ligne, & posant

$$u = \frac{1}{v} + \frac{1}{2v^2} + \frac{1}{3v^3} + \&c. \text{ cette hauteur feroit } = \frac{hu}{g}.$$

Qu'on compare ensuite cette hauteur, qu'on trouve par l'expérience, qui soit moindre &  $= \frac{hu}{g} - w$ , & ayant à peu près

$$\frac{hu}{g} - w = h \left( \frac{u}{g} - \frac{\alpha uu}{2gg} \right), \text{ on en tirera } w = \frac{\alpha hu u}{2gg}, \text{ ou}$$

$$\alpha = \frac{2ggw}{huu}, \text{ d'où l'on connoitra assez exactement le premier coeffi-}$$

cient



cient  $\alpha$  de la formule, qui contient la diminution de la chaleur  $\frac{c}{p} = 1 + \frac{\alpha z}{h} + \frac{\epsilon z^2}{hh} + \frac{\gamma z^3}{h^3} + \&c.$  puisqu'on peut regarder les autres termes, comme incomparablement plus petits.

LVI. Voilà donc une methode pour connoître par les expériences la diminution de la chaleur dans l'atmosphère. Pour en donner un exemple, supposons que la hauteur du barometre en bas en A, ait été observée de 30 pouces du pieds de Londres, ou  $h = 2\frac{1}{2}$  pieds de Londres; & que la densité  $\gamma$  foit à celle du mercure comme 1 à 10000, de sorte que  $g = \frac{1}{10000}$ . Maintenant une ligne étant  $\frac{1}{360} h$ , nous

aurons  $p = 360$ , &  $u = \frac{1}{358}$ , & si la chaleur étoit par tout la même, le barometre baisseroit d'une ligne à la hauteur de  $69\frac{1}{2}$  pieds. Or, supposons que cet abaissement arrive déjà à la hauteur de 63 pieds; & nous aurons  $w = 6\frac{1}{2}$  pieds, & de là nous tirerons  $\alpha = \frac{7}{1000}$ .

Donc négligeant les autres termes, nous aurons pour la chaleur à chaque hauteur  $z$  cette équation :  $r = \frac{c}{1 + \frac{7z}{1000h}}$ , ou  $r = \frac{c}{1 + \frac{z}{357}}$  :

d'où il s'enfuivroit qu'à la hauteur de 357 pieds la chaleur seroit reduite à la moitié. Si la différence  $w$  avoit été plus petite, la valeur de  $\alpha$  auroit aussi été trouvée moindre dans la même raison.

LVII. Si nous négligeons les termes affectés par  $\epsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , &c. & que nous supposons donnée la hauteur, où la chaleur est reduite à la moitié nous en pourrons assigner le degré de chaleur à toute autre hauteur, & delà l'élasticité de l'air avec sa densité. Soit cette hauteur

$= mh$ , & puisque  $r = \frac{c}{1 + \frac{\alpha z}{h}}$ , nous aurons  $\alpha = \frac{1}{m}$ , & par  
tant



tant  $r = \frac{c}{1 + \frac{z}{mh}}$  : d'où l'on connoitra à toute autre hauteur  $z$ , le

rapport de la chaleur à celle qui se trouve en A. Ensuite, posant

$g\left(\frac{z}{h} + \frac{z}{2mh}\right) = u$ , ou  $u = \frac{g}{h}\left(1 + \frac{z}{2mh}\right)$ , la hauteur du ba-

rometre en M fera  $p = \frac{12 - 6u + uu}{12 + 6u + uu} h$ , à très peu près ; & la

densité  $q = \frac{12 - 6u + uu}{12 + 6u + uu} g \left(1 + \frac{z}{mh}\right)$ . Soit la hauteur AM =

$z = nh$ , & on aura à cause de  $u = ng \left(1 + \frac{n}{2m}\right)$ , pour cette hau-

teur  $r = \frac{mc}{m + n}$  ;  $p = \frac{12 - 6ng\left(1 + \frac{n}{2m}\right) + nngg\left(1 + \frac{n}{2m}\right)^2}{12 + 6ng\left(1 + \frac{n}{2m}\right) + nngg\left(1 + \frac{n}{2m}\right)^2} h$ ,

& de là  $q = \frac{gp}{h}\left(1 + \frac{n}{m}\right)$ .

LVIII. Or, si l'on veut favoir à quelle hauteur  $AM = z$ , l'abaissement du mercure dans le barometre fera  $= \frac{1}{v} h$ , ou bien

$p = \left(1 - \frac{1}{v}\right)$ , on cherchera d'abord comme auparavant le nom-

bre  $u$ , de sorte que  $u = \frac{1}{v} + \frac{1}{2v^2} + \frac{1}{3v^3} + \frac{1}{4v^4} + \&c.$  ou

à peu près  $u = \frac{6v - 1}{v(6v - 4)}$ , & puisque  $\alpha = \frac{1}{m}$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0$ , &c.

on



on trouvera la hauteur

$$AM = h \left( \frac{u}{g} - \frac{uu}{2mgg} + \frac{u^3}{2mmg^3} - \frac{5u^4}{8m^3g^4} + \&c. \right)$$

ou fort à peu près  $AM = \frac{2mg+u}{mg+u} \cdot \frac{hu}{2g}$  : & la densité y fera

$$q = \left( 1 - \frac{1}{v} \right) \left( \frac{2mg+u}{mg+u} \cdot \frac{u}{2m} \right), \quad \& \text{ la chaleur}$$

$$r = \frac{c}{1 + \frac{2mg+u}{mg+u} \cdot \frac{u}{2mg}}, \quad \text{ou bien après avoir trouvé } AM = z,$$

$$\text{on aura } q = g \left( 1 - \frac{1}{v} \right) \left( 1 + \frac{z}{mh} \right), \quad \& \quad r = \frac{c}{1 + \frac{z}{mh}}.$$

Donc, en remettant pour  $u$  la valeur  $\frac{6v-1}{v(6v-4)}$ , nous aurons :

$$AM = h \left( \frac{1}{vg} + \frac{1}{v^2} \left( \frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2} \right) + \frac{1}{v^3} \left( \frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3} \right) \&c. \right)$$

& la profondeur, où le barometre hausse de la quantité  $\frac{1}{v}h$ , fera

$$h \left( \frac{1}{vg} - \frac{1}{v^2} \left( \frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2} \right) + \frac{1}{v^3} \left( \frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3} \right) - \&c. \right)$$

LIX. On trouve quantité d'expériences, qu'on a faites sur la hauteur du barometre, tant en montant qu'en descendant dans l'atmosphère, d'où l'on a taché de déterminer les hauteurs ou profondeurs, où le barometre hausse ou baisse de parties égales. Soit A le point fixe, d'où l'on compte ces hauteurs & profondeurs, que la hauteur du barometre y soit  $= h$ , la densité de l'air  $= g$ , celle du mercure étant  $= 1$ , & qu'à une hauteur au dessus AE  $= mh$ , la chaleur soit réduite

Fig. 7.



duite à la moitié. Soient ensuite 1. 2. 3. &c. en montant, & I. II. III. &c. en descendant les lieux, où le changement du barometre vaille  $\frac{1}{v}h$ , de sorte que la hauteur du barometre soit

$$\text{en 1} = \left(1 - \frac{1}{v}\right)h; \text{ en 2} = \left(1 - \frac{2}{v}\right)h; \text{ en 3} = \left(1 - \frac{3}{v}\right)h$$

$$\text{en I} = \left(1 + \frac{1}{v}\right)h; \text{ en II} = \left(1 + \frac{2}{v}\right)h; \text{ en III} = \left(1 + \frac{3}{v}\right)h.$$

Cela posé, voyons quel ordre doit régner dans les intervalles A, 1; 1, 2; 2, 3; en montant, & A, I; I, II; II, III; en descendant.

LX. Or la formule trouvée nous fournira les valeurs suivantes de ces intervalles, en montant :

$$A, 1 = h \left( \frac{1}{vg} + \frac{1}{v^2} \left( \frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2} \right) + \frac{1}{v^3} \left( \frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3} \right) + \&c. \right)$$

$$1, 2 = h \left( \frac{1}{vg} + \frac{3}{v^2} \left( \frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2} \right) + \frac{7}{v^3} \left( \frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3} \right) + \&c. \right)$$

$$2, 3 = h \left( \frac{1}{vg} + \frac{5}{v^2} \left( \frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2} \right) + \frac{19}{v^3} \left( \frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3} \right) + \&c. \right)$$

& en descendant :

$$A, I = h \left( \frac{1}{vg} - \frac{1}{v^2} \left( \frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2} \right) + \frac{1}{v^3} \left( \frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3} \right) - \&c. \right)$$

$$I, II = h \left( \frac{1}{vg} - \frac{3}{v^2} \left( \frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2} \right) + \frac{7}{v^3} \left( \frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3} \right) - \&c. \right)$$

$$II, III = h \left( \frac{1}{vg} - \frac{5}{v^2} \left( \frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2} \right) + \frac{19}{v^3} \left( \frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3} \right) - \&c. \right)$$

D'où



D'où l'on tire en prenant les différences :

$$2,3 - 1,2 = h \left( \frac{2}{v^2} \left( \frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2} \right) + \frac{12}{v^3} \left( \frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3} \right) + \&c. \right)$$

$$1,2 - A,1 = h \left( \frac{2}{v^2} \left( \frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2} \right) + \frac{6}{v^3} \left( \frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3} \right) + \&c. \right)$$

$$A,1 - A,I = h \left( \frac{2}{v^2} \left( \frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2} \right) + 0 \right)$$

$$A,I - I,II = h \left( \frac{2}{v^2} \left( \frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2} \right) - \frac{6}{v^3} \left( \frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3} \right) + \&c. \right)$$

$$I,II - II,III = h \left( \frac{2}{v^2} \left( \frac{1}{2g} - \frac{1}{2mg^2} \right) - \frac{12}{v^3} \left( \frac{1}{3g} - \frac{1}{2mg^2} + \frac{1}{2m^2g^3} \right) + \&c. \right)$$

LXI. Si la chaleur étoit la même par toute la hauteur de l'atmosphère, ou qu'il fut  $m = \infty$ , ces intervalles iroient en croissant *allés régulièrement en montant* ; car on auroit

|                                                                                |                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| $III, II = h \left( \frac{1}{vg} - \frac{5}{2v^2g} + \frac{19}{3v^3g} \right)$ | différences                                        |
| $II, I = h \left( \frac{1}{vg} - \frac{3}{2v^2g} + \frac{7}{3v^3g} \right)$    | $h \left( \frac{1}{v^2g} - \frac{4}{v^3g} \right)$ |
| $I, A = h \left( \frac{1}{vg} - \frac{1}{2v^2g} + \frac{1}{3v^3g} \right)$     | $h \left( \frac{1}{v^2g} - \frac{2}{v^3g} \right)$ |
| $A, I = h \left( \frac{1}{vg} + \frac{1}{2v^2g} + \frac{1}{3v^3g} \right)$     | $h \left( \frac{1}{v^2g} - 0 \right)$              |
| $I, 2 = h \left( \frac{1}{vg} + \frac{3}{2v^2g} + \frac{7}{3v^3g} \right)$     | $h \left( \frac{1}{v^2g} + \frac{2}{v^3g} \right)$ |
| $2, 3 = h \left( \frac{1}{vg} + \frac{5}{2v^2g} + \frac{19}{3v^3g} \right)$    | $h \left( \frac{1}{v^2g} + \frac{4}{v^3g} \right)$ |

Среш.



Cependant il semble qu'il pourroit arriver, que l'intervalle II, III, devint plus grand que I, II, lorsque  $1 < \frac{4}{v}$ , ou  $v < 4$ , ou  $\frac{1}{v} > \frac{1}{4}$ , mais il faut remarquer que dans ces cas, où le changement  $\frac{1}{v} h$  feroit si considérable, notre formule approchée ne fauroit plus avoir lieu ; car il la faudroit alors continuer à plusieurs termes, par lequel l'accroissement de ces intervalles feroit rétabli.

LXII. Mais il n'en est pas de même, quand la chaleur diminue dans l'atmosphère en montant ; cet accroissement pourra bien alors devenir assés irregulier, & même négatif en quelques endroits, quoique la fraction  $\frac{1}{v}$  fut très petite. Pour mieux éclaircir cet effet de la cha-

leur variable, posons d'abord  $m = \frac{1}{g}$ , ou  $m = 10000$  à peu près, de sorte qu'à la hauteur de  $10000 h$  la chaleur soit réduite à la moitié. Ayant donc  $mg = 1$ , nos intervalles seront :

$$\text{III, II} = \frac{h}{g} \left( \frac{1}{v} + \frac{19}{3v^3} \right)$$

$$\text{II, I} = \frac{h}{g} \left( \frac{1}{v} + \frac{7}{3v^3} \right)$$

$$\text{I, A} = \frac{h}{g} \left( \frac{1}{v} + \frac{1}{3v^3} \right)$$

$$\text{A, I} = \frac{h}{g} \left( \frac{1}{v} + \frac{1}{3v^3} \right)$$

$$\text{I, 2} = \frac{h}{g} \left( \frac{1}{v} + \frac{7}{3v^3} \right)$$

$$\text{2, 3} = \frac{h}{g} \left( \frac{1}{v} + \frac{19}{3v^3} \right)$$

dans ce cas donc tant en montant au dessus du point A, qu'en descendant au dessous, ces intervalles iroient en croissant. Or ces formules ne fauroient plus avoir lieu, lorsqu'on monte trop haut, ou qu'on descende trop bas : car alors il faudra recourir à nos premières formules sans se servir de ces approximations.



LXIII. Posons donc pour ce cas  $m = \frac{1}{g}$ , & partant  $a = g$ ,  
 la hauteur du barometre à un endroit quelconque  $= \left(1 - \frac{\mu}{v}\right)h$ , &  
 à un de nos intervalles au dessus  $= \left(1 - \frac{\mu-1}{v}\right)h$ . Nous aurons  
 donc pour l'élevation du premier endroit cette équation :

$$l\left(1 - \frac{\mu}{v}\right) = -\frac{g z}{h} - \frac{g g z z}{2 h h}, \quad \& \text{ partant}$$

$$z = \frac{h}{g} \left( V\left(1 + 2 l \frac{v}{\mu - v}\right) - 1 \right)$$

& l'élevation du second, qui soit  $= z'$  fera

$$z' = \frac{h}{g} \left( V\left(1 + 2 l \frac{v}{\mu - v - 1}\right) - 1 \right)$$

Donc cet intervalle, par lequel la hauteur du barometre change de

$\left(1 - \frac{\mu}{v}\right)h$  à  $\left(1 - \frac{\mu-1}{v}\right)h$ , fera

$$\frac{h}{g} \left( V\left(1 + 2 l \frac{v}{v - \mu - 1}\right) - V\left(1 + 2 l \frac{v}{v - \mu}\right) \right)$$

Et prenant  $\mu$  négatif nous aurons pour un tel intervalle quelconque  
 au dessous de A

$$\frac{h}{g} \left( V\left(1 + 2 l \frac{v}{v + \mu - 1}\right) - V\left(1 + 2 l \frac{v}{\mu + v}\right) \right)$$

ou fort à peu près  $= \frac{h}{g(v + \mu) V\left(1 + 2 l \frac{v}{v + \mu}\right)}$



LXIV. Dans cette hypothèse il est évident, qu'à quelque profondeur qu'on descende, le barometre ne sauroit monter au delà d'une certaine hauteur, il ne sauroit même jamais atteindre la hauteur  $\equiv 2h$ ; car posant  $p \equiv 2h$ , on a pour la profondeur  $z$ , où cela doit arriver, cette équation  $12 \equiv \frac{g^2}{h} - \frac{gg^2z}{2hh}$ , dont les racines  $z \equiv \frac{h}{g} [V(1 - 212) + 1]$  sont imaginaires. La plus grande hauteur, à laquelle le barometre puisse monter, sera donc lorsque  $21 \frac{v+\mu}{v} \equiv 1$ , ou bien  $\mu \equiv v(Ve - 1)$ : donc cette plus grande hauteur du barometre sera  $\equiv hVe \equiv 1,6487h$ , à laquelle il arrivera à la profondeur  $z \equiv \frac{h}{g}$ ; & à des profondeurs plus grandes, la hauteur du barometre redeviendra plus petite: ce qui est sans doute un grand paradoxe. Mais il n'en faut pas être surpris, puisque l'hypothèse  $r \equiv \frac{c}{1 - \frac{z}{mh}}$  renferme déjà cette grande absurdité, qu'à la profondeur  $z \equiv mh$ , la chaleur est supposée infinie: d'où l'on voit que notre hypothèse, quelque bonne qu'elle soit pour la montée, ne sauroit être appliquée à des trop grandes profondeurs.

LXV. Considérons aussi le cas où  $mg \equiv 2$ , ou environ  $m \equiv 20000$ , de sorte qu'à la hauteur  $\equiv 20000h$  la chaleur soit réduite à la moitié: & nos intervalles seront:



|                                                                                        |         |                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------|---------|--------------------------------------------------------------|
| $III, II = \frac{h}{g} \left( \frac{1}{v} - \frac{5}{4v^2} + \frac{95}{24v^3} \right)$ | $\dots$ | $\frac{h}{g} \left( \frac{1}{2v^2} - \frac{5}{2v^3} \right)$ |
| $II, I = \frac{h}{g} \left( \frac{1}{v} - \frac{3}{4v^2} + \frac{35}{24v^3} \right)$   | $\dots$ | $\frac{h}{g} \left( \frac{1}{2v^2} - \frac{5}{4v^3} \right)$ |
| $I, A = \frac{h}{g} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{4v^2} + \frac{5}{24v^3} \right)$     | $\dots$ | $\frac{h}{g} \left( \frac{1}{2v^2} + 0 \right)$              |
| $A, 1 = \frac{h}{g} \left( \frac{1}{v} + \frac{1}{4v^2} + \frac{5}{24v^3} \right)$     | $\dots$ | $\frac{h}{g} \left( \frac{1}{2v^2} + \frac{5}{4v^3} \right)$ |
| $1, 2 = \frac{h}{g} \left( \frac{1}{v} + \frac{3}{4v^2} + \frac{35}{24v^3} \right)$    | $\dots$ | $\frac{h}{g} \left( \frac{1}{2v^2} + \frac{5}{2v^3} \right)$ |
| $2, 3 = \frac{h}{g} \left( \frac{1}{v} + \frac{5}{4v^2} + \frac{95}{24v^3} \right)$    |         |                                                              |

d'où l'on voit que ces intervalles décroîtront moins, plus on descend au dessous de  $A$ , & qu'ils cesseront enfin entièrement de diminuer, après quoi ils iront même en augmentant, comme dans le cas précédent  $mg = 1$ .

LXVI. Mais si  $mg < 1$ . l'ordre de ces intervalles deviendra plus irrégulier. Posons pour le faire voir  $mg = \frac{1}{2}$ , ou la hauteur, à laquelle la chaleur est réduite à la moitié,  $= 5000h$  à peu près; & nos intervalles seront :



$$\text{III, II} = \frac{h}{g} \left( \frac{1}{v} + \frac{5}{2v^2} + \frac{76}{3v^3} \right)$$

$$\text{II, I} = \frac{h}{g} \left( \frac{1}{v} + \frac{3}{2v^2} + \frac{28}{3v^3} \right)$$

$$\text{I, A} = \frac{h}{g} \left( \frac{1}{v} + \frac{1}{2v^2} + \frac{4}{3v^3} \right)$$

$$\text{A, 1} = \frac{h}{g} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{2v^2} + \frac{4}{3v^3} \right)$$

$$\text{1, 2} = \frac{h}{g} \left( \frac{1}{v} - \frac{3}{2v^2} + \frac{28}{3v^3} \right)$$

$$\text{2, 3} = \frac{h}{g} \left( \frac{1}{v} - \frac{5}{2v^2} + \frac{76}{3v^3} \right)$$

d'où l'on voit que les intervalles au dessous de A vont en croissant & que ceux au dessus de A en diminuant, mais que cette diminution devient de plus en plus petite, jusqu'à ce qu'elle évanouisse entièrement, après quoi ils redéviendront plus grands.

LXVII. On ne doit donc pas être surpris si en montant on trouve plus petits les intervalles, par lesquels le barometre descend d'une quantité donnée; & qu'en descendant on les trouve plus grands. Et puisque la chaleur, tant en montant dans l'atmosphère qu'en descendant dans les entrailles de la terre, peut suivre une loi fort irrégulière, qui s'écarte beaucoup de notre formule, on ne sera plus frappé si l'on y découvre encore une plus grande irrégularité dans les intervalles en question. De plus, cette irrégularité doit devenir encore plus grande, lorsque l'air n'est pas en équilibre, comme j'ai supposé jusqu'ici. On rencontre surtout dans les mines un vent presque continuel, d'où la grandeur des intervalles doit être fort altérée; & on fait par les principes du mouvement des fluides, que les autres circonstances demeurant les mêmes, le mouvement doit diminuer la pression, & partant la hauteur du barometre.

LXVIII. Ayant remarqué, que l'atmosphère ne sauroit être en équilibre, à moins qu'à hauteurs égales le degré de chaleur ne soit partout le même, on comprend bien qu'il doit naître un vent toutes les fois,



fois, qu'à égales hauteurs la chaleur est différente. La raison en est, que les pressions sur chaque particule de l'air ne peuvent plus être balancées par son poids. Or, si nous supposons la pression verticale en équilibre avec la gravité de chaque particule, les pressions horizontales ne peuvent pas évanouir, & partant l'air sera poussé horizontalement. Si nous consultons les formules données ci-dessus pour les trois pressions, nous appercevrons bientôt, que l'air doit être poussé du côté, où est la plus grande chaleur, de sorte qu'il doit y avoir toujours un vent des endroits, où il fait plus chaud, vers ceux où il fait plus froid à la même hauteur. Cet effet doit toujours avoir lieu dans la supposition, que les pressions verticales soient en équilibre avec la gravité.

*De l'Equilibre des fluides dans l'hypothese de la Gravité  
dirigée vers un ou plusieurs centres.*

LXIX. Lorsque les forces sollicitantes sont dirigées vers un centre fixe, & qu'elles sont proportionnelles à une fonction quelconque de la distance, de sorte qu'à égales distances elles soient aussi égales; il est évident, que les couches seront sphériques, & concentriques autour du centre de forces, & que dans l'état d'équilibre tant la pression que la densité doit être la même par toute l'étendue de chaque couche. Et si le fluide est compressible, & que la chaleur influë sur son élasticité, l'équilibre ne sauroit subsister, à moins que la chaleur ne fut la même par chaque couche. Quand cette condition n'a pas lieu, on peut conclure comme auparavant, que le fluide sera porté des endroits plus chauds aux plus froids; mais je me borne ici uniquement à la considération de l'équilibre.

LXX. Soit C le centre des forces, & à la distance  $CP = z$ , soit la force accélératrice  $= Z$  fonction quelconque de  $z$ ; comme cette force tend à diminuer la distance  $z$ , nous aurons pour nos formules  $ds = -Zdz$ , & posant la densité en  $P = q$ , & la pression exprimée par la hauteur  $= p$ , l'équilibre sera renfermé dans cette



équation  $dp = -gZdz$ . Ce que je viens de développer sur les fluides compressibles dans l'hypothèse de la gravité naturelle, s'appliquera aisément à l'hypothèse présente; & il seroit superflu, si je voulois traiter de nouveau de cette espèce de fluides. Soit donc le fluide incompressible, & sa densité partout la même  $= g$ , & notre formule donnera:  $p = C - g \int Z dz$ . Supposons qu'à la couche A, dont le demi-diamètre  $CA = a$ , la pression soit  $= 0$ , & prenant la constante C en sorte que  $p$  évanouisse, si  $z = a$ , la formule trouvée montrera à chaque distance  $CP = z$  du centre la pression; la plus haute surface, où le fluide est de niveau, fera donc sphérique, dont le rayon  $CA = a$ .

LXXI. Si la force centrale est proportionnelle à la distance, & que la force accélératrice en A soit  $= n$ , on aura  $Z = \frac{nz}{a}$ , & partant

$$p = C - \frac{ngz^2}{2a} = \frac{1}{2}nga - \frac{ngz^2}{2a} = \frac{nga}{2} \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right).$$

Donc la pression au centre même C sera  $= \frac{1}{2}nga$ ; ce qui seroit presque le cas, si toute la terre étoit formée d'eau, & qu'il n'y eut point de mouvement de rotation.

Si l'on veut supposer la force centrale réciproquement proportionnelle au quarré de la distance, on aura  $Z = \frac{naa}{z^2}$ , prenant le nombre  $n$  pour marquer la force accélératrice en A, & on aura la pression en P:

$$p = C + \frac{ngaa}{z} = \frac{ngaa}{z} - nga = nga \left(\frac{a}{z} - 1\right)$$

d'où la pression au centre C deviendroit infinie.

Fig. 9.

LXXII. Si les particules du fluide sont attirées non seulement vers le centre fixe C par la force accélératrice Z, fonction quelconque de la distance  $CM = z$ , mais qu'elles soient outre cela repoussées d'une



d'une ligne fixe ACB, qui passe par le centre C, par des forces proportionnelles aux distances depuis cet axe, de sorte qu'à la distance  $= b$  cette force soit  $= m$ ; au point M il y aura deux forces accélératrices, l'une selon MC, qui est  $= Z$ , & l'autre selon PM  $= y$ , qui est  $= \frac{my}{b}$ , ayant tiré de M la perpendiculaire MP à l'axe ACB.

Cela posé, l'effort au point M sera :  $s = -\int Z dz + \frac{myy}{2b}$ , &

partant  $ds = -Z dz + \frac{my dy}{b}$ . Donc, si la densité en M est  $= q$ , & la pression exprimée par la hauteur  $= p$ , nous aurons cette équation  $dp = -qZ dz + \frac{mqy dy}{b}$

& les couches doivent être prises en sorte, que pour chacune la quantité  $-\int Z dz + \frac{myy}{2b}$  soit une quantité constante; chaque couche fera donc une surface engendrée par la révolution d'une certaine courbe TVM autour de l'axe AB.

LXXIII. Il faut donc distinguer tout le fluide par de telles couches, & pour trouver la figure de chacune, on n'a qu'à chercher les courbes TMV, par la révolution desquelles autour de l'axe AB ces couches naissent. Or pour chacune de ces courbes, en posant CM  $= z$ ,

& PM  $= y$ , on a cette équation  $-\int Z dz + \frac{myy}{2b} = \text{Const.}$

Et comme toutes ces figures ne diffèrent entr'elles que de la valeur de la constante C, leur nature sera exprimée par la même équation différentielle  $-Z dz + \frac{my dy}{b} = 0$ . Ayant trouvé ces couches, il

faut que tant la densité que l'élasticité soit la même par toute l'étendue de chaque couche; & si le fluide est compressible, & que la chaleur influë sur son élasticité, il faut aussi que la même chaleur règne par



l'étendue de chaque couche: sans cette dernière condition, l'équilibre ne feroit pas même possible.

LXXIV. Or, supposons le fluide incompressible, & que sa densité soit par tout la même  $q = g$ , & la pression en M sera exprimée par la hauteur  $p = C - g \int Z dz + \frac{mgyy}{2b}$ .

Donc, si ADB représente la couche la plus haute, où le fluide est censé être de niveau, il faut C déterminer en sorte, que si l'on rapporte  $z$  &  $y$  à cette couche, la valeur de  $p$  évanouisse. Donc, si l'équation pour la dernière couche est :

$$- \int Z dz + \frac{mgyy}{2b} = A$$

la pression à toute autre couche sera :

$$p = -Ag - g \int Z dz + \frac{mgyy}{2b}.$$

D'où l'on voit que par toute l'étendue de chaque couche la pression est la même : & si nous considérons la couche, dont la nature est ex-

primée par cette équation :  $-\int Z dz + \frac{mgyy}{2b} = L$ ,

la pression dans cette couche sera partout  $p = (L - A)g$ .

LXXV. Soit la force centrale proportionnelle aux distances, ou  $Z = \frac{nz}{b}$ , de sorte que  $\int Z dz = \frac{nz^2}{2b}$ . On aura donc pour cha-

que couche cette équation  $\frac{mgyy - nz^2}{2b} = \text{Const.}$  qui est ou pour une ellipse, lorsque  $m < n$ , ou pour une hyperbole lorsque  $m > n$ , ou pour deux lignes droites parallèles & perpendiculaires à l'axe AB, lorsque  $m = n$ . Or en général la pression à un point quelconque M sera  $p = g \left( \frac{mgyy - nz^2}{2b} - A \right)$  : ou bien,

si nous

si nous posons l'abscisse  $CP = x$ , à cause de  $zz = xx + yy$ , nous aurons cette équation pour la pression :

$$p = g \left( \frac{(m - n)yy - nxx}{2b} - A \right)$$

où il faut remarquer, que là où cette formule est négative, le fluide ne sauroit exister : il n'occupera que les endroits, où la valeur de cette formule est positive, & sera terminé là où elle évanouit, de sorte que pour la dernière surface du niveau, on aura cette équation :

$$(m - n)yy - nxx - 2Ab = 0.$$

LXXVI. Commençons par considérer le cas, où  $m = n$ , & il n'y aura point d'équilibre, à moins que  $A$  ne soit une quantité négative : soit donc  $A = -\frac{n a a}{2b}$ , pour avoir

$$p = \frac{ng}{2b} (aa - xx).$$

Dans ce cas donc, le volume du fluide résultera par la révolution de l'espace indéterminé ABEF, compris entre les deux parallèles AE & BF, perpendiculaires à l'axe AB, & de part & d'autre également distantes du centre C, de sorte que  $CA = CB = a$ . Il sera donc terminé par deux plans infinis EAE & FBF, où la pression évanouit. Entre ces deux plans il y aura par tout une pression positive, & par toute l'étendue de chaque plan perpendiculaire à l'axe la même ; ainsi dans, le plan MPM, la pression sera  $= \frac{ng}{2b} (CA^2 - CP^2)$  :

Fig. 10.

& au plan qui passe par le centre C la pression sera  $= \frac{ng}{2b} \cdot CA^2$ , & partant la plus grande.

LXXVII. Si  $m$  est plus grand que  $n$ , ou  $m - n$  positif, il y aura trois cas à considérer, selon que la constante  $A$  est positive



tive, ou négative, ou zero. Soit premièrement  $A = 0$ , & la pression sera

$$p = \frac{g}{2b} [(m-n)yy - nxx]$$

d'où nous tirons pour les surfaces, où la pression est nulle, ces deux

Fig. 11. équations  $y = x\sqrt{\frac{n}{m-n}}$ , &  $y = -x\sqrt{\frac{n}{m-n}}$ , qui sont pour deux lignes droites ECF, également inclinées à l'axe AB, & qui passent par le centre C, la tangente de leur inclination à l'axe, ou de l'angle ACE, étant  $= \sqrt{\frac{n}{m-n}}$ , & le sinus  $= \sqrt{\frac{n}{m}}$  : & ainsi les couches de niveau feront les deux surfaces coniques ECF. Pour les autres couches, où la pression est la même, on aura cette équation :  $(m-n)yy - nxx = cc$ , la pression y étant  $= \frac{g}{2b}cc$ . Cette couche sera donc engendrée par la révolution d'une hyperbole MVM entre les asymptotes EE & FF, & à cause de  $cc = (m-n)CV^2$ , la pression par toute cette couche sera  $= \frac{(m-n)g \cdot CV^2}{2b}$ .

LXXVIII. Soit en second lieu A une quantité positive  $= (m-n)aa$ , pour avoir la pression

$$p = \frac{g}{2b} [(m-n)yy - nxx - (m-n)aa]$$

Fig. 12. & la surface où le fluide est à niveau, ou la pression nulle, sera engendrée par la révolution de l'hyperbole EDE, décrite entre les asymptotes Ce, Ce, également inclinées à l'axe AB, le sinus de leur inclinaison, ou de l'angle ACe, étant  $= \sqrt{\frac{n}{m}}$ , comme auparavant, & le demi-axe CD  $= a$  : le fluide remplira l'espace formé par la révolution de l'aire hyperbolique infinie EDEdE. Les autres couches feront formées par toutes les autres hyperboles MVM décrites entre les mêmes asymptotes, dont le demi-axe CV est plus grand que CD, & la pression y sera  $= \frac{(m-n)g}{2b} (CV^2 - CD^2)$ .

LXXIX.

**LXXIX.** Enfin, si  $A$  est une quantité négative  $= -naa$ , la pression étant  $p = \frac{g}{2b}[(m-n)yy - nxx + naa]$ , la surface de niveau est engendrée par la révolution de l'hyperbole  $naa = nxx - (m-n)yy$ , ou plutôt des deux hyperboles conjuguées  $AE$ ,  $BF$ , décrites sur l'axe même  $AB = 2a$ , dont les asymptotes  $Ce$ ,  $Cf$  sont inclinées à l'axe de l'angle  $ACe$ , duquel le sinus  $= \sqrt{\frac{n}{m}}$ . Le fluide occupera tout l'espace infini  $EABF$ , renfermé entre les deux hyperboles conjuguées  $AE$  &  $BF$ , concevant cet espace tourné autour de l'axe  $AB$ . Les couches de cet espace feront aussi formées par toutes les autres hyperboles conjuguées  $VM$ ,  $VM$ , décrites entre les mêmes asymptotes, dont l'axe  $VV$  est moindre que  $AB$ , & la pression y fera  $= \frac{ng}{2b}(CA^2 - CV^2)$ . L'espace conique formé par les asymptotes mêmes  $Ce$ ,  $Cf$ , donnera donc aussi une couche, où la pression fera  $= \frac{ng}{2b}.CA^2$ . Mais outre cela toutes les hyperboles  $NWN$ , décrites entre les asymptotes  $eCf$ , donneroit aussi des couches à l'infini; & la pression dans une telle couche fera  $= \frac{g}{2b}[n.CA^2 + (m-n)CW^2]$ : d'où l'on voit qu'en s'éloignant par la ligne  $CD$ , la pression va toujours en augmentant, & même jusqu'à l'infini; ce qui arrive aussi dans les deux cas précédens, où la distance  $CV$  peut croître jusqu'à l'infini. Dans tous ces cas le fluide s'étend à l'infini.

Fig. 13.

**LXXX.** Supposons enfin  $n > m$  ou  $m-n < 0$ , & la pression ne sauroit devenir positive, à moins que  $A$  n'ait une valeur négative.

Soit donc :  $p = \frac{g}{2b}[aa - nxx - (n-m)yy]$ ,

& la couche de niveau fera une surface elliptique  $ADB$ , où

$CA$

Fig. 9.

$CA = CB = \frac{a}{\sqrt{n}}$ , &  $CD = \frac{a}{\sqrt{(n-m)}}$ ; de sorte que  $CD > CA$ .

Le fluide remplira donc la cavité de cet ellipsoïde, dont  $CD$  représente le demi-diametre de l'équateur. Toutes les autres couches comme  $VMT$ , seront aussi des ellipses semblables, plus petites, & si l'équation en est  $n x x + (n-m) y y = c c$ ,

la pression de cette couche sera  $= \frac{g}{2b} (a a - c c)$ , ou puisque

$a a = n . CA^2$ , &  $c c = n . CV^2$ , elle est  $= \frac{n g}{2b} (CA^2 - CV^2)$ .

Ce cas approche fort de la figure de la Terre, ou autre Planete, qui par son mouvement de rotation produit la force centrifuge, dont toutes les particules sont repoussées de l'axe  $AB$ , & cela proportionnellement aux distances de cet axe, comme j'ai supposé. Or, si ce mouvement d'une masse fluide peut subsister, ou non? c'est une question, qui ne sauroit être décidée ici, où je me contente de regarder la force centrifuge comme une force particuliere, qui agit sur le fluide en repos.

LXXXI. Ce sont donc les figures, qu'une masse fluide doit recevoir, dont les particules sont attirées à un centre fixe en raison des distances, & en même tems repoussées d'un axe fixe aussi en raison des distances; où j'ai introduit ces dernieres forces pour tenir lieu de la force centrifuge, qui agiroit sur le fluide, s'il tournoit d'un mouvement donné autour de cet axe. Pour éclaircir cette matiere davantage, je substituerai au lieu de cette force centrale une autre, qui pousse le fluide au centre  $C$ , en raison réciproque des quarrés des distances, en laissant l'autre force centrifuge inaltérée. Soit donc comme ci-dessus, la force centrale  $Z = \frac{n a a}{z z}$ , pour avoir son effort  $\int Z dz = - \frac{n a a}{z}$ , & supposant la densité du fluide partout la même  $= g$ , à un endroit quelconque  $M$ , dont la distance au centre  $C$  est  $CM = z$ , & à l'axe  $AB$



AB la distance  $PM = y$ , la pression sera exprimée par la hauteur  $p$ , dont la valeur est  $p = g \left( \frac{naa}{z} + \frac{myy}{2b} - na \right)$ .

LXXXII. Il est clair que la constante  $C$  doit être prise négative, puisque d'ailleurs la pression ne sauroit nulle part évanouir. Ainsi nous aurons pour la dernière couche, où le fluide est de niveau, ou  $p = 0$ , cette équation :

$$\frac{naa}{z} + \frac{myy}{2b} = na, \text{ ou } z = \frac{2naab}{2nab - myy},$$

or pour toute autre couche, où la pression est positive, on aura :

$$\frac{naa}{z} + \frac{myy}{2b} > na, \text{ ou } z < \frac{2naab}{2nab - myy}.$$

Je remarque ici d'abord que pour chercher ces figures, on se tromperoit, si l'on vouloit ramener cette équation à des coordonnées orthogonales  $CP = x$ , &  $PM = y$ , en substituant  $z = \sqrt{xx + yy}$ , d'où l'on tireroit une ligne du sixième ordre ; car il est clair que cette même ligne répondroit aussi à l'équation  $z = \frac{2naab}{2nab - myy}$ .

Or ce seroit le cas, où les particules du fluide seroient repoussées du centre en raison réciproque du carré des distances, & partant l'équation rationnelle du sixième degré entre  $x$  &  $y$  comprendroit conjointement deux hypothèses différentes, l'une des forces centrales attirantes, & l'autre des forces centrales repoussantes.

LXXXIII. Donc, pour écarter ce dernier cas, il ne faut donner à la distance  $z$  que des valeurs positives, & partant il n'est pas permis de lui substituer la valeur radicale  $\sqrt{xx + yy}$ , puisqu'alors après la réduction à la rationalité on ne feroit plus le maître de séparer les cas, où la valeur de  $z$  deviendrait négative dans l'équation fondamentale. On sera surpris qu'une telle équation finale puisse contenir plus que le problème qui l'avoit fournie, ne renferme : mais il faut con-



Fig. 14.

fidérer que l'hypothese même de l'attraction en raison réciproque du quarré des distances, renferme déjà quelque chose, dont le principe de continuité est choqué. Car, soit sur la droite OM le centre de force C un point fixe O, & un corps en M; posons la distance OC =  $a$ , OM =  $u$ , & le corps M fera poussé de droite à gauche, ou vers O, par la force  $= \frac{A}{(u-a)^2}$ : or il est clair que, si  $u < a$ , ou qu'on pose ON =  $u$ , cette expression étant encore positive marqueroit, que le corps N feroit encore poussé de droite à gauche contre la teneur de l'hypothese, de sorte que l'hypothese même est en quelque maniere contredite par le calcul; ce qui n'arrive pas dans le cas, où la force centrale est proportionnelle aux distances mêmes.

LXXXIV. Cela remarqué, considérons l'équation pour une couche quelconque, où la pression est positive, qui est

$$\frac{naa}{z} + \frac{myy}{2b} = nc, \quad \text{ou} \quad z = \frac{2naab}{2nbc - myy}$$

supposant  $c > a$ , & la pression par cette couche sera  $p = ng(c-a)$ , d'où l'on voit que prenant  $c = a$ , on trouvera la surface de niveau. Mais, puisque chaque couche peut devenir celle de niveau, il conviendra d'examiner toutes les figures, que toutes les valeurs possibles de  $c$  fournissent; & quelle que soit la valeur de  $c$ , qui donne la couche de niveau, toutes les valeurs plus grandes donneront les couches, où la pression est positive; & l'excès de la valeur de  $c$  sur celle-là, étant multipliée par  $ng$ , montrera la pression. Or, puisque  $z$  ne sauroit être prise négativement, je remarque d'abord, que  $y$  doit toujours être plus petite que  $\sqrt{\frac{2nbc}{m}}$ , ce qui est la limite du fluide autour de l'axe: mais il faut de plus que la distance  $z$  soit plus grande que  $y$ .

LXXXV. Commençons par les plus petites valeurs de  $c$ , & il est clair que si  $c = 0$ , notre équation ne sauroit subsister, à moins qu'il



qu'il ne fut  $y = 0$ , &  $z = \infty$ , cette couche se réduit donc à deux lignes droites situées sur l'axe même, & qui sont de part & d'autre infiniment éloignées du centre C. Pour tous les autres cas, en posant

$y = 0$ , on a  $z = \frac{aa}{c}$ , d'où l'on voit que chaque couche traverse Fig. 15.

l'axe en deux points également éloignés du centre C, & dont la distance sera d'autant plus grande, plus la ligne  $c$  est prise petite. Puisque de part & d'autre du centre C les figures sont les mêmes, il suffit de borner nos recherches à un côté du centre C sur l'axe CA; soit donc CA la valeur de  $z$  en posant  $y = 0$ , qu'une petite valeur de  $c$  donne, & de plus grandes donneront CE, CF, &c. de plus en plus petites, comme la position  $c = 0$ , a rendu la valeur de  $z$  infinie.

LXXXVI. Pour trouver la courbe qui passe par le point A, donnons à  $y$  une valeur extrêmement petite, & nous aurons fort à peu

près  $z = \frac{aa}{c} + \frac{ma^2}{2nbc^3}yy$ , ayant  $CA = \frac{aa}{c}$ .

Soit  $PM = y$ , &  $AP = x$ , & puisque  $CM = z$ , à cause de

$$zz = \left(\frac{aa}{c} + x\right)^2 + yy,$$

nous trouverons en négligeant  $xx$ , & les plus hautes puissances de  $y$ , cette équation :

$$\frac{a^4}{cc} + \frac{ma^4}{nbc^3}yy = \frac{a^4}{cc} + \frac{2aax}{c} + yy,$$

qui se réduit à  $x = \frac{cyy}{2aa} \left( \frac{ma^4}{nbc^3} - 1 \right)$ .

Donc, tant que  $c$  est pris si petit, que  $\frac{ma^4}{nbc^3} > 1$ , la valeur de  $x$  sera positive, & la courbe tournera sa convexité vers le centre C, & le rayon de sa courbure en A sera  $= \frac{n a a b c c}{m a^4 - n b c^3}$ . Cette



courbe s'éloignera donc de plus en plus du centre  $C$ , & s'étendra du côté de l'axe  $CA$  prolongé à l'infini, où la plus grande distance de cet axe sera  $y = \sqrt{\frac{2nbc}{m}}$ , à laquelle répond  $z = \infty$ ; elle aura donc une asymptote parallèle à l'axe, qui en est éloignée de l'intervalle  $= \sqrt{\frac{2nbc}{m}}$ .

LXXXVII. Pour démontrer cette étendue uniforme de la courbe  $AMN$  à l'infini, considérons en une appliquée quelconque  $QN$ , moindre que  $\sqrt{\frac{2nbc}{m}}$ , & soit  $yy = \frac{2(1-v)nbc}{m}$ , posant  $v < 1$ , mais pourtant  $v > 0$ , & le point  $N$  sera réel, pourvu que la distance  $CN = z$ , soit plus grande que  $QN = y$ . Or, posant cette valeur pour  $yy$ , on aura  $z = \frac{aa}{vc}$ , & puisque par hypothèse  $ma^4 > nbc^3$ , il est évident que  $zz = \frac{a^4}{vvc^3}$  est toujours plus grand que  $yy = \frac{2(1-v)nbc}{m}$ , ou  $ma^4 > 2vv(1-v)nbc^3$ . Car la plus grande valeur de  $2vv(1-v)nbc$  est  $\frac{8}{27}nbc^3$ , qui provient si  $v = \frac{2}{3}$ . Donc, non seulement quand  $ma^4 > nbc^3$  mais pourvu qu'il soit  $ma^4 > \frac{8}{27}nbc^3$ , à toute distance  $y < \sqrt{\frac{2nbc}{m}}$  répond une valeur  $z > y$ , & partant tous les points  $N$  de la courbe  $AMN$  seront réels. Cette propriété est donc commune à tous les cas, où  $c < \frac{2}{3}a\sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$ . quand même  $c$  fera plus grand que  $a\sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$ . Mais, si  $c > \frac{2}{3}a\sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$ , la courbe n'aura pas des parties, qui répondent à toutes les distances  $y$  moindres que  $\sqrt{\frac{2nbc}{m}}$ .

LXXXVIII.



LXXXVIII. Mais il faut démontrer de plus, qu'en augmentant les appliquées  $y$  depuis zero jusqu'à leur plus grande valeur  $\sqrt[3]{\frac{2nbc}{m}}$ , les abscisses  $AQ$  ou  $CQ$  vont toujours en augmentant, dans le cas que nous considérons à présent, où  $ma^4 > nbc^3$ , ou  $c < a\sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$ . Soit pour cet effet  $ma^4 = \lambda nbc^3$  posant  $\lambda > 1$ , & nous aurons  $CQ^2 = az - yy = \frac{\lambda nbc}{vv m} - \frac{2(1-v)nbc}{m}$ , & il s'agit de faire voir, que cette quantité devient plus grande, plus on diminue la fraction  $v$ . Or en diminuant  $v$  cette quantité va en augmentant, quand celle-cy  $\frac{\lambda}{vv} + 2v$  prendra des accroissemens continuels. Posons  $v - dv$  pour  $v$ , & l'accroissement sera  $2\left(\frac{\lambda}{v^3} - 1\right)dv$ , qui est par conséquent toujours positif, pourvu que  $v^3 < \lambda$ , ce qui arrive évidemment dans le cas présent, puisque  $v < 1$ , &  $\lambda > 1$ . D'où nous voyons que si  $\lambda = 1$ , ou  $c = a\sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$ , l'accroissement de l'abscisse n'évanouit qu'au premier instant, qui soit en  $E$ , où la courbure évanouit, & de là la courbe suivra un trait semblable  $Emu$ , qui s'étend à l'infini tout comme dans les cas, où  $c < a\sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$ .

LXXXIX. Nous voilà donc arrivés à la connoissance de toutes les couches qui coupent l'axe au delà du point  $E$ , posant pour ce point  $c = a\sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$ , ou la distance même  $CE = a\sqrt[3]{\frac{nb}{ma}}$ , & toutes ces couches s'étendent uniformément à l'infini, comme elles sont représentées dans la figure. Pour approcher plus du centre, posons  $c > a\sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$ , mais pourtant  $c < \frac{3}{4}a\sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$ ; de sorte que  $\lambda < 1$ , &  $\lambda > \frac{8}{27}$ :



& chaque distance  $y$  moindre que  $\sqrt[3]{\frac{2nbc}{m}}$ , donnera un point réel de la courbe. Mais, pendant que les appliquées croissent, les abscisses diminueront depuis le commencement par quelque intervalle tant que  $v^3 > \lambda$ . Soit F le point, où  $c = \frac{2}{3} a \sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$ , ou  $CF = \frac{2}{3} a \sqrt[3]{\frac{nb}{ma}}$ , & la figure de la couche qui passe par ce point s'approchera d'abord de la perpendiculaire CD, & la touchera même au point D, d'où elle réjaillit quasi, & depuis s'éloignera de CD en allant par  $v$  à l'infini, & s'approchant de plus en plus de son asymptote parallèle à l'axe. Les autres couches entre E & F prendront une route presque semblable, avec cette différence, qu'elles ne parviennent pas jusqu'à la droite CD, & qu'elles ont un point d'inflexion.

XCX. Mais, lorsque  $c > \frac{2}{3} a \sqrt[3]{\frac{ma}{nb}}$ , ou bien  $\lambda < \frac{8}{27}$ , il y aura des valeurs de  $y$  moindres que  $\sqrt[3]{\frac{2nbc}{m}}$ , auxquelles ne répond aucune partie de la courbe. Car nommant l'abscisse prise sur l'axe depuis le centre  $C = x$ , & posant  $yy = \frac{2(1-v)nbc}{m}$ , nous avons trouvé

$$xx = \frac{nbc}{m} \left( \frac{\lambda}{vv} - 2 + 2v \right).$$

Donc, lorsque  $\frac{\lambda}{vv} + 2v = 2$  l'abscisse  $x$  évanouit, & lorsque

$\frac{\lambda}{vv} + 2v < 2$  elle devient imaginaire. Or, si  $\lambda = \frac{8}{27}$ , l'équation

$\frac{\lambda}{vv} + 2v = 2$  a deux racines égales chacune  $v = \frac{2}{3}$ , la troisième

étant négative  $v = -\frac{1}{3}$ , & partant inutile; ce qui est le cas précédent, où le point D tombe en CD, à laquelle ligne les deux branches



ches  $FD$  &  $\nu\mu$  sont inclinées d'un angle de  $60$  degrés. Mais, si  $\lambda < \frac{8}{27}$ , l'équation  $\frac{\lambda}{\nu\nu} + 2\nu = 2$  aura deux racines inégales positives dont l'une & l'autre donne un point dans la ligne  $CD$ , par lesquels la couche passe, comme  $H$  &  $I$ . Cette couche deviendra donc double, l'une semblable à un quart d'ellipse  $GH$ , & l'autre passera de  $I$  par  $K$  à l'infini, en s'éloignant de l'axe  $CA$ , & s'approchant de son asymptote, dont la distance à l'axe est  $= \sqrt{\frac{2nb^2}{m}}$ .

XCI. Voilà donc les figures des principales couches, qu'on doit distinguer dans le fluide dans l'hypothèse proposée. D'abord en  $E$ , prenant  $CE = a\sqrt[3]{\frac{nb}{ma}}$ , & plus loin du centre  $C$  les couches sont formées de la révolution des courbes  $Emn$ ,  $AMN$  autour de l'axe  $CA$ , ces courbes s'éloignant tant du centre  $C$ , que de la droite  $CD$ , qui est tirée sur l'axe au centre  $C$  perpendiculaire. Ensuite, depuis  $E$  jusqu'en  $CF = \frac{2}{3}a\sqrt[3]{\frac{nb}{ma}}$ , ou  $CF = \frac{2}{3}CE$ , ces courbes seront plus irrégulières comme  $em'n'$ , &  $fd\nu'$ , en s'approchant au commencement de la ligne  $CD$ . Or la courbe qui aboutit en  $F$ , parvient jusqu'à la droite  $CD$  en  $D$ , de sorte que  $CD = \frac{1}{2}CF$ , faisant en  $D$  l'angle  $CDF$  de  $60^\circ$ , d'où elle rebrousse en  $\nu$ , faisant aussi l'angle  $ID\nu$  de  $60^\circ$ . Cette branche  $D\nu$  ne peut pas être censée la continuation de la branche  $FD$ , ce qui seroit contraire à la loi de continuité; mais il faut considérer, qu'à l'autre côté de la ligne  $CD$  se trouvent des courbes pareilles, &  $D\nu$  est la continuation de la branche semblable à  $FD$ , qui est de l'autre côté de  $CD$ .

XCII. Aux points  $G$  qui sont encore plus proches du centre  $C$ , les couches  $GH$  &  $gh$  passent perpendiculairement par la droite  $CD$ , & sont semblables à des quarts d'ellipse. Or il faut remarquer, que dans toutes ces courbes la raison entre  $CH$  &  $CG$  est moindre que celle



celle de 3 à deux, & plus le point *G* approche du centre *C*, plus ce rapport approche de la raison d'égalité, de sorte que dans cette hypothese il feroit impossible que le diametre de l'équateur d'une Planete surpassât plus de la moitié son axe. Mais chacune de ces couches *GH* est accompagnée d'une autre *IK*, qui s'étend à l'infini, & où la pression est la même, quoique ces couches ne soient nullement liées ensemble; ainsi à la couche *gh* appartient encore la couche *ik*, qui s'en éloigne d'autant plus, plus celle-là devient petite. De cette maniere tout l'espace du centre *C* est partagé en couches, & on ne sauroit marquer aucun point, par lequel ne passe une couche.

XCIII. Autour d'un tel centre le fluide peut donc être en équilibre sous plusieurs formes différentes; il aura une figure terminée de toute part, lorsque la couche de niveau est une de celles qui sont représentées par *GH*; car alors tout l'espace *GCH* étant rempli de fluide se trouvera en équilibre, & pourra être considéré comme une Planete. Donc, une telle Planete ne sauroit subsister, à moins que la moitié de son axe *CG* ne fut plus petite que  $\frac{2}{3}a\sqrt[3]{\frac{nb}{ma}}$ ; car si *CG* devenoit égale à  $\frac{2}{3}a\sqrt[3]{\frac{nb}{ma}}$ , la Planete seroit sous l'équateur en *D* pointue. Si *fd'* étoit la couche de niveau, le fluide devroit être étendu vers *v'* à l'infini; mais s'il étoit entouré, par exemple, en *do* d'une croute ferme, l'équilibre pourroit avoir lieu, ce qu'il faut entendre de toutes les autres couches *Em*, *AM*, étant prises pour celles de niveau. Sans cette condition tout l'espace devroit être rempli de fluide à l'exception de l'espace conoïdique *VEN*, ou *VAN*.

XCIV. Il y a encore à remarquer que cette hypothese renferme de tels cas d'équilibre, où tout l'espace autour de l'axe *CV* seroit vuide de fluide. Cela arrive si l'on prend pour le niveau la couche *Dv*, ou toute autre au dessus *IK*; car alors tout l'espace étant rempli de fluide, & qu'il n'y eut de vuide que l'espace conoïdique formé



mé par la révolution de la courbe  $Dv$  ou  $IK$  autour de l'axe, cette masse de fluide seroit en équilibre. Pour mieux comprendre cela, qu'on conçoive tout l'espace autour de  $C$  en tout sens plein de fluide, & il n'y a aucun doute que cette masse ne soit en équilibre; ce seroit notre premier cas, où  $c = 0$ . Ensuite, qu'on retranche de cette masse infinie une portion quelconque renfermée dans une des couches trouvées, & le reste demeurera en équilibre. Les parties qu'on pourra retrancher de cette manière sont les solides formés par la révolution de quelqu'une des aires suivantes :

$VAN$ ,  $VEN$ ,  $Ven'$ ,  $Vfdv'$ ,  $VFDv$ ,  $VCDv$ , &c.

d'où l'on voit sous combien de figures différentes le fluide pourroit être en équilibre dans l'hypothèse, que je viens de considérer.

