



É L É M E N S
DE LA TRIGONOMETRIE SPHEROÏDIQUE
TIRÉS DE LA MÉTHODE DES PLUS GRANDS
ET PLUS PETITS.

PAR M. EULER.

I.

Ayant établi les Elémens de la Trigonométrie Sphérique sur le principe des plus grands & plus petits, mon but principal étoit de fixer un tel principe général, duquel on pût tirer la résolution des triangles formés non seulement sur une surface sphérique, mais en général sur une surface quelconque. Puisque les côtés d'un triangle sphérique sont des arcs de grands cercles, qui étant les lignes les plus courtes, qu'on puisse tirer sur la surface d'une sphère d'un point à un autre; c'est sur le même pied que j'envisage les côtés d'un triangle décrit sur une surface quelconque, de sorte qu'ils soient les chemins les plus courts, qui conduisent d'un angle à un autre sur cette surface. Ainsi concevant trois points sur une surface quelconque, qu'on tire de chacun aux autres les lignes les plus courtes, & le triangle sera formé, dont il s'agit d'enseigner la résolution.

2. Or je me borne ici aux surfaces sphéroïdiques, qui sont formées par la révolution d'une ellipse autour d'un de ses axes, & je considérerai en particulier les triangles formés sur la surface de la terre par des côtés, qui sont les plus courts entre leurs termes. Car, soit qu'on forme les côtés par des cordes tendues d'un point à l'autre, ou qu'on les tire en suivant la direction des rayons de lumière, en sorte que le
plan



plan qui contient deux élémens contigus quelconques, soit partout perpendiculaire à la surface de la Terre, ils représenteront le chemin le plus court d'un bout à l'autre. C'est aussi en effet la méthode qu'on suivroit dans la pratique, s'il falloit tirer la ligne la plus courte d'un point à un autre sur la surface de la terre; & quand on parle dans la Géographie de la distance entre deux lieux, on entend toujours le plus court chemin qui conduit de l'un à l'autre. Il faut donc bien distinguer ce plus petit chemin, de la loxodromie qu'on suit dans la navigation, & qui demande des recherches particulières.

3. Soit donc AEB la demi-ellipse, par la révolution de laquelle autour de l'axe ACB résulte le sphéroïde de la Terre; & posons le demi-axe CA = CB = a; & le demi-diamètre de l'équateur CE = e. Or la demi-ellipse AEB représentera un méridien quelconque, & quelque point qu'on puisse concevoir sur la surface de la terre, pour en connoître la situation, il faut considérer le méridien qui passe par ce point, qui soit M: & alors on aura trois choses à déterminer. 1°. La distance de ce point M à l'axe, ou la perpendiculaire MQ. 2°. Sa distance au plan de l'équateur mesurée par la perpendiculaire MP égale à CQ: & 3°. La latitude ou l'élevation du pôle observée dans cet endroit. On voit bien que connoissant une de ces trois choses, il est aisé de déterminer les deux autres par les propriétés de l'ellipse. Ensuite il conviendra encore de chercher le rayon osculateur du méridien au point M, avec la quantité de l'arc du méridien MA, dont ce point est éloigné du pôle A.

Fig. 1.

4. Soit CP = MQ = x, PM = CQ = y, & on aura:

$$y = \frac{a}{e} \sqrt{(ee - xx)} \quad \text{donc} \quad dy = -\frac{ax dx}{e \sqrt{(ee - xx)}}.$$

Qu'on tire maintenant la droite MN perpendiculaire au méridien, laquelle marquant la direction de la gravité, l'angle ENM mesurera la latitude, ou l'élevation du pôle à l'endroit M. Posons donc cet



angle $ENM = \Phi$, qui est ordinairement le premier élément qu'on connoisse : & ayant la sous - normale $PN = -\frac{y \cdot dy}{dx} = \frac{aa}{ee} x$,

nous en tirons : $\text{tang } \Phi = \frac{PM}{PN} = \frac{e\sqrt{(ee - xx)}}{ax}$, & partant :

$$CP = x = \frac{ee \text{ cof } \Phi}{\sqrt{(aa \text{ fn } \Phi^2 + ee \text{ cf } \Phi^2)}}, \quad \& \quad PM = y = \frac{aa \text{ fn } \Phi}{\sqrt{(aa \text{ fn } \Phi^2 + ee \text{ cf } \Phi^2)}}.$$

D'où connoissant la latitude d'un endroit M, on en déterminera aisément sa distance tant de l'axe de la Terre, que du plan de l'équateur. De là on pourra aussi assigner la distance de ce point M au centre de

la Terre C, ou la droite $CM = \sqrt{\frac{a^4 \text{ fn } \Phi^2 + e^4 \text{ cof } \Phi^2}{aa \text{ fn } \Phi^2 + ee \text{ cof } \Phi^2}}$, & l'an-

gle CMN, que cette droite fait avec la direction de la gravité MN,

car on trouve :

$$\text{tg CMN} = \frac{(ee - aa) \text{ fn } \Phi \text{ cf } \Phi}{aa \text{ fn } \Phi^2 + ee \text{ cf } \Phi^2}, \quad \& \quad \text{fin CMN} = \frac{(ee - aa) \text{ fn } \Phi \text{ cof } \Phi}{\sqrt{(a^4 \text{ fn } \Phi^2 + e^4 \text{ cf } \Phi^2)}}.$$

5. Cherchons aussi le rayon osculateur MO, dont l'expres-

sion posant $\frac{dy}{dx} = p$, est $MO = -\frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$. Or ayant

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{aa x}{ee y}, \quad \text{on aura } p = -\frac{\text{cof } \Phi}{\text{fn } \Phi}, \quad \& \quad dp = \frac{d\Phi}{\text{fn } \Phi^2},$$

& de plus $\sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\text{fn } \Phi}$, donc $(1+pp)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\text{fn } \Phi^3}$,

$$\& \text{ partant } \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp} = \frac{1}{d\Phi \text{ fn } \Phi}.$$

Mais



Mais à cause de $x = \frac{ee \operatorname{cof} \Phi}{\sqrt{(aa \sin \Phi^2 + ee \operatorname{cof} \Phi^2)}}$, nous aurons :

$$dx = \frac{aa ee d\Phi \sin \Phi}{(aa \sin \Phi^2 + ee \operatorname{cof} \Phi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Par conséquent le rayon osculateur sera

$$MO = \frac{aa ee}{(aa \sin \Phi^2 + ee \operatorname{cof} \Phi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Donc, si nous prenons sur le même méridien un point infiniment proche m , dont la latitude soit $= \Phi + d\Phi$, l'élément Mm sera un arc de cercle décrit du rayon MO , dont la longueur est

$$Mm = \frac{aa ee d\Phi}{(aa \sin \Phi^2 + ee \operatorname{cof} \Phi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

6. L'intégrale de cette formule donnera la longueur de l'arc elliptique EM , & pour en trouver la valeur approchée on n'a qu'à mettre $\sin \Phi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{cof} 2\Phi$ & $\operatorname{cof} \Phi^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{cof} 2\Phi$, pour

avoir
$$Mm = \frac{aa ee d\Phi}{\left[\frac{1}{2}(aa + ee) + \frac{1}{2}(ee - aa) \operatorname{cof} 2\Phi\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Car, puisque $ee - aa$ est extrêmement petit par rapport à $aa + ee$

en posant $\frac{ee - aa}{aa + ee} = \delta$, notre formule se change en

$$Mm = \frac{2aa ee d\Phi \sqrt{2}}{(aa + ee)^{\frac{3}{2}}} (1 + \delta \operatorname{cof} 2\Phi)^{-\frac{3}{2}},$$

dont l'intégrale à cause de

$$(1 + \delta \operatorname{cof} 2\Phi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \delta \operatorname{cof} 2\Phi - \frac{3}{8} \delta^2 \operatorname{cof}^2 2\Phi + \frac{1}{16} \delta^3 \operatorname{cof}^3 2\Phi, \text{ fera}$$



$$EM = \frac{2aaeeV2}{(aa+ee)^{\frac{3}{2}}} [(1 + \frac{1}{2}\delta\delta)\Phi - \frac{1}{2}\delta\sin 2\Phi + \frac{1}{8}\delta\delta\sin 4\Phi]$$

expression qui satisfait très à peu près, & on pourroit même encore rejeter les termes affectés par le quarré de δ .

7. On peut aussi se servir de la formule différentielle pour déterminer la grandeur de chaque degré du méridien: on n'aura qu'à donner à $a\Phi$ la valeur d'un degré, ou la 180^{me} partie de 3,14159265, qui est la longueur de l'arc de 180° le rayon étant posé = 1. On mettra donc $a\Phi = 0,017453292$, & Φ marquera la latitude au milieu de ce degré. Alors la grandeur de ce degré

$$\text{fera} = \frac{2aaee\delta\Phi V2}{(aa+ee)^{\frac{3}{2}}} (1 - \frac{1}{2}\delta\cos 2\Phi)$$

en négligeant les quarrés de δ , & cette formule suffit pour déterminer à chaque élévation du pôle la grandeur d'un degré du Méridien. De là on pourra donc aussi réciproquement déterminer la grandeur des deux demi-diamètres de la Terre par la mesure actuelle de quelques degrés, en supposant que la figure de la Terre soit un spherôide elliptique. Deux degrés mesurés seroient suffisans pour cet effet, si la mesure étoit exacte au dernier point: mais, puisqu'une erreur d'une seconde en produit une de 16 toises environ dans la grandeur du degré; il sera bon d'y employer plusieurs degrés mesurés en avouant à chacun une petite erreur de 32 toises au moins, pour mettre ensuite d'accord les conclusions.

8. Posons pour abrégér $\frac{2aaee\Phi V2}{(aa+ee)^{\frac{3}{2}}} = A$, puisque cette

quantité est la même pour tous les degrés; & les mesures d'un degré faites au Perou, au Cap, en France & en Laponie nous fourniront les quatre équations suivantes.

$$A(1 - \frac{3}{2} \delta \cos 1^\circ) = 56753 + p \text{ Toises}$$

$$A(1 - \frac{3}{2} \delta \cos 66^\circ, 36') = 57037 + q \text{ Toises}$$

$$A(1 - \frac{3}{2} \delta \cos 98^\circ, 46') = 57074 + r \text{ Toises}$$

$$A(1 - \frac{3}{2} \delta \cos 132^\circ, 40') = 57438 + s \text{ Toises.}$$

en marquant par p, q, r, s les erreurs, qui peuvent s'être glissées dans ces mesures; lesquelles peuvent être ou positives ou négatives; & on les supposera aussi petites qu'il est possible, puisqu'on y a apporté tant de soins, que les erreurs ne sauroient surpasser quelques secondes, à l'exception de la troisième, dont l'erreur r pourroit bien être plus grande que 32 toises.

9. Si nous substituons les valeurs de ces cosinus, nous aurons les quatre équations suivantes :

$$\text{I. } A(1 - 1,4997715 \delta) = 56753 + p$$

$$\text{II. } A(1 - 0,5957219 \delta) = 57037 + q$$

$$\text{III. } A(1 + 0,2286163 \delta) = 57074 + r$$

$$\text{IV. } A(1 + 1,0165980 \delta) = 57438 + s.$$

Otons la première de chacune des autres pour avoir ces trois équations :

$$0,9040496 \delta A = 284 + q - p$$

$$1,7283878 \delta A = 321 + r - p$$

$$2,5163696 \delta A = 685 + s - p$$

& divisant par la première les deux autres on aura

$$\frac{321 + r - p}{284 + q - p} = \frac{65}{34} \quad \& \quad \frac{685 + s - p}{284 + q - p} = \frac{437}{157}$$

d'où il s'enfuit :

$$31p - 65q + 34r = 7546 \quad \& \quad 280p - 437q + 157s = 16563.$$



10. Si nous éliminons p de ces deux équations il en résultera

$$-150q + 307r - 157s = 51594$$

d'où nous voyons que les erreurs de la mesure au Cap & en Laponie doivent être supposées négatives, tandis que celle de France est positive. Si l'on vouloit supposer ces trois erreurs égales, chacune deviendrait de 84 toises, qui seroit trop exorbitante, pour qu'on la pût concilier avec l'extrême exactitude, dont la seconde & quatrième de ces opérations ont été faites. Mais on ne sauroit plus douter, qu'il ne se soit glissé une erreur assez considérable dans la détermination du degré en France, & qui pourroit bien monter à 100 toises & au delà; & si nous voulions supposer entièrement justes les mesures du Cap & de Laponie, ou $q = 0$ & $s = 0$, nous trouverions l'erreur du degré en France $r = 168$ toises; ou on se seroit trompé de 10'' dans les Observations celestes. Or, si nous supposons $r = 100$ toises & $s = q$, on trouveroit $q = s = -68$ toises; or on ne sauroit admettre une erreur si grande. Posons donc $r = 120$, & on aura $q = s = -48$ toises; qu'on sauroit à peine admettre: mais posant $r = 125$ on obtiendra $q = s = -43$ toises.

11. Puisqu'il faut donc absolument reconnoître des erreurs dans ces mesures de degrés; & la plus grande dans celle du degré de France, qu'on ne sauroit supposer audessous de 125 Toises, posons $r = 125$, & nous aurons:

$$-150q - 157s = 13219, \text{ donc à peu près } q + s = -86 \text{ Toises.}$$

Avant que de décider séparément sur l'une & l'autre des erreurs q & s , considérons, quelle en résulte pour p , de cette égalité:

$$31p - 65q = 3296, \text{ ou } p = 106 \frac{2}{3} + 2 \frac{1}{15} q.$$

Si l'on suppose que $p = 0$, on trouve $q = -51$ & partant $s = -35$, mais si l'on suppose $p = 15$, on trouve $q = -43 \frac{1}{2}$ & partant $s = -42 \frac{1}{2}$: d'où l'on voit que si nous voulions supposer l'erreur du degré du Pérou plus grande, nous serions obligés d'attribuer à celui de Laponie

une

une plus grande. Donc, à moins que la figure de la Terre ne diffère considérablement d'un sphéroïde elliptique, il semble qu'on doive admettre les erreurs suivantes :

$$p = 15 \text{ toises}; \quad q = -43 \text{ toises}; \quad r = +125 \text{ toises} \quad \& \quad s = -43 \text{ toises}.$$

12. Cela posé, les véritables grandeurs de nos quatre degrés seront :

	Latitude du milieu
Celui du Pérou = 56768 Toises	$\phi = 0^\circ, 30'$
Celui du Cap = 56994 Toises	$\phi = 33^\circ, 18'$
Celui de la France = 57199 Toises	$\phi = 49^\circ, 23'$
Celui de la Laponie = 57395 Toises	$\phi = 66^\circ, 20'$

& ayant fait ces corrections, la figure de la Terre deviendra réductible à une sphéroïde elliptique, qu'on pourra déterminer par deux quelconques de ces quatre degrés mesurés. Choisissons donc le premier & le dernier, qui donnent :

$$A(1 - 1,4997715\delta) = 56768 \text{ Toises}$$

$$A(1 + 1,0165890\delta) = 57395 \text{ Toises},$$

d'où l'on tire : $\frac{1 + 1,0165890\delta}{1 - 1,4997715\delta} = \frac{57395}{56768} \quad \& \quad \text{partant}$

$$143789\delta = 627 \quad \text{donc} \quad \delta = 0,00436055 = \frac{ee - aa}{ee + aa}.$$

Ensuite

$$\frac{ee}{aa} = \frac{1 + \delta}{1 - \delta} = 1 + 2\delta + 2\delta\delta = 1,0087593 \quad \& \quad \frac{e}{a} = 1,00437.$$

Donc le diamètre de l'équateur sera à l'axe de la Terre comme 230 à 229, ce qui est précisément le rapport que *Newton* a établi; d'où l'on peut conclure que les hypothèses, que ce grand Géomètre a faites sur la structure & l'attraction de la Terre, sont d'accord avec la vérité.



13. Ayant trouvé la valeur de δ , nous en tirerons d'abord

$$\Lambda = 57142 = \frac{2aaee\sqrt{2}}{(aa+ee)^{\frac{3}{2}}} \cdot 0,01745329$$

$$\text{donc } \frac{aaee}{(aa+ee)^{\frac{3}{2}}} = 1157526 \text{ Toises.}$$

Or posons $\frac{e}{a} = \text{tang } \omega$, de sorte que $\omega = 45^{\circ}, 7', 30''$ &

nous aurons : $a \sin \omega^2 \cos \omega = 1157526$, d'où nous tirons :

$$\text{le demi-axe de la Terre } a = 3266892 \text{ Toises}$$

$$\text{le demi-diametre de l'équateur } e = 3281168 \text{ Toises.}$$

Or *Newton*, quoiqu'il ait établi le même rapport entre l'axe & le diametre de l'équateur, donne au demi-axe 3262166 toises, & au demi-diametre de l'équateur 3276433 toises. La raison de cette difference est, que j'ai supposé ici le degré mesuré en France plus grand que *Newton*. Maintenant ayant découvert la véritable grandeur de l'axe & du diametre de la terre, on pourra à chaque élévation du pole déterminer la grandeur du degré du méridien. Car, posant Φ pour la latitude au milieu du degré, la grandeur de ce degré sera.

$$57142 (1 - 0,00654082 \cos 2 \Phi)$$

14. Je remarque ici encore, que si l'on omettoit entierement le degré de France, les trois autres seroient admirablement bien d'accord entr'eux : on n'auroit qu'à supposer à chacun une erreur de 19 toises, dont les degrés du Pérou & de Laponie devoient être augmentés, ou celui du Cap diminué. De là résulteroit une plus grande difference entre l'axe & le diametre de l'Equateur, tout comme on a déjà remarqué avant que les mesures au Cap aient été connues. Mais alors, supposant $p = 19$, $q = -19$ & $s = 19$ on trouveroit $r = 169$ toises, dont le degré de France devoit être augmenté; dans ce cas la



correction à faire sur le degré de Laponie devoit être positive, au lieu que je l'ai supposée négative cy-devant; ce qui est une marque bien feure de la justesse de cette mesure. Or, soit qu'on rejette la mesure du degré de France ou non, il faut toujours supposer γ négatif, d'où l'on doit conclure, que le degré mesuré au Cap est marqué trop grand. On voit aussi que la mesure faite à Quito est très juste, & qu'on ne lui sauroit supposer une erreur plus grande que de 20 toises, de quelque maniere qu'on se prenne pour mettre d'accord ces quatre mesures. Pour le degré mesuré en Laponie, il faut aussi remarquer qu'on y a négligé la réfraction des étoiles près du zenith, dont on a tenu compte dans les autres mesures. Or, si l'on y apporte cette petite correction, on trouve que le degré de Laponie se réduit de 57438 à 57422 toises; ce qui s'approche d'avantage de la correction précédente, où j'ai supposé ce degré de 57395 toises; & l'erreur ne seroit que de 27 toises, au lieu de 43.

15. Cependant je ne détermine rien de précis sur la figure de la terre, puisqu'on a encore lieu de douter, si on la peut regarder comme un spherôide elliptique parfait, dont les deux moitiés de part & d'autre de l'équateur soient égales & semblables: quoique, quelque autre hypothese qu'on fasse, on soit obligé de reconnoitre quelques petites erreurs dans les Observations, & surtout dans celle de France. Mes recherches rouleront sur la surface d'un spherôide elliptique parfait en général, dont le demi-axe soit $= a$, & le demi-diametre de l'équateur $= e$, entre lesquels je supposerai la difference fort petite. Or, pour abréger les formules trouvées cy-dessus, je poserai:

$$\frac{ee - aa}{ee + aa} = \delta \quad \& \quad \frac{2aaee\sqrt{2}}{(aa + ee)^{\frac{3}{2}}} = c$$

où il suffit de remarquer, que si l'on en veut faire l'application à la Terre, les valeurs de ces deux lettres seront assez exactement.

$$\delta = 0, 00436055 \quad \& \quad c = 3273980 \text{ toises.}$$



Alors ce que j'ai trouvé se réduit à

$$Mm = \frac{c \delta \Phi}{(1 + \delta \cos 2\Phi)^{\frac{3}{2}}} \text{ \& en intégrant par approximation.}$$

$$EM = c \left(\left(1 + \frac{15}{16} \delta \delta\right) \Phi - \frac{3}{4} \delta \sin 2\Phi + \frac{15}{64} \delta \delta \sin 4\Phi \right).$$

XVI. Je regarde ici comme connue la latitude du point M, ou l'angle ENM, que je nomme Φ : & de là on trouve le plus aisément la longueur de l'arc EM: d'où l'on voit que posant $\Phi = 90^\circ$, ou $\Phi = \frac{1}{2} \pi$, posant π pour le nombre 3,14159265 &c. le quart de l'ellipse fera $EMA = \frac{1}{2} \pi \left(1 + \frac{15}{8} \delta \delta\right) c$. Ensuite en employant ces abréviations on aura le rayon osculateur du Méridien au point M

$$\text{ou } MO = \frac{c}{(1 + \delta \cos 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}. \text{ Par la même latitude du point M}$$

Φ , on connoitra aussi d'abord la distance $MQ = CP$ à l'axe, ayant

$$\frac{CP^3}{MO} = \frac{e^4}{aa} \cos^3 \Phi, \text{ \& partant } CP = \frac{\cos \Phi}{\sqrt{(1 + \delta \cos 2\Phi)}} \sqrt[3]{\frac{ce^4}{aa}} =$$

$$\frac{ee\sqrt{2}}{\sqrt{(aa + ee)}} \cdot \frac{\cos \Phi}{\sqrt{(1 + \delta \cos 2\Phi)}}, \text{ \& de même } PM = CQ =$$

$$\frac{aa\sqrt{2}}{\sqrt{(aa + ee)}} \cdot \frac{\sin \Phi}{\sqrt{(1 + \delta \cos 2\Phi)}}. \text{ Or pour la Terre nous venons}$$

de trouver $\frac{e}{a} = \frac{230}{229}$; & $a = 3266892$ toises & $e = 3281168$

toises. Ou, en employant les seules lettres δ & c , on a $a = \frac{c}{(1 + \delta)\sqrt{(1 - \delta)}}$;

$$e = \frac{c}{(1 - \delta)\sqrt{(1 + \delta)}}, \text{ donc } CP = MQ = \frac{c}{1 - \delta} \cdot \frac{\cos \Phi}{\sqrt{(1 + \delta \cos 2\Phi)}}$$

$$\text{\& } PM = CQ = \frac{c}{1 + \delta} \cdot \frac{\sin \Phi}{\sqrt{(1 + \delta \cos 2\Phi)}}. \text{ PRO.}$$



PROBLEME I.

17. *Ayant observé l'élevation du pôle en deux lieux M & M' situés sous le même méridien, déterminer la grandeur de l'arc du méridien MM' compris entre ces deux lieux.*

SOLUTION.

Soit Φ l'élevation du pôle en M, & Ψ en M': & puisque ces deux lieux sont situés sous le même méridien, il est évident que l'arc du méridien MM' compris entr'eux est le chemin le plus court, qui mène d'un lieu à l'autre. Donc, introduisant les lettres c & δ , qui déterminent l'espece & la grandeur du Spheroïde elliptique, la grandeur de l'arc MM' fera exprimée en sorte

$$MM' = c \left((1 + \frac{1}{2} \delta \delta) (\Psi - \Phi) - \frac{3}{4} \delta (\sin 2\Psi - \sin 2\Phi) + \frac{5}{8} \delta \delta (\sin 4\Psi - \sin 4\Phi) \right)$$

en négligeant les termes affectés par le cube & les plus hautes puissances de δ . Mais en tout cas il seroit aisé de pousser l'approximation plus loin, & même à l'infini. On pourra aussi assigner la situation de chaque endroit par rapport à l'axe & à l'équateur, & cela exactement sans approximation; car on aura

$$CQ = \frac{c \sin \Phi}{(1 + \delta) \sqrt{(1 + \delta \cos 2\Phi)}}; \quad QM = \frac{c \cos \Phi}{(1 - \delta) \sqrt{(1 + \delta \cos 2\Phi)}}$$

$$CQ' = \frac{c \sin \Psi}{(1 + \delta) \sqrt{(1 + \delta \cos 2\Psi)}}; \quad Q'M' = \frac{c \cos \Psi}{(1 - \delta) \sqrt{(1 + \delta \cos 2\Psi)}}$$

& outre cela les rayons osculateurs feront

$$\text{en M} = \frac{c}{(1 + \delta \cos 2\Phi)^{\frac{3}{2}}} \quad \& \quad \text{en M'} = \frac{c}{(1 + \delta \cos 2\Psi)^{\frac{3}{2}}}$$

& ces déterminations renferment tout ce qu'on peut demander par rapport à ces deux lieux.



S C H O L I E.

18. Je me propose de considérer deux points quelconques sur la surface de la Terre, en cherchant tant leur distance entr'eux, que leur situation par rapport au Méridien. Or le cas le plus simple est, lorsque ces deux points sont situés sous le même Méridien, par lequel j'ai commencé mes recherches, puisqu'il est évident que l'arc du Méridien compris entre ces deux points est en même tems le chemin le plus court, qui conduit de l'un à l'autre. Mais, lorsque les deux points ne sont pas au même Méridien, il faut employer la méthode des plus grands & plus petits pour déterminer le chemin le plus court entr'eux : & j'entreprendrai cette recherche dans le problème suivant.

P R O B L E M E II.

Fig. 2.

19. Connoissant la Latitude de deux lieux L & M avec leur différence en Longitude, trouver le chemin le plus court sur la surface de la Terre LM, qui mène de l'un à l'autre.

S O L U T I O N.

Qu'on mène par l'un & l'autre de ces points L & M les Méridiens ALE & AMR, & l'angle que ces deux Méridiens forment au pole A mesurera la différence en longitude, laquelle étant donnée posons

la difference en Longitude ou l'angle LAM = ω

la Latitude du Lieu L = λ

& la Latitude du Lieu M = ϕ

ce qui sont les trois quantités données outre la grandeur & la figure de la Terre. Soit maintenant la ligne LM le chemin le plus court entre les points L & M, & qu'on la prolonge infiniment peu en m suivant sa direction en m ; qu'on mène par ce point m le Méridien infiniment proche Amr , sur lequel on prenne $\Lambda\mu = \Lambda M$, de sorte que la Latitude



tude en μ soit la même qu'en M, savoir $= \Phi$, & la Latitude en m fera $= \Phi + d\Phi$, donc l'élément du Méridien entre m & μ fera

$$m\mu = \frac{c d\Phi}{(1 + \delta \cos 2\Phi)^{\frac{3}{2}}}. \text{ De plus on aura l'angle élémentaire}$$

MA $\mu = d\omega$, qui est égal à l'angle, que les lignes perpendiculaires tirées des points M & μ à l'axe de la Terre comprendront entr'elles. Or ces lignes perpendiculaires représentées dans la première figure par

$$MQ \text{ font } = \frac{c \cos \Phi}{(1 - \delta) \sqrt{(1 + \delta \cos 2\Phi)}}; \text{ d'où l'on tire l'élé-}$$

$$\text{ment } M\mu = \frac{c d\omega \cos \Phi}{(1 - \delta) \sqrt{(1 + \delta \cos 2\Phi)}}; \text{ \& partant l'élément}$$

du chemin LM fera

$$Mm = c \sqrt{\left(\frac{d\Phi^2}{(1 + \delta \cos 2\Phi)^3} + \frac{d\omega^2 \cos^2 \Phi}{(1 - \delta)^2 (1 + \delta \cos 2\Phi)} \right)}$$

dont l'intégrale doit être un plus petit. Posons $d\Phi = p d\omega$ pour rendre un *minimum* cette formule intégrale

$$\int d\omega \sqrt{\left(\frac{pp}{(1 + \delta \cos 2\Phi)^3} + \frac{\cos^2 \Phi}{(1 - \delta)^2 (1 + \delta \cos 2\Phi)} \right)}$$

$$\text{Posons } \sqrt{\left(\frac{pp}{(1 + \delta \cos 2\Phi)^3} + \frac{\cos^2 \Phi}{(1 - \delta)^2 (1 + \delta \cos 2\Phi)} \right)} = V,$$

& j'ai démontré que si le différentiel de V est exprimé en forte $dV = M d\omega + N d\Phi + P dp$, l'équation qui renferme le *minimum* est

$$\text{exprimée en forte } 0 = N - \frac{dP}{d\omega}, \text{ ou puisque dans ce cas } M = 0,$$

cette équation se réduit à cette forme : $V - Pp = \text{Const.}$

Or



Or la différentiation de V nous donne

$$P = \frac{p}{(1 + \delta \cos 2\phi)^3} V \quad \text{d'où nous tirons}$$

$$V V = \frac{p p}{(1 + \delta \cos 2\phi)^3} = \frac{\cos \phi^2}{(1 - \delta)^2 (1 + \delta \cos 2\phi)} = \frac{V}{a}$$

& partant prenant les quarrés, notre équation deviendra

$$\frac{a a \cos \phi^4}{(1 - \delta)^4 (1 + \delta \cos 2\phi)^2} = \frac{p p}{(1 + \delta \cos 2\phi)^3} + \frac{\cos \phi^2}{(1 - \delta)^2 (1 + \delta \cos 2\phi)}$$

$$\text{donc l'élément du chemin le plus court } Mm = \frac{a c d\omega \cos \phi^2}{(1 - \delta)^2 (1 + \delta \cos 2\phi)}$$

Or mettant pour p sa valeur $\frac{d\phi}{d\omega}$ nous aurons

$$\frac{d\omega^2 \cos \phi^2 (a a \cos \phi^2 - (1 - \delta)^2 (1 + \delta \cos 2\phi))}{(1 - \delta)^4 (1 + \delta \cos 2\phi)^2} = \frac{d\phi^2}{(1 + \delta \cos 2\phi)^3}$$

d'où nous tirons:

$$d\omega = \frac{(1 - \delta)^2 d\phi}{(1 + \delta \cos 2\phi)^{\frac{3}{2}} \cos \phi \sqrt{a a \cos \phi^2 - (1 - \delta)^2 (1 + \delta \cos 2\phi)}}$$

$$\& Mm = \frac{a c d\phi \cos \phi}{(1 + \delta \cos 2\phi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{a a \cos \phi^2 - (1 - \delta)^2 (1 + \delta \cos 2\phi)}}$$

Mais, avant que d'intégrer ces formules, on en peut déjà déterminer l'angle AMm , que fait l'arc LM avec le Méridien AM , car on aura

$$\sin AMm = \frac{M\mu}{Mm} = \frac{(1 - \delta) \sqrt{(1 + \delta \cos 2\phi)}}{a \cos \phi}$$

D'où posant $\phi = \lambda$ on aura l'angle ALM , de sorte que

$$\sin ALM = \frac{(1 - \delta) \sqrt{(1 + \delta \cos 2\lambda)}}{a \cos \lambda}$$

Pofons



Posons cet angle $ALM = \zeta$, pour l'introduire dans le calcul au lieu de la constante α , & nous aurons

$$\alpha = \frac{(1 - \delta) V(1 + \delta \cos 2\lambda)}{\sin \zeta \cos \lambda}$$

Cette valeur étant substituée donne

$$\sin AMm = \frac{\sin \zeta \cos \lambda V(1 + \delta \cos 2\phi)}{\cos \phi V(1 + \delta \cos 2\lambda)} \quad \&$$

$$d\omega = \frac{(1 - \delta) d\phi \sin \zeta \cos \lambda}{(1 + \delta \cos 2\phi)^{\frac{1}{2}} \cos \phi V(\cos^2 \phi (1 + \delta \cos 2\lambda) - \sin^2 \zeta \cos^2 \lambda (1 + \delta \cos 2\phi))}$$

$$Mm = \frac{c d\phi \cos \phi V(1 + \delta \cos 2\lambda)}{(1 + \delta \cos 2\phi)^{\frac{3}{2}} V(\cos^2 \phi (1 + \delta \cos 2\lambda) - \sin^2 \zeta \cos^2 \lambda (1 + \delta \cos 2\phi))}$$

Pour intégrer ces formules, il en faut séparer les particules, qui dépendent de la petite fraction δ , & quand on néglige les termes, qui renfermeroient le quarré, ou plus hautes puissances de δ , on aura

$$d\omega = \frac{d\phi \sin \zeta \cos \lambda}{\cos \phi V(\cos^2 \phi - \sin^2 \zeta \cos^2 \lambda)} - \frac{\delta d\phi \sin \zeta \cos \lambda \cos \phi}{V(\cos^2 \phi - \sin^2 \zeta \cos^2 \lambda)} - \frac{\delta d\phi \sin \zeta \cos^2 \zeta \cos^2 \lambda \cos \phi}{(\cos^2 \phi - \sin^2 \zeta \cos^2 \lambda)^{\frac{3}{2}}}$$

dont l'intégrale se trouve comme il suit :

$$\omega = A \sin. \frac{\sin \zeta \cos \lambda \sin \phi}{\cos \phi V(1 - \sin^2 \zeta \cos^2 \lambda)} - \delta \sin \zeta \cos \lambda A \sin. \frac{\sin \phi}{V(1 - \sin^2 \zeta \cos^2 \lambda)} \\ - \frac{\delta \sin \zeta \cos^2 \zeta \cos^2 \lambda \sin \phi}{(1 - \sin^2 \zeta \cos^2 \lambda) V(\cos^2 \phi - \sin^2 \zeta \cos^2 \lambda)} + \text{Const.}$$

Où la constante se doit déterminer en sorte, que posant $\phi = \lambda$ l'angle ω , ou la différence en longitude évanouisse.



Par conséquent on aura :

$$\begin{aligned} w = & A \sin \frac{\sin \zeta \cos \lambda \sin \phi}{\cos \phi \sqrt{(1 - \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \lambda^2)}} - A \sin \frac{\sin \zeta \sin \lambda}{\sqrt{(1 - \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \lambda^2)}} \\ & - \delta \sin \zeta \cos \lambda A \sin \frac{\sin \phi}{\sqrt{(1 - \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \lambda^2)}} + \delta \sin \zeta \cos \lambda A \sin \frac{\sin \lambda}{\sqrt{(1 - \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \lambda^2)}} \\ & - \frac{\delta \sin \zeta \cos^2 \zeta^2 \cos \lambda^3 \sin \phi}{(1 - \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \lambda^2) \sqrt{(\cos^2 \phi^2 - \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \lambda^2)}} + \frac{\delta \sin \zeta \cos \zeta^2 \sin \lambda \cos \lambda^2}{1 - \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \lambda^2}. \end{aligned}$$

Opérons de la même manière pour trouver la longueur du chemin LM, & puisque nous aurons

$$M m = \text{=====}$$

$$\frac{c d \phi \sin \phi}{\sqrt{(\cos^2 \phi^2 - \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \lambda^2)}} \left(1 + \frac{3}{2} \delta + \delta \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \lambda^2 - 3 \delta \cos^2 \phi^2 - \frac{\delta \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \zeta^2 \cos^2 \lambda^4}{\cos^2 \phi^2 \cdot \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \lambda^2} \right)$$

l'intégrale avec la juste constante se trouvera :

$$L M = \text{=====}$$

$$\begin{aligned} c(1 - \frac{1}{2} \delta \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \lambda^2) A \sin \frac{\sin \phi}{\sqrt{(1 - \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \lambda^2)}} - c(1 - \frac{1}{2} \delta \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \lambda^2) A \sin \frac{\sin \lambda}{\sqrt{(1 - \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \lambda^2)}} \\ - \frac{3}{2} \delta c \sin \phi \sqrt{(\cos^2 \phi^2 - \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \lambda^2)} + \frac{3}{2} \delta c \cos^2 \zeta^2 \sin \lambda \cos \lambda \\ - \frac{\delta c \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \zeta^2 \cos^2 \lambda^4 \sin \phi}{(1 - \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \lambda^2) \sqrt{(\cos^2 \phi^2 - \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \lambda^2)}} + \frac{\delta c \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \zeta^2 \sin \lambda \cos^2 \lambda^3}{1 - \sin^2 \zeta^2 \cos^2 \lambda^2} \end{aligned}$$

Ainsi connoissant les deux élévations de pôle λ & ϕ en L & M, avec l'angle $ALM = \zeta$, que fait la route LM avec le méridien en L, on pourra déterminer tant l'angle AMm , que la route fait en M avec la méridienne, que la différence en longitude, ou l'angle LAM, & la longueur de la route même LM.

COROLL. I.

20. Si nous introduisons aussi l'angle $AMm = \theta$, nous aurons

$$\sin \theta = \frac{\sin \zeta \cos \lambda \sqrt{(1 + \delta \cos 2\phi)}}{\cos \phi \sqrt{(1 + \delta \cos 2\lambda)}} \quad \&$$



& cette valeur a lieu en général, puisqu'aucune approximation n'est encore employée. Mais, si l'on en veut faire usage, on aura

$$\sin \theta = \frac{\sin \zeta \cos \lambda}{\cos \phi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta \cos 2 \lambda + \frac{1}{2} \delta \cos 2 \phi \right) \text{ ou bien}$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \zeta \cos \lambda}{\cos \phi} \left(1 - \delta \cos \lambda^2 + \delta \cos \phi^2 \right)$$

COROLL. 2.

21. Pour abréger le calcul des quantités approchées de ω & de LM, on peut chercher un angle α qui soit:

$$\alpha = A \sin \frac{\sin \zeta \cos \lambda \sin \phi}{\cos \phi \sqrt{(1 - \sin \zeta^2 \cos \lambda^2)}} - A \sin \frac{\sin \zeta \sin \lambda}{\sqrt{(1 - \sin \zeta^2 \cos \lambda^2)}}$$

& alors on obtiendra

$$\omega = \alpha - \delta \sin \zeta \cos \lambda A \sin \frac{\sin \alpha \cos \phi}{\sin \zeta} - \frac{\delta \sin \alpha \cos \zeta \cos \lambda^2 \cos \phi}{\sqrt{(\cos \phi^2 - \sin \zeta^2 \cos \lambda^2)}} \&$$

$$\begin{aligned} \text{LM} = & c(1 - \frac{1}{2} \delta \sin \zeta^2 \cos \lambda^2) A \sin \frac{\sin \alpha \cos \phi}{\sin \zeta} - \frac{\delta c \sin \alpha \sin \zeta \cos \zeta \cos \lambda^3 \cos \phi}{\sqrt{(\cos \phi^2 - \sin \zeta^2 \cos \lambda^2)}} \\ & - \frac{1}{2} \delta c \sin \phi \sqrt{(\cos \phi^2 - \sin \zeta^2 \cos \lambda^2)} + \frac{1}{2} \delta c \cos \zeta \sin \lambda \cos \lambda. \end{aligned}$$

COROLL. 3.

22. S'il étoit $\delta = 0$, on tireroit de ces formules toutes les règles connues de la Trigonométrie Sphérique; mais ayant déjà amplement traité ce sujet, je ne m'y arrêterai point. Cependant on remarquera que les trois élémens ζ , λ , & ϕ étant donnés, on en peut déterminer le quatrième θ sans intégration & approximation, tandis que les deux derniers ω & LM ne sçauroient être assignés sans ces subsides.

S'CHOLIE.

23. Voilà donc les formules, qui renferment en général les principes de la Trigonométrie Sphéroïdique, ayant trouvé la résolu-



tion du triangle LAM . Car, quoique je suppose un de ses angles au pôle A , c'est une limitation que la nature du problème semble absolument exiger; & si aucun des trois angles ne tomboit dans l'un des pôles, il faudroit tirer par chacun des méridiens, & réduire par là le cas à la résolution de deux ou trois tels triangles, que je viens de considérer. Puisqu'une surface sphéroïdique ne s'est pas semblable par tout, pour fixer la situation d'un point quelconque, il en faut savoir son lieu par rapport aux pôles du sphéroïde, qui se détermine le plus commodément par la latitude ou l'élevation du pôle: & c'est dans cette vue, que pour les points L & M j'ai introduit dans le calcul les angles λ & ϕ , qui en marquent les latitudes. Or de là on est en état d'assigner les arcs des méridiens mêmes AL & AM , qui donnent les distances absolues de ces points au pôle A . Cependant ces distances n'influënt pas immédiatement sur la solution du problème, & il suffit de connoître les latitudes des points. Ensuite pour les côtés, ou les lignes les plus courtes qu'on peut tirer d'un point à un autre quelconque, la principale détermination, à laquelle il faut réfléchir, est l'angle qu'une telle ligne fait avec les méridiens. Par ces raisons ayant deux points quelconques L & M sur une surface sphéroïdique, pour chercher le chemin le plus court LM qui mène de l'un à l'autre, il faut d'abord avoir égard à la latitude de chacun de ces deux points, comme dans le calcul précédent l'angle λ marque celle du point L , & ϕ celle du point M . Depuis, après avoir tiré par les points L & M les méridiens AL & AM , il s'agit de savoir premièrement l'angle $LAM = \omega$, qui marque la différence en longitude des deux lieux proposés L & M , & ensuite les angles $ALM = \zeta$ & $AMM = \theta$, que la route la plus courte fait avec les méridiens en L & M . Et enfin on aura à déterminer la longueur même du chemin le plus court LM , de sorte que nous ayons en tout à considérer six élémens λ , ϕ , ζ , θ , ω , & LM , qui ont, comme dans la Trigonométrie ordinaire un tel rapport entr'eux, qu'en connoissant trois, on puisse déterminer les trois autres. Dans la solution que je viens de donner, j'ai considéré les trois élémens λ , ϕ , & ζ , comme

donnés,



donnés, desquels on trouve aisément le quatrième θ , par l'équation

$$\sin \theta = \frac{\sin \zeta \operatorname{cof} \lambda \sqrt{(1 + \delta \operatorname{cof} 2 \phi)}}{\operatorname{cof} \phi \sqrt{(1 + \delta \operatorname{cof} 2 \lambda)}},$$

de sorte que la solution seroit toujours la même, quelques autres trois de ces quatre élémens λ , ϕ , ζ , & θ , fussent donnés, puisque le quatrième en seroit d'abord connu. Mais il n'en est pas de même, si l'un des deux autres ω , & LM , se trouvoit parmi les connus; car puisque les formules, qui expriment les valeurs de ω & LM sont si compliquées, & qu'elles n'ont lieu que lorsque la fraction δ est extrêmement petite, on n'en sauroit éliminer les élémens inconnus. Cependant dans le cas où δ est extrêmement petite, on n'auroit qu'à regarder le problème comme de la Trigonométrie ordinaire, & ensuite chercher les corrections, qui résultent de l'aberration de la figure sphérique, par la méthode ordinaire des approximations. Mais il semble que l'évolution d'un tel cas ne fera presque jamais nécessaire, vû qu'on peut supposer que tant les latitudes des points L & M , que les angles ζ & θ que la ligne tirée LM fait avec les méridiens en L & M , soient connus étant déterminables par les opérations les plus aisées. Or le plus grand avantage, qu'on puisse tirer de cette solution, est sans doute une nouvelle méthode, qu'elle fournit pour découvrir la véritable ellipticité de la figure de la terre, ou le rapport entre son axe & le diamètre de son équateur: & cela se pourra exécuter, sans qu'on ait besoin de mesurer actuellement quelque ligne, qu'on aura tirée sur la surface de la terre; ce que je m'en vais expliquer plus amplement dans le problème suivant.

P R O B L E M E III.

24. *Déterminer le rapport du diamètre de l'équateur à l'axe de la terre sans le secours des mesures actuelles de quelques degrés de méridien, par une manière qui se puisse exécuter dans une seule contrée de la terre.*



S O L U T I O N .

Pour connoître la figure de la Terre, on a regardé jusqu'ici comme le seul moyen, de mesurer sous des latitudes fort différentes la grandeur d'un degré du méridien; afin que de leur inégalité on pût conclure celle qui se trouve entre l'axe de la Terre & le diamètre de son équateur. Mais la méthode que je m'en vai proposer ici, ne demande que des opérations, qu'on peut faire dans une contrée assez bornée, ou dans un pays d'une étendue médiocre, & cela sans qu'on ait besoin de mesurer géométriquement quelque ligne tirée sur la surface de la Terre. Supposons donc que le point *L* se trouve à un bout d'une grande plaine, & d'abord il faut qu'on y observe la hauteur du pôle, & qu'on y tire avec la dernière précision la ligne méridienne. Pour l'élevation absolue du pôle, il suffit qu'on la sache à une minute près; mais il est nécessaire, qu'on y observe très exactement la distance de quelques étoiles fixes au zenith au tems de leur culmination. Soit donc λ la hauteur du pôle au point *L*. Qu'on parte ensuite du point *L* selon une route, qui fasse un angle oblique avec la méridienne, mais qu'on mesure le plus exactement qu'il est possible cet angle, que fait le commencement de la route avec la méridienne en *L*. Qu'on poursuive après la même route, en fixant perpendiculairement des piques en sorte qu'elles paroissent toutes disposées en ligne droite; & qu'on continue cette ligne, qui semblera droite, aussi loin que le terrain le permettra, ayant toujours en vuë que la route ainsi décrite convienne avec celle que formeroit une corde tendue sur la Terre. Il seroit bon, qu'on pût pousser cette opération par une étendue de plusieurs milles d'Allemagne. De cette manière on sera assuré avoir tracé la ligne la plus courte sur la surface de la Terre, & on n'aura pas besoin d'en mesurer la longueur. Soit donc ζ l'angle que fait cette route en *L* avec la Méridienne; & ayant poursuivi cette route fort loin jusqu'en *M*, qu'on y observe le plus soigneusement les distances des mêmes étoiles fixes au zenith de *M* à leur passage par le Méridien, afin qu'on en puisse exacte-



exactement conclure la difference des latitudes en L & M, ce qui se pourra faire à quelques secondes près ; soit donc ϕ l'élevation du Pole en M, & quoique sa quantité absoluë ne soit peut-être pas exacte au dernier degré, que du moins la difference entre λ & ϕ le soit autant qu'il est possible. Enfin, on doit aussi tirer en M la méridienne, & mesurer l'angle AMm , que fait avec elle la continuation de la même route LM, & on nommera cet angle $= \theta$: ce sont toutes les opérations qu'on aura à faire pour déterminer le rapport entre le demi-axe

$= a$ & le demi-diamètre de l'équateur $= e$. Car posant $\frac{ee - aa}{ee + aa} = \delta$,

de sorte que $\frac{aa}{ee} = \frac{1 - \delta}{1 + \delta}$ & $\frac{a}{e} = \frac{2 - \delta}{2 + \delta}$ à peu près, ou $\frac{e}{a} =$

$1 + \delta$, nous n'aurons qu'à résoudre cette équation :

$$\sin \theta \cos \phi \sqrt{1 + \delta \cos 2\lambda} = \sin \zeta \cos \lambda \sqrt{1 + \delta \cos 2\phi}$$

d'où les quatre angles λ , ϕ , ζ & θ étant donnés on tire

$$\delta = \frac{\sin \zeta^2 \cos \lambda^2 - \sin \theta^2 \cos \phi^2}{\sin \theta^2 \cos \phi^2 \cos 2\lambda - \sin \zeta^2 \cos \lambda^2 \cos 2\phi}$$

& partant :

$$\frac{ee}{aa} = \frac{\sin \zeta^2 \cos \lambda^2 \sin \phi^2 - \sin \theta^2 \cos \phi^2 \sin \lambda^2}{\sin \theta^2 \cos \phi^2 \cos \lambda^2 - \sin \zeta^2 \cos \lambda^2 \cos \phi^2}$$

ou bien : $\frac{ee}{aa} = 1 + \frac{\sin \zeta^2 \cos \lambda^2 - \sin \theta^2 \cos \phi^2}{\cos \lambda^2 \cos \phi^2 (\sin \theta^2 - \sin \zeta^2)}$

Ayant donc exactement observé & mesuré les quatre angles λ , ϕ , ζ , & θ , on en pourra conclure le rapport entre l'axe de la Terre & le diamètre de son équateur, par le moyen de cette formule que je viens de découvrir ; sur laquelle il faut remarquer, qu'elle est exacte, & ne demande aucune approximation, à laquelle il faut nécessairement recourir en employant la méthode ordinaire. Mais, pour rendre cette conclusion d'autant plus seure, il faut choisir une telle contrée sur la

Terre



Terre, & une telle direction de la route qu'on trace, que de petites erreurs commises dans la mesure des angles influent le moins qu'il soit possible sur la conclusion. Or il est évident que, plus le dénominateur $\text{cof } \lambda^2 \cdot \text{cof } \phi^2 \cdot (\sin \theta^2 - \sin \zeta^2)$ sera grand, plus aussi deviendra grand le numérateur, ou la différence entre $\sin \zeta^2 \text{cof } \lambda^2$ & $\sin \theta^2 \text{cof } \phi^2$, ce qui est sans doute le cas le plus favorable, puisqu'alors une petite erreur commise dans la mesure des angles influë moins sur la valeur du numérateur, d'où dépend la justesse de la conclusion.

R E M A R Q U E.

25. Après avoir observé les deux hauteurs du pôle en L & M avec l'angle $\angle LM = \zeta$, si la Terre étoit sphérique, l'angle $\angle Mm = \theta$ seroit tel qu'il fût $\sin \theta = \frac{\sin \zeta \text{cof } \lambda}{\text{cof } \phi}$: donc l'ellipticité de la Terre ne pourra être concluë qu'entant que cet angle se trouvera, ou plus grand, ou plus petit. Or à cause de l'ellipticité nous avons

$$\sin \theta = \frac{\sin \zeta \text{cof } \lambda}{\text{cof } \phi} \sqrt{\frac{1 + \delta \text{cof } 2 \phi}{1 + \delta \text{cof } 2 \lambda}}$$

ou bien à cause de λ très petit :

$$\sin \theta = \frac{\sin \zeta \text{cof } \lambda}{\text{cof } \phi} (1 + \delta \text{cof } \phi^2 - \delta \text{cof } \lambda^2)$$

Ici il est évident que la différence entre les latitudes λ & ϕ doit être sensible ; car si elle étoit trop petite, la moindre erreur commise dans leur Observation en produiroit une très considérable dans la conclusion. Il faut donc que la route LM ne soit pas perpendiculaire aux méridiennes, puisqu'alors en avançant sur cette route, on ne changeroit pas sensiblement de latitude. On doit principalement ici avoir égard à la longueur de la route LM, quoiqu'il ne soit pas nécessaire de la mesurer ; car il est avantageux qu'on puisse parvenir à une conclusion assés seure, sans qu'on soit obligé de poursuivre cette route trop loin. Soit donc s la longueur de la route LM, ou soit plutôt s l'angle, auquel



quel répond sur une surface sphérique égale à celle de la Terre un arc égal à ce chemin, & puisque cet angle est assez petit, on aura à peu près $\phi = \lambda + s \cos \zeta$; d'où l'on voit que $\cos \zeta$ ne doit pas être trop petit, & partant l'angle ζ ne point trop approcher d'un droit. Mais il faut également que cet angle ζ ne soit pas trop petit, puisqu'alors la différence entre les angles ζ & θ deviendrait trop petite, ce qui rendrait la conclusion également incertaine. Car ayant $\cos \phi = \cos \lambda - s \cos \zeta \sin \lambda$, à cause de s fort petit, on auroit :

$$\sin \theta = \frac{\sin \zeta}{1 - s \cos \zeta \operatorname{tang} \lambda} (1 - 2 \delta s \cos \zeta \sin \lambda \cos \lambda)$$

d'où l'on voit, que pour que la différence $2 \delta s \cos \zeta \sin \lambda \cos \lambda$ devienne sensible, la contrée LM ne doit pas être trop proche, ni du Pole, ni de l'Equateur.

EXEMPLE I.

26. Supposons que le lieu L se trouve à la latitude de 48° de sorte que $\lambda = 48^\circ$, & que la route LM fasse avec la méridienne un angle $\zeta = 30^\circ$; Qu'on ait continué cette route jusqu'à ce qu'on soit parvenu en M à la latitude de $48^\circ, 52'$, ce qui arrivera après avoir poussé la route par un espace de 15 miles d'Allemagne à peu près. Ayant donc $\phi = 48^\circ, 52'$, si la terre étoit sphérique, on trouveroit l'angle $AMm = \theta = 30^\circ, 34', 15''$. Mais à cause de l'ellipticité de la terre, si nous supposons $\delta = \frac{1}{2} \frac{1}{3}$, l'angle θ se trouvera plus petit de $8''$, & nous aurons $\theta = 30^\circ, 34', 7'$.

Mais si du même lieu L où $\lambda = 48^\circ$, on étoit parti sous l'angle $ALM = \zeta = 60^\circ$, jusqu'à ce qu'on fut arrivé à la latitude $\phi = 48^\circ, 30'$, ce qui arriveroit aussi après avoir fait un chemin de 15 miles d'Allemagne environ; dans l'hypothèse de la Terre sphérique on trouveroit l'angle $AMm = \theta = 60^\circ, 59', 23''$. Mais dans l'hypothèse de $\delta = \frac{1}{2} \frac{1}{3}$ cet angle seroit $\theta = 60^\circ, 59', 9''$, & partant de $14''$ moindre. Ce cas sera donc préférable au précédent pour en connoître l'ellipticité de la Terre.



Supposons que partant du même lieu L où $\lambda = 48^\circ$, la route LM soit telle que l'angle $ALM = \zeta = 80^\circ$, & qu'après avoir fait un chemin de 15 miles environ, on parvienne en M à la latitude $\phi = 48^\circ, 10'$. Alors dans l'hypothèse de la terre sphérique on trouveroit l'angle $AMm = \theta = 81^\circ, 6', 59''$: or dans l'hypothèse de l'ellipticité $\delta = \frac{1}{2}\frac{1}{2}$, cet angle seroit $\theta = 81^\circ, 6', 42''$, & partant de $17''$ moindre.

EXEMPLE 2.

27. Posons que la contrée soit si grande, qu'on puisse continuer la route LM à la distance de 30 miles environ, & que la latitude du lieu L soit la même qu'auparavant savoir, $\lambda = 48^\circ$. Supposons d'abord que l'angle de la route soit $ALM = \zeta = 30^\circ$, & la latitude en M sera $\phi = 49^\circ, 44'$. Donc, si la terre étoit sphérique, l'angle AMm seroit $\theta = 31^\circ, 10', 20''$; mais dans l'hypothèse de l'ellipticité $\delta = \frac{1}{2}\frac{1}{2}$ cet angle fera $\theta = 31^\circ, 10', 4''$, & partant de $16''$ plus petit.

Mais en partant du même lieu L où $\lambda = 48^\circ$, sous l'angle $ALM = \zeta = 60^\circ$, par un espace de 30 miles environ, jusqu'à ce qu'on parvienne à la latitude $\phi = 49^\circ$, l'hypothèse sphérique de la terre donneroit l'angle $AMm = \theta = 62^\circ, 2', 27''$; mais l'hypothèse de l'ellipticité $\delta = \frac{1}{2}\frac{1}{2}$ produiroit $\theta = 62^\circ, 1', 58''$, la différence étant $29''$.

Or supposons que la route tracée LM fasse avec la méridienne en L l'angle $\zeta = 80^\circ$, & qu'après l'avoir continuée par 30 miles environ, on soit parvenu en M à la latitude $\phi = 48^\circ, 21'$. Alors dans l'hypothèse sphérique l'angle AMm seroit $\theta = 82^\circ, 32', 53''$; or dans l'hypothèse de l'ellipticité $\delta = \frac{1}{2}\frac{1}{2}$ cet angle fera $\theta = 82^\circ, 32', 11''$ de $42''$ moindre.

Puisque dans ce cas la différence en latitude est encore assez sensible, on pourra l'angle ζ plus approcher de 90° : soit donc l'angle $ALM = \zeta = 85^\circ$, & qu'après un chemin de 30 miles environ on parvienne



parvienne en M, où la latitude soit $\phi = 48^\circ, 10'$. Alors dans l'hypothese sphérique l'angle AM *m* seroit $\theta = 88^\circ, 3', 43''$, or dans l'hypothese de l'ellipticité $\delta = \frac{1}{2} \frac{1}{5}$ cet angle fera $\theta = 88^\circ, 2', 27''$, & partant de $76''$ moindre.

COROLLAIRE.

28. On voit par là, qu'à moins que la contrée LM ne soit fort proche de l'équateur, il est toujours avantageux de prendre l'angle HLM à peu près droit. On le pourra même faire tout à fait droit, mais alors le calcul deviendra un peu différent de celui, que j'ai employé jusqu'ici, puisqu'en poursuivant la route LM, on approchera de plus en plus de l'équateur. Mais il faut bien remarquer, qu'on fait ici abstraction de toute erreur, qui se pourroit trouver dans les hauteurs du Pole. Il vaudra donc la peine de développer ce cas particulièrement.

PROBLEME IV.

29. Si en partant du lieu L on trace la route LM en sorte, qu'elle soit perpendiculaire à la méridienne ALE, & qu'on continue cette route en M, où l'on observe la hauteur du pole : trouver l'angle AML, que cette route fera avec la méridienne tirée par M, tant dans l'hypothese de la terre sphérique, que dans l'hypothese de l'ellipticité exprimée par la fraction δ . Fig. 3.

SOLUTION.

Soit λ la hauteur du Pole observée en L, & traçant la route LM perpendiculairement à la méridienne tirée en L, on y trouvera la hauteur du Pole de plus en plus petite. Car si dans l'hypothese de la terre sphérique on continuoit l'arc LM, qu'il répondit à l'angle s , & qu'on nommât la hauteur du pole en M $= \phi$, on auroit par la trigonométrie sphérique $\sin \phi = \sin \lambda \cos s$, & partant $\phi < \lambda$. Soit donc en général ϕ la hauteur du pole observée en M, & puisque $\phi < \lambda$, posons $\phi = \lambda - \omega$, de sorte que ω soit un angle fort petit par rapport à λ , parce que nous supposons le lieu L, affés éloigné de l'équateur, & la ligne LM fort petite.



Cela posé si la terre étoit sphérique, & que nous nommâssions l'angle $ALM = \theta$, nous aurions à cause de $\zeta = 90^\circ$:

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{cof} \lambda}{\operatorname{cof} \varphi} = \frac{\operatorname{cof} \lambda}{\operatorname{cof} \lambda \operatorname{cof} \omega + \sin \lambda \sin \omega}$$

& à cause de ω fort petit,

$$\operatorname{cof} \theta = \frac{\sqrt{(2 \omega \sin \lambda \operatorname{cof} \lambda + \sin \lambda^2 - \omega^2 \operatorname{cof} \lambda^2)}}{\operatorname{cof} \lambda + \omega \sin \lambda}$$

ou

$$\operatorname{cof} \theta = \left(\frac{1}{\operatorname{cof} \lambda} - \frac{\omega \sin \lambda}{\operatorname{cof} \lambda^2} \right) \left(\sqrt{2 \omega \sin \lambda \operatorname{cof} \lambda - \frac{\omega^2 (\operatorname{cof} \lambda^2 - \sin \lambda^2)}{2 \sqrt{2 \omega \sin \lambda \operatorname{cof} \lambda}}} \right)$$

d'où nous tirons :

$$\operatorname{cof} \theta = \frac{\sqrt{\omega \sin 2 \lambda}}{\operatorname{cof} \lambda} - \frac{\omega^2 (2 - \operatorname{cof} 2 \lambda)}{2 \operatorname{cof} \lambda \sqrt{\omega \sin 2 \lambda}}$$

Donc, puisque l'angle θ est à peu près droit, si nous posons $\theta = 90^\circ - \mu$, à cause de $\operatorname{cof} \theta = \sin \mu = \mu - \frac{1}{6} \mu^3$, nous aurons

$$\mu = \frac{\sqrt{\omega \sin 2 \lambda}}{\operatorname{cof} \lambda} - \frac{\omega^2 (4 - \operatorname{cof} 2 \lambda)}{6 \operatorname{cof} \lambda \sqrt{\omega \sin 2 \lambda}}$$

Mais considérons à présent la terre comme un ellipsoïde, & ayant :

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{cof} \lambda}{\operatorname{cof} \varphi} (1 + \delta \operatorname{cof} \varphi^2 - \delta \operatorname{cof} \lambda^2)$$

ou bien

$$\sin \theta = (1 - \omega \operatorname{tang} \lambda) (1 + 2 \delta \omega \sin \lambda \operatorname{cof} \lambda)$$

Puisque l'angle θ est aussi à peu près droit, posons pour ce cas $\theta = 90^\circ - \mu$ & nous trouverons

$$\mu = \frac{\sqrt{\omega \sin 2 \lambda}}{\operatorname{cof} \lambda} - \frac{\omega^2 (4 - \operatorname{cof} 2 \lambda)}{6 \operatorname{cof} \lambda \sqrt{\omega \sin 2 \lambda}} - \frac{2 \delta \omega \sin \lambda \operatorname{cof} \lambda^2}{\sqrt{\omega \sin 2 \lambda}}$$

D'où



D'où l'on voit que la différence entre la figure sphérique & elliptique de la terre, produit dans l'angle $AML = \theta$ une différence qui monte à $\delta \cos \lambda \sqrt{\omega \sin 2\lambda}$, dont l'angle AML est plus grand dans l'hypothèse de l'ellipsoïde aplati, que dans l'hypothèse sphérique.

Mais, si la route ML est mesurée sur la surface sphérique par l'angle s , ayant $\sin \Phi = \sin \lambda \cos s = \sin \lambda \cos \omega - \cos \lambda \sin \omega$, on aura $\omega = \frac{1}{2} s s \operatorname{tang} \lambda$, & partant la dite différence sera $= \delta s \sin \lambda \cos \lambda$.

COROLL. 1.

30. De là on voit que cette différence devient la plus grande sous la latitude de 45° , la longueur de la route s demeurant la même. Or, si nous posons $s = 2^\circ$, $\lambda = 45^\circ$, & $\delta = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ cette différence ne se trouve que $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} s = 15 \frac{2}{3}''$, ce qui est de beaucoup moins que dans le dernier cas du second Exemple (27), où pour une route égale ayant pris l'angle $\zeta = 85^\circ$, la différence s'est trouvée $76''$.

COROLL. 2.

31. Il n'est donc pas avantageux de faire l'angle $ALM = \zeta$ droit, quoique la différence devienne très sensible, si l'on approche cet angle tant de 90° , qu'il n'en diffère plus sensiblement: puisque dans le cas $\zeta = 85^\circ$, la différence s'est trouvée de $76''$, tandis que faisant l'angle ζ droit, elle ne monte qu'à environ $15''$.

COROLL. 3.

32. Il est donc fort important de déterminer l'angle ζ , suivant lequel, lorsqu'on produit la route LM jusqu'à une certaine distance, la différence entre les valeurs de l'angle θ , qui répondent tant à la figure sphérique qu'elliptique de la terre, devienne la plus grande.



PROBLEME V.

Fig. 2. 33. *Trouver la direction de la route LM, qu'il faut choisir pour qu'après être parvenu en M, & y avoir observé la hauteur du pôle, l'angle de la route avec la méridienne en M diffère le plus qu'il soit possible dans les hypothèses de la sphéricité & ellipticité de la Terre.*

SOLUTION.

Soit la hauteur du pôle en L = λ , l'angle de la route LM, qu'on cherche, $ALM = \zeta$, & la hauteur du pôle en M = ϕ . Or le principal, à quoi il faut ici réfléchir, est la longueur du chemin LM, afin qu'en la prenant à peu près la même, la différence entre la sphéricité & l'ellipticité de la terre devienne la plus sensible dans l'angle AMm . Que l'angle s marque la longueur de la route LM, si la terre étoit sphérique, & alors on aura par la trigonométrie sphérique:

$$\sin \phi = \cos \zeta \cos \lambda \sin s + \sin \lambda \cos s$$

Soit donc cet angle ϕ la hauteur du Pole en M, où il faut bien remarquer, que lorsque la terre n'est pas sphérique, l'angle s ne se rapporte plus à la longueur de la route LM, où il n'en marquera qu'à peu près la grandeur.

Considérons maintenant la terre comme sphérique, & posons l'angle $AMm = \theta$, & nous avons vu qu'il y aura $\sin \theta = \frac{\sin \zeta \cos \lambda}{\cos \phi}$.

Mais donnant à la terre une ellipticité exprimée par δ , cet angle AMm fera un peu plus petit; posons donc cet angle $AMm = \theta - \omega$, & nous aurons

$$\sin (\theta - \omega) = \frac{\sin \zeta \cos \lambda}{\cos \phi} (1 - \delta (\cos \lambda^2 - \cos \phi^2))$$

or cette équation se réduit à

$$\cos \omega - \cos \theta \sin \omega = 1 - \delta (\cos \lambda^2 - \cos \phi^2)$$

d'où



d'où l'on voit que l'angle ω étant fort petit, le cas ne fauroit être plus favorable, que lorsque $\theta = 90^\circ$, puisqu'alors, à cause de $\text{cof } \omega = 1 - \frac{1}{2} \omega \omega$, & $\omega^2 = 2 \delta (\text{cof } \lambda^2 - \text{cof } \Phi^2)$ la différence ω est déterminée par $\sqrt{\delta}$, & partant beaucoup plus considérable que si elle étoit proportionnelle à δ .

Posons donc $\theta = 90^\circ$, & il faut qu'il y ait: $\sin \zeta = \frac{\text{cof } \Phi}{\text{cof } \lambda}$,
ou $\text{cof } \Phi = \sin \zeta \text{cof } \lambda$, donc $\sin \Phi = \sqrt{1 - \sin^2 \zeta \text{cof } \lambda^2}$. Or
cette valeur étant substituée donne

$$1 - \sin^2 \zeta \text{cof } \lambda^2 = \text{cof } \zeta^2 \text{cof } \lambda^2 \sin^2 s + 2 \text{cof } \zeta \sin \lambda \text{cof } \lambda \sin s \text{cof } s + \sin^2 \lambda \text{cof } s^2$$

où

$$0 = (\text{cof } \zeta \text{cof } \lambda \text{cof } s - \sin \lambda \sin s)^2 \text{ donc } \text{cof } \zeta = \frac{\sin \lambda \sin s}{\text{cof } \lambda \text{cof } s}$$

& de là nous tirons:

$$\sin \Phi = \frac{\sin \lambda \sin s^2}{\text{cof } s} + \sin \lambda \text{cof } s = \frac{\sin \lambda}{\text{cof } s}$$

Ayant donc établi la longueur de la route à peu près selon la nature de la contrée, en sorte que quinze miles d'Allemagne soient contées pour un degré: on aura d'abord l'angle $ALM = \zeta$, que la route doit faire avec la méridienne en l , par la formule $\text{cof } \zeta = \frac{\sin \lambda \sin s}{\text{cof } \lambda \text{cof } s}$: & on parviendra sur cette route à un endroit M , où l'élévation du pole sera Φ , de sorte que $\sin \Phi = \frac{\sin \lambda}{\text{cof } s}$.

Or étant parvenu à cette hauteur du Pole sur la route marquée LM , il est certain que si la terre étoit sphérique, on trouveroit la route perpendiculaire à la méridienne en M ; ou bien l'angle θ seroit droit. Mais, dans l'hypothese de l'ellipticité de la Terre, l'angle AMm se trouvera moindre que droit: supposons donc que cet angle soit $= 90^\circ - \omega$, & nous aurons à cause de $\theta = 90^\circ$

$$\text{cof } \omega = 1 - \delta (\text{cof } \lambda^2 - \text{cof } \Phi^2) = 1 - \frac{1}{2} \omega \omega$$

donc



donc $\omega = \sqrt{2} \delta (\cos \lambda^2 - \cos \phi^2)$

or $\cos \phi^2 = 1 - \frac{\sin \lambda^2}{\cos s^2}$ & partant

$$\cos \lambda^2 - \cos \phi^2 = -\sin \lambda^2 + \frac{\sin \lambda^2}{\cos s^2} = \sin \lambda^2 \operatorname{tang} s^2$$

Par conséquent nous aurons $\omega = \sin \lambda \operatorname{tang} s \sqrt{2} \delta$

ou, puisque l'arc s est toujours si petit, qu'on le peut confondre avec la tangente, la différence des angles AMm qui répondent, ou à la sphéricité ou à l'ellipticité de la Terre, sera

$$\omega = s \sin \lambda \sqrt{2} \delta$$

Et réciproquement ayant bien observé l'angle $AMm = 90^\circ - \omega$, on en

déduira la figure elliptique de la terre: $\delta = \frac{\omega^2}{2 s s \sin \lambda^2}$ ou à cause

de $s = \frac{\cos \zeta}{\operatorname{tang} \lambda}$: on aura $\delta = \frac{\omega \omega}{2 \cos \zeta^2 \cos \lambda^2}$.

COROLL. I.

34. Cette méthode semble donc fort avantageuse dans toutes les régions de la terre, qui ne sont pas trop proches de l'équateur, puis que à cause de $\sin \lambda$ trop petit, la différence ω deviendroit insensible. Mais plus le país est éloigné de l'équateur, cette opération se pratiquera avec d'autant plus de succès. Cependant il est évident, que trop près des Poles cette méthode perd à d'autres égards son utilité; puisque sous les Poles mêmes il n'y a point de lignes méridiennes.

COROLL. 2.

35. Plus on continuë loin la route LM , & plus devient grande la différence ω dans la même raison. Mais il n'en est pas de même de l'ellipticité δ , dont l'angle ω suit la raison soudoublée: de sorte que si la valeur de δ devenoit quatre fois plus grande, l'angle ω ne seroit augmenté

menté qu'au double. Or la grandeur de cet angle ω suppléera suffisamment à ce défaut.

COROLL. 3.

36. Supposons l'ellipticité $\delta = \frac{1}{25}$, & la longueur de la route LM environ de 15 miles d'Allemagne. Soit de plus la hauteur du pôle en L de 45° , & à cause de $\sin \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ & $s = 1^\circ$, il y aura à peu près $\omega = \frac{1}{25}$ degré. $= 4'$; & cette différence est assez sensible pour découvrir la véritable ellipticité de la terre.

E X E M P L E.

37. Que le lieu L se trouve à la latitude de $52^\circ, 31'$, & qu'on ait la commodité de tracer une ligne vers l'ouest, ou environ; par une étendue de 15 miles environ, & il s'agit de trouver la direction la plus avantageuse de la ligne LM à tracer. Puisque $\lambda = 52^\circ, 31'$ & $s = 1^\circ$, on aura

$$\begin{array}{rcl}
 \text{+} & \begin{array}{l} l \operatorname{tang} \lambda = 10, 1152814 \\ l \operatorname{tang} s = 8, 2419215 \\ l \operatorname{cof} \zeta = 8, 3572026 \end{array} & \begin{array}{l} l \sin \lambda = 9, 8995636 \\ l \operatorname{cof} s = 9, 9999338 \\ l \sin \phi = 9, 8996298 \end{array} \\
 \text{donc} & \zeta = 88^\circ, 41', 45'' & \& \quad \phi = 52^\circ, 31', 41''
 \end{array}$$

Maintenant, puisqu'il seroit impossible d'observer exactement ces mesures, & qu'il suffit de s'en tenir à peu près, supposons qu'on ait tracé la ligne LM en sorte, qu'elle fasse avec la méridienne tirée par L vers le nord un angle de $88^\circ, 41', 30''$, & qu'on ait poussé cette ligne jusqu'en M, où l'on ait observé la hauteur du pôle de $40''$ plus grande qu'en L: de sorte que

$$\lambda = 52^\circ, 31'; \quad \zeta = 88^\circ, 41' 30'' \quad \& \quad \phi = 52^\circ, 31', 40''$$

Cela posé, voyons sous quel angle cette ligne LM fera inclinée à la méridienne tirée par M, tant lorsque la terre seroit sphérique que sphéroï-

diqne elliptique dans l'hypothese $\delta = \frac{1}{2} \frac{1}{5}$. Or d'abord si la terre étoit sphérique, & qu'on posât l'angle $AMm = \theta$, ayant

$$\sin \theta = \frac{\sin \zeta \operatorname{cof} \lambda}{\operatorname{cof} \phi}, \text{ nous aurons ce calcul à faire:}$$

$$\begin{aligned} l \sin \zeta &= 9,9998868 \\ l \operatorname{cof} \lambda &= \frac{9,7842824}{9,7841692} \\ l \operatorname{cof} \phi &= \frac{9,7841726}{9,9999966} \\ \text{donc } l \sin \theta &= 9,9999966 \\ \& \text{ partant } \theta &= 89^{\circ}, 46', 24'' \end{aligned}$$

Mais si la terre étoit sphéroïdique selon la valeur $\delta = \frac{1}{2} \frac{1}{5}$ & que θ marquât encore l'angle AMm , ayant

$$\sin \theta = \frac{\sin \zeta \operatorname{cof} \lambda}{\operatorname{cof} \phi} \cdot (1 - \delta (\operatorname{cof} \lambda^2 - \operatorname{cof} \phi^2))$$

il faudra faire ce calcul:

$$\begin{aligned} l \operatorname{cof} \lambda^2 &= 9,5685648 & \operatorname{cof} \lambda^2 &= 0,3703094 \\ l \operatorname{cof} \phi^2 &= 9,5683452 & \operatorname{cof} \phi^2 &= \frac{0,3701223}{0,0001171} \\ \operatorname{cof} \lambda^2 - \operatorname{cof} \phi^2 &= 0,0001171 \\ \delta (\operatorname{cof} \lambda^2 - \operatorname{cof} \phi^2) &= 0,0000008 \end{aligned}$$

$$\& \text{ partant } \sin \theta = 0,9999992 \cdot \frac{\sin \zeta \operatorname{cof} \lambda}{\operatorname{cof} \phi}$$

$$\text{or } l \frac{\sin \zeta \operatorname{cof} \lambda}{\operatorname{cof} \phi} = 9,9999966$$

$$\begin{aligned} l 0,9999992 &= 9,9999996 \\ \sin \theta &= 9,9999962 \end{aligned}$$

$$\& \text{ partant } \theta = 89^{\circ}, 45', 36''$$

La différence est donc $48''$, mais elle monteroit bien à $4', 30''$, si l'on avoit suivi exactement les déterminations trouvées par le calcul.



REMARQUE. I.

38. Mais dans cet exemple & d'autres semblables, il faut bien remarquer, que la différence des latitudes λ & ϕ est si petite, que la moindre erreur commise dans les observations influeroit trop sensiblement sur la conclusion. Car, puisqu'après avoir observé les quatre angles λ , ϕ & ζ , θ , on a pour l'ellipticité de la terre

$$\delta = \left(1 - \frac{\sin \theta \cos \phi}{\sin \zeta \cos \lambda}\right) : (\cos \lambda^2 - \cos \phi^2)$$

pour que la conclusion soit seure, il faut que le dénominateur ne devienne pas trop petit. Or, pour faire voir combien une erreur commise dans la mesure de ces angles influë sur la conclusion, considérons le dernier cas du 2 exemple §. 27. où supposant $\delta = \frac{1}{217}$ les quatre angles étoient

$$\lambda = 48^\circ; \phi = 48^\circ, 10'; \zeta = 85^\circ, \text{ \& } \theta = 88^\circ, 2', 27''.$$

& supposons que dans la différence des latitudes λ & ϕ , & dans celle des angles ζ & θ , on se soit trompé de $5''$, de sorte que des opérations actuelles on ait tiré,

$$\lambda = 48^\circ; \phi = 48^\circ, 10', 5''; \zeta = 85^\circ; \text{ \& } \theta = 88^\circ, 2', 22''.$$

& voyons quelle seroit l'ellipticité qu'on en trouvera:

$l \sin \theta$	$=$	9,9997457	$l \cos \lambda^2$	$=$	9,6510218
$l \cos \phi$	$=$	9,8240919	$l \cos \phi^2$	$=$	9,6481838
		9,8238376	$\cos \lambda^2$	$=$	0,4477358
$l \sin \zeta$	$=$	9,9983442	$\cos \phi^2$	$=$	0,4448195
$l \cos \lambda$	$=$	9,8255109	Den.	$=$	0,0029163
		9,8238551			
$l \frac{\sin \theta \cos \phi}{\sin \zeta \cos \lambda}$	$=$	9,9999825	donc δ	$=$	$\frac{403}{29163} = \frac{1}{72}$
nombre	$=$	0,9999597			
Numérateur	$=$	0,0000403			

On trouveroit donc l'ellipticité beaucoup plus grande, qu'elle ne seroit en effet, & cette grande différence résulte principalement de l'erreur de l'angle ϕ dans le numérateur: car le dénominateur n'en souffre pas



considérablement. Car, si l'on se trompe dans l'angle ϕ de $d\phi$, la valeur de δ en devient fautive de $\frac{d\phi \sin \theta \sin \phi}{\sin \zeta \cdot \cos \lambda (\cos \lambda^2 - \cos \phi^2)}$, ou bien cette erreur sera à la quantité de δ même, comme $d\phi \sin \theta \sin \phi$ à $\sin \zeta \cos \lambda - \sin \theta \cos \phi$. Donc, afin que l'erreur ne soit pas considérable, il faut que $\sin \zeta \cos \lambda - \sin \theta \cos \phi$, & partant aussi le dénominateur $\cos \lambda^2 - \cos \phi^2$ ne devienne pas trop petit.

REMARQUE. 2.

39. Il vaudra donc mieux de faire l'angle $ALM = \zeta$ plus petit, quoique la différence dans l'angle θ pour l'hypothese sphérique & elliptique devienne plus petite ; car les avantages remarqués cy-dessus lorsqu'on prend l'angle ζ presque droit, supposent absolument, qu'on ne commette pas la moindre erreur dans l'observation des latitudes, & dès qu'on y doit soupçonner quelque erreur, il faut abandonner cette route, & lui en préférer d'autres, où l'angle ζ est pris beaucoup plus petit. Ayant donc trouvé en supposant

$\delta = \frac{1}{229}$, $\lambda = 48^\circ$, $\phi = 49^\circ$, $\zeta = 60^\circ$, l'angle $\theta = 62^\circ, 1', 58''$

supposons qu'on ait trouvé par les opérations actuelles :

$\lambda = 48^\circ$; $\phi = 49^\circ, 0', 5''$; $\zeta = 60^\circ$ & $\theta = 62^\circ, 1', 53''$
& cherchons de là l'ellipticité δ :

$l \sin \theta = 9,9460614$	$l \cos \lambda^2 = 9,6510218$
$l \cos \phi = 9,8169308$	$l \cos \phi^2 = 9,6338616$
$9,7629922$	$\cos \lambda^2 = 0,4477358$
$l \sin \zeta = 9,9375306$	$\cos \phi^2 = 0,4303894$
$l \cos \lambda = 9,8255109$	$\text{Dénom.} = 0,0173464$
$9,7630415$	$\text{Donc } \delta = \frac{1135}{173464} = \frac{1}{153}$
$l \frac{\sin \theta \cos \phi}{\sin \zeta \cos \lambda} = 9,9999507$	
$\text{nombre} = 9,9998865$	
$\text{Numérateur} = 0,0001135$	

Dans



Dans ce cas dont l'erreur des observations influë beaucoup moins sur la conclusion. Cependant on trouvera de même, qu'il n'est pas avantageux de prendre l'angle ζ trop petit; car si nous le prenions de 30° , & que nous fissions ϕ de $5''$ trop grand, & θ de $5''$ trop petit, nous trouverions $\delta = \frac{1}{2} \gamma$: d'où l'on peut conclure que le meilleur parti est toujours de tracer la ligne LM en sorte, qu'elle fasse avec la méridienne un angle moindre que 60° , & plus grand que 30° . Il y a d'autres raisons qui conseillent de prendre cet angle ζ de $54^\circ, 44'$, pour que $\sin \zeta^2 \cos \zeta$ devienne un *maximum*: mais, puisqu'on est incertain, si les erreurs affectent les angles λ & ϕ , & quel rapport ces doubles erreurs tiennent entr'elles, on ne sauroit rien déterminer de précis là dessus; & il suffit d'avoir fixé les limites de 30° & 60° entre lesquels l'angle ζ doit être choisi. Or le plus avantageux est de continuer la ligne LM aussi loin qu'il est possible; car plus on la pourra allonger, & plus fera-t-on sûr de la conclusion, qu'on en tirera. Cependant je dois avouër que cette méthode ne sauroit jamais être exécutée dans la pratique: car non seulement on rencontreroit des difficultés insurmontables à tracer la ligne la plus courte; mais aussi la ligne méridienne ne sauroit jamais être tracée si exactement, que le succès de cette méthode l'exige, une erreur de $20''$ y étant presque inévitable.

