



P R I N C I P E S
DE LA TRIGONOMETRIE SPHERIQUE
TIRÉS DE LA MÉTHODE DES PLUS GRANDS
ET PLUS PETITS.

PAR M. EULER.

Puisqu'on fait que les arcs de grands cercles, tirés sur la surface d'une sphère, représentent le plus court chemin d'un point à l'autre, un triangle sphérique pourra être défini en sorte, que trois points étant donnés sur une surface sphérique, si l'on y trace d'un point à l'autre le plus court chemin, l'espace renfermé entre ces trois points soit un triangle sphérique. Donc, parce que les côtés d'un triangle sphérique sont les lignes les plus petites, qu'on peut tirer d'un angle à l'autre, la méthode des plus grands & plus petits pourra être employée à déterminer les côtés d'un triangle sphérique; & de là on pourra ensuite trouver le rapport, qui subsiste entre les angles & les côtés; & c'est en quoi consiste la Trigonométrie sphérique. Car les trois points, où se trouvent les angles, détermineront par là, tant les trois côtés que les trois angles: & ces six choses auront toujours un tel rapport entr'elles, que trois quelconques étant connus, on en puisse déterminer les trois autres.

C'est donc une propriété, que les triangles sphériques ont commune avec les triangles plans, qui sont l'objet de la Trigonométrie élémentaire. Car, comme un triangle plan est l'espace renfermé entre trois points marqués sur un plan, lorsqu'on tire de l'un à l'autre la ligne la plus courte, qui est sur le plan une ligne droite; de même un triangle
angle



angle sphérique est l'espace renfermé entre trois points marqués sur une surface sphérique, lorsqu'on joint ces trois points par les lignes les plus courtes, qu'on sauroit tirer de l'un à l'autre sur la même surface. Or il est clair qu'un triangle sphérique se change dans un triangle plan, lorsque le rayon de la sphère devient infiniment grand; attendu qu'une surface plane peut être regardée comme la surface d'une sphère infiniment grande.

On m'objectera sans doute, que c'est aller contre les règles de la méthode, que de vouloir employer le calcul des plus grands & plus petits pour établir les fondemens de la Trigonométrie sphérique; outre qu'il paroît inutile de les tirer encore d'autres principes, puisque ceux dont on s'est servi jusqu'ici, sont fondés sur la Géométrie élémentaire, dont la rigueur sert de règle à toutes les autres parties des Mathématiques. Mais d'abord je remarque, que la méthode des plus grands & plus petits en acquiert quasi un nouveau lustre, quand je ferai voir, qu'elle seule nous peut conduire à la résolution des triangles sphériques; & ensuite il est toujours utile de parvenir par des routes différentes aux mêmes vérités, puisque notre esprit ne manque pas d'en tirer de nouveaux éclaircissemens.

Mais je puis outre cela avancer, que la méthode des plus grands & plus petits est beaucoup plus générale que la méthode ordinaire. Car celle-cy se borne aux triangles formés sur des surfaces, ou planes, ou sphériques, au lieu que l'autre s'étend également à des surfaces quelconques. Ainsi, si l'on demandoit la nature des triangles formés sur des surfaces sphéroïdiques, ou conoïdiques, dont les côtés seroient les lignes les plus petites, qu'on peut tirer d'un angle à l'autre; la méthode ordinaire ne seroit pas propre pour cette recherche: mais il faudroit absolument recourir à la méthode des plus grands & plus petits, sans laquelle on ne seroit pas même en état de connoître les lignes les plus courtes, qui formeroient les côtés de ces triangles.

On comprend de là, que cette recherche pourroit bien devenir d'une grande importance; car la surface de la Terre n'étant point sphérique,



rique, mais sphéroïdique, un triangle formé sur la surface de la Terre apartiendra à l'espece, dont je viens de parler. Pour voir cela, on n'a qu'à s'imaginer trois points sur la surface de la Terre, qui soient joints par le plus court chemin, qu'il y a de l'un à l'autre ; ou qui seroit formé par une corde tenduë de l'un à l'autre : car c'est ainsi qu'on doit se représenter les triangles, qu'on forme par les opérations faites pour la mesure de la Terre. Il est bien vrai qu'on regarde ordinairement ces triangles comme plans & rectilignes, & c'est déjà bien de l'exactitude, quand on les calcule sur le pied des triangles sphériques. Mais si l'on parvenoit à faire ces triangles beaucoup plus grands, & qu'on en voulut faire le calcul avec toute la précision possible, on seroit sans doute réduit à rechercher la véritable nature de ces triangles, dont on ne sauroit venir à bout sans recourir à la méthode des plus grands & des plus petits.

Ayant donc fait voir l'importance de cette méthode dans le sujet dont il s'agit, il ne sera pas mal à propos d'appliquer cette méthode à la résolution des triangles sphériques ; puisque d'un côté cette recherche servira de base & de modèle pour la résolution des triangles formés sur une surface sphéroïdique quelconque : & d'un autre côté elle nous fournira des éclaircissemens considérables, tant sur la Trigonometrie sphérique même que sur la méthode des plus grands & plus petits, dont on connoitra de plus en plus mieux l'étenduë & le grand usage. Car, depuis qu'on a montré que la plupart des problèmes mécaniques & physiques se résolvent fort promptement par le moyen de cette méthode, il ne sauroit être que très agréable de voir, que la même méthode apporte un si grand secours pour la résolution des problèmes de la pure Géometrie.

Pour commencer cette recherche d'une manière, qu'elle s'étende également à la sphère & à un sphéroïde quelconque, je regarde d'abord deux points opposés de la sphère comme ses poles, & le grand cercle, qui en est également éloigné, représentera l'équateur, & les lignes



les plus courtes tirées d'un pôle à chaque point de l'équateur représenteront des méridiens, qui sont perpendiculaires à l'équateur. Or quand il s'agit de la sphère, on pourra regarder chaque côté d'un triangle sphérique comme faisant partie de l'équateur, & quand le triangle est rectangle, on pourra toujours envisager l'un des côtés, qui forment l'angle droit, comme une portion de l'équateur, & l'autre côté comme une portion d'un méridien, puisqu'on peut prendre les deux pôles à volonté; mais il n'en fera pas de même, dès que la surface n'est plus sphérique, mais sphéroïdique. Cependant je ne parlerai ici que des surfaces sphériques, me réservant les sphéroïdiques pour un autre Mémoire.

P R O B L E M E I.

Fig. 1. 1. *Etant donnés sur l'équateur AB l'arc AP, & sur un méridien CP l'arc PM, trouver sur la surface sphérique la plus courte ligne AM, qu'on puisse tirer du point A au point M.*

S O L U T I O N.

Posant le demi-diamètre de la sphère $\equiv 1$, soit l'arc de l'équateur $AP \equiv x$, & l'arc du méridien $PM \equiv y$. Soit de plus l'arc cherché $AM \equiv s$, qu'on prolonge infiniment peu en m , de sorte que $Mm \equiv ds$, & qu'on tire par m le méridien Omp , & l'élément Mn , qui y soit perpendiculaire. Cela posé, on aura $Pp \equiv dx$, & $mn \equiv dy$; & puisque Pp est à Mn , comme le sinus total 1 au sinus de l'arc OM , ou au cosinus de $PM \equiv y$, on aura $Mn \equiv dx \cos y$: & le triangle Mnm à n rectangle fournira

$$Mm \equiv ds \equiv \sqrt{(dy^2 + dx^2 \cos^2 y)}, \quad \& \text{ partant}$$

$$AM \equiv s \equiv \int \sqrt{(dy^2 + dx^2 \cos^2 y)}.$$

Il s'agit donc de trouver un tel rapport entre x & y , que si on leur donne des valeurs déterminées comme AP & PM , la valeur de l'intégrale $\int \sqrt{(dy^2 + dx^2 \cos^2 y)}$ devienne la plus petite, qu'il



qu'il soit possible. Pour cet effet posons $dy = p dx$, pour réduire cette intégrale à cette forme $\int dx \sqrt{pp + \text{cof } y^2}$; & puisque j'ai démontré que lorsque la formule intégrale $\int Z dx$, où Z est telle fonction de x , y , & p , que $dZ = M dx + N dy + P dp$, doit devenir un plus grand ou plus petit, cela arrive par cette équation $N dx - dP = 0$. Donc, faisant l'application à notre cas, nous aurons

$$Z = \sqrt{pp + \text{cof } y^2}, \text{ donc } dZ = -\frac{dy \sin y \text{cof } y}{\sqrt{pp + \text{cof } y^2}} + \frac{p dp}{\sqrt{pp + \text{cof } y^2}},$$

$$\& \text{ partant } M = 0, N = -\frac{\sin y \text{cof } y}{\sqrt{pp + \text{cof } y^2}}, \& P = \frac{p}{\sqrt{pp + \text{cof } y^2}}.$$

Or puisque $M = 0$, & partant $dZ = N dy + P dp$, multiplions l'équation $N dx - dP = 0$ par p , qui à cause de $dy = p dx$ deviendra $N dy - p dP = 0$, ou $N dy = p dP$, & cette valeur étant substituée pour $N dy$ donnera $dZ = p dP + P dp$, dont l'intégrale est $Z = Pp + C$, ou bien $\sqrt{pp + \text{cof } y^2} = \frac{pp}{\sqrt{pp + \text{cof } y^2}} + C$:

qui se réduit à $\text{cof } y^2 = C \sqrt{pp + \text{cof } y^2}$; d'où l'on tire $CCpp = \text{cof } y^2 (\text{cof } y^2 - CC)$, ou $p = \frac{dy}{dx} = \frac{\text{cof } y \sqrt{(\text{cof } y^2 - CC)}}{C}$.

Ainsi le rapport entre x & y est renfermé dans cette équation différentielle séparée :

$$dx = \frac{C dy}{\text{cof } y \sqrt{(\text{cof } y^2 - CC)}}, \quad \& \text{ de là on obtiendra :}$$

$$ds = dx \sqrt{pp + \text{cof } y^2} = \frac{dx \text{cof } y^2}{C}, \quad \text{donc}$$

$$ds = \frac{dy \text{cof } y}{\sqrt{(\text{cof } y^2 - CC)}}, \quad \& \text{ l'arc même } s = \int \frac{dy \text{cof } y}{\sqrt{(\text{cof } y^2 - CC)}}.$$



COROLL. I.

2. Donc l'équation $dx = \frac{C dy}{\operatorname{cof} y \sqrt{(\operatorname{cof} y^2 - CC)}}$, exprime

la nature de la ligne AM, qui a cette propriété, qu'en prenant une partie quelconque, elle soit la ligne la plus courte qu'on puisse tirer entre les termes sur une surface sphérique. Or, que cette ligne soit en même tems un grand cercle de la sphère, je l'ai démontré ailleurs; & ici il n'importe pas à notre dessein, quel rapport cette ligne à la sphère, pourvu que nous sachions qu'elle est la plus courte entre les termes.

COROLL. 2.

3. Ayant trouvé $dx = \frac{C dy}{\operatorname{cof} y \sqrt{(\operatorname{cof} y^2 - CC)}}$, nous aurons

$Mn = dx \operatorname{cof} y = \frac{C dy}{\sqrt{(\operatorname{cof} y^2 - CC)}}$. Or $\frac{Mn}{mn}$ exprime la tangente de

l'angle AMP, & partant nous aurons: $\operatorname{tang} \text{AMP} = \frac{C}{\sqrt{(\operatorname{cof} y^2 - CC)}}$.

De plus ayant $Mm = ds = \frac{dy \operatorname{cof} y}{\sqrt{(\operatorname{cof} y^2 - CC)}}$, la fraction $\frac{Mn}{Mm}$ ex-

prime le sinus de l'angle AMP, de sorte que $\sin \text{AMP} = \frac{C}{\operatorname{cof} y}$, &

$\operatorname{cof} \text{AMP} = \frac{\sqrt{(\operatorname{cof} y^2 - CC)}}{\operatorname{cof} y}$.

COROLL. 3.

4. De plus posant $y = 0$, le point M parviendra en A, & alors la fraction $\frac{dy}{dx}$ exprimera la tangente de l'angle PAM, & $\frac{dy}{ds}$ son sinus,

& $\frac{dx}{ds}$ son cosinus. Or ayant alors $\operatorname{cof} y = 1$, il sera $dx = \frac{C dy}{\sqrt{(1 - CC)}}$
&



& $ds = \frac{dy}{\sqrt{(1-CC)}}$: d'où nous tirons $\text{tang PAM} = \frac{\sqrt{(1-CC)}}{C}$;
 $\text{fin PAM} = \sqrt{(1-CC)}$ & $\text{cof PAM} = C$.

COROLL. 4.

5. Donc, si nous introduisons cet angle PAM au lieu de la constante C, & que nous posions $\text{PAM} = \zeta$, à cause de $C = \text{cof } \zeta$, nous aurons, les deux équations suivantes :

$$dx = \frac{dy \text{ cof } \zeta}{\text{cof } y \sqrt{(\text{cof } y^2 - \text{cof } \zeta^2)}} \quad \& \quad ds = \frac{dy \text{ cof } y}{\sqrt{(\text{cof } y^2 - \text{cof } \zeta^2)}}.$$

Et de plus si nous nommons l'angle AMP = θ , nous aurons :

$$\text{tang } \theta = \frac{\text{cof } \zeta}{\sqrt{(\text{cof } y^2 - \text{cof } \zeta^2)}}; \quad \text{fin } \theta = \frac{\text{cof } \zeta}{\text{cof } y} \quad \& \quad \text{cof } \theta = \frac{\sqrt{(\text{cof } y^2 - \text{cof } \zeta^2)}}{\text{cof } y}.$$

COROLL. 5.

6. Il reste encore à intégrer nos deux équations différentielles, qui expriment les valeurs de dx & de ds . Or on trouvera par l'intégration :

$$x = A \text{ fin} : \frac{C \text{ fin } y}{\text{cof } y \sqrt{1-CC}}, \quad \text{ou bien } \text{fin } x = \frac{C \text{ fin } y}{\text{cof } y \sqrt{(1-CC)}} = \frac{\text{cof } \zeta \text{ fin } y}{\text{fin } \zeta \text{ cof } y},$$

$$\& \quad s = A \text{ cf} : \frac{\sqrt{(\text{cof } y^2 - CC)}}{\sqrt{(1-CC)}}, \quad \text{ou bien } \text{cf } s = \frac{\sqrt{(\text{cof } y^2 - CC)}}{\sqrt{(1-CC)}} = \frac{\sqrt{(\text{cof } y^2 - \text{cof } \zeta^2)}}{\text{fin } \zeta}.$$

COROLL. 6.

7. Voilà donc des quantités ζ & y les autres quantités x , s & θ déterminées en sorte :

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{\text{cf} \zeta \sin y}{\sin \zeta \text{cf} y}; \quad \cos x = \frac{V(\text{cf} y^2 - \text{cf} \zeta^2)}{\sin \zeta \cos y}, \quad \& \quad \text{tang} x = \frac{\cos \zeta \sin y}{V(\text{cf} y^2 - \text{cf} \zeta^2)} \\ \sin s &= \frac{\sin y}{\sin \zeta}; \quad \cos s = \frac{V(\text{cf} y^2 - \text{cf} \zeta^2)}{\sin \zeta}, \quad \& \quad \text{tang} s = \frac{\sin y}{V(\text{cf} y^2 - \text{cf} \zeta^2)} \\ \sin \theta &= \frac{\cos \zeta}{\cos y}; \quad \cos \theta = \frac{V(\text{cf} y^2 - \text{cf} \zeta^2)}{\cos y}, \quad \& \quad \text{tang} \theta = \frac{\cos \zeta}{V(\text{cf} y^2 - \text{cf} \zeta^2)}. \end{aligned}$$

COROLL. 7.

8. Puisqu'il n'y a que cette seule formule irrationnelle $V(\text{cf} y^2 - \text{cf} \zeta^2)$, qui entre dans nos équations trouvées, en l'éliminant, nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} \frac{\cos s}{\cos x} &= \cos y; \quad \frac{\cos \theta}{\cos x} = \sin \zeta; \quad \frac{\cos \theta}{\cos s} = \frac{\sin \zeta}{\cos y}; \\ \frac{\text{tang} x}{\text{tang} s} &= \cos \zeta; \quad \frac{\text{tang} x}{\text{tang} \theta} = \sin y; \quad \frac{\text{tang} s}{\text{tang} \theta} = \frac{\sin y}{\cos \zeta}; \\ \sin x &= \frac{\cos \zeta \sin y}{\sin \zeta \cos y}; \quad \cos x \text{ tang} s = \frac{\sin y}{\sin \zeta \cos y}; \quad \cos x \text{ tang} \theta = \frac{\cos \zeta}{\sin \zeta \cos y}; \\ \cos s \text{ tang} x &= \frac{\cos \zeta \sin y}{\sin \zeta}; \quad \sin s = \frac{\sin y}{\sin \zeta}; \quad \cos s \text{ tang} \theta = \frac{\cos \zeta}{\sin \zeta}; \\ \cos \theta \text{ tang} x &= \frac{\cos \zeta \sin y}{\cos y}; \quad \cos \theta \text{ tang} s = \frac{\sin y}{\cos y}; \quad \sin \theta = \frac{\cos \zeta}{\cos y}. \end{aligned}$$

COROLL. 8.

9. Ayant ici cinq quantités x, y, s, ζ & θ , qui appartiennent au triangle sphérique rectangle APM, prenons des égalités trouvées celles, qui n'en renferment que trois, qui seront étant réduites à la plus simple forme :

I. \cos

I. $\cos s = \cos x \cos y$; II. $\cos \theta = \sin \zeta \cos x$; III. $\operatorname{tg} x = \cos \zeta \operatorname{tg} s$;
 IV. $\operatorname{tang} x = \sin y \operatorname{tg} \theta$; V. $\operatorname{tg} y = \sin x \operatorname{tg} \zeta$; VI. $\sin y = \sin \zeta \sin s$;
 VII. $\cos s \operatorname{tang} \zeta \operatorname{tg} \theta = 1$; VIII. $\operatorname{tg} y = \cos \theta \operatorname{tg} s$; IX. $\cos \zeta = \sin \theta \cos y$.

d'où, étant donnés deux quelconques, on en pourra trouver les trois autres, sans qu'on ait besoin d'extraction de racines, pourvu qu'on y ajoute cette dixième : X. $\sin x = \sin \theta \sin s$, qui fuit d'abord des trois premières formules à la gauche du §. 6.

P R O B L E M E II.

10. *Exposer les règles, pour la résolution de tous les cas des triangles rectangles sphériques.*

S O L U T I O N.

Soient les angles marqués par A, B, C, dont celui-cy C soit le droit, & les côtés par les petites lettres a, b, c, qui répondent aux angles opposés, de sorte que c soit l'hypoténuse, & a, & b les cathètes. Comparant donc ce triangle avec la figure précédente, nous aurons :

$$s = c ; x = b ; y = a ; \zeta = A \quad \& \quad \theta = B.$$

Maintenant tout revient à ce que deux de ces cinq quantités étant données, on en détermine les trois autres : or les formules rapportées fourniront les résolutions suivantes pour tous les cas possibles.

Les 2. quanti-
tés données.

Détermination des trois autres.

I. a, b	$\text{cof } c = \text{cof } a \cdot \text{cof } b$; $\text{tg } A = \frac{\text{tang } a}{\text{fin } b}$; $\text{tg } B = \frac{\text{tang } b}{\text{fin } a}$
II. a, c	$\text{cof } b = \frac{\text{cof } c}{\text{cof } a}$; $\text{fin } A = \frac{\text{fin } a}{\text{fin } c}$; $\text{cf } B = \frac{\text{tang } a}{\text{tang } c}$
III. b, c	$\text{cof } a = \frac{\text{cof } c}{\text{cof } b}$; $\text{cf } A = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } c}$; $\text{fin } B = \frac{\text{fin } b}{\text{fin } c}$
IV. a, A	$\text{fin } b = \frac{\text{tang } a}{\text{tang } A}$; $\text{fin } c = \frac{\text{fin } a}{\text{fin } A}$; $\text{fin } B = \frac{\text{cof } A}{\text{cof } a}$
V. a, B	$\text{tag } b = \text{fin } a \text{ tg } B$; $\text{tg } c = \frac{\text{tang } a}{\text{cof } B}$; $\text{cf } A = \text{cf } a \cdot \text{fin } B$
VI. b, A	$\text{tag } a = \text{fin } b \text{ tg } A$; $\text{tg } c = \frac{\text{tang } b}{\text{cof } A}$; $\text{cf } B = \text{cf } b \cdot \text{fin } A$
VII. b, B	$\text{fin } a = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } B}$; $\text{fin } c = \frac{\text{fin } b}{\text{fin } B}$; $\text{fin } A = \frac{\text{cof } B}{\text{cof } b}$
VIII. c, A	$\text{fin } a = \text{fin } c \cdot \text{fin } A$; $\text{tg } b = \text{tg } c \cdot \text{cof } A$; $\text{tg } B = \frac{1}{\text{cf } c \cdot \text{tg } A}$
IX. c, B	$\text{fin } b = \text{fin } c \cdot \text{fin } B$; $\text{tg } a = \text{tg } c \cdot \text{cof } B$; $\text{tg } A = \frac{1}{\text{cf } c \cdot \text{tg } B}$
X. A, B	$\text{cof } a = \frac{\text{cof } A}{\text{fin } B}$; $\text{cf } b = \frac{\text{cof } B}{\text{fin } A}$; $\text{cof } c = \frac{1}{\text{tg } A \cdot \text{tg } B}$

COROLL. I.

II. De là il est évident que le côté a avec son angle opposé A entre également dans ces formules, que l'autre côté b avec son



son angle opposé B, de sorte qu'il est indifférent, lequel des deux côtés a & b on veuille prendre pour base, tout comme la nature du sujet l'exige.

COROLL. 2.

12. Le grand nombre des formules, qui expriment le rapport entre les diverses parties du triangle rectangle, se réduit aux formules suivantes, dont le nombre est plus petit, & qu'il suffit de savoir par cœur.

$$\text{I. } \sin c = \frac{\sin a}{\sin A} \quad \text{ou} \quad \sin c = \frac{\sin b}{\sin B}.$$

$$\text{II. } \cos c = \cos a. \cos b$$

$$\text{III. } \cos c = \cot A. \cot B$$

$$\text{IV. } \cos A = \frac{\tan b}{\tan c} \quad \text{ou} \quad \cos B = \frac{\tan a}{\tan c}$$

$$\text{V. } \sin A = \frac{\cos B}{\cos b} \quad \text{ou} \quad \sin B = \frac{\cos A}{\cos a}$$

$$\text{VI. } \sin a = \frac{\tan b}{\tan B} \quad \text{ou} \quad \sin b = \frac{\tan a}{\tan A}.$$

COROLL. 3.

13. On n'a donc qu'à remarquer ces six formules, qui contiennent autant de propriétés des triangles sphériques rectangles; & on fera en état de résoudre tous les cas de ces triangles, qu'on puisse imaginer.

PROBLEME III.

14. *Trouver l'aire d'un triangle sphérique rectangle.*

SOLUTION.

Soit dans le triangle rectangle APM la base AP = x & le côté PM = y , & ayant tiré le méridien infiniment proche Om p,

Fig. 1.



on aura $Pp = dx$ & $mn = dy$. De plus ayant $Mn = dx \operatorname{cof} y$, l'élément de l'aire $PMmp$ fera $= dx dy \operatorname{cof} y$, en prenant dx pour constant. Donc l'aire même $PMmp$ fera $= dx \sin y$, laquelle étant le différentiel de l'aire du triangle APM , celle-cy fera $= \int dx \sin y$.

Or nous avons trouvé $dx = \frac{dy \operatorname{cof} \zeta}{\operatorname{cof} y \sqrt{(\operatorname{cof} y^2 - \operatorname{cof} \zeta^2)}}$, où ζ marque l'angle PAM , & partant l'aire du triangle fera $= \int \frac{dy \sin y \operatorname{cof} \zeta}{\operatorname{cof} y \sqrt{(\operatorname{cof} y^2 - \operatorname{cof} \zeta^2)}}$. Au lieu de y introduisons l'angle

$AMP = \theta$; & à cause de $\sin \theta = \frac{\operatorname{cof} \zeta}{\operatorname{cof} y}$ & $\operatorname{cof} \theta = \frac{\sqrt{(\operatorname{cof} y^2 - \operatorname{cof} \zeta^2)}}{\operatorname{cof} y}$,

nous aurons $d\theta \operatorname{cof} \theta = \frac{dy \operatorname{cof} \zeta \sin y}{\operatorname{cof} y^2}$; donc $d\theta = \frac{dy \operatorname{cof} \zeta \sin y}{\operatorname{cof} y \sqrt{(\operatorname{cof} y^2 - \operatorname{cof} \zeta^2)}}$;

de sorte que l'aire du triangle cherchée devienne $= \int d\theta = \theta + \operatorname{Const}$. Pour assigner à cette constante sa juste valeur, il faut considérer, que l'aire doit évanouir, lorsque le point M tombe en A , auquel cas l'angle θ devient $= 90^\circ - \zeta$; donc il faut qu'il soit $90^\circ - \zeta + \operatorname{Const} = 0$, & partant $\operatorname{Const} = \zeta - 90^\circ$. Par conséquent l'aire cherchée du triangle APM fera $= \zeta + \theta - 90^\circ$; ou bien l'excès de la somme des deux angles PAM & AMP sur un angle droit exprimera l'aire du triangle APM .

COROLL. 1.

15. Donc la somme des deux angles PAM & AMP est toujours plus grande qu'un angle droit, & l'excès est d'autant plus grand, plus l'aire du triangle sera grande. Et un arc de grand cercle, mesure de cet excès, étant multiplié par le rayon de la sphère donnera l'aire du triangle sphérique.

COROLL. 2.

16. De là on déduira aisément l'aire d'un triangle sphérique quelconque : car, parce qu'un tel triangle se peut résoudre en deux tri-
an-



angles rectangles, on trouvera son aire, lorsqu'on multiplie l'excès de la somme de ses trois angles sur 180° par le rayon de la sphère.

P R O B L E M E IV.

17. *Sur la surface d'une sphère étant donnés deux points quelconques E & M, trouver la ligne la plus courte EM entre ces deux points.*

S O L U T I O N.

Qu'on tire d'un des poles O à ces deux points les méridiens OE & OM, dont celui-cy soit regardé comme variable. Nommons le méridien OE $= a$; OM $= x$; & l'angle EOM $= y$. De plus soit pour les quantités cherchées l'arc EM $= s$, l'angle OEM $= \alpha$, & l'angle OME $= \phi$; qui sera variable avec les quantités x , y & s , tandis que a & α demeurent invariables. Qu'on tire le méridien infiniment proche Om, auquel on tire de M la perpendiculaire Mn, & on aura $mn = dx$; l'angle MOm $= dy$, & $Mn = dy \sin x$, prenant l'unité pour marquer le rayon de la sphère.

De là nous aurons $\operatorname{tg} \phi = \frac{Mn}{mn} = \frac{dy \sin x}{dx}$, ou bien $\sin \phi = \frac{dy \sin x}{ds}$,

& $\operatorname{cof} \phi = \frac{dx}{ds}$. Or ayant $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 \sin^2 x}$, il faut que

cette formule $\int \sqrt{dx^2 + dy^2 \sin^2 x}$ soit un *minimum*. Pour cet effet posons $dy = p dx$, pour avoir cette formule $\int dx \sqrt{1 + pp \sin^2 x} = \int Z dx$ à rendre la plus petite: de sorte que $Z = \sqrt{1 + pp \sin^2 x}$. Or en général, si l'on a $dZ = M dx + N dy + P dp$, l'équation pour le *minimum* est $N dx - dP = 0$: donc faisant l'application à notre cas, nous avons

$N = 0$; & $P = \frac{p \sin^2 x}{\sqrt{1 + pp \sin^2 x}}$. Mais à cause de $N = 0$,

notre équation sera $dP = 0$, & partant $P = \text{Const.}$ Par conséquent



nous aurons $\frac{p \sin x^2}{V(1 - pp \sin x^2)} = C$, ou $\frac{dy \sin x^2}{V(dx^2 + dy^2 \sin x^2)} = C$,

c'est à dire $\frac{dy \sin x^2}{ds} = \sin x \sin \phi = C$. Pour déterminer cette

constante il faut considérer, que faisant évanouir l'angle $EOM = y$, il devient $x = a$, & $\phi = 180^\circ - a$, ou $\sin \phi = \sin a$; donc dans ce cas nous avons $\sin a \sin a = C$. Par conséquent la nature

du *minimum* fournit l'équation : $\frac{dy \sin x^2}{V(dx^2 + dy^2 \sin x^2)} = \sin a \sin a$,

Mais, il faut encore intégrer l'équation différentielle ; qui se change en celle - cy $dy = \frac{C dx}{\sin x V(\sin x^2 - CC)}$ remettant C pour $\sin a \sin a$:

& de là à cause de $ds = \frac{dy \sin x^2}{C}$ on aura encore $ds = \frac{dx \sin x}{V(\sin x^2 - CC)}$.

Or on trouvera par les règles de l'intégration :

$$y = -A \sin \frac{C \cos x}{\sin x V(1 - CC)} + A \sin \frac{C \cos a}{\sin a V(1 - CC)} =$$

$$-A \cos \frac{V(\sin x^2 - CC)}{\sin x V(1 - CC)} + A \cos \frac{V(\sin a^2 - CC)}{\sin a V(1 - CC)}.$$

$$s = -A \cos \frac{V(\sin x^2 - CC)}{V(1 - CC)} + A \cos \frac{V(\sin a^2 - CC)}{V(1 - CC)} =$$

$$-A \sin \frac{\cos x}{V(1 - CC)} + A \sin \frac{\cos a}{V(1 - CC)}.$$

Où les constantes ajoutées sont telles, que faisant $y = 0$ & $s = 0$, il devienne $x = a$. Mais les deux arcs de cercles étant réduits en un don-

neront $y = A \sin \frac{C \cos a V(\sin x^2 - CC) - C \cos x V(\sin a^2 - CC)}{(1 - CC) \sin a \sin x}$,

$s = A \sin \frac{\cos a V(\sin x^2 - CC) - \cos x V(\sin a^2 - CC)}{1 - CC}$, d'où



d'où nous tirons ces deux équations :

$$(1-CC) \sin a \sin x \sin y = C \cos a \sqrt{(\sin x^2 - CC)} - C \cos x \sqrt{(\sin a^2 - CC)}$$

$$(1-CC) \sin s = \cos a \sqrt{(\sin x^2 - CC)} - \cos x \sqrt{(\sin a^2 - CC)}.$$

Mais, en prenant les cosinus des angles y & s , nous aurons :

$$(1-CC) \sin a \sin x \cos y = \sqrt{(\sin a^2 - CC)} (\sin x^2 - CC) + CC \cos a \cos x$$

$$(1-CC) \cos s = \sqrt{(\sin a^2 - CC)} (\sin x^2 - CC) + \cos a \cos x.$$

Et remettant pour C sa valeur $\sin a \sin \alpha$, puisque

$$\sqrt{(\sin a^2 - CC)} = -\sin a \cos \alpha$$

car nous regardons ici l'angle α comme obtus, afin que l'angle Φ soit depuis le point E aigu ; parce que posant $y = 0$, l'angle Φ devient $180^\circ - \alpha$, dont le cosinus est $-\cos \alpha$; nous aurons :

$$(1 - \sin a^2 \sin \alpha^2) \sin x \sin y = \sin \alpha \cos a \sqrt{(\sin x^2 - \sin a^2 \sin \alpha^2)} \\ + \sin \alpha \cos \alpha \sin a \cos x$$

$$(1 - \sin a^2 \sin \alpha^2) \sin x \cos y = -\cos \alpha \sqrt{(\sin x^2 - \sin a^2 \sin \alpha^2)} \\ + \sin a \cos a \sin \alpha^2 \cos x$$

$$(1 - \sin a^2 \sin \alpha^2) \sin s = \cos a \sqrt{(\sin x^2 - \sin a^2 \sin \alpha^2)} \\ + \sin a \cos \alpha \cos x$$

$$(1 - \sin a^2 \sin \alpha^2) \cos s = -\sin a \cos \alpha \sqrt{(\sin x^2 - \sin a^2 \sin \alpha^2)} \\ + \cos a \cos x$$

auxquelles il faut ajouter $\sin x \sin \Phi = \sin a \sin \alpha$.

COROLL. I.

18. Puisque $\sin a \sin \alpha = \sin x \sin \Phi$, on aura :

$$\sqrt{(\sin x^2 - \sin a^2 \sin \alpha^2)} = + \sin x \cos \Phi.$$

Donc nos quatre formules seront :

I. $(1-CC) \sin y = \sin \alpha \cos a \cos \Phi + \cos \alpha \cos x \sin \Phi$

II. $(1-CC) \cos y = -\cos \alpha \cos \Phi + \sin \alpha \cos a \cos x \sin \Phi$

- III. (1—CC) $\sin s = \cos a \sin x \cos \Phi + \sin a \cos a \cos x$
 IV. (1—CC) $\cos s = -\sin a \cos a \sin x \cos \Phi + \cos a \cos x$,
 posant pour abrégér CC, au lieu de $\sin a^2 \sin a^2$, ou de $\sin x^2 \sin \Phi^2$.

C O R O L L. 2.

19. Ces quatre formules peuvent être combinées en plusieurs manières différentes, d'où l'on pourra déduire des formules plus simples. D'abord prenons I. $\cos a +$ II. $\sin a \cos a$, & nous aurons :
 (1—CC)($\cos a \sin y + \sin a \cos a \cos y$) = ($\cos a^2 + \sin a^2 \cos a^2$) $\cos x \sin \Phi$,
 or $\cos a^2 + \sin a^2 \cos a^2 = 1 - \sin a^2 \sin a^2 = 1 - CC$, d'où nous tirons :

$$\cos a \sin y + \sin a \cos a \cos y = \cos x \sin \Phi = \frac{\sin a \sin a}{\text{tang. } x},$$

ou $\text{tang. } x \sin y + \text{tang. } a \text{ tang. } x \cos a \cos y = \text{tang. } a \sin a$.

C O R O L L. 3.

20. Faisons cette combinaison I. $\sin a \cos a -$ II. $\cos a$, pour avoir
 (1—CC)($\sin a \cos a \sin y - \cos a \cos y$) = ($\sin a^2 \cos a^2 - \cos a^2$) $\cos \Phi$
= (1—CC) $\cos \Phi$,
 d'où nous tirons en divisant par 1—CC

$$\sin a \cos a \sin y - \cos a \cos y = \cos \Phi.$$

C O R O L L. 4.

21. La combinaison I. $\sin x -$ III. $\sin a$ donne
 (1—CC) ($\sin x \sin y - \sin a \sin s$) = 0, ou bien
 $\sin x \sin y = \sin a \sin s$, d'où à cause de $\sin x \sin \Phi = \sin a \sin a$,
 on tire $\sin a \sin y = \sin \Phi \sin s$, ou bien cette proportion :
 $\sin a : \sin \Phi = \sin x : \sin a = \sin s : \sin y$.



COROLL. 5.

22. Cette combinaison I. $\sin a \cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos a \cos s$ — IV. $\sin x \cos a$ donne
 $(1 - CC) (\sin a \cos \alpha \sin x \sin y + \sin \alpha \cos a \cos s) = \cos x (\sin a \cos \alpha^2 \sin x \sin \Phi + \sin \alpha \cos a^2)$
 Or à cause de $\sin x \sin \Phi = \sin a \sin \alpha$, la valeur de cette formule sera
 $\sin \alpha \cos x (\sin a^2 \cos \alpha^2 + \cos \alpha^2) = (1 - \sin a^2 \sin \alpha^2) \sin \alpha \cos x$
 $= (1 - CC) \sin \alpha \cos x,$

d'où en divisant par $1 - CC$ on obtiendra

$$\sin a \cos \alpha \sin x \sin y + \sin \alpha \cos a \cos s = \sin \alpha \cos x,$$

laquelle à cause de $\sin y = \frac{\sin \alpha \sin s}{\sin x}$, se change en :

$$\sin a \cos \alpha \sin s + \cos a \cos s = \cos x.$$

COROLL. 6.

23. Or cette combinaison I. $\cos a$ — IV. $\cos \alpha \sin \Phi$, donne
 $(1 - CC) (\cos a \sin y - \cos \alpha \sin \Phi \cos s) = \cos \Phi (\sin \alpha \cos a^2 + \sin a \cos \alpha^2 \sin x \sin \Phi),$
 dont la valeur à cause de $\sin x \sin \Phi = \sin a \sin \alpha$, sera :

$$\sin \alpha \cos \Phi (\cos a^2 + \sin a^2 \cos \alpha^2) = (1 - CC) \sin \alpha \cos \Phi.$$

Donc divisant par $1 - CC$, on aura

$$\cos a \sin y - \cos \alpha \sin \Phi \cos s = \sin \alpha \cos \Phi,$$

qui à cause de $\sin y = \frac{\sin \Phi \sin s}{\sin a}$, se change en celle-cy :

$$\cos a \sin \Phi \sin s - \sin a \cos \alpha \sin \Phi \cos s = \sin a \sin \alpha \cos \Phi,$$

ou bien $\text{tang } \Phi \sin s - \cos \alpha \text{ tang } a \text{ tang } \Phi \cos s = \sin \alpha \text{ tang } a.$

COROLL. 7.

24. Considérons cette combinaison II. $\cos a \sin x + \sin \alpha$ — III. $\cos \alpha$,
 qui donne

(1 -

$$(1-CC)(\cos a \sin x \cos y + \cos a \sin s) = \cos x (\sin a \cos a^2 \sin x \sin \Phi + \sin a \cos a^2),$$

dont la valeur, à cause de $\sin x \sin \Phi = \sin a \sin \alpha$, sera
 $\sin a \cos x (\sin \alpha^2 \cos a^2 + \cos \alpha^2) = (1-CC) \sin a \cos x$.

Donc divisant par $1-CC$, on aura

$$\cos a \sin x \cos y + \cos a \sin s = \sin a \cos x,$$

& à cause de $\sin s = \frac{\sin x \sin y}{\sin \alpha}$, on obtiendra

$$\sin \alpha \cos a \sin x \cos y + \cos a \sin x \sin y = \sin \alpha \sin a \cos x,$$

ou $\text{tang} \alpha \cos a \text{tang} x \cos y + \text{tang} x \sin y = \text{tang} \alpha \sin a$, tout comme §. 19.

COROLL. 8.

25. Cette combinaison -II. $\sin a \cos \alpha +$ III. $\cos a \sin \alpha \sin \Phi$ donne
 $(1-CC)(\cos a \sin \alpha \sin s \sin \Phi - \sin a \cos \alpha \cos y) = \cos \Phi (\sin a \cos a^2 + \cos a^2 \sin \alpha \sin x \sin \Phi),$

dont la valeur à cause de $\sin x \sin \Phi = \sin a \sin \alpha$, est
 $\sin a \cos \Phi (\cos \alpha^2 + \cos a^2 \sin \alpha^2) = (1-CC) \sin a \cos \Phi$.

Donc divisant par $1-CC$, on aura :

$$\cos a \sin \alpha \sin s \sin \Phi - \sin a \cos \alpha \cos y = \sin a \cos \Phi.$$

Or ayant $\sin s = \frac{\sin a \sin y}{\sin \Phi}$, on obtiendra

$$\cos a \sin \alpha \sin y - \cos \alpha \cos y = \cos \Phi, \text{ tout comme §. 20.}$$

COROLL. 9.

26. Or cette combinaison II. $\sin a \sin x -$ IV. 1 donne
 $(1-CC)(\sin a \sin x \cos y - \cos s) = \cos a \cos x (\sin a \sin \alpha \sin x \sin \Phi - 1),$

dont la valeur à cause de $\sin x \sin \Phi = \sin a \sin \alpha$, est
 $\cos a \cos x (\sin a^2 \sin \alpha^2 - 1) = - (1-CC) \cos a \cos x$.

Done



Donc, divisant par $(1 - CC)$, on aura
 $\cos s - \sin a \sin x \cos y = \cos a \cos x$.

COROLL. 10.

27. Cette combinaison II. 1 — IV. $\sin a \sin \Phi$ donne
 $(1 - CC)(\cos y - \sin a \sin \Phi \cos s) = \cos a \cos \Phi (\sin a \sin x \sin \Phi - 1)$,
 donc : $\sin a \sin \Phi \cos s - \cos y = \cos a \cos \Phi$.

COROLL. 11.

28. Cette combinaison III. $\sin a \cos a$ + IV. $\cos a$ donne
 $(1 - CC)(\sin a \cos a \sin s + \cos a \cos s) = \cos x (\sin a^2 \cos a^2 + \cos a^2)$
 donc : $\sin a \cos a \sin s + \cos a \cos s = \cos x$, tout comme §. 22.

COROLL. 12.

29. Enfin cette combinaison III. $\cos a$ — IV. $\sin a \cos a$ donne
 $(1 - CC)(\cos a \sin s - \sin a \cos a \cos s) = \sin x \cos \Phi (\cos a^2 + \sin a^2 \cos a^2)$,
 donc : $\cos a \sin s - \sin a \cos a \cos s = \sin x \cos \Phi = \frac{\sin a \sin a \cos \Phi}{\sin \Phi}$,
 ou $\text{tang } \Phi \sin s - \text{tang } a \text{ tang } \Phi \cos a \cos s = \text{tang } a \sin a$, tout
 comme §. 23.

PROBLEME V.

30. *Trouver les propriétés entre les côtés & les angles d'un triangle sphérique quelconque.*

Fig. 4.

SOLUTION.

Quel que soit le triangle sphérique proposé ABC, on peut regarder un de ses angles A comme le pôle de la sphère ; & alors les côtés AB & AC seront deux méridiens, & le troisième côté BC la ligne la plus courte, qui puisse être tirée sur la surface de la sphère



du point B au point C ; de sorte que ce triangle ABC puisse être comparé avec la figure E.CM, que nous venons de considérer dans le problème précédent. Donc, si nous employons les lettres A, B, C, pour marquer les angles du même nom, & que nous posions les côtés $AB = c$; $AC = b$ & $BC = a$, les dénominations précédentes se réduiront aux présentes de cette manière :

Dénominations précédentes : a ; x ; s ; y ; α ; ϕ

Dénominations présentes : c ; b ; a ; A ; B ; C

Maintenant les formules trouvées dans les corollaires du problème précédent nous fourniront pour le triangle sphérique ABC les propriétés suivantes :

- | | | |
|------|---|--------------|
| I. | $\sin a : \sin A = \sin b : \sin B = \sin c : \sin C$ | par (21) |
| II. | $\cos C = \cos c \cdot \sin A \cdot \sin B - \cos A \cdot \cos B$ | par §. 20. |
| | $\cos B = \cos b \cdot \sin A \cdot \sin C - \cos A \cdot \cos C$ | par analogie |
| | $\cos A = \cos a \cdot \sin B \cdot \sin C - \cos B \cdot \cos C$ | par §. 27. |
| III. | $\cos c = \cos C \cdot \sin a \cdot \sin b + \cos a \cdot \cos b$ | par analogie |
| | $\cos b = \cos B \cdot \sin a \cdot \sin c + \cos a \cdot \cos c$ | par §. 22. |
| | $\cos a = \cos A \cdot \sin b \cdot \sin c + \cos b \cdot \cos c$ | par §. 26. |
| IV. | $\sin a \cdot \text{tang } C - \sin B \cdot \text{tang } c = \cos a \cdot \cos B \cdot \text{tg } C \cdot \text{tg } c$ | par §. 23. |
| | $\sin b \cdot \text{tang } A - \sin C \cdot \text{tang } a = \cos b \cdot \cos C \cdot \text{tg } A \cdot \text{tg } a$ | par analogie |
| | $\sin c \cdot \text{tang } B - \sin A \cdot \text{tang } b = \cos c \cdot \cos A \cdot \text{tg } B \cdot \text{tg } b$ | par §. 19. |

Et c'est à ces quatre propriétés, que se réduisent toutes les formules, que nous avons trouvées dans le problème précédent.

COROLL. I.

31. La première propriété renferme la qualité très connue de tous les triangles sphériques, par laquelle nous savons, que les sinus des côtés ont entr'eux le même rapport, que les sinus des angles, qui leur sont opposés.



COROLL. 2.

32. Donc, si nous connoissons dans un triangle sphérique un côté avec son angle opposé, & outre cela un autre angle, ou côté, nous trouverons d'abord le côté, ou l'angle qui lui est opposé.

COROLL. 3.

33. Chacune des formules, que nous venons de trouver, ne renferme que quatre quantités, qui appartiennent au triangle, & partant si l'on en connoit trois, on en pourra déterminer la quatrième.

COROLL. 4.

34. C'est donc de là qu'on pourra tirer les règles pour la résolution de tous les triangles sphériques. Ou comme il y a six choses en chaque triangle, savoir les trois côtés & les trois angles, si l'on en connoit trois, on en pourra trouver les trois autres : comme nous allons voir dans les problèmes suivans.

PROBLEME VI.

35. Dans un triangle sphérique étant donnés les trois côtés, Fig. 4. trouver les angles.

SOLUTION.

Soient donnés dans le triangle sphérique ABC les trois côtés $AB = c$; $AC = b$ & $BC = a$; & qu'il faille chercher les trois angles A, B & C; cela se fera par le moyen de la troisième propriété, qui nous fournit :

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}$$



COROLL. 1.

36. Nous aurons donc :

$$1 - \cos A = \frac{\sin b \cdot \sin c - \cos b \cdot \cos c - \cos a}{\sin b \cdot \sin c},$$

ou bien $1 - \cos A = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c},$

à cause de $\cos(b-c) = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c.$

COROLL. 2.

37. Or, puisqu'il est en général

$$\cos p - \cos q = 2 \cdot \sin \frac{1}{2}(q-p) \cdot \sin \frac{1}{2}(p+q)$$

notre formule se changera en celle-cy :

$$1 - \cos A = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(a-b+c) \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b \sin c}.$$

Donc, puisque $1 - \cos A = 2 (\sin \frac{1}{2} A)^2$, nous aurons :

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a-b+c) \cdot \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b \cdot \sin c}}, \text{ \& de même}$$

$$\sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(b-a+c) \cdot \sin \frac{1}{2}(b+a-c)}{\sin a \sin c}}$$

$$\sin \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(c-a+b) \cdot \sin \frac{1}{2}(c+a-b)}{\sin a \cdot \sin b}}.$$

COROLL. 3.

38. En ajoutant l'unité aux cosinus trouvés on aura

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c + \sin b \sin c}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \cdot \sin c}.$$

Donc, puisque $1 + \cos A = 2 (\cos \frac{1}{2} A)^2$, la même conversion
donnera

cos



$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (b + c - a) \cdot \sin \frac{1}{2} (b + c + a)}{\sin b \cdot \sin c}}$$

$$\cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (a + c - b) \cdot \sin \frac{1}{2} (a + c + b)}{\sin a \cdot \sin b}}$$

$$\cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (a + b - c) \cdot \sin \frac{1}{2} (a + b + c)}{\sin a \cdot \sin b}}$$

COROLL. 4.

39. De là on tirera les tangentes des demi-angles A, B, C :

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (a - b + c) \sin \frac{1}{2} (a + b - c)}{\sin \frac{1}{2} (b + c - a) \sin \frac{1}{2} (b + c + a)}}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (b - a + c) \sin \frac{1}{2} (b + a - c)}{\sin \frac{1}{2} (a + c - b) \sin \frac{1}{2} (a + c + b)}}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (c - a + b) \sin \frac{1}{2} (c + a - b)}{\sin \frac{1}{2} (a + b - c) \sin \frac{1}{2} (a + b + c)}}$$

COROLL. 5.

40. Ces formules sont fort commodes pour faire le calcul par le moyen des logarithmes. Or ayant trouvé un des angles comme A, on trouvera les deux autres plus facilement; par la première propriété

on aura: $\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}$ & $\sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a}$, pourvu

qu'on sache si ces angles sont plus grands ou plus petits qu'un angle droit: mais en se servant des formules trouvées cette ambiguïté évanouit, puisqu'on trouve les moitiés des angles, qui sont toujours plus petites qu'un angle droit.

COROLL. 6.

41. Les tangentes des demi-angles fournissent encore des formules remarquables, car multipliant deux ensemble on aura :

H h 3

tang



$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} A \operatorname{tang} \frac{1}{2} B = \frac{\sin \frac{1}{2} (a + b - c)}{\sin \frac{1}{2} (a + b + c)},$$

& puisque $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{1}{2} (p + q) \operatorname{cof} \frac{1}{2} (p - q)$
& $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{1}{2} (p - q) \operatorname{cof} \frac{1}{2} (p + q)$

on obtiendra: $1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} A \operatorname{tang} \frac{1}{2} B = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (a + b) \operatorname{cof} \frac{1}{2} c}{\sin \frac{1}{2} (a + b + c)}$

& $1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} A \operatorname{tang} \frac{1}{2} B = \frac{2 \sin \frac{1}{2} c \operatorname{cof} \frac{1}{2} (a + b)}{\sin \frac{1}{2} (a + b + c)}.$

COROLL. 7.

42. De même en ajoutant ou soustrayant deux de ces tangentes, on aura :

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} A \pm \operatorname{tang} \frac{1}{2} B = \frac{(\sin \frac{1}{2} (a + c - b) \pm \sin \frac{1}{2} (b + c - a)) \sqrt{\sin \frac{1}{2} (a + b - c)}}{\sqrt{\sin \frac{1}{2} (b + c - a) \sin \frac{1}{2} (a + c - b) \sin \frac{1}{2} (a + b + c)}}$$

ou $\operatorname{tang} \frac{1}{2} A \pm \operatorname{tang} \frac{1}{2} B = \frac{\sin \frac{1}{2} (a + c - b) \pm \sin \frac{1}{2} (b + c - a)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} (a + b + c)},$

si l'on introduit la valeur de la tangente de $\frac{1}{2} C$. Donc, en employant la réduction enseignée auparavant, nous aurons ces deux équations :

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} A + \operatorname{tang} \frac{1}{2} B = \frac{2 \sin \frac{1}{2} c \operatorname{cof} \frac{1}{2} (a - b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} (a + b + c)}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} A - \operatorname{tang} \frac{1}{2} B = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (a - b) \operatorname{cof} \frac{1}{2} c}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} (a + b + c)}.$$

COROLL. 8.

43. Or, puisque $\operatorname{tang} \frac{1}{2} (A + B) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} A + \operatorname{tang} \frac{1}{2} B}{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} A \operatorname{tang} \frac{1}{2} B}$;
nous trouverons par les formules des deux corollaires précédens :

tang

$$\text{tang } \frac{1}{2} (A + B) = \frac{\text{cof } \frac{1}{2} (a - b)}{\text{tang } \frac{1}{2} C. \text{cof } \frac{1}{2} (a + b)} \quad \& \text{ de même}$$

$$\text{tang } \frac{1}{2} (A + C) = \frac{\text{cof } \frac{1}{2} (a - c)}{\text{tang } \frac{1}{2} B. \text{cof } \frac{1}{2} (a + c)}$$

$$\text{tang } \frac{1}{2} (B + C) = \frac{\text{cof } \frac{1}{2} (b - c)}{\text{tang } \frac{1}{2} A. \text{cof } \frac{1}{2} (b + c)}$$

COROLL. 9.

44. De même, puisque $\text{tang } \frac{1}{2} (A - B) = \frac{\text{tang } \frac{1}{2} A - \text{tang } \frac{1}{2} B}{1 + \text{tang } \frac{1}{2} A. \text{tang } \frac{1}{2} B}$,

nous aurons :

$$\text{tang } \frac{1}{2} (A - B) = \frac{\text{fin } \frac{1}{2} (a - b)}{\text{tang } \frac{1}{2} C. \text{fin } \frac{1}{2} (a + b)} \quad \& \text{ de même}$$

$$\text{tang } \frac{1}{2} (A - C) = \frac{\text{fin } \frac{1}{2} (a - c)}{\text{tang } \frac{1}{2} B. \text{fin } \frac{1}{2} (a + c)}$$

$$\text{tang } \frac{1}{2} (B - C) = \frac{\text{fin } \frac{1}{2} (b - c)}{\text{tang } \frac{1}{2} A. \text{fin } \frac{1}{2} (b + c)}$$

PROBLEME VII.

45. Dans un triangle sphérique étant donnés les trois angles, Fig. 4.
trouver les trois côtés.

SOLUTION.

Soit ABC le triangle sphérique, duquel soient donnés les trois angles A, B, C ; & qu'il faille chercher les trois côtés

$$AB = c ; \quad AC = b \quad \& \quad BC = a.$$

Or la propriété II. du §. 30. nous fournira les cofinus de ces côtés exprimés de la manière suivante :

cof



$$\operatorname{cof} a = \frac{\operatorname{cof} A + \operatorname{cof} B \cdot \operatorname{cof} C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$\operatorname{cof} b = \frac{\operatorname{cof} B + \operatorname{cof} A \cdot \operatorname{cof} C}{\sin A \cdot \sin C}$$

$$\operatorname{cof} c = \frac{\operatorname{cof} C + \operatorname{cof} A \cdot \operatorname{cof} B}{\sin A \cdot \sin B}.$$

COROLL. 1.

46. De là nous tirerons d'abord les formules suivantes :

$$1 - \operatorname{cof} a = - \frac{\operatorname{cof} A - \operatorname{cof}(B + C)}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$1 + \operatorname{cof} a = \frac{\operatorname{cof} A + \operatorname{cof}(B - C)}{\sin B \cdot \sin C}$$

Or, puisqu'il est en général $\operatorname{cof} p + \operatorname{cof} q = 2 \operatorname{cof} \frac{1}{2}(p + q) \operatorname{cof} \frac{1}{2}(p - q)$ nous aurons :

$$1 - \operatorname{cof} a = - \frac{2 \operatorname{cof} \frac{1}{2}(A + B + C) \operatorname{cof} \frac{1}{2}(B + C - A)}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$1 + \operatorname{cof} a = \frac{2 \operatorname{cof} \frac{1}{2}(A + B - C) \operatorname{cof} \frac{1}{2}(A - B + C)}{\sin B \cdot \sin C}.$$

COROLL. 2.

47. Donc, puisque $1 - \operatorname{cof} a = 2 (\sin \frac{1}{2} a)^2$ & $1 + \operatorname{cof} a = 2 (\operatorname{cof} \frac{1}{2} a)^2$, nous obtiendrons les formules suivantes :

$$\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2}(A + B + C) \operatorname{cof} \frac{1}{2}(B + C - A)}{\sin B \cdot \sin C}}$$

$$\sin \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2}(A + B + C) \operatorname{cof} \frac{1}{2}(A + C - B)}{\sin A \cdot \sin C}}$$

$$\sin \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2}(A + B + C) \operatorname{cof} \frac{1}{2}(A + B - C)}{\sin A \cdot \sin B}}$$

où



où il faut remarquer, puisque la somme des angles $A + B + C$ est toujours plus grande que deux droits, la demi-somme est plus grande qu'un angle droit, & partant son cosinus négatif.

COROLL. 3.

48. Pour les cosinus des demi-côtés on aura :

$$\operatorname{cof} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A + B - C) \operatorname{cof} \frac{1}{2} (A - B + C)}{\sin B. \sin C}}$$

$$\operatorname{cof} \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (B + A - C) \operatorname{cof} \frac{1}{2} (B - A + C)}{\sin A. \sin C}}$$

$$\operatorname{cof} \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (C + A - B) \operatorname{cof} \frac{1}{2} (C - A + B)}{\sin A. \sin B}}$$

& ces formules facilitent l'usage des logarithmes.

COROLL. 4.

49. Des sinus & cosinus des demi-côtés on tirera aisément leurs tangentes ; qui feront :

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A + B + C) \operatorname{cof} \frac{1}{2} (B + C - A)}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A + B - C) \operatorname{cof} \frac{1}{2} (A - B + C)}}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A + B + C) \operatorname{cof} \frac{1}{2} (A + C - B)}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (B + A - C) \operatorname{cof} \frac{1}{2} (B - A + C)}}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A + B + C) \operatorname{cof} \frac{1}{2} (A + B - C)}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (C + A - B) \operatorname{cof} \frac{1}{2} (C - A + B)}}$$

où l'on pourra aussi aisément se servir du calcul des logarithmes.

COROLL. 5.

50. En multipliant deux de ces tangentes ensemble, on en tirera

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a. \operatorname{tang} \frac{1}{2} b = \frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A + B + C)}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A + B - C)}$$



Or de là on derivera les deux formules suivantes :

$$1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} b = \frac{2 \operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+B) \operatorname{cof} \frac{1}{2} C}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+B-C)}$$

$$1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} b = \frac{2 \operatorname{fin} \frac{1}{2} C \operatorname{fin} \frac{1}{2} (A+B)}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+B-C)}$$

COROLL. 6.

51. Et si nous ajoutons, ou soustrayons, deux des formules ensemble, nous obtiendrons :

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a \pm \operatorname{tang} \frac{1}{2} b = \frac{(\operatorname{cof} \frac{1}{2} (B+C-A) \pm \operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+C-B)) \sqrt{-\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+B+C)}}{\sqrt{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+B-C) \operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+C-B) \operatorname{cof} \frac{1}{2} (B+C-A)}}$$

Or ayant $\operatorname{tang} \frac{1}{2} c = \sqrt{-\frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+B+C) \operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+B-C)}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (C+A-B) \operatorname{cof} \frac{1}{2} (C-A+B)}}$, on aura

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a \pm \operatorname{tang} \frac{1}{2} b = \frac{(\operatorname{cof} \frac{1}{2} (B+C-A) \pm \operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+C-B)) \operatorname{tang} \frac{1}{2} c}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+B-C)}$$

COROLL. 7.

52. De là on trouvera par les réductions enseignées :

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a + \operatorname{tang} \frac{1}{2} b = \frac{2 \operatorname{cof} \frac{1}{2} C \operatorname{cof} \frac{1}{2} (A-B) \operatorname{tang} \frac{1}{2} c}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+B-C)}, \quad \&$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a - \operatorname{tang} \frac{1}{2} b = \frac{2 \operatorname{fin} \frac{1}{2} (A-B) \operatorname{fin} \frac{1}{2} C \operatorname{tang} \frac{1}{2} c}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+B-C)}$$

COROLL. 8.

53. Nous trouverons donc comme cy-dessus :

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (a+b) = \frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A-B)}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+B)} \operatorname{tang} \frac{1}{2} c$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (a+c) = \frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A-C)}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+C)} \operatorname{tang} \frac{1}{2} b$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (b+c) = \frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (B-C)}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (B+C)} \operatorname{tang} \frac{1}{2} a$$

co-

COROLL. 9.

54. De même les tangentes des demi différences des côtés seront :

$$\begin{aligned} \text{tang } \frac{1}{2} (a - b) &= \frac{\text{fin } \frac{1}{2} (A - B)}{\text{fin } \frac{1}{2} (A + B)} \text{ tang } \frac{1}{2} c \\ \text{tang } \frac{1}{2} (a - c) &= \frac{\text{fin } \frac{1}{2} (A - C)}{\text{fin } \frac{1}{2} (A + C)} \text{ tang } \frac{1}{2} b \\ \text{tang } \frac{1}{2} (b - c) &= \frac{\text{fin } \frac{1}{2} (B - C)}{\text{fin } \frac{1}{2} (B + C)} \text{ tang } \frac{1}{2} a. \end{aligned}$$

L'usage de ces formules fera d'une grande importance dans les problèmes suivans.

PROBLEME VIII.

55. Dans un triangle sphérique étant donnés deux côtés avec l'angle compris entr'eux, trouver le troisième côté & les deux autres angles. Fig. 4.

SOLUTION.

Soit ABC le triangle, auquel soient donnés les deux côtés $AB = c$ $AC = b$ avec l'angle A compris entr'eux : & qu'il faille chercher le côté $BC = a$, & les angles B & C.

La troisième formule de la troisième propriété donne d'abord

$$\text{cof } a = \text{cof } A \text{ fin } b. \text{ fin } c + \text{cof } b. \text{ cof } c,$$

& la troisième formule de la quatrième propriété fournit l'angle B,

$$\text{tang } B = \frac{\text{fin } A \text{ tang } b}{\text{fin } c - \text{tang } b. \text{ cof } c. \text{ cof } A}$$

d'où l'on tire par analogie :

$$\text{tang } C = \frac{\text{fin } A \text{ tang } c}{\text{fin } b - \text{tang } c. \text{ cof } b. \text{ cof } A}$$

Or les expressions pour les cotangentes seront plus commodes, de sorte qu'on aura pour la solution les formules suivantes :

$$\text{cof } a = \text{cof } A \sin b \cdot \sin c + \text{cof } b \cdot \text{cof } c$$

$$\text{cot } B = \frac{\sin c \cot b - \text{cof } c \text{ cof } A}{\sin A}$$

$$\text{cot } C = \frac{\sin b \cot c - \text{cof } b \cdot \text{cof } A}{\sin A}.$$

COROLL. 1.

56. Puisque $\text{cof } b \cdot \text{cof } c = \frac{1}{2} \text{cof } (b - c) + \frac{1}{2} \text{cof } (b + c)$
& $\sin b \sin c = \frac{1}{2} \text{cof } (b - c) - \frac{1}{2} \text{cof } (b + c)$, le cofinus du côté a pourra être exprimé par l'addition & subtraction des simples cofinus de cette maniere :

$$\text{cof } a = \frac{1}{4} \text{cf}(A - b + c) + \frac{1}{4} \text{cf}(A + b - c) - \frac{1}{4} \text{cf}(A - b - c) - \frac{1}{4} \text{cf}(A + b + c) \\ + \frac{1}{2} \text{cof}(b - c) + \frac{1}{2} \text{cof}(b + c).$$

COROLL. 2.

57. Mais si l'on veut se servir des logarithmes, cette formule est moins commode. Cependant on y pourra appliquer les logarithmes en y introduisant un nouveau angle u , posant

$$\text{tang } u = \frac{\text{cof } A \sin b}{\text{cof } b}, \quad \text{ou bien soit } \text{tang } u = \text{cof } A \text{ tang } b;$$

& ayant trouvé cet angle u on aura :

$$\text{cof } a = \text{tang } u \text{ cof } b \sin c + \text{cof } b \text{ cof } c = \frac{\text{cof } b \text{ cof } (c - u)}{\text{cof } u},$$

d'où l'on trouvera aisément le côté a par le moyen des logarithmes.

COROLL. 3.

58. La même introduction de l'angle u , de sorte que $\text{tg } u = \text{cf } A \text{ tg } b$, rend aussi les autres formules propres à y appliquer les logarithmes ; car on aura :

$$\text{tang } B = \frac{\sin A \text{ tang } b}{\sin c - \text{tg } u \text{ cf } c} = \frac{\sin A \text{ tang } b \text{ cof } u}{\sin (c - u)} = \frac{\text{tang } A \sin u}{\sin (c - u)}.$$

Pour l'autre angle C on le trouvera par la règle $\sin C = \frac{\sin A \cdot \sin c}{\sin a}$.

COROLL. 4.

59. Mais la plus commode recherche des angles B & C se tirera des formules données dans les §§. 43. & 44. d'où l'on aura :

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (B + C) = \frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (b - c)}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (b + c)} \operatorname{cot} \frac{1}{2} A$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (B - C) = \frac{\operatorname{fin} \frac{1}{2} (b - c)}{\operatorname{fin} \frac{1}{2} (b + c)} \operatorname{cot} \frac{1}{2} A.$$

Car ayant la moitié de leur somme avec la moitié de leur différence, on aura chacun à part, & de là on pourra ensuite conclure le côté a ,

par la règle $\operatorname{fin} a = \frac{\operatorname{fin} b}{\operatorname{fin} B} \operatorname{fin} A = \frac{\operatorname{fin} c}{\operatorname{fin} C} \operatorname{fin} A.$

PROBLEME IX.

60. Dans un triangle sphérique étant donnés deux angles avec le côté compris entr'eux, trouver le troisième angle avec les deux côtés. Fig. 4.

SOLUTION.

Soit ABC le triangle, dans lequel soient donnés les deux angles A & B avec le côté AB = c compris entr'eux, & qu'il faille chercher le troisième angle C avec les deux autres côtés AC = b & BC = a .

Or la première formule de la seconde propriété (30) donne d'abord

$$\operatorname{cof} C = \operatorname{cof} c \operatorname{fin} A. \operatorname{fin} B - \operatorname{cof} A. \operatorname{cof} B,$$

& la troisième formule de la quatrième propriété donne :

$$\operatorname{rang} b = \frac{\operatorname{fin} c \operatorname{tang} B}{\operatorname{fin} A + \operatorname{cof} c. \operatorname{cof} A. \operatorname{tang} B}, \quad \& \text{ par analogie}$$

$$\operatorname{rang} a = \frac{\operatorname{fin} c \operatorname{tang} A}{\operatorname{fin} B + \operatorname{cof} c. \operatorname{cof} B. \operatorname{tang} A}.$$

D'où prenant les corangentes on aura la solution suivante,

$$\operatorname{cof} C = \operatorname{cof} c. \operatorname{fin} A. \operatorname{fin} B - \operatorname{cof} A. \operatorname{cof} B$$

$$\operatorname{cot} a = \frac{\operatorname{cot} A. \operatorname{fin} B + \operatorname{cof} c. \operatorname{cof} B}{\operatorname{fin} c}$$

$$\operatorname{cot} a = \frac{\operatorname{cot} B. \operatorname{fin} A + \operatorname{cof} c. \operatorname{cof} A}{\operatorname{fin} c}.$$



COROLL. I.

61. Les deux côtés se trouveront plus aisément des formules des §§. 52. & 53. d'où l'on tire :

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (a + b) = \frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A - B)}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A + B)} \operatorname{tang} \frac{1}{2} c$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (a - b) = \frac{\operatorname{fin} \frac{1}{2} (A - B)}{\operatorname{fin} \frac{1}{2} (A + B)} \operatorname{tang} \frac{1}{2} c.$$

où il est facile de se servir des logarithmes.

COROLL. 2.

62. Après avoir trouvé les côtés a & b , on trouvera aisément l'angle C , puisqu'il est $\operatorname{fin} C = \frac{\operatorname{fin} A}{\operatorname{fin} a} \operatorname{fin} c = \frac{\operatorname{fin} B}{\operatorname{fin} b} \operatorname{fin} c$, où bien on pourra aussi, si l'on veut exprimer le $\operatorname{cof} C$ par des simples cosinus en cette façon :

$$\operatorname{cof} C = \frac{1}{4} \operatorname{cf}(c + A - B) + \frac{1}{4} \operatorname{cf}(c - A + B) - \frac{1}{4} \operatorname{cf}(c - A - B) - \frac{1}{4} \operatorname{cf}(c + A + B) \\ - \frac{1}{2} \operatorname{cof}(A - B) - \frac{1}{2} \operatorname{cof}(A + B).$$

PROBLEME X.

Fig. 4. 63. Dans un triangle sphérique étant donnés deux côtés avec un angle non compris entr'eux, ou ce qui revient au même, étant donnés deux angles avec un côté non compris entr'eux, trouver les autres quantités appartenantes au triangle.

SOLUTION.

Soit ABC , le triangle dans lequel soient donnés pour le premier cas les deux côtés $BC = a$ & $AC = b$ avec l'angle A , & on connoître d'abord l'angle B à cause de $\operatorname{fin} B = \frac{\operatorname{fin} A}{\operatorname{fin} a} \operatorname{fin} b$.

Pour

Pour l'autre cas soient A & B les deux angles donnés, avec le côté $BC = a$, & on aura d'abord le côté b à cause de $\sin b = \frac{\sin a}{\sin A} \sin B$.

Et partant, dans l'un & l'autre cas on pourra regarder comme donnés tant les deux côtés $BC = a$ & $AC = b$, que les deux angles A & B , qui leur sont opposés. Il s'agit donc d'en trouver le côté $AB = c$, & l'angle C .

Or la première formule de la quatrième propriété fournit :

$$\sin a \operatorname{tang} C - \sin B \operatorname{tang} c = \operatorname{cof} a \operatorname{cof} B \operatorname{tang} C \operatorname{tang} c,$$

d'où en transposant les côtés a & b avec les angles A & B , nous aurons

$$\sin b \operatorname{tang} C - \sin A \operatorname{tang} c = \operatorname{cof} b \operatorname{cof} A \operatorname{tang} C \operatorname{tang} c.$$

De ces deux équations, en éliminant tantôt $\operatorname{tang} C$ tantôt $\operatorname{tang} c$, nous

trouverons :
$$\operatorname{tang} c = \frac{\sin A \sin a - \sin B \sin b}{\sin A \operatorname{cof} B \operatorname{cof} a - \operatorname{cof} A \sin B \operatorname{cof} b}$$

$$\operatorname{tang} C = \frac{\sin A \sin a - \sin B \sin b}{\operatorname{cof} B \operatorname{cof} a \sin b - \operatorname{cof} A \sin a \operatorname{cof} b},$$

auxquelles il faut ajouter cette équation $\sin A \sin b = \sin B \sin a$.

COROLL. 1.

64. Puisqu'il y a : $\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$, nous aurons

aussi :
$$\operatorname{tang} c = \frac{\sin a^2 - \sin b^2}{\operatorname{cof} B \sin a \operatorname{cof} a - \operatorname{cof} A \sin b \operatorname{cof} b}$$

&
$$\operatorname{tang} C = \frac{\sin A^2 - \sin B^2}{\sin B \operatorname{cof} B \operatorname{cof} a - \sin A \operatorname{cof} A \operatorname{cof} b}.$$

COROLL. 2.

65. Mais les §§. 43. 44. 53. & 54. nous fournissent encore des solutions plus commodes, que voilà :

tang



$$\operatorname{rang} \frac{1}{2} c = \frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+B)}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A-B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a+b) = \frac{\operatorname{fin} \frac{1}{2} (A+B)}{\operatorname{fin} \frac{1}{2} (A-B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a-b)$$

&

$$\operatorname{rang} \frac{1}{2} C = \frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (a-b)}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (a+b)} \operatorname{cot} \frac{1}{2} (A+B) = \frac{\operatorname{fin} \frac{1}{2} (a-b)}{\operatorname{fin} \frac{1}{2} (a+b)} \operatorname{cot} \frac{1}{2} (A-B)$$

auxquelles on peut aisément appliquer l'usage des logarithmes.

P R O B L E M E IX.

66. *Trouver l'aire d'un triangle sphérique quelconque.*

Fig. 3.

S O L U T I O N.

Soit EOM le triangle sphérique proposé, & qu'on nomme comme cy-dessus §. 17. le côté OE = a ; l'angle OEM = α ; l'angle EOM = y ; le côté OM = x ; & l'angle OME = ϕ . Cela posé, la figure trilineaire M O m représentera le différentiel de l'aire que nous cherchons; & puisque $mn = dx$ & $Mn = dy \sin x$

le produit $dy dx \sin x$ exprime le différentiel de M O m , d'où $M O m = dy dx \sin x = dy (1 - \operatorname{cof} x)$ & partant l'aire :

$$E O M = y - \int dy \operatorname{cof} x.$$

Or nous avons trouvé $dy = \frac{C dx}{\operatorname{fin} x \sqrt{(\operatorname{fin} x^2 - CC)}}$, de sorte que

$$\text{l'aire } E O M = y - \int \frac{C dx \operatorname{cof} x}{\operatorname{fin} x \sqrt{(\operatorname{fin} x^2 - CC)}}.$$

Ensuite ayant trouvé $\operatorname{fin} \phi = \frac{C}{\operatorname{fin} x}$, à cause de $C = \operatorname{fin} a \operatorname{fin} \alpha$;

& puisque $\operatorname{cof} \phi = \frac{\sqrt{(\operatorname{fin} x^2 - CC)}}{\operatorname{fin} x}$, nous aurons

$$d\phi \operatorname{cof} \phi = -dx \frac{\operatorname{cof} \alpha}{\operatorname{fin} x^2}, \text{ donc } d\phi = -\frac{C dx \operatorname{cof} x}{\operatorname{fin} x \sqrt{(\operatorname{fin} x^2 - CC)}}$$

$$\& -\int \frac{C dx \operatorname{cof} x}{\operatorname{fin} x \sqrt{(\operatorname{fin} x^2 - CC)}} = \phi + \text{Const.}$$

Par



Par conséquent l'aire du triangle

$$EOM \text{ fera} = y + \phi + \text{Const.} = a + y + \phi - \text{Const.}$$

Pour connoître cette constante, supposons $y = 0$, & puisqu'il devient alors $\phi = 180^\circ - a$, l'aire de ce triangle évanouissant sera $= 180^\circ - \text{Const.}$ & partant $\text{Const.} = 180^\circ$. Ainsi nous aurons l'aire du triangle $EOM = a + y + \phi - 180^\circ$.

COROLL. 1.

67. Donc, pour trouver l'aire d'un triangle sphérique quelconque, on n'a qu'à prendre l'excès de la somme de ses trois angles sur deux droits, lorsque le rayon de la sphère est exprimé par 1. Or dans une sphère quelconque on prendra un arc d'un grand cercle qui soit la mesure dudit excès; & le produit de cet arc par le rayon de la sphère donnera l'aire du triangle sphérique cherché.

COROLL. 2.

68. Plus donc un triangle sphérique sera grand, plus aussi surpassera la somme de ses angles deux droits; & lorsque l'aire du triangle occupe la huitième partie de la surface de la sphère, cet excès vaudra un angle droit. Car un arc de grand cercle de 90° multiplié par le rayon donne la moitié de l'aire du grand cercle, & partant la huitième partie de la surface de la sphère. De là on tirera cette règle pour trouver l'aire de tout triangle sphérique. On dira, comme 8 angles droits ou 720° à l'excès de la somme des trois angles sur deux droits: ainsi la surface entière de la sphère à l'aire du triangle proposé.

