debita donaretur universalitate, is in se contineret valorem alterum $1 - \cos(Fx^{\frac{1}{3}} + \&c.)$, seu quod idem est quantitas $1 - \cos(Fx^{\frac{1}{3}} + \&c.)$ converti posset in seriem huius formae $A'\sin\pi x + B'\sin 2\pi x + C'\sin 3\pi x + \&c. \ldots + H'\cos\pi x + I'\cos 2\pi x + \&c.$ adeoque (per nota Trigonometriae analyticae Theoremata) in seriem

$$A'' + B''\pi x + C''\pi^2 x^2 + D''\pi^3 x^3 + E''\pi^4 x^4 + \&c.$$

in qua nulla adest ipsius variabilis x potestas nisi integra. Atqui hoc repugnat evolutioni formulae $1 - \cos(Fx^{\frac{1}{3}} + \&c.)$, quae praebet ut notum est $A'''x^{\frac{2}{3}} + B'''x^{\frac{4}{3}} + \&c.$, ubi ipsius x potestates fractae evitari nullo modo possunt. Patet igitur functionis $\phi(x)$ valorem $A\cos\frac{m\pi x}{a} \pm B\sin\frac{m\pi x}{a}$ exprimendis omnibus quaestionis propositae casibus nequaquam aptari, minusque genericum esse quam oporteat

Si quis regerat quantitatem $A'''x^{\frac{2}{3}} + B'''x^{\frac{4}{3}} + \&c.$ revocari posse ad formam $\alpha + \beta\cos 2x + \gamma\cos 4x + \&c.$, propterea quod habeatur

$$x = \sin x + a\sin x^3 + b\sin x^5 + \&c. = \sin x\,(1 + a\sin x^2 + b\sin x^4 + \&c.)$$
$$= \sin x\,(a' + b'\cos 2x + c'\cos 4x + \&c.);\ \text{ideoque}$$

$$x^2 = \frac{1 - \cos 2x}{2}(a'' + b''\cos 2x + c''\cos 4x + \&c.);\ \text{ac denique}$$

$x^{\frac{2}{3}} = a''' + b'''\cos 2x + c'''\cos 4x + \&c.$: si quis inquam hoc regerat, is refelletur ea maxime ratione, quod aequatione

$$x^{\frac{2}{3}} = a''' + b'''\cos 2x + c'''\cos 4x + \&c.$$

differentiata divisaque per dx oritur aequatio altera

$$\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = -2b'''\sin 2x - 4c'''\sin 4x - \&c.$$

quae

quantitas pro ω, & quaecunque sit variabilis x. Igitur subsistet aequatio (A) tum etiam, cum in omnibus eius terminis per x & ω datis positum fuerit $x = 0$, & deinde $\omega = x$. Quocirca si valores, in quos migrant termini

$$y\,,\ \frac{dy}{dx}\,,\ \frac{ddy}{dx^2}\,,\ \frac{d^3y}{dx^3}\,,\ \frac{d^4y}{dx^4}\quad \&c.$$

per substitutionem $x = 0$, dicantur K, A, B, C, D, &c., nanciscimur formulam

$$\text{(B)}\qquad \varphi(x) = K + Ax + \frac{Bx^2}{2} + \frac{Cx^3}{2.3} + \frac{Dx^4}{2.3.4} + \&c.$$

EXEMPLUM I.

Evolvenda proponatur quantitas exponentialis a^x

Assumto itaque $x = 0$ invenitur
$K = 1$, $A = la$, $B = (la)^2$, $C = (la)^3$, $D = (la)^4$, &c.
Quamobrem opportunis factis substitutionibus in aequatione

$$\text{(B) erit } a^x = 1 + x\,la + \frac{x^2(la)^2}{2} + \frac{x^3(la)^3}{2.3} + \frac{x^4(la)^4}{2.3.4} + \&c.$$

EXEMPLUM II.

Quaeratur sin x *per seriem potestatum arcus* x.

$$\text{Erit itaque } \sin x = K + Ax + \frac{Bx^2}{2} + \frac{Cx^3}{2.3} + \frac{Dx^4}{2.3.4} + \&c.$$

est autem $K = 0$, $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 0$, $E = 1$, &c.

$$\text{Igitur } \sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \&c.$$

ADNOT. post §. 151. *PART. II.*

IN seriebus huiusmodi reciprocis potestatum numerorum naturalium, quae generaliter repraesentantur per

$$\text{(A)}\qquad \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \&c. \text{ in inf.}$$

illud

illud habetur certo ſingulare, quod *ſumma terminorum omnium in locis imparibus ſe habet ad ſummam terminorum in locis paribus uti* $2^m - 1$ *ad* 1 : Nam diviſa ſerie (A) per 2^m oritur ſeries

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{8^m} + \frac{1}{10^m} + \frac{1}{12^m} + \&c.$$

quae terminos continet ſeriei (A) in locis paribus exiſtentes. Eſt autem $\frac{(A)}{2^m} = (B)$, & conſequenter $(A) : (B) :: 2^m : 1$. Igitur $(A) - (B) : (B) :: 2^m - 1 : 1$, hoc eſt :

$$\frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \&c. : \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \&c. :: 2^m - 1 : 1,$$

nimirum ſumma terminorum in locis imparibus eandem habet rationem ad ſummam terminorum in locis paribus, quam habet $2^m - 1$ ad 1. Atque ita poſito exponente $m = 1$ invenitur ſeries reciproca imparium aequalis ſeriei reciprocae parium nimirum

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \&c. = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \&c.;$$

Poſito $m = 2$ invenitur

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} \&c. : \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} \&c. :: 3 : 1:$$

Sumto $m = 3$ detegitur

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{27} + \frac{1}{125} + \frac{1}{343} + \frac{1}{729} + \&c. :$$
$$\frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{216} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1000} + \&c. :: 7 : 1;$$

& in univerſum in ſeriebus, quae fiunt ex poteſtatibus inverſis numerorum naturalium, ſumma terminorum in locis imparibus tantundem excedit ſummam terminorum in locis paribus quantum binarii poteſtas homologa unitate mulctata excedit unitatem.

Verum hic inopinato inſigne ſe nobis offert paradoxum, quod

quod nimirum quotiescunque potestatis exponens non est maior unitate summa terminorum in locis imparibus per demonstratum Theorema minor sit oportet quam summa terminorum in locis paribus; quum tamen contra termini locorum imparium cum terminis parium singillatim collati semper inveniantur manifesto maiores: quippe in praecedenti analogia $\frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{7^m}+\frac{1}{9^m}+$ &c.:

$\frac{1}{2^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{6^m}+\frac{1}{8^m}+\frac{1}{10^m}+$ &c. :: $2^m-1:1$, ratio $2^m-1:1$ est semper *minoris inaequalitatis*, seu ratio minoris ad maius, quoties exponens m minor est unitate; & tamen ratio altera $\frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+$ &c.: $\frac{1}{2^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{6^m}+$ &c. est *maioris inaequalitatis*, seu ratio maioris ad minus, quia terminus quilibet in antecedente manifesto excedit terminum quemlibet sibi respondentem in consequente.

Paradoxum hoc non fugit acutissimum Iacobum Bernoullium, qui in tractatu de Seriebus Infinitis §. XXIV. haec habet: „Mirabile vero est quod in serie $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+$ &c., cuius summa infinita est, seu maior serie $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ &c. ob denominatores minores, termini locorum imparium ad terminos parium iuxta regulam inveniuntur habere rationem $\sqrt{2}-1$ ad 1, minoris scilicet ad maius, cum tamen illi cum his singillatim collati iisdem manifesto sint maiores, cuius εναντιοφανειας rationem, etsi ex infiniti natura finito intellectui comprehendi non posse videatur, nos tamen satis perspectam habemus. Idem vero de similibus seriebus aliis, quae infinitam summam habent intelligendum „. Sed quum veram legitimamque paradoxi explicationem, quam se ſe tenere aiebat, Bernoullius nunquam vulgaverit, eamque in poſthuma eius operum collectione incaſſum quaeſierim, non inutile arbitror eam his aperire. Itaque quando ſeriei

$$(A) \quad \frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{6^m}+\frac{1}{7^m}+\frac{1}{8^m}+ \&c.$$

dividuntur termini omnes per 2^m, ut inde oriatur ſeries altera

$$(B) \quad \frac{1}{2^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{6^m}+\frac{1}{8^m}+\frac{1}{10^m}+\frac{1}{12^m}+\frac{1}{14^m}+\frac{1}{16^m}+ \&c.$$

certum eſt, huiuſce terminos in locis paribus ſeriei (A) reperiri, quemadmodum tertiae ſeriei

$$(C) \quad \frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{7^m}+\frac{1}{9^m}+\frac{1}{11^m}+ \&c.$$

termini in locis eiuſdem imparibus inveniuntur; attamen numerus terminorum ſeriei (B) bis excedit numerum terminorum ſeriei (C), quia ſinguli ſeriei (B) termini oriuntur a ſingulis ipſius (A) diviſis per 2^m; contra vero ſeriei (C) termini ſinguli reſpondent alternis tantum terminis prioris (A), eorumque adeo numerus dimidium duntaxat eſt numeri terminorum in (A) & proinde dimidium etiam numeri terminorum in (B). Fit hinc ut in mutua ſerierum (C) & (B) comparatione non ſinguli termini cum ſingulis conferri debeant, ſed poſt inſtitutam termini primi cum termino primo comparationem terminus quilibet ſeriei (C) conferri ſemper debeat cum duobus ſimul ſeriei (B), quo facto patebit in hypotheſi $m<1$ terminum quemlibet ſeriei (C) minorem eſſe aggregato duorum ſibi reſpondentium in (B). Etenim ſit $\frac{1}{a^m}$ terminus unus quicunque ſeriei (C), & bini eidem reſpondentes in (B) erunt $\frac{1}{(2a-2)^m}$, & $\frac{1}{(2a)^m}$, & ratio illius ad aggregatum iſtorum erit $\frac{1}{a^m} : \frac{1}{(2a-2)^m}+\frac{1}{(2a)^m}$. Si porro huius rationis antecedens & consequens per $(2a)^m$ multiplicatur, oritur analogia

$\frac{1}{a^m} : \frac{1}{(2a)^m} + \frac{1}{(2a-2)^m} :: 2^m : 1 + \left(\frac{a}{a-1}\right)^m$, in qua ratio altera $2^m : 1 + \left(\frac{a}{a-1}\right)^m$ est evidenter ratio minoris ad maius, quia ob $m < 1$ fit $2^m < 2$, & ob $\frac{a}{a-1} > 1$ fit $\left(\frac{a}{a-1}\right)^m > 1$, ac proinde $1 + \left(\frac{a}{a-1}\right)^m > 2 > 2^m$. Igitur singuli seriei (C) termini (excepto primo) cum binis simul seriei (B) collati iisdem semper minores deprehenduntur, quotiescunque exponens m deficit ab unitate, & consequenter series ipsa (C) minor est altera (B), prouti mutua illarum proportio ante inventa $2^m - 1 : 1$ manifestat.

Sed in serie harmonica

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{\&c.}$$

illud est animadversione dignum, quod siquidem termini locorum imparium, excepto primo, semper auferantur a binis respondentibus simul iunctis locorum parium, nova inde series consurgat, quae summa donatur finita: quod quidem in aliis seriebus, ubi idem occurrit paradoxum, haudquaquam obtinet, quum in istis summa eius seriei, quae praedicto modo progignitur, infinita deprehendatur. Sic in serie harmonica si ab aggregato duorum terminorum $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ auferatur $\frac{1}{3}$, oritur $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2.6}$; pariter $\frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{4.10}$;

rursus $\frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{7} = \frac{1}{6.14}$;

atque

atque ita deinceps: hincque nova colligitur series

$$\frac{1}{2.6}+\frac{1}{4.10}+\frac{1}{6.14}+\frac{1}{8.18}+\frac{1}{10.22}+\&c. \text{ in inf.}$$

cuius summam finitam esse ex eo constat, quod semissis est seriei istius

$$\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{8.9}+\frac{1}{10.11}+\&c.$$

longe minoris hac alia

$$\frac{1}{2.2}+\frac{1}{4.4}+\frac{1}{6.6}+\frac{1}{8.8}+\frac{1}{10.10}+\&c.,$$

quae ut alias exploratum est summa donatur finita, eaque admodum parva. Inde autem intelligitur, cur in serie harmonica summa terminorum in locis imparibus non sit minor summa terminorum in locis paribus, quamvis terminus quilibet locorum imparium (excepto primo) minor est duobus respondentibus simul sumtis locorum parium; id scilicet ideo contingit, quod prior summa deficit ab altera per quantitatem duntaxat finitam, quum tamen utraque summa sit infinita.

Nec dissimili modo ratio redditur paradoxi alterius quod nimirum in serie numerorum naturalium ad potestatem quamcunque elevatorum

$$1^m+2^m+3^m+4^m+5^m+6^m+\&c. \text{ in inf.}$$

summa terminorum in locis paribus habent ad summam terminorum omnium seriei rationem quam habet 2^m ad unitatem scilicet duplam in serie numerorum naturalium, quadruplam in serie quadratorum, octuplam in serie cuborum, &c. quamvis termini locorum parium, utpote partes totius seriei, quantitatem illius multiplicem nullo modo constituere posse videantur. Fallax quippe & anceps partis, & totius notio hisce exemplis accommodata eodem iure adsurdum immane suaderet, series quadratorum, cuborum, aliarumque altiorum potestatum ex numeris naturalibus minores esse oportere serie ipsa numerorum naturalium, in qua continentur, tanquam partes in.

in toto, quod quam absonum, & praeposterum sit nemo non intelligit.

ADNOTATIO ad §. 159. PART. II.

Ex elegantissima Auctoris nostri aequatione

$$l1+l2+l3\ldots+lx=\frac{1}{2}l2\pi+(x+\tfrac{1}{2})lx-x+\frac{\mathfrak{A}}{1.2x}-\frac{\mathfrak{B}}{3.4x^3}+\frac{\mathfrak{C}}{5.6x^5}-\frac{\mathfrak{D}}{7.8x^7}+\&c.$$

nonnulla inferuntur theoremata, quae cum utilitate, usu, praestantia se potissimum commendent, hic peculiariter proponi, demonstrarique merentur.

Theorema I.

Sumto x *infinite magno*, & e *pro logarithmorum hyperbolicorum basi habetur* $1.2.3.4\ldots x=\frac{x^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^x}$.

Euleriana praedicta aequatio sumto $x=\infty$, & existente $-x=-le^x$ transit in hanc

(A) $l1+l2+l3\ldots+lx=\frac{1}{2}l2\pi+(x+\frac{1}{2})lx-le^x$.

Haec autem facto transitu a logarithmis ad numeros convertitur in $1.2.3.4\ldots x=\frac{x^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^x}$. Q. E. D.

Theorema II.

Sumtis x & p *infinitae magnis aio fore*

$$x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-p+2)(x-p+1)=\frac{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-p}}{(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}}$$

In aequatione (A) substituo $x-p$ loco ipsius x, & nanciscor

$l1+$

$$l1 + l2 + l3 \ldots + l(x-p) = (x-p+\tfrac{1}{2})\,l(x-p) - le^{x-p} + \tfrac{1}{2}\,l\,2\pi.$$

Aequationem hanc aufero a priore (A) & invenio

$$lx + l(x-1) + l(x-2) \ldots + l(x-p+2) + l(x-p+1) = (x+\tfrac{1}{2})\,lx - (x-p+\tfrac{1}{2})\,l(x-p) + l\,e^{-p}$$

Quamobrem progrediendo a logarithmis ad numeros apparebit

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-p+2)(x-p+1) = \frac{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-p}}{(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}}.\ \text{Q. E. D.}$$

Theorema III.

Captis x *&* p *numeris ingentibus (si infiniti caperentur aequalitas foret absoluta) coefficiens termini* (p + 1).$^{\text{esimi}}$ *in binomio ad potestatem* x *elevato aequatur proxime expressioni*

$$\frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}$$

Ex vulgari Algebra constat elevato binomio ad potestatem x coefficientem termini $(p+1)$.$^{\text{esimi}}$ nihil aliud esse quam $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-p+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots p}$. Sed in hypothesi x & p infinitorum, vel etiam ingentium huius fractionis numerator per Theor. II est $= \frac{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-p}}{(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}}$; & denominator per Theor. I. est $= \frac{p^{p+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^{p}}$: Igitur fractio praedicta; hoc est coefficiens termini $(p+1)$.$^{\text{esimi}}$ in binomio ad potestatem x elato proxime aequatur quantitati

$$\frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}.\ \text{Q. E. D.}$$

CO-

COROL. I. Si fiat $p = nx$ orietur

$$\frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} = \frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{(nx)^{nx+\frac{1}{2}}(x-nx)^{x-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{n^{nx+\frac{1}{2}}x^{x+\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}(1-n)^{x-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} =$$

$$= \frac{1}{n^{nx+\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}(1-n)^{x-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{n^{nx}(1-n)^{x-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{nx}.\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n}{1-n}\right)^{nx}(1-n)^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{nx}.\sqrt{2\pi}}.$$

COR. II. Hinc eruitur valor coefficientis maximi aut medii in binomio ad immenſam poteſtatem x elevato; nam poſito $p = \frac{1}{2}x$, ſeu $n = \frac{1}{2}$, hocque ſubſtituto in praecedenti expreſſione, mutatur illa in hanc alteram $\frac{2^x\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}}$, quae valorem maximi coefficientis repraeſentat.

COR. III. In binomio ad infinitam poteſtatem x elevato ratio coefficientis maximi ad ſummam coefficientium omnium aequatur quantitati $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$; eſt enim ut liquet ſumma omnium cofficientium $= 2^x$; proindeque praedicta ratio

$$= \frac{2^x\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}} : 2^x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}.$$

ADNO-

ADNOTATIO ad §. 185. PART. II.

I. Suspecta non paucis apparebit Auctoris nostri demonstratio, quae tota eo nititur principio, quod proponit his verbis: *Quodsi ergo* x *fuerit numerus infinitus, quoniam is est neque par neque impar, haec consideratio cessare debet, ac proinde in summa termini ambigui sunt reiiciendi: unde sequitur, huiusmodi serierum in infinitum continuatarum summam exprimi per solam quantitatem constantem adiiciendam.* Nemo non videt quam labile & ruinosum sit principium huiusmodi ex arcana obscurissimaque numeri infiniti indole depromtum. Itaque operae pretium ducimus Eulerianas formulas nova, eaque apodictica demonstratione munire (*a*). Sint iam sequentes formulae

$$\text{I.}\quad 1-2+3-4+\&c.=\frac{1}{4}$$

$$\text{II.}\quad 1^2-2^2+3^2-4^2+\&c.=0$$

$$\text{III.}\quad 1^3-2^3+3^3-4^3+\&c.=-\frac{2}{16}$$

$$\text{IV.}\quad 1^4-2^4+3^4-4^4+\&c.=0$$

$$\text{V.}\quad 1^5-2^5+3^5-4^5+\&c.=\frac{16}{64}$$

$$\text{VI.}\quad 1^6-2^6+3^6-4^6+\&c.=0$$

$$\text{VII.}\quad 1^7-2^7+3^7-4^7+\&c.=-\frac{272}{256}$$

$$\text{VIII.}\quad 1^8-2^8+3^8-4^8+\&c.=0$$

$$\text{IX.}\quad 1^9-2^9+3^9-4^9+\&c.=\frac{7936}{1024}$$

&c.

2.

(*a*) *Vide Cl.* GREG. FONTANAE *Dissert.* De Seriebus *in T. II. Part. I.* Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana. 1784.

2. Praemitto Lemmata bina sequentia.

Lemma I.

Posito x *arcu quolibet circuli radio* 1 *descripti habetur aequatio* $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x +$ *&c. in infin.* $= -\frac{1}{2}$.

Fiat $S = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x +$ &c. & multiplicetur per $\cos x$, ita ut prodeat

$$S \cos x = \cos x^2 + \cos x \cos 2x + \cos x \cos 3x + \cos x \cos 4x + \&c.$$

Liquet ex Trigonometria productum ex cosinibus duorum angulorum aequari dimidio cosinui summae ipsorum angulorum una cum dimidio cosinu eorum differentiae. Igitur resoluto producto quolibet praedictae aequationis in terminos binos oritur.

$$S \cos x = \tfrac{1}{2}(\cos 2x + 1) + \tfrac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) + \tfrac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) + \&c.$$
$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \&c. = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos x + S.$$

Quamobrem erit

$$S(1 - \cos x) = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}, \text{ ideſt } S = -\frac{1}{2}. \text{ Q. E. D.}$$

Lemma II.

Infinita series $S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x +$ *&c. in infin. aequalis est huic expressioni* $\dfrac{\sin x}{2(1 - \cos x)}$

Ducatur proposita series in $\cos x$ & prodibit

$$S \cos x = \sin x \cos x + \sin 2x \cos x + \sin 3x \cos x + \sin 4x \cos x + \&c.$$

Iam vero datis binis angulis φ, θ ex theoria functionum angularium constat fore $\sin\varphi \cos\theta = \tfrac{1}{2}\sin(\varphi + \theta) + \tfrac{1}{2}\sin(\varphi - \theta)$. Quapropter facta termini cuiuslibet resolutione in duos invenietur

$$S \cos x = \tfrac{1}{2}(\sin 2x + 0) + \tfrac{1}{2}(\sin 3x + \tfrac{1}{2}\sin x) + \&c.$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x) + \tfrac{1}{2}(\sin 5x + \sin 3x) + \&c. = \tfrac{1}{2}$$

$= \frac{1}{2}\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \&c. = S - \frac{1}{2}\sin x.$
Hinc per transpositionem erit $S - S\cos x = \frac{1}{2}\sin x$, ac postremo

$$S = \frac{\sin x}{2(1-\cos x)}. \text{ Q. E. D.}$$

3. His praemissis demonstratio Formularum Eulerianarum sponte consequitur.

I. Differentietur series Lemmatis secundi, dividaturque per $-dx$, ex quo orietur

(M) $-\cos x - 2\cos 2x - 3\cos 3x - 4\cos 4x - \&c.$ in inf.

$$= \frac{1}{2(1-\cos x)} = \frac{1}{4\sin\frac{1}{2}x^2}.$$

Propterea sumto x pro semicircumferentia fiet $\cos x = -1$, $\cos 2x = 1$, $\cos 3x = -1$, $\cos 4x = 1$, &c., & consequenter inventa series transit in I.am

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \&c. \ldots = \frac{1}{4}. \text{ Q. E. D.}$$

II. Lemmatis I. series bis differentietur, dividaturque per dx^2, quo facto invenietur

(N) $-\cos x - 2^2\cos 2x - 3^2\cos 3x - 4^2\cos 4x - 5^2\cos 5x - \&c. = 0.$

Quocirca sumto x pro semicircumferentia oritur series II.a

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \&c. \ldots = 0.$$

III. Capiatur ex aequatione (M) differentiale secundum, hocque per $-dx^2$ dividatur; quod dat aequationem

(O) $-\cos x - 2^3\cos 2x - 3^3\cos 3x \ldots - \&c.$

$$= \frac{-1-2\cos\frac{1}{2}x^2}{8\sin\frac{1}{2}x^4};$$

quae in praedicta ipsius x assumtione convertitur in seriem III.am

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \&c. \ldots = -\frac{1}{8}$$

IV. Eodem modo capta aequationis (N) differentia secunda, eaque divisa per $-dx^2$ oritur aequatio

(P) $-\cos x - 2^4\cos 2x - 3^4\cos 3x - 4^4\cos 4x - 5^4\cos 5x \ldots \&c. = 0;$

 haec-

haecque in hypothesi $x = 180^\circ$, abit in formulam IV.am

$$1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \&c. = 0$$

V. Aequatio (O) bis differentiata, ac per $-dx^2$ divisa praebet

(Q) $$-\operatorname{cos} x - 2^5 \operatorname{cos} 2x - 3^5 \operatorname{cos} 3x - 4^5 \operatorname{cos} 4x - \&c. = \frac{2 \operatorname{sin} \frac{1}{2} x^2 + 13 \operatorname{cos} \frac{1}{2} x^2 + 2 \operatorname{cos} \frac{1}{2} x^4}{8 \operatorname{sin} \frac{1}{2} x^5}$$

Hinc capto de more $x = 180^\circ$, praedicta aequatio convertitur in formulam V.am

$$1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 \quad . \; . \; . \quad + \&c. = \frac{1}{4}$$

VI. Sumo aequationis (P) differentiam secundam, eamque divido per $-dx^2$, hincque aequationem nanciscor

$$-\operatorname{cos} x - 2^6 \operatorname{cos} 2x - 3^6 \operatorname{cos} 3x - 4^6 \operatorname{cos} 4x \; . \; . \; . \; . - \&c. = 0.$$

Haec autem per substitutionem semicircumferentiae loco x degenerat in formulam VI.am

$$1^6 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 \; . \; . \; . \; . + \&c. = 0.$$ Q. E. D

Hac ipsa methodo protinus demonstrantur Theoremata omnia Euleriana circa series potestatum positivarum integrarum ex numeris naturalibus cum signis alternantibus; & generatim constitui ratumque haberi potest, series quantitatum parium praeditas esse summa improprie dicta, seu potius *quantitate genitrice*, semper nihilo aequali; series vero potestatum imparium donari summa, vel *magnitudine genitrice*, semper a nihilo diversa.

Theoremata alia Eulerianis analoga demonstrari pariter possent circa series potestatum numerorum imparium alternis signis affectarum

$$1^n - 3^n + 5^n - 7^n + 9^n - 11^n + \&c.$$

In hisce numerorum imparium seriebus, secus atque in illis numerorum naturalium, illud generatim constitui potest *potestates impares oriri a magnitudine genitrice nihilo aequali; pares a magnitudine determinata.*

ADNO-

ADNOTATIO ad §. 208. *PART. II.*

PEr calculum differentialem insigni compendio inveniri possunt sequenti etiam modo coefficientes terminorum in formula, quae exprimit generalem terminum seriei cuiuscunque recurrentis. Sit igitur ex serie recurrenti ordinis t

$$y_x,\ y_{x+1},\ y_{x+2}, \ldots y_{x+t-1},\ y_{x+t}$$

orta aequatio

$A y_x + B y_{x+1} + C y_{x+2} \ldots + M y_{x+t-1} + y_{x+t} = 0$, ex qua facto $y_x = a z^x$, per substitutionem, elicitur (facta divisione per $a z^x$) aequatio relationis

(A) $\quad A + Bz + Cz^2 \ldots + Mz^{t-1} + z^t = 0.$

Concipiamus nunc huiusce aequationis radices esse $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c., sintque radices $= \alpha$ numero n: praedicta aequatio induet hanc formam

(B) $(z-\alpha)^n (z^m + pz^{m-1} + qz^{m-2} \ldots + fz^2 + gz + k) = 0 = P$

assumto $m + n = t$. Statuatur $z^m + pz^{m-1} + qz^{m-2} \ldots fz^2 + gz + k = Z$, eritque $(z-\alpha)^n Z = P$. Fiat porro $dZ = Z' dz$, $ddZ = Z'' dz$, $d^3 Z = Z''' dz$, &c. Hinc habebitur $\frac{dP}{dz} = n(z-\alpha)^{n-1} Z + (z-\alpha)^n Z'$ ubi facto $n = 1$, $z = \alpha$ prodit $\frac{dP}{d\alpha} = Z$. Differentiatio secunda praebet

$\frac{ddP}{dz^2} = n(n-1)(z-\alpha)^{n-2} Z + 2n(z-\alpha)^{n-1} Z' + (z-\alpha)^n Z''$; ubi posito $n = 2$, $z = \alpha$, evadit $\frac{ddP}{2 d\alpha^2} = Z$. Pari ratiocinatione invenietur $\frac{d^n P}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n\, d\alpha^n} = Z$, quando $z = \alpha$, & n numerus aliquis est seriei naturalis $1, 2, 3$, &c. Iam vero est $Z = (z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)$ &c., & posito α pro z, fit

$$Z = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta) \text{ \&c.}$$

Ergo si in aequatione (B) unica est radix α, seu si $n=1$, habemus $\frac{dP}{d\alpha} = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)$ &c.; si binae sunt aequales radices α, ita ut sit $\beta=\alpha$, habemus $\frac{d^2P}{2d\alpha^2} = (\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)$ &c.; Si tres sunt radices aequales, hoc est $\alpha=\beta=\gamma$, nancifcimur

$$\frac{d^3P}{2.3\,d\alpha^3} = (\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon) \text{ \&c. Sicque deinceps.}$$

2. Fiat modo $B+Cz+Dz^2 \ldots\ldots + z^{t-1} = Q$, & ob $A+Bz+Cz^2\ldots+Mz^{t-1}+z^t = (z-\alpha)^n(z^m+pz^{m-1}+qz^{m-2}\ldots+fz^2+gz+k)$, adeoque $A=k(-\alpha)^n$, sublato A, factaque divisione per z prodibit $Q = \frac{(z-\alpha)^n Z - k(-\alpha)^n}{z}$, ubi posito $n=1$, & $z=\alpha$ oritur $Q=k$. Ex differentiatione autem elicitur $\frac{dQ}{dz} = \frac{n(z-\alpha)^{n-1}Z + (z-\alpha)^n Z'}{z} - \frac{(z-\alpha)^n Z + k(-\alpha)^n}{z^2}$, ubi assumto $n=2$, $z=\alpha$ prodit $\frac{dQ}{d\alpha} = k$. Si iterum differentietur; tum tertio; deinde quarto &c. inveniemus iugiter $\frac{ddQ}{2d\alpha^2} = k$, quando $n=3$, $z=\alpha$; pariter $\frac{d^3Q}{2.3\,d\alpha^3} = k$, quando $n=4$, $z=\alpha$, & in universum $\frac{d^{n-1}Q}{1.2.3\ldots(n-1)\,d\alpha^{n-1}} = k$ existente n numero aliquo seriei naturalis 2, 3, 4, &c. a binario incipientis. Sed k aequatur producto ex $-\beta \times -\gamma \times -\delta$ &c. Igitur huic producto differentialia praedicta aequabuntur.

Statuatur $R = C + Dz + Ez^2 \ldots\ldots + z^{t-2}$; eritque ob $A = k(-\alpha)^n$, $B = nk(-\alpha)^{n-1} + g(-\alpha)^n$, demtis ex aequatione (A) terminis $A+Bz$, ac divisione facta per z^2, $R = \frac{(z-\alpha)^n Z - z[nk(-\alpha)^{n-1} + g(-\alpha)^n]}{z^2}$; quae sane expres-

expressio in hypothesi $n=1$, $z=\alpha$, migrat in $R=g$. Capto differentiali, factoque $n=2$, $z=\alpha$, invenitur $\frac{dR}{d\alpha}=g$; sicque rursus sumto $n=3$, $z=\alpha$ detegitur $\frac{d^2R}{2\,d\alpha^2}=g$, &c. eodem quo antea tenore atque ordine. Est autem g aggregatum productorum ex radicibus $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, &c. quae producta denominationem mutuantur a numero $n-1$. Igitur huic productorum aggregato aequantur differentialia omnia praedicta.

Pari modo si ponatur $S=D+Ez\ldots+z^{t-3}$, invenietur $\frac{d^{n-1}S}{1.2.3\ldots(n-1)\,d\alpha^{n-1}}=f$, idest $=$ aggregato productorum ex radicibus $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, &c., quae producta denominationem accipiunt ab exponente $n-2$. Ita semper de ceteris.

3. Sit iam exempli caussa seriei recurrentis terminus generalis $y_x=a\alpha^x+b\beta^x+c\gamma^x$, ubi (*Adnot. post Cap. II.*)

$$a=\frac{\beta\gamma y_0-(\beta+\gamma)y_1+y_2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\,;\quad b=\frac{\alpha\gamma y_0-(\alpha+\gamma)y_1+y_2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\,;$$

$$c=\frac{\alpha\beta y_0-(\alpha+\beta)y_1+y_2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

Quoniam in hac hypothesi tres habentur radices, eaeque inaequales α,β,γ, erit idcirco $\frac{dP}{d\alpha}=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$; $Q=\beta\gamma$; $R=-\beta-\gamma$. Quapropter prodibit $a=\frac{Qy_0+Ry_1+y_2}{\frac{dP}{d\alpha}}$, qui valor migrat in b mutando α in β, & β in α; pariterque migrat in c permutando α cum γ, & γ cum α.

4. Concipiamus nunc in allato exemplo binas esse radices aequales $\alpha=\beta$, in qua hypothesi terminus generalis hanc induit formam $a'\alpha^x+b'\alpha^{x-1}+c\gamma^x$, ubi (*loco cit.* §. 16.) $a'=$

$$a' = \frac{-y_2 + 2\alpha y_1 + (\gamma^2 - 2\alpha\gamma)y_0}{(\alpha-\gamma)^2};\ b' = \frac{y_2 - (\alpha+\gamma)y_1 + \alpha\gamma y_0}{\alpha-\gamma}$$

$$c = \frac{y_2 - 2\alpha y_1 - \alpha\alpha y_0}{(\gamma-\alpha)^2}.$$

Valorem a' revoco ad hanc formam $\frac{-\gamma y_0 + y_1}{\alpha-\gamma} + \frac{-y_2 + (\alpha+\gamma)y_1 - \alpha\gamma y_0}{(\alpha-\gamma)^2}$ quae a praecedenti non differt, uti liquet. In hac itaque hypothesi, in qua $n = 2$, invenitur $Q = \frac{-k\alpha^2}{\alpha} = -\alpha k = \alpha\gamma$, ob $k = -\gamma$. Pariter facto $n = 2$ detegitur

$$R = \frac{-\alpha^2 k - g\alpha^3 + 2\alpha^2 k}{\alpha^2} = k - \alpha g = -\gamma - \alpha,\ \text{ob}\ k = -\gamma,\ g = 1.$$

Quocirca deducimus $b' = \frac{Qy_0 + Ry_1 + y_2}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}}$. Est autem manifesto

$$\frac{-\gamma y_0 + y_1}{\alpha-\gamma} = \frac{\frac{dQ}{d\alpha}y_0 + \frac{dR}{d\alpha}y_1}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}},$$ & rursus

$$\frac{-y_2 + (\alpha+\gamma)y_1 - \alpha\gamma y_0}{(\alpha-\gamma)^2} = \frac{-b'}{\alpha-\gamma} = -\frac{b'}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}}.$$ Igitur

$$a' = \frac{-\gamma y_0 + y_1}{\alpha-\gamma} + \frac{-y_2 + (\alpha+\gamma)y_1 - \alpha\gamma y_0}{(\alpha-\gamma)^2} = \frac{\frac{dQ}{d\alpha}y_0 + \frac{dR}{d\alpha}y_1 - b'}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}}$$

Hinc coefficientium indeterminatorum valores sequenti modo exprimentur

$$\text{I.}\ c = \frac{y_2 - 2\alpha y_1 + \alpha\alpha y_0}{(\gamma-\alpha)^2};\ \text{II.}\ b' = \frac{Qy_0 + Ry_1 + y_2}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}};\ \text{III.}\ a' = \frac{\frac{dQ}{d\alpha}y_0 + \frac{dR}{d\alpha}y_1 - b'}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}}$$

5. Eodem omnino ratiocinandi modo si tres sint radices aequales, & in termino seriei generali sint c'', b'', a'' coefficientes indeterminati aequalibus radicibus praefixi (quaecunque demum fuerint radices reliquae inaequales) sequentes formulas semper praesto habebimus

$$\text{I. } c'' = \frac{Q y_0 + R y_1 + S y_2 + T y_3 \ \&c.}{\frac{d^3 P}{2.3\, d\alpha^3}};$$

$$\text{II. } b'' = \frac{\frac{dQ}{d\alpha} y_0 + \frac{dR}{d\alpha} y_1 + \frac{dS}{d\alpha} y_2 \ \&c. - c''}{\frac{d^3 P}{2.3\, d\alpha^3}};$$

$$\text{III. } a'' = \frac{\frac{ddQ}{2\,d\alpha^2} y_0 + \frac{ddR}{2\,d\alpha^2} y_1 + \frac{ddS}{2\,d\alpha^2} y_2 \ \&c. - b''}{\frac{d^3 P}{2.3\, d\alpha^3}}$$

Atque ex his perspicue patet progressus ad casus alios radicum aequalium quatuor, quinque, sex &c.

ADNOT. ad CAP. XI. PART. II.

1. Functio aliqua quantitatis cuiuscunque variabilis tunc semper *Maxima* evadit vel *Minima*, cum eius functionis differentialia ordinum successivorum simul evanescentia numero impari sunt; & *Maxima* quidem, quotiescunque eius differentiale ultimo evanescenti superstes negativum est; *Minima* si positivum. Demonstratur hoc ab Auctore, aliisque passim.

2. Hisce constitutis, ac probe perpensis sit modo Z algebraica functio quantitatum variabilium t, u, x, y, &c., cu-

ius

ius *maximos*, *minimosve* valores indagare oportet; erit itaque ex demonstratis $dZ = pdt + qdu + rdx + sdy +$ &c. unde protinus haec manat aequatio

$$pdt + qdu + rdx + sdy + \&c. = 0.$$

Quum porro relatio inter variabiles t, u, x &c., nec non inter ipsarum differentialia dt, du, dx &c. sit adhuc indeterminata, & praedicta aequatio locum semper habere debeat, quaecunque sit huiusmodi relatio; hinc evidenter consequitur, singula membra pdt, qdu, rdx &c. nihilo aequari oportere, proindeque tot oriri aequationes, quot existunt variabiles, nimirum I. $p = 0$; II. $q = 0$; III. $r = 0$; &c. Harum aequationum subsidio inveniuntur quantitatum incognitarum t, u, x, &c. valores, qui in functione Z subrogati eam reddunt *Maximam*, vel *Minimam*.

3. Progrediamur nunc ad secundum differentiale. Assumtis, quod licet, constantibus primis differentialibus dt, du, dx &c. prodibit $d^2Z = dpdt + dqdu + drdx + dsdy +$ &c.

Sit $dp = Adt + Bdu + Ddx + Gdy$

$dq = Bdt + Cdu + Edx + Hdy$

$dr = Ddt + Edu + Fdx + Idy$

$ds = Gdt + Hdu + Idx + Ldy$ Ex quo eruitur

$$d^2Z = Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 + 2Ddtdx + 2Edudx + Fdx^2$$
$$+ 2Gdtdy + 2Hdudy + 2Idxdy + Ldy^2.$$

Ut a casu omnium simplicissimo ordiamur, ponamus unam tantum esse variabilem t, ideoque $d^2Z = Adt^2$, ubi, ob valorem dt^2 semper affirmativum, differentiale d^2Z eodem afficietur signo, quo quantitas A: quocirca *minima* erit Z, si A fuerit affirmativa: *maxima* si A negativa; inventaque $A = 0$, a subsequentibus ipsius Z differentialibus petendum erit, ut liquet, *Maximi Minimive* criterium.

4. Ponamus nunc, in functione Z variabiles duas t & u contineri. In hac hypothesi oritur

$$d^2Z = Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 = A\left(dt + \frac{Bdu}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)du^2.$$

In

In hac aequatione, quoniam quadrata $\left(dt+\frac{Bdu}{A}\right)^2$ & du^2 semper affirmativa sunt, differentiale secundum d^2Z necessario affirmativum erit quotiescunque coefficientes bini A, & $C-\frac{B^2}{A}$ fuerint affirmativi; contra vero negativum erit, si iidem fuerint ambo negativi, quaecunque sit differentialium dt & du mutua relatio. Igitur pro *Minimo* functionis Z valore habebitur $A>0$, $C-\frac{B^2}{A}>0$, nimirum $C>\frac{B^2}{A}$, seu $CA>B^2$, unde infertur $C>0$. Quamobrem functio proposita Z *Minima* esse nequit nisi tres sequentes simul habeantur conditiones

I. $A>0$; II. $C>0$; III. $AC>B^2$.

Pari ratiocinatione inveniemus pro *Maximo* ipsius Z valore fieri oportere $A<0$; $C-\frac{B^2}{A}<0$, seu $C<\frac{B^2}{A}$; ideoque $CA>B^2$, ob A scilicet negativum; ex quo etiam infertur $C<0$; quocirca functio Z valorem *Maximum* nancisci non potest, nisi tres simul conditiones locum habeant:

I. $A<0$; II. $C<0$; III. $CA>B^2$.

Hinc porro patet, *Maximi* conditiones partim congruere, partim adversari conditionibus *Minimi*.

5. Si vel A, vel C, vel utraque simul sit $=0$, quin tamen sit quoque $B=0$, conditio praecedens $AC>B^2$ stare haudquaquam potest; proindeque proposita quantitas valorem *Maximum Minimumve* nunquam assequetur. Idem prorsus eveniet si A & C signa habuerint contraria; tunc enim ob valorem B^2 semper affirmativum conditio $AC>B^2$ impossibilis evadit. Si B evanescat una cum A, vel una cum C, secundi differentialis d^2Z valor ab unica variabili penderet, & consequenter vel *Maximus* vel *Minimus*, vel neuter esset iuxta criteria ab Auctore tradita pro functionibus unius variabilis. Denique si tota quantitas d^2Z sit $=0$, nimirum $A=0$,

$B = 0$, $C = 0$, ad tertium differentiale $d^3 Z$ confugere oportet, quo non evanescente functio Z nec *Maxima* nec *Minima* esse potest, eo autem evanescente, differentiale quartum $d^4 Z$ quaerendum erit, cuius valor an affirmativus, an potius negativus fuerit, per methodum hic expositam facile dignoscetur; ex quo rursus *Maximus* vel *Minimus* functionis propositae valor colligetur.

6. Si Z functio sit trium variabilium t, u, x, differentiale $d^2 Z$ induit hanc formam

$$d^2 Z = A dt^2 + 2 B dt du + C du^2 + 2 D dt dx + 2 E du dx + F dx^2$$

$$= A\left(dt + \frac{B du}{A} + \frac{D dx}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right) du^2$$

$$+ 2\left(E - \frac{BD}{A}\right) du dx + \left(F - \frac{D^2}{A}\right) dx^2$$

Fiat $C - \frac{B^2}{A} = a$; $E - \frac{BD}{A} = b$; $F - \frac{D^2}{A} = c$,

& aequatio transibit in hanc

$$d^2 Z = A\left(dt + \frac{B du}{A} + \frac{D dx}{A}\right)^2 + a du^2 + 2 b du dx + c dx^2$$

$$= A\left(dt + \frac{B du}{A} + \frac{D dx}{A}\right)^2 + a\left(du + \frac{b dx}{a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right) dx^2$$

Iam vero ob valorem quadratorum

$$\left(dt + \frac{B du}{A} + \frac{D dx}{A}\right)^2, \left(du + \frac{b dx}{a}\right)^2, \& \; dx^2$$

semper affirmativum, differentiale $d^2 Z$ erit pariter affirmativum si coefficientes A, a, & $c - \frac{b^2}{a}$ signo $+$ afficientur.

Igitur pro *Minimo* functionis Z valore conditiones habentur sequentes $A > 0$; $a > 0$; $ca > b^2$, seu ipsarum a, b, c valoribus subrogatis

$$A > 0; C - \frac{B^2}{A} > 0; \left(C - \frac{B^2}{A}\right)\left(F - \frac{D^2}{A}\right) > \left(E - \frac{BD}{A}\right)^2$$

nimirum $A > 0$; $CA > B^2$; & (CA

$$(CA - B^2)(FA - D^2) > (EA - BD)^2;$$

unde iterum oritur $C > o$, $F > o$, & $FA > D^2$. Quocirca functionis Z *Minimum* quinque hisce conditionibus definietur I. $A > o$; II. $C > o$; III. $F > o$; IV. $CA > B^2$; V. $FA > D^2$.

Pari ratiocinatione inveniemus, valorem *Maximum* ipsius Z conditiones postulare

$A < o$, $CA > B^2$, & $(CA - B^2)(FA - D^2) > (EA - BD)^2$;

nam I. debet esse $a < o$, nimirum $C - \frac{B^2}{A} < o$, vel $C < \frac{B^2}{A}$; est autem A negativum; igitur $CA > B^2$: II. est $c - \frac{b^2}{a} < o$; hoc est $c < \frac{b^2}{a}$; proindeque ob a negativum $ca > b^2$, hoc est

$$\left(C - \frac{B^2}{A}\right)\left(F - \frac{D^2}{A}\right) > \left(E - \frac{BD}{A}\right)^2$$

vel $(CA - B^2)(FA - D^2) > (EA - BD)^2$;

unde oritur $FA > D^2$, & $F < o$. Quocirca *Maximi* conditiones sunt quae sequuntur

I. $A < o$; II. $C < o$; III. $F < o$; IV. $CA > B^2$; V. $FA > D^2$.

7. Si quantitates A & C vel singulae, vel ambae evanescunt IV. conditio fit impossibilis. Si evanescat F corruit conditio V.: Ex hisce consequitur functionem Z nec *Maximam*, nec *Minimam* esse posse quotiescunque quantitates A, C, F vel singulae vel omnes evanescant.

Ex dictis luculenter innotescit theoriam hanc ad functiones quatuor, vel etiam plurium variabilium aptari.

8. Quoniam haec nova theoria EULERO est prorsus intacta, non inutile erit sequentia animadvertere.

Quicunque sit numerus variabilium, quae functionem propositam Z ingrediuntur, si earum quaelibet seorsim spectetur, quaeraturque *Maximum* vel *Minimum*, quod eidem conveniat dum interea reliquae eaedem perseverant, invenientur singillatim differentialia prima pdt, qdu, rdx, sdy &c., quorum unumquodque nihilo aequatum aequationes §. 2. expositas praebebit, nimirum $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$ &c. Eodem modo ad secunda differentialia progredientes inveniemus seorsim quantitates Adt^2, Cdu^2, Fdx^2, Ldy^2 &c., ubi si A, C, F, L &c. sint vel omnes affirmativae, vel omnes negativae facile inde quispiam colligeret valores ipsarum t, u, x &c. ex aequationibus $p = 0$, $q = 0$, &c. elicitos necessario inducere functioni propositae Z valorem *Maximum Minimumve*. Et sane exploratum est quam quod maxime, functionem ipsam Z habita tantum ratione unius cuiuslibet ex praedictis variabilibus *Maximam* vel *Minimam* esse oportere: at quis tuto pronunciabit, id, quod pro variabili qualibet seorsim spectata obtinet, pro omnibus simul sumtis obtinere? Rem penitius perscrutemur.

9. Sit itaque Z functio duarum variabilium t & u, exhibeatque ordinatam superficiei, cuius t & u sunt ordinatae reliquae; ita ut superficiei ipsius coordinatae sint variabiles tres Z, t, & u. Iam quaestio eo redibit, ut inveniatur ordinata *Maxima* superficiei, cuius datur aequatio, nimirum $dZ = pdt + qdu$. Facta u constanti aequatio abit in $dZ = pdt$, tuncque exprimit sectiones omnes eiusdem superficiei parallelas axi quantitatum t, prouti quantitas u varios subinde recipit valores. Ponatur itaque $p = 0$; & ex hac aequatione is colligetur quantitatis t valor, qui in qualibet parallelarum sectionum ordinatam Z *Maximam* redet aut *Minimam*. Et quoniam u constans assumitur, fiet differentiale secundum $d^2Z = Adt^2$, & consequenter ex solo ipsius A valore licebit, de *Maximi* aut *Minimi* existentia pronunciare, dummodo valor t ex aequatione $p = 0$ petitus substituatur. Nimirum si pro quolibet ipsius u valore quantitas A negativa inveniatur vel positiva, sectiones praedictae omnes *Maximum* habebunt aut *Minimum*; & si pro vario ipsius u valore quantitas A signis diversis afficiatur, sectiones eaedem intra certos statosque limites *Maximo* donabuntur, intra alios *Minimo*. Si fuerit $A = 0$, quicunque

fit

ſit conſtantis u valor, tunc ſectionum illarum nulla *Maximum* habebit aut *Minimum*. At ſi A tunc ſolum fiat $= 0$, cum u certos definitoſque valores habet, in hac hypotheſi eae tantum ſectiones, quae praedictis ipſius u valoribus reſpondent, *Maximo Minimove* deſtituentur. Omnium harum ordinatarum locus geometricus continetur in aequatione $p = 0$, ſola variabilitate ipſius u ſpectata, ideoque ordinatae ipſae in eadem ſuperficie ſectionem conſtituent, quae ſimplicis erit, vel duplicis curvaturae, quaeque determinabitur per aequationes binas coniunctas $dZ = pdt + qdu$, & $p = 0$, ſeu $dZ = qdu$, & $p = 0$. Ex quo perſpicuum fit ad invenienda totius ſuperficiei *Maxima* vel *Minima*, quaeri oportere ordinatam *Maximam* vel *Minimam* huic ipſi ſectioni convenientem; unde iterum habebitur $q = 0$, quae porro aequatio valorem alterius variabilis u quaeſito ſatisfacientem ſtatim exhibebit.

10. Tranſeamus nunc ad differentiale ipſius q, nimirum ad aequationem prius inventam $dq = \mathrm{B}dt + \mathrm{C}du$. Quum itaque ex aequatione $p = 0$ determinetur t per u, ſive in illius aequationis differentiali $\mathrm{A}dt + \mathrm{B}du = 0$ ſit $dt = -\frac{\mathrm{B}du}{\mathrm{A}}$, hoc ſubrogato valore nanciſcimur $dq = \left(-\frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}} + \mathrm{C}\right) du$: ex quo conſequitur, ordinatam *Minimam* fore, ſi quantitas $-\frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}} + \mathrm{C}$ poſitiva fuerit, ideſt $\mathrm{C} > \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}$; *Maximam* vero ſi $\mathrm{C} < \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}$; nec *Maximam* denique nec *Minimam* ſi $\mathrm{C} = \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}$, dummodo reliqua altiora differentialia conditionibus ſupra indicatis teneantur. Iam vero *Maxima* huiuſmodi vel *Minima* ſerio perpendentes facili negotio comperimus, ordinatam Z ceterarum omnium *Maximam* eſſe non poſſe, niſi ſimul ſit illarum omnium *Maxima*, quae in ſectione per aequationem $dZ = qdu$ determinata continentur, & niſi praeterea ordinatae omnes

hanc

hanc sectionem componentes sint totidem *Maxima* in sectionibus parallelis homologis. Pari ratiocinatione quantitas Z nequit esse *Minima*, quin sit itidem *Minima* in sectione, quae *Minima* omnia complectitur. Ex hoc porro licet colligere, valores ipsarum t & u ex aequationibus $p = 0$, $q = 0$ deductos, & in quantitatibus A, & $C - \frac{B^2}{A}$ substitutos, ordinatae Z valorem *Maximum* inducere, ubi A fuerit negativa, & $C < \frac{B^2}{A}$, hoc est $CA > B^2$; & contra ordinatae Z per illam substitutionem valorem *Minimum* induci, ubi fuerit A affirmativa, & $C > \frac{B^2}{A}$, vel $CA > B^2$; quae omnia cum generali theoria superius explicata usquequaque consentiunt.

11. Conditiones praedictae locum habent quando u spectatur primo constans, & t tanquam variabilis: at si contra variabilis accipiatur u & constans t, ad sequentes conditiones pervenietur: $C < 0$, & $AC > B^2$ pro *Maximo*: $C > 0$, & $AC > B^2$ pro *Minimo*; quod sane eodem redit. Ceterum methodus haec altera inveniendi *Maximorum Minimorumque* conditiones in functionibus duarum tantum variabilium, aeque accommodatur functionibus aliis magis complexis, estque praeterea magis analytica & directa quam methodus prior. Quamobrem non inutile erit eam hic generaliter evolvere.

12. Sint variabiles in functione Z contentae quot libuerit: ceteris habitis ut constantibus earum unam tantum ut variabilem reputo, & ex differentiatione aequationem pro *Maximo* aut *Minimo* deduco; tum sumto in hac ipsa hypothesi secundo differentiali, conditiones determino, quae functioni Z valorem *Maximum* vel *Minimum*, vel neutrum inducunt. Hac prima operatione absoluta substituo in functione Z vel in eius differentialibus valorem primae variabilis inventum, eodemque modo in variabili altera calculum instituo, & va-

& valorem huius secundae variabilis ex differentiatione profectum in functione Z substituo: deinde ad examen tertiae variabilis progredior, sicque porro eodem semper tenore. Sit t prima variabilis, quae spectari potest in Z, eritque $dZ = pdt$, $d^2Z = Adt^2$; ex quo $p = 0$, & $A > 0$ pro *Minimo*; $A < 0$ pro *Maximo*. Sint modo t & u ambae variabiles, orieturque $dZ = pdt + qdu$, quae aequatio ob $p = 0$ abit in $dZ = qdu$, unde profluit $d^2Z = (Bdt + Cdu)\,du$, sed ob $p = 0$ est etiam $dp = 0$, & consequenter $Adt + Bdu = 0$, seu $dt = -\frac{B\,du}{A}$, atque hic valor in aequatione praecedenti subrogatus eandem reddit $d^2Z\left(-\frac{B^2}{A} + C\right)du^2$. Erit igitur $q = 0$; & $-\frac{B^2}{A} + C > 0$ pro *Minimo*; $-\frac{B^2}{A} + C < 0$ pro *Maximo*; cumque alias sit A positiva pro *Minimo*, negativa pro *Maximo*, eadem semper pro utroque exurget conditio $AC > B^2$.

Si praeter duas praecedentes tertia quoque variabilis x consideranda veniat, tunc quaeritur ipsius dZ valor habita trium variabilium t, u, x ratione, oriturque $dZ = pdt + qdu + rdx$, quae aequatio ob $p = 0$, $q = 0$ transit in $dZ = rdx$. Quocirca habebitur secundum differentiale $d^2Z = (Ddt + Edu + Fdx)\,dx$; iam vero ex aequationibus $p = 0$, $q = 0$, vel $dp = 0$, $dq = 0$, hoc est $Adt + Bdu + Ddx = 0$, & $Bdt + Cdu + Edx = 0$ quaero valores ipsorum dt & du per dx expressos & invenio

$$dt = \frac{BE - CD}{AC - B^2}\,dx;\quad du = \frac{BD - AE}{AC - B^2}\,dx;$$

Hisque subrogatis in expressione d^2Z pervenio ad aequationem $d^2Z = \left(\frac{BE - CD}{AC - B^2}\,D + \frac{BD - AE}{AC - B^2}\,E + F\right)dx^2$. Hinc igitur consequitur pro *Maximo* vel *Minimo* haberi primo $r = 0$; deinde $\frac{BE - CD}{AC - B^2}\,D + \frac{BD - AE}{AC - B^2}\,E + F > 0$ pro *Minimo*.

& < 0

& $\lessdot 0$ pro *Maximo*: quocirca sublato denominatore $AC - B^2$, qui semper positivus est, orietur
$2BDE - CD^2 - AE^2 - FB^2 + ACF \gtrdot 0$ pro *Minimo*, & $\lessdot 0$ pro *Maximo*. Ducatur haec expressio in A, qui positivus est in primo casu, negativus in altero, & prodibit

$$2ABDE - ACD^2 - A^2E^2 - AB^2F + A^2CF \gtrdot 0$$

tam pro *Maximo* quam pro *Minimo*, idest

$$(CA - B^2)(FA - D^2) \gtrdot (AE - BD)^2.$$

Quantumvis magnus fuerit variabilium numerus, eadem semper methodo res conficietur.

Novam hanc theoriam Clarissimus De la Grange, a quo illam derivavimus, sequentibus illustrat exemplis.

EXEMPLUM I.

Sint globi perfecte elastici quotcunque in recta linea dispositi & a se mutuo seiuncti; incurrat primus velocitate data c *in secundum quiescentem, secundus acquisita velocitate incurrat in tertium, hic in quartum, atque ita deinceps ad postremum usque; datis iam primi & ultimi massis quaeruntur massae omnium intermediorum ad hoc, ut postremus velocitatem omnium maximam ex impactu acquirat.*

Sit primi massa a, & postremi b, sintque t, u, x, y &c. massae intermediae incognitae, ex notis impactus legibus velocitas, quam primus globus a alteri t communicat, invenitur $= \frac{2ac}{a+t}$; velocitas, quam hic secundus imprimit tertio u, detegitur $= \frac{2act}{(a+t)(t+u)}$; velocitas quarti x ex impactu tertii prodit $= \frac{2actu}{(a+t)(t+u)(u+x)}$; sicque porro de ceteris. Quamobrem velocitas ultimi b exprimetur per

$$\frac{2\,catuxy \;\ldots\ldots\; b}{(a+t)(t+u)(u+x)(x+y)\;\ldots\ldots},$$

quae quantitas *Maxima* sit oportet. Eam pono $= Z$, & sumtis

tis utrinque logarithmis reperio $l\,2ca + lt + lu + lx + ly +$ &c. $- l(a+t) - l(t+u) - l(u+x) - l(x+y) -$ &c. $= l\,Z$, unde oritur per differentiationem

$$\frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \text{\&c.} - \frac{dt}{a+t} - \frac{dt+du}{t+u} - \frac{du+dx}{u+x} - \frac{dx+dy}{x+y} - \text{\&c.} = \frac{dZ}{Z},$$

collectisque terminis eodem differentiali affectis, iisque ad eundem denominatorem redactis invenitur

$$dZ = \frac{Z(au-t^2)\,dt}{t(a+t)(t+u)} + \frac{Z(tx-u^2)\,du}{u(t+u)(u+x)} + \frac{Z(uy-x^2)\,dx}{x(u+x)(x+y)} + \text{\&c.}$$

Hisce peractis habemus pro *Maximo Minimove* aequationes sequentes $au = t^2$; $tx = u^2$; $uy = x^2$; &c. quae praebent analogias $a:t::t:u::u:x::x:y$ &c., videlicet $\div\, a:t:u:x:y:\ldots.\,b$, ex quo pronum est colligere, massas omnes globorum progressionem geometricam constituere binis extremis a & b circumscriptam. Ut nunc criterium supra expositum usurpantes *Maximum* a *Minimo* internoscamus, fiat compendii gratia

$$\frac{Z}{t(a+t)(t+u)} = \alpha;\ \frac{Z}{u(t+u)(u+x)} = \beta;\ \frac{Z}{x(u+x)(x+y)} = \gamma \text{ \&c.}$$

Igitur comparatione instituta cum aequatione §. 2. invenietur $p = \alpha(au - t^2)$; $q = \beta(tx - u^2)$; $r = \gamma(uy - x^2)$; &c. : ac propterea $dp = (au - t^2)\,d\alpha + \alpha(a\,du - 2t\,dt)$; $dq = (tx - u^2)\,d\beta + \beta(x\,dt + t\,dx - 2u\,du)$; $dr = (uy - x^2)\,d\gamma + \gamma(y\,du + u\,dy - 2x\,dx)$; &c. Cum autem termini a, t, u, x, y &c. sint continue proportionales vocata $1 : m$ ratione constanti antecedentis cuiuslibet ad consequentem suum, inveniemus $t = ma$, $u = m^2 a$, $x = m^3 a$, $y = m^4 a$ &c.; praeterea $\beta = \frac{\alpha}{m^3}$, $\gamma = \frac{\alpha}{m^6}$ &c.; qui porro valores in praecedentibus expressionibus subrogati dant

LIIII $dp =$

$$dp = \alpha a(du - 2m\,dt)$$

$$dq = \alpha a\left(dt - \frac{2du}{m} + \frac{dx}{m^2}\right)$$

$$dr = \alpha a\left(\frac{du}{m^2} - \frac{2dx}{m^3} + \frac{dy}{m^4}\right);$$

atque ita deinceps. Erit igitur per ſupra demonſtrata

$$A = -2m\alpha a;\ B = \alpha a;\ C = -\frac{2\alpha a}{m};\ D = 0;\ E = \frac{\alpha a}{m^2};$$

$$F = -\frac{2\alpha a}{m^3};\ G = 0;\ H = 0;\ I = \frac{\alpha a}{m^4};\ \&c.$$

Hinc autem ſtatim apparet A negativam eſſe, & conſequenter ſi ceterae conditiones impleantur quantitatem $\frac{2catuxy\ldots b}{(a+t)(t+u)(u+x)(x+y)\ldots}$, ſeu celeritatem globo ultimo impreſſam *Maximam* eſſe. Iam vero $AC = 4\alpha^2 a^2$, & $B^2 = \alpha^2 a^2$ quocirca invenitur I. $AC > B^2$.

Tum $AC - B^2 = 3\alpha^2 a^2$; $FA - D^2 = \frac{4\alpha^2 a^2}{m^2}$; $EA - BD = -\frac{2\alpha^2 a^2}{m}$;

$(AC - B^2)(FA - D^2) = \frac{12\alpha^4 a^4}{m^2}$; & $(EA - BD)^2 = \frac{4\alpha^4 a^4}{m^2}$;

atque inde oritur II. $(AC - B^2)(FA - D^2) > (EA - BD)^2$. Si bini tantum ſint interpoſiti globi, primam duntaxat harum conditionum attendere ſufficiet; ſi tres fuerint interiecti globi, altera quoque conditio erit attendenda; ſicque pro variabilium numero conditionum pariter augebitur multitudo. Ceterum ſi labore improbo calculus longius protrahatur invenientur in hoc problemate conditiones omnes adamuſſim impletae, ita ut tuto liceat pronunciare, in globorum continuo proportionalium ſerie quacunque, velocitatem ultimo impreſſam per interpoſitorum actionem eſſe omnium poſſibilium *Maximam*.

Problema hoc ab Ugenio primum, poſtea a Geometris aliis tractatum nullis certis determinationibus regebatur, quas ta-

men

men hic necessarias invenimus ad *Maximi* aut *Minimi* existentiam, & distinctionem evincendam.

EXEMPLUM II.

Sit generalis aequatio superficierum secundi ordinis

$$z^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 - ex - fy;$$

& inveniendum proponatur superficiei punctum, in quo ordinata z *evadit omnium* Maxima, *aut* Minima.

Sumto aequationis differentiali detegitur

$$2zdz = (2ax + 2by - e)dx + (2bx + 2cy - f)dy;$$

indeque habentur aequationes binae sequentes:

$$2ax + 2by - e = 0; \; 2cy + 2bx - f = 0,$$

quae praebent $x = \frac{ec - bf}{2(ac - b^2)}$; $y = \frac{af - eb}{2(ac - b^2)}$. Sumo differentiale secundum, & ob $dz = 0$, invenio

$$2zd^2z = 2adx^2 + 4bdxdy + 2cdy^2.$$

Iam vero ut ordinata z omnium *Maxima* sit, quantitates a & c ambae negativae sint oportet; & contra affirmativae ut sit *Minima*. At si existente licet hac conditione deesset conditio altera nimirum $ca > bb$, valores inventi x & y in aequatione superficiei substituti ordinatam z haudquaquam *Maximam* vel *Minimam* redderent: Et sane Auctor noster in *Appendice Introductionis ad Analysim Infinitorum Tom.* 2. ex aliis principiis dilucide ostendit, ubi ca non est $> b^2$, superficiem propositam in infinitum extendi, & asymptoto conica donari. Id quod omnem respuit *Maximorum Minimorumve* conceptum.

13. Hinc luculenter apparet, vulgarem *Maximorum*, ac *Minimorum* methodum, per quam in quaestione plures variabiles involvente singulae seorsim spectantur, & indivisa omnium consideratio negligitur, pluribus saepe incommodis erroribusque laborare. Et re quidem vera in Exemplo praecedenti si respicimus solam x tanquam variabilem, invenimus differentiale primum $2\left(ax + by - \frac{e}{2}\right)dx$, & secundum

2a

$2adx^2$; pariter sola y variante habetur differentiale primum $2\left(cy+bx-\frac{f}{2}\right)dy$, & secundum $2cdy^2$. Bina haec prima differentialia nihilo aequata easdem praebent aequationes, quas praec. §. invenimus; & bina differentialia secunda indicant ordinatae z valorem *Maximum* aut *Minimum*, quotiescunque ambae a & c negativae, vel affirmativae fuerint; quod sane criterium deficiente conditione altera $ca > bb$ mancum ac mendosum esse iam demonstravimus.

ADNOT. ad CAP. XV. PART. II.

IN hoc Capite, quod Bernoullianam regulam de inveniendo fractionis indeterminatae $\frac{0}{0}$ valore complectitur, nulla fit ab Auctore mentio casus cuiusdam memorabilis, in quo regula ipsa deficere videtur, quando scilicet repetitis in infinitum differentiationibus, in eandem semper expressionem $\frac{0}{0}$ indeterminatam incurritur. Exemplum habemus in formula $\frac{1+x}{1:l(1+x)}$, quae ubi $x=-1$ abit in $0.l0$, seu $l0=-\infty=-\frac{1}{0}$, transit in $-\frac{0}{0}$, vel $\frac{0}{0}$. Captis enim differentialibus numeratoris ac denominatoris praedictae formulae $\frac{1+x}{1:l(1+x)}$ prodit $\frac{d(1+x)}{d[1:l(1+x)]}=-(1+x)[l(1+x)]^2=-0.\infty^2$, rursusque $-(1+x)[l(1+x)]^2$ converso in $\frac{-(1+x)}{1:[l(1+x)]^2}$ habebitur

$d[-$

$\frac{d[-(1+x)]}{d[1:(l(1+x))^2]} = \frac{(1+x)[l(1+x)]^3}{2} = -\frac{0.\infty^3}{2}$; & sic deinceps in infinitum, prodeunte nimirum semper valore indeterminato.

Hunc itaque scopulum declinabimus, expressionem $0\,l\,0$ specie tenus indeterminatam, re tamen ipsa determinatam, hoc est nihilo aequalem esse ostendendo; quod ita perficimus: pono $0\,l\,0 = x = x\,l\,e = l\,e^x$ (sumto nimirum e pro logarithmorum hyperbolicorum basi). Igitur $l\,0^0 = l\,e^x$; factoque regressu a logarithmis ad numeros erit $0^0 = e^x$. Est autem ut constat $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} +$ &c. Ergo $0^0 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} +$ &c. Iam vero $0^0 = 1$; nam $0^0 = (a-a)^{n-n} = \frac{(a-a)^n}{(a-a)^n} = 1$.

Itaque $1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} +$ &c., cui aequationi satisfieri nullo modo potest, nisi fuerit $x = 0$. Ex quo consequitur, quantitatem $0\,l\,0$ nihilo aequalem esse. Sicque pariter licebit ostendere productum ex infinitesima qualibet quantitate ducta in logarithmum alterius cuiuslibet infinitesimae non aliud esse nisi infinitesimum (a).

Si cui haec demonstratio de quantitate $0^0 = 1$ non arridet hic sequentem subrogare poterit ratiocinationem: Sit ω magnitudo infinitesima, pariterque λ infinitesima; aio fore $\omega^\lambda = 1 + z$, existente z quantitate infinite parva ordinis cuiusdam indeterminabilis. Nam nequit esse $\omega^\lambda = 1$, secus foret $\omega = 1$ quod est absurdum: rursus nequit esse $\omega^\lambda = 1 + a$ (sumta a pro quantitate finita affirmativa); secus esset $\omega = (1+a)^{\frac{1}{\lambda}} =$ infinito altissimi ordinis, quod pariter absurdum

(a) *De mirifica indole quantitatum* $1\,0, 1\,\infty$, *&c. V. Cl.* G. FONTANAE Disquisitiones Phisico-Mathematicas, *Disq. XIII.* de infinito logarithmico.

dum immane eſt: demum nequit eſſe $\omega^{\lambda} = 1 - a$ (exiſtente $a < 1$); ſecus eſſet $\omega = (1-a)^{\frac{1}{\lambda}}$, nimirum aequalis legitimae fractioni, puta $\frac{f}{f+g}$ ad infinitam poteſtatem evectae, hoc eſt

$$\omega = \left(\frac{f}{f+g}\right)^n = \frac{f^n}{f^n + \frac{nf^n g}{f} + \frac{n^2 f^n g^2}{2f^2} + \frac{n^3 f^n g^3}{2.3 f^3} + \&c.}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{ng}{f} + \frac{n^2 g^2}{2f^2} + \frac{n^3 g^3}{2.3f^3} + \frac{n^4 g^4}{2.3.4 f^4} + \&c.}$$

quae evidenter quantitas eſt infinite parva ordinis altiſſimi; & dividendo per ω haberetur unitas aequalis magnitudini infinite parvae altiſſimi ordinis per infiniteſimam primi ordinis diviſae, hoc eſt aequalis quotienti ſemper infiniteſimo, quod hypotheſi repugnat. Igitur eſt $\omega^{\lambda} = 1 + z$, & z nihil aliud eſſe poteſt quam infinite parva magnitudo. Quocirca ω^{λ}, & conſequenter 0^0 non differt ab unitate niſi magnitudine infinite parva, ſeu evaneſcente, quae proinde tuto negligitur

Si ex aequationibus $0^0 = 1^0 = a^0$ quiſpiam colligeret facto regreſſu a numeris ad logarithmos fore $0\,l\,0 = 0\,l\,1 = 0\,l\,a$, & diviſione per 0 facta eſſe etiam $l\,0 = l\,1 = l\,a$, nimirum infinitum negativum aequari finito, atque adeo nihilo, is ſemetipſum captioſa ſubtilitate illaquearet.

At quis concederet quantitatem quamlibet datam dividi poſſe per abſolutum nihilum, tuncque praeſertim, cum dividendum ipſum nihilum eſt abſolutum, praebetque quantitatem $\frac{0}{0}$, magnitudinem ſcilicet ita indeterminatam & vagam, ut nullum non referat valorem? Figmenta haec ſunt intellectus noſtri, quae niſi circumſpecto maturoque iudicio uſurpentur, atque intra legitimos veri rectique cancellos coerceantur, inextricabiles hallucinationes progignunt.

IN-